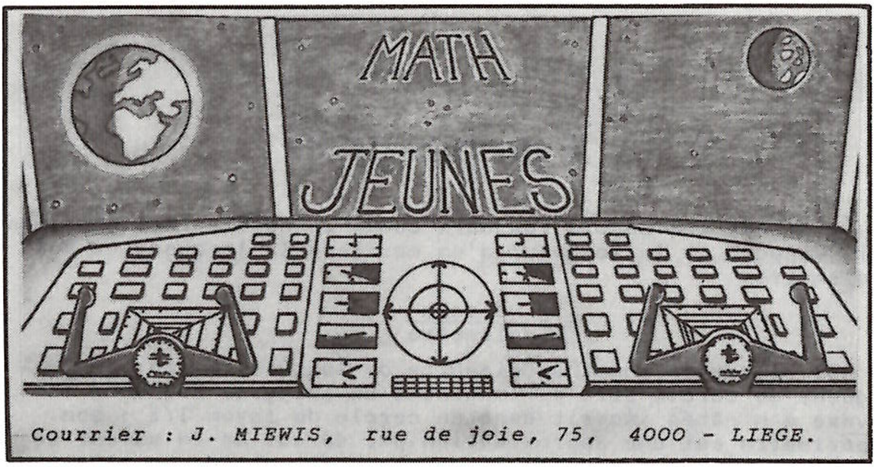


En-tête de Claude Mella
Collège Jean XXIII W.St.Pierre

CHERS AMIS,

Ce numéro de MATH-JEUNES est le dernier de votre abonnement pour l'année scolaire 1979-80. Vous voilà en effet presque en vacances. Nous vous les souhaitons excellentes, distrayantes et enrichissantes.

Nous espérons vivement que votre petit journal vous a plu et que vous désirerez vous abonner à nouveau l'année prochaine. Dès le début de septembre faites auprès de votre professeur des demandes d'abonnements. Et si, mais cela nous étonnerait, celui-ci vous faisait grise mine, vous pouvez nous écrire directement. Mais pour des raisons d'organisation nous préférons dans la mesure du possible envoyer des abonnements groupés.

Nous aimerions aussi avoir vos avis, vos désirs, vos critiques pour que votre journal soit l'année prochaine encore plus conforme à ce que vous en attendez.

Et pourquoi n'envisageriez-vous pas d'y participer plus activement ? Nous avons reçu de l'un ou l'autre d'entre vous un article à faire paraître, d'autres, un peu plus nombreux, nous ont envoyé des réponses aux petits problèmes, mais nous aimerions beaucoup voir s'intensifier la participation des jeunes à leur journal.

N° 5 Mai-Juin 1980

A propos de PI

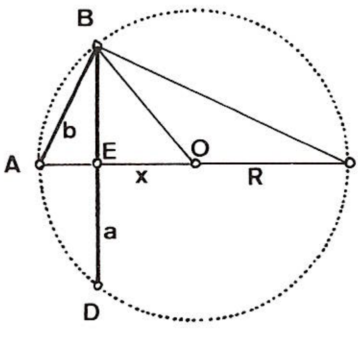
π est défini depuis toujours comme le nombre réel exprimant le rapport de la longueur d'un cercle à la longueur de son diamètre.

$$\pi = \frac{\text{cercle}}{\text{diamètre}}$$

Si un cercle admet un diamètre de longueur unité, la longueur du cercle sera π. Imaginons un polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1/2 : son périmètre est une approximation par défaut de la valeur de π d'autant meilleure que le nombre n est grand. Le plus simple des polygones réguliers convexes inscrits est sans conteste l'hexagone ; facile à construire, la longueur de son côté vaut le rayon, et son périmètre 6 fois le rayon.

Doublons le nombre de côtés. Le périmètre du dodécagone sera une meilleure approximation de π que celle fournie par l'hexagone. Doublons à nouveau ... Ainsi l'idée d'une méthode itérative apparait. Cette idée, proposée il y a 21 siècles par le géomètre de Syracuse ARCHIMEDE (287 - 212 avant J.C.) va nous servir de support à un algorithme de recherche de π.

Le premier problème est de trouver un lien simple entre le côté a d'un polygone à n côtés et le côté b d'un polygone à 2n côtés. (Tous deux inscrits et convexes bien sûr!). Le problème revient géométriquement à calculer la corde d'un arc moitié d'un arc donné.



Soit $a = |BD|$, $x = |EO|$,

Nous cherchons $b = |AB|$

$$b^2 = 2R(R - x)$$

Il s'agit du théorème de la hauteur appliqué au triangle rectangle de sommets A,B et C.

$$x^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Il s'agit cette fois du théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle de sommets B,E et O.

De ces deux relations, on déduit :

$$b = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - a^2}\right)}$$

Pour $R = \frac{1}{2}$, cette formule générale devient :

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - a^2}\right)}$$

Ainsi après une première approximation de π par le calcul du périmètre de l'hexagone :

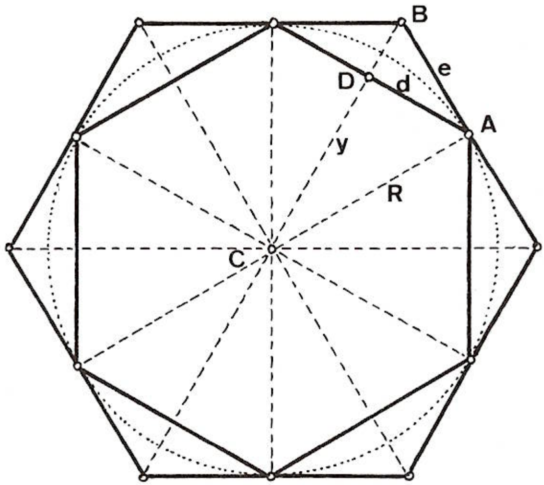
$$a = 0,5 \qquad P = 6a = 3$$

on peut obtenir une meilleure approximation par le calcul du périmètre du dodécagone :

$$a = 0,5 \qquad b = 0,258819 \qquad P = 12b = 3,105829 \ .$$

L'étude du polygone de 24 côtés donne :

$$a = 0,258819 \qquad b = 0,130526 \qquad P = 24b = 3,132629 \ .$$



Une approximation par excès de la valeur de π peut être obtenue en considérant le périmètre des polygones réguliers convexes circonscrits à ce même cercle de rayon 1/2. Nous allons établir le lien entre le côté a d'un polygone inscrit à n côtés et le côté a' du polygone circonscrit à n côtés. Nous posons $a = 2d$ et $a' = 2e$. Les triangles de sommets A,B et C et de sommets D,A et C sont semblables, aussi :

$$\frac{e}{d} = \frac{R}{y}$$

et $y^2 = R^2 - d^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de sommets D,A et C).

On déduit :

$$a' = \frac{2Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \quad \text{et si } R = \frac{1}{2}, \quad a' = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Pour l'hexagone circonscrit, on trouve :

$a = 0{,}5$ $a' = 0{,}577350$ $P' = 6a' = 3{,}464102$

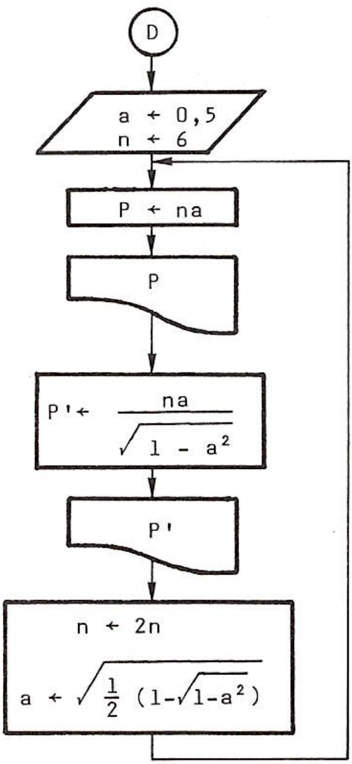
Pour le dodécagone circonscrit, on trouve :

$a = 0{,}258819$ $a' = 0{,}267949$ $P' = 12a' = 3{,}215390$

Pour le polygone de 24 côtés, on trouve :

$a = 0{,}130526$ $a' = 0{,}131652$ $P' = 24a' = 3{,}159660$

Un organigramme proposé :



Un programme proposé : (HP33)

00	6	6
01	23 1	STO 1
02	73	.
03	5	5
04	23 2	STO 2
05	24 1	RCL 1
06	61	x
07	74	R/S
08	24 2	RCL 2
09	31	ENTER
10	15 0	x^2
11	32	CHS
12	1	1
13	51	+
14	14 3	$\sqrt{x}$
15	23 3	STO 3
16	71	:
17	24 1	RCL 1
18	61	x
19	74	R/S
20	2	2
21	23 61 1	STO x 1
22	24 3	RCL 3
23	32	CHS
24	1	1
25	51	+
26	2	2
27	71	:
28	14 3	$\sqrt{x}$
29	23 2	STO 2
30	13 05	GTO 05

Malgré la simplicité de l'idée proposée, et malgré le respect dû à ce grand Monsieur qu'était ARCHIMEDE, vos petites machines n'accepteront pas de vous donner plus de 4 ou 5 décimales exactes. Pourquoi ?

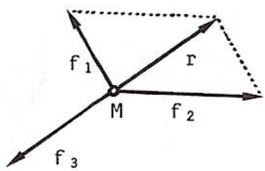
Flèches et vecteurs

La plupart des grandeurs physiques peuvent être classées suivant le critère : un seul nombre réel est nécessaire et suffisant pour déterminer la grandeur, ou : plusieurs nombres (ou d'autres éléments) sont nécessaires. Ainsi, les températures, pressions, masses sont valablement caractérisées par la connaissance d'un réel représentant l'intensité du phénomène. On les appelle : *grandeurs scalaires* . Par contre, les forces, vitesses, positions se déterminent par plusieurs éléments : intensité du phénomène, direction,... Ces dernières notions ont donné naissance au terme de *grandeurs vectorielles*.

La représentation graphique la plus classique est une flèche. Elle indique la direction, le sens et le point d'application ; et moyennant la définition d'une "flèche unité", la "taille" de la flèche est liée à l'intensité du phénomène.

Déjà GALILEE (1564-1642) savait additionner ces flèches dans le cas où elles sont parallèles. C'est dans une oeuvre posthume du français PIERRE VARIGNON (1654-1722) qu'est exposée la méthode générale d'addition des flèches : la méthode du parallélogramme. Cette méthode purement graphique permet de prévoir un résultat physique.

Ainsi imaginons le point matériel M sur lequel agissent les 2 forces représentables par f_1 et f_2. L'immobilité du point M est obtenue par la force f_3 qui est l'opposée à la résultante r des forces f_1 et f_2. Ainsi un raisonnement graphique sur des flèches est lié à un comportement physique de forces.



Il en va de même pour prévoir le mouvement d'un mobile soumis à plusieurs accélérations, pour additionner certaines vitesses,... Ainsi pour différents concepts physiques, une même représentation de l'addition convient.

Pour ce qui concerne la multiplication, on en distingue de plusieurs types en physique. La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m, animé d'une vitesse v est la grandeur vectorielle mv : c'est le produit d'un scalaire et d'une grandeur vectorielle. L'expression du travail fourni par une force f dont le point d'application subit un déplacement d est :

$$T = f \cdot d$$

la force est une grandeur vectorielle, le déplacement est une grandeur vectorielle qui a pour origine le point de départ du mouvement et pour extrémité son point d'arrivée ;

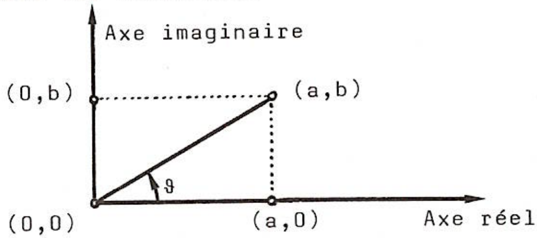
leur produit donne une grandeur scalaire : le travail. Cette opération sur deux vecteurs admettant comme résultat un scalaire a reçu le nom de produit scalaire.

Ainsi, les fondements du calcul vectoriel - addition de vecteurs, multiplication par un scalaire et produit scalaire - se rencontrent tout naturellement en physique. Pourtant de nos jours, le calcul vectoriel est souvent introduit comme un concept abstrait ayant peu de liens avec la physique. Cette formalisation est due aux recherches du mathématicien HAMILTON, aux conceptions théoriques de GRASSMANN et aux applications qu'en ont faites HEAVISIDE et GIBBS.

Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON est né le 4 août 1805 à Dublin. Orphelin très jeune, il fut éduqué par un oncle pasteur et passionné de langues étrangères. A treize ans, William pouvait se vanter d'avoir en moyenne appris une langue par an y compris des langues orientales. Il connaissait la géographie et l'arithmétique. A 17 ans il possédait le calcul intégral et était capable de calculer les éclipses. A cette époque, le Dr. BRINKLEY, président de la ROYAL IRISH ACADEMY disait de lui : "*Ce jeune homme NE SERA PAS, il EST le premier mathématicien de notre époque*". A 22 ans, il fut nommé professeur d'astronomie au TRINITY COLLEGE de Dublin où il était encore étudiant. Il enregistra peu de succès en astronomie, mais poursuivit la publication d'un traité d'optique qu'il avait commencé à l'âge de 17 ans. Cette théorie des rayons a remporté dès sa publication, alors que son auteur n'avait que 27 ans, un des succès les plus rapides et les plus éclatants que les annales de mathématiques aient jamais enregistrés. La théorie mathématique qu'il avait construite le mena à prévoir certains comportements de rayons lors de la réfraction dans les cristaux. Ses prédictions furent vérifiées après la publication de ses écrits et suscitèrent une admiration sans borne des physiciens de l'époque.

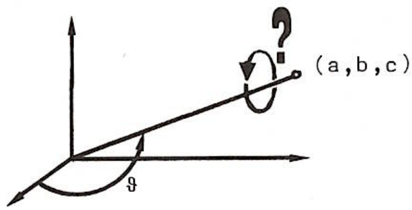
C'est en 1835 qu'HAMILTON publia ses premiers travaux sur les espaces vectoriels théoriques avec notamment ses résultats sur les " quaternions ".

On avait dès le 16e siècle (NICCOLO TARTAGLIA (1506-1559) entre autres) inventé l'étrange valeur $\sqrt{-1}$ notée i permettant de construire certaines solutions d'équations non résolubles dans les réels. Ces nouveaux êtres appellés *complexes* ou *imaginaires* au départ se comportaient " raisonnablement " en mathématique c'est-à-dire qu'ils se laissaient additionner et multiplier entre eux par des méthodes semblables à celles utilisées pour les réels. Les nouveaux êtres s'écrivaient $a + bi$ où a et b sont des réels et $i^2 = -1$. Le mathématicien allemand CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) en les écrivant sous forme de couples (a,b) arriva à les représenter dans le plan ; il visualisait leur somme et leur produit et constatait une certaine " ressemblance " avec le comportement des vecteurs de la physique. Les complexes étaient mêmes liés à l'idée de rotation dans le plan. La multiplication de deux complexes était liée à la composition de deux rotations de même centre dans le plan. Remarquons que dans le plan, l'image d'un point obtenue par la composition de deux rotations de même centre ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont exécutées les rotations.



$$\text{tg } \vartheta = \frac{b}{a}$$

L'idée d'HAMILTON fut la suivante : puisque un couple (un complexe) définit une rotation dans le plan, il se peut qu'un triple définisse une rotation dans l'espace, le couple étant lié aux vecteurs du plan, le triple aux vecteurs spatiaux. De nombreuses difficultés surgirent et rendirent le problème insoluble. Intuitivement, on peut dire que le triple (a,b,c) détermine l'image du premier axe après une rotation ϑ, mais que le plan formé des deux autres axes est encore libre de " tourner " autour de l'axe (a,b,c). Un autre problème était inquiétant : composer deux rotations de même centre dans l'espace donne en général deux résultats distincts suivant l'ordre dans lequel sont composées ces rotations.



HAMILTON imagina alors de représenter les rotations spatiales par des quadruples (a,b,c,d). En écrivant ses quadruples sous la forme

$$a + bi + cj + dk \quad \text{avec} \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

il obtint ses " *quaternions* " généralisation des complexes.

On raconte que c'est lors d'une promenade le long du canal qu'il découvrit la généralisation cherchée. Tout heureux, il grava le résultat sur les pierres d'un pont en rentrant chez lui. La multiplication de ses quaternions n'était pas commutative et pouvait représenter la composition de deux rotations spatiales : donnant deux réponses différentes suivant l'ordre dans lequel la composition était effectuée.

Ainsi des structures non commutatives existaient naturellement en physique et n'étaient pas moins dignes d'intérêt. Une étude systématique des propriétés des structures devenait nécessaire et HAMILTON s'y employa avec succès. Il formula les propriétés nécessaires au développement du calcul vectoriel.

Les dernières années de la vie de HAMILTON furent consacrées à introduire la notion de quaternions dans la physique. Avec les méthodes de rigueur que développa GRASSMANN, les quaternions sont tombés en désuétude et aujourd'hui, HAMILTON est plus connu pour ses résultats d'optique et de mécanique que pour ses quaternions. Pourtant ceux-ci furent responsables de la réflexion au sujet des bases du calcul vectoriel. C'est d'ailleurs à HAMILTON que l'on doit le nom de vecteur (1843). Il mourra le 2 septembre 1865, miné par la maladie. Une femme acariâtre, le peu de succès de ses quaternions l'ayant poussé à la boisson...

A cette époque professait à STETTIN (actuellement en Pologne), l'allemand HERMANN GUNTHER GRASSMANN (1809 - 1877). Impressionné par la puissance de la symbolique en algèbre, il voulait créer un formalisme puis retrouver les propriétés physiques a posteriori. Le grand avantage de cette approche abstraite est de dégager des méthodes et des résultats non liés à un choix d'origine et de coordonnées et de découvrir ainsi les propriétés intrinsèques de ce qu'il baptisait un espace vectoriel. Il définissait son espace par la nomenclature des propriétés des opérations de l'espace. Un vecteur était simplement défini comme un élément de l'espace. Dans son désir de ne pas favoriser un quelconque système de coordonnées, il s'intéressait beaucoup au concept de *base* d'un espace. Soit un ensemble de vecteurs de l'espace ; cet ensemble devra posséder le moins d'éléments possibles, et pourtant, on devra être capable par de judicieuses combinaisons de ces éléments, de retrouver tous les vecteurs de l'espace. GRASSMANN montra que pour un espace donné, toutes les bases avaient le même nombre d'éléments : c'était le concept de *dimension* d'un espace.

En calquant la définition de *norme* d'un vecteur sur celle du module des nombres complexes, on pouvait mesurer l'espace. On retrouve ainsi les théorèmes généraux de géométrie métrique : le théorème de PYTHAGORE notamment. Le mathématicien russe HERMANN MINKOWSKI (1864 - 1909) retrouvait l'inégalité triangulaire et l'allemand KARL SCHWARTZ (1843 - 1921) étudiait les valeurs absolues. Le physicien anglais OLIVER HEAVISIDE (1850 - 1925) et le chimiste américain JOSIAH GIBBS (1839 - 1903) prendront une part importante à l'utilisation dans les sciences de cette nouvelle théorie mathématique.

Le coin des problèmes

25 Avec 16 cartes ...

D'un jeu de cartes, extrayez les quatre as, les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Si je vous demande de disposer ces seize cartes en carré de manière que dans chaque bande horizontale, verticale et diagonale, on trouve, dans le désordre, un as, un roi, une dame et un valet, et en même temps un coeur, un carreau, un pique et un trèfle ... vous trouverez rapidement une solution.

Aussi la question est ailleurs : combien de tels carrés de cartes différents peut-on réaliser ?

26 Un peu de topologie.

A l'origine, la topologie est une géométrie particulière née de l'étude des "déformations continues" de certaines lignes et surfaces. Bien que très imprécise, cette définition va m'aider pour l'exposé de ce petit problème.

Je dis que deux dessins du plan sont équivalents si de légères déformations permettent de passer de l'un à l'autre. Par exemple, les majuscules A et R sont équivalentes en ce sens puisque je peux imaginer

En première approche, A et R sont équivalents car ces deux dessins sont constitués d'une courbe fermée d'où s'échappent - en deux points différents - deux petits bouts de ligne.

Dans l'ensemble {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A et R forment un couple isolé car aucune autre lettre ou chiffre ne leur est équivalent.

Quels sont les deux autres couples ? Il y a aussi un isolé, c'est-à-dire un dessin qui n'est équivalent à aucun autre, lequel ?

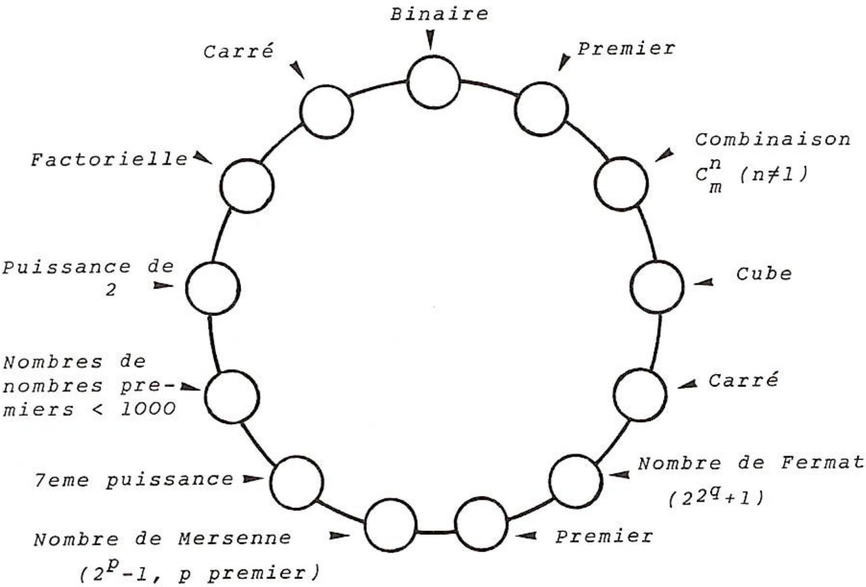
27 Les lois cachées.

Chacune de ces séries de 5 nombres obéit à une loi. Découvrez ce lien et suivant celui-ci, donnez-nous le sixième nombre de chaque série. Quelquefois, plusieurs lois sont possibles et donc plusieurs sixièmes termes.

5, 24, 123, 622, 3121, ...
2, 3, 4, 7, 6, ...
13, 17, 19, 23, 29, ...
5, 8, 13, 21, 34, ...
1, 3, 7, 15, 31, ...
13, 25, 37, 49, 511, ...
6, 8, 12, 14, 18, ...
11110, 1010, 132, 110, 50, ...

28 Un cercle de nombres.

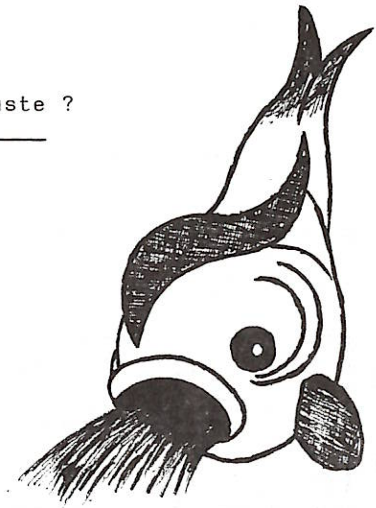
Chaque case contient un nombre de 3 chiffres. Lorsque 2 cases sont contiguës, les deux nombres qu'elles contiennent ont deux chiffres communs à la même place ; le troisième seul varie.



29 La chèvre.

Un paysan prudent avait attaché sa chèvre par deux chaînes de cinq mètres à deux piquets plantés à cinq mètres l'un de l'autre. Quelle est la surface de prairie que la malheureuse enchaînée pouvait brouter ?

30 Problème de robinets : problème antique ou vétuste ?



Quatre sources en présence :
l'une, en une journée,
emplit en totalité une conque;
en deux l'autre ;
et en trois journées l'autre ;
la quatrième en quatre.
En combien (de temps) la
rempliront-elles, ensemble ?

C'est le problème n° 17 de METRODOROS, auteur difficilement identifiable.

Je traduis le texte à partir de l'édition grecque donnée par Félix Buffière dans la collection "Budé". Suivant l'optique diurne des Méditerranéens, il faut, par journée, entendre un jour de douze heures. Le texte est en fait le poème n° 130 du livre XIV de l'Anthologie palatine.

Outre des problèmes de calcul (des fractions le plus souvent), ce livre contient aussi des oracles et des énigmes. (éclairant rapprochement !) En vrac : on y traite du nombre de disciples, mixtes - déjà -, de Pythagore ; de devinettes ; de renseignements sur la scansion du vers iambique ; après la cueillette des pommes - encore et toujours ce fruit défendu -, l'épineuse question de leur distribution ; un problème d'héritage ...

Sans que je veuille démontrer en cette page les carences des programmes scolaires, ce document illustre, à merveille me semble-t-il, tel ou tel aspect des realia de l'Antiquité. En effet, le morceau présenté pourrait être la description d'une pièce d'eau bien réelle. A défaut des fontaines anciennes qui n'ont pas subsisté - elles étaient pourtant nombreuses et, parmi elles, il devait y avoir d'authentiques oeuvres d'art -, pensons aux merveilleuses fontaines de la Roma actuelle.

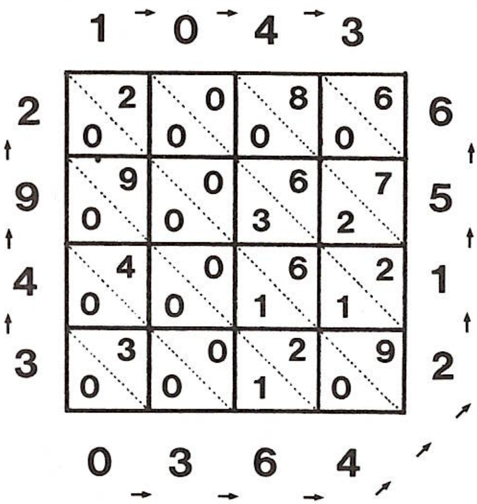
En conclusion, partagerez-vous l'avis de Monsieur Buffière: " *Difficiles ou simples, il se dégage de la plupart d'entre eux* (des problèmes) *tant de vie et d'allégresse qu'on se prend à envier les écoliers de l'antiquité : s'initier aux sciences en vers et sous l'aimable fantaisie des lettres, n'est-ce pas un luxe aujourd'hui perdu ?* "

Et cette conque, après combien de temps débordera-t-elle ?

(Texte et traduction du problème : Jean Masai)

Découvertes de vacances

A PROPOS D'UNE MULTIPLICATION ...



Voici l'algorithme hindou-arabe pour la multiplication de deux nombres.

Il s'agit du produit de 3492 par 1043.
Dans chaque petit carré se trouve le produit - TOUJOURS en 2 chiffres - du chiffre en indice de ligne multiplié par le chiffre en indice de colonne. On additionne suivant les diagonales - avec report dans la bande oblique de gauche s'il y a lieu -.

La solution est 3642156.

L'écossais JOHN NAPIER (1550-1617) s'est inspiré de cette méthode pour ses réglettes. Nous en reparlerons.

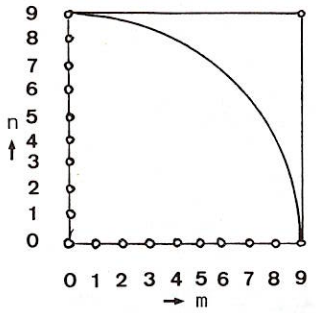
3492	1043	3492	1
6984	521	6984	1
13968	260		0
27936	130		0
55872	65	55872	1
111744	32		0
223488	16		0
446976	8		0
893952	4		0
1787904	2		0
3575808	1	+ 3575808	1
		3642156	

Ci-contre une méthode très simple pour multiplier.

Un des nombres (3492) est multiplié par 2 pendant que l'autre (1043) est divisé par 2 - on néglige le reste - Le premier nombre est recopié dans une troisième colonne lorsque la division est inexacte. La somme de cette troisième colonne est le produit.

Remarquez le nombre 10000010011, valeur binaire de 1043 !

PI AU «BOTTIN» ?



Si l'aire de ce carré est c^2, l'aire du quart de disque sera

$$\frac{\pi c^2}{4}$$

et $\pi = 4\ \dfrac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}}$

Imaginons un ensemble de couples (m,n) $0 \leqslant m,n \leqslant 9$ choisis au hasard. On peut admettre que

$$\frac{\text{Probabilité } (m,n) \in \text{quart de disque}}{\text{Probabilité } (m,n) \in \text{carré}}$$

est proche de $\dfrac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}}$

L'esprit humain produit difficilement des couples de nombres au hasard. Ouvrez un"bottin"où la page est bien remplie. Le"bottin",où le classement est alphabétique pour les noms, est une bonne approche de nombres au hasard pour les chiffres. Prenons les deux derniers chiffres des numéros de téléphone d'une page pour former nos couples au hasard ; et calculons :

$$4\ \frac{\text{nombre de couples appartenant au quart de cercle}}{\text{nombre de couples appartenant au carré}}$$

En général cette valeur est très proche de π.

QUEL JOUR DE LA SEMAINE ?

Jour: calculer le reste de la division du quantième par 7. $\to r_1$

Mois: un nombre "clé" est associé à chaque mois. $\to r_2$

jan.	fév.	mar.	avr.	mai	juin	jui.	aou.	sep.	oct.	nov.	déc.
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Année: (2 derniers chiffres) : calculer le reste de la division par 7 $\to r_3$. calculer le quotient de la division par 4, puis le reste de la division de ce quotient par 7 $\to r_4$

Bissextile: si la date est en janvier ou février d'une année bissextile, $r_5 = -1$, sinon $r_5 = 0$

Siècle: pour 1900, $r_6 = 0$, pour 1800, $r_6 = 2$

Solution: calculer le reste de la division de $(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6)$ par 7. Si ce reste est un, c'est un lundi, si le reste est 2, un mardi, etc...

Exemple : 6 juin 1944 : $r_1 = 6$, $r_2 = 6$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$, $r_5 = 0$, $r_6 = 0$, Total: 18, reste = 4 : 6 juin 1944 = jeudi.

25 août 1830 : $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 0$, $r_5 = 0$, $r_6 = 2$, total: 10, reste = 3 : 25 août 1830 = mercredi.

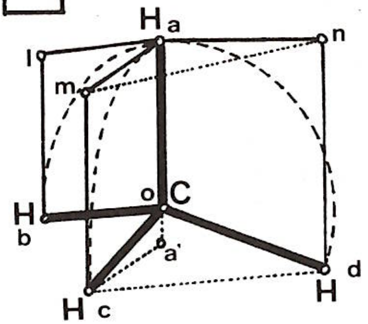
* ABEL : (NIELS HENRIK) MATHÉMATICIEN NORVÉGIEN
TRAVAUX FONDAMENTAUX SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET LES INTÉGRALES.

QUELQUES REPONSES...

R1 Dominique FLANDROIT, de l'I.P.E.P. de Mons, nous propose deux autres solutions :

SEND	9458	SEND	6054
ME	14	MORE	1720
MORE	1074	GOLD	9734
MONEY	10546	MONEY	17508

R11 Voici la solution de Pierre SAINT-MARD, 5eB à l'Athénée Royal de Virton :



On construit la sphère de centre O et de rayon unité. L'atome de carbone (C) est au centre et les atomes d'hydrogène (H) en a,b,c et d. Les angles aôb,aôc,aôd,bôc,bôd et côd sont égaux *(1)*.
On mène en a les tangentes aux arcs ab,ac et ad. On mène bl,cm et dn parallèlement à oa.
mndc est un rectangle, donc : $|mn| = |cd|$ *(2)*.
Dans le triangle rectangle oa'c, $|ca'|=|co|\sin c\hat{o}a' = \sin a\hat{o}c$.
Et comme $|ca'|=|ma|$, $|ma| = \sin a\hat{o}c$ *(3)*. De même, dans le triangle rectangle oa'd, on calcule $|da'|=|do| \sin a\hat{o}d$. On trouve : $|na| = \sin a\hat{o}c$ *(4)*. $m\hat{a}n = 120°$ *(5)*.

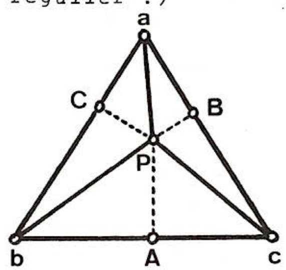
$|mn|^2=|ma|^2+|an|^2-2|ma||an|\cos m\hat{a}n = 3 - 3\cos^2 a\hat{o}c$ *(1,3,4,5)*

$|cd|^2=|co|^2+|od|^2-2|co||od|\cos c\hat{o}d = 2 - 2\cos a\hat{o}c$ *(1)*.

$3 - 3\cos^2 a\hat{o}c = 2 - 2\cos a\hat{o}c$ *(2)* => $\cos a\hat{o}c = -1/3$.

$$a\hat{o}c = 109° \; 28' \; 16''$$

(a,b,c,d sont les sommets d'un tétraèdre régulier .)



R14 Le monsieur ne sera pas aidé en trouvant réponse au problème :
en effet PA + PB + PC reste constant quand le point P parcourt l'intérieur du triangle. C'est ce que nous montre Joël De BOSSCHER de l'Athénée Royal de Mons. (4e L.M.).

Soit 2α la longueur de la base du triangle équilatéral a,b,c.

Surface du triangle a,b,P : α. PC
Surface du triangle b,c,P : α. PA
Surface du triangle a,c,P : α. PB

Surface du triangle a,b,c : α. (PA + PB + PC)

Ainsi, PA + PB + PC est constant et vaut la longueur de la hauteur du triangle équilatéral soit $\alpha\sqrt{3}$.

R16

TWENTY	123416
TWENTY	123416
TWENTY	123416
TEN	134
TEN	134
EIGHTY	370516

Nous ont fait parvenir cette solution : Christian PLASMAN, 4eScb, Lycée de Molenbeek, Anne NOEL, 2e année de Casteau, Joël De BOSSCHER, Anna-Maria CASTI, 3e moderne au Lycée Royal de Mons, Bruno DEMEY, 4eScb, Collège St Henri à Comines, Vinciane COLS, 4eLm, Véronique FLAGOTHIER, 4eSca au Collège St. Louis à Liège, Louisa ANZALONE, 5e économique à Mons, André GENIN, 3ed, Collège St André à Auvelais, Bruno DIVRY, 4eTTr à l'IETE de Rance, Pierre-Yves DEBLIQUY, 4eSca, Collège St Michel à Bruxelles, Philippe LESOIL, 1Aa, Collège d'Alzon à Bure et Pierre SAINT-MARD. Bravo !

R17

On pose $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = x$

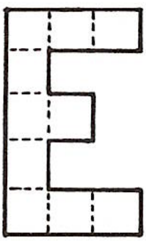
d'où $2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}} = x^2$

On constate que $x^2 - 2 = x$ donc $x^2 - x - 2 = 0$ qui a comme solution $x' = 2$ et $x'' = -1$. La seconde solution est à éliminer car le symbole $\sqrt{a}$ représente un nombre positif. Donc l'expression vaut 2.

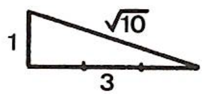
(Voir page 49 une relance de ce problème !)

R18

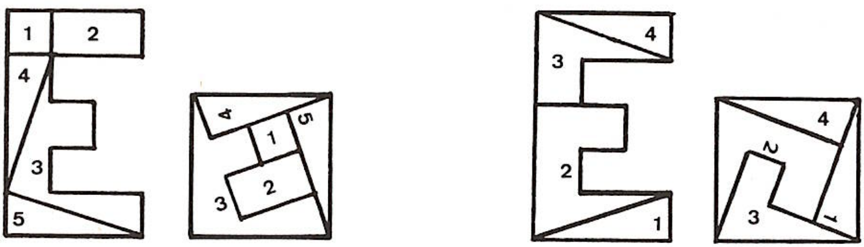
On doit former un carré dont la surface est 10, si le côté d'un petit carré vaut 1.



Ainsi, il faut créer, par découpage des segments dont la longueur est $\sqrt{10}$. Le théorème de Pythagore nous aide :



Un carré a quatre côtés ! il faudra donc deux découpes pour les créer.



Voici (probablement) les meilleures découpes : à gauche, les pièces sont déplacées, à droite, les pièces 3 et 4 furent retournées.

Solution correcte de Louis PELSENEER de Bruxelles, de Anne NOEL, de Cécile DENIS et Isabelle MILIS, 1er rénové à l'Institut de la Providence à Herve.