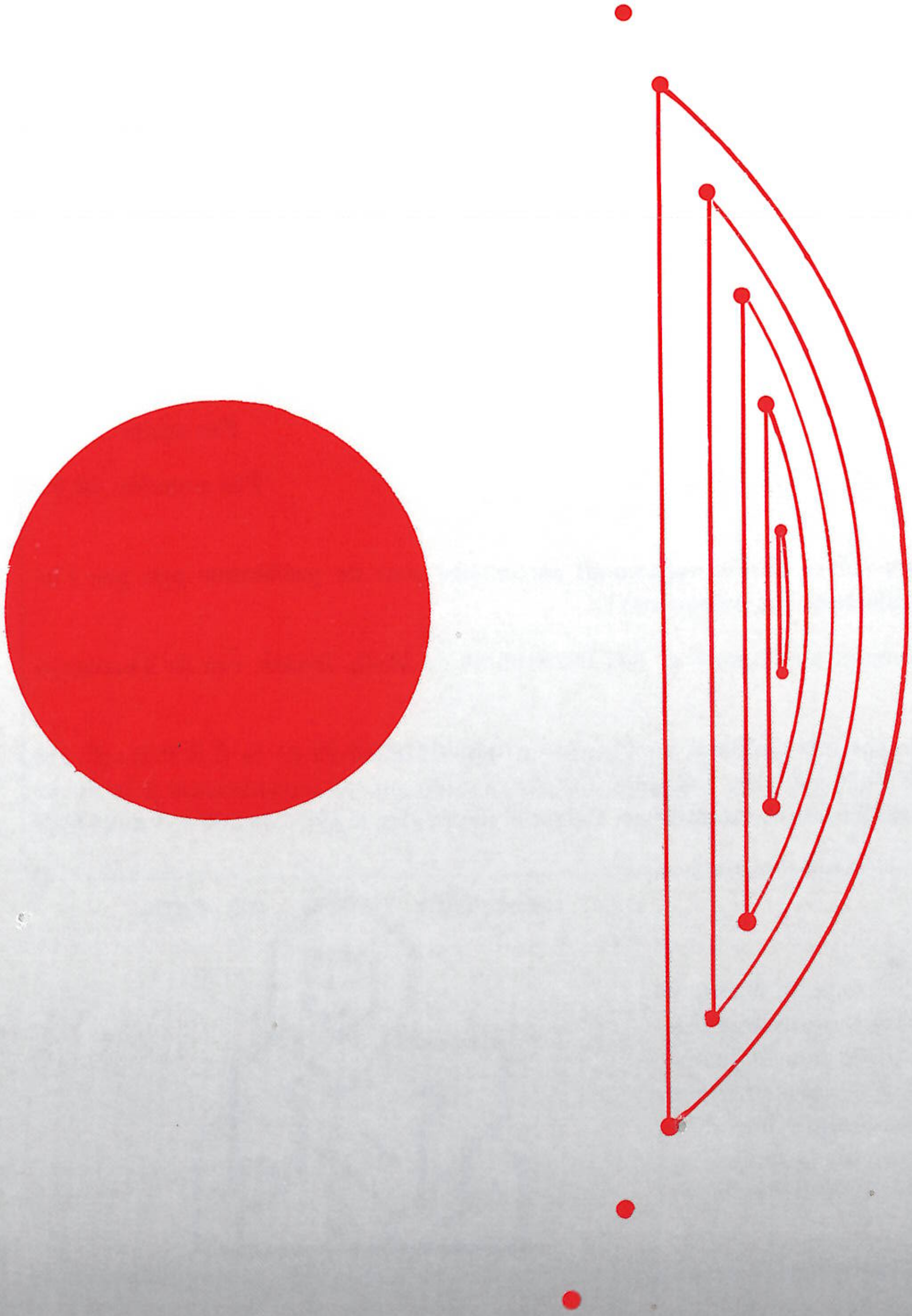
MATH-JEUNES



Périodique trimestriel - 12ème année
Décembre 1990 - Février 1991 - n° 50
Bureau de dépôt: Mouscron 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7061 CASTEAU.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
- Isolés: 120 FB

Etranger :

- Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
- Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

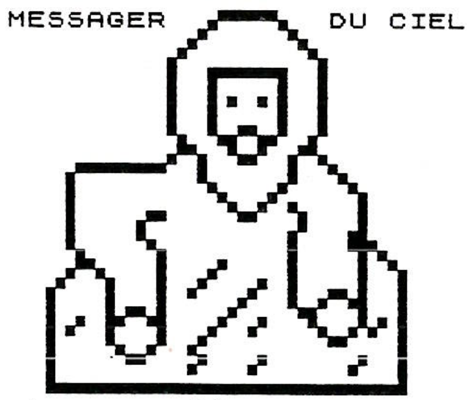
- Années complètes: 87-88, 88-89, 89-90 — Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 23, 24, 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35 — Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB)

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Le dessin du SITE.

Aujourd'hui, **LE SITE** nous présente un dessin dû à Yilmaz. Il a été réalisé sur micro-ordinateur ZX-Spectrum. Chaque ligne est réalisée par une instruction `PRINT AT X,Y,"..."`. Il faut calculer convenablement les valeurs de `X`, `Y` et compter le nombre de carrés noirs et blancs à placer sur la ligne.
LE SITE, 2A rue Mommaerts, 1080 Bruxelles.

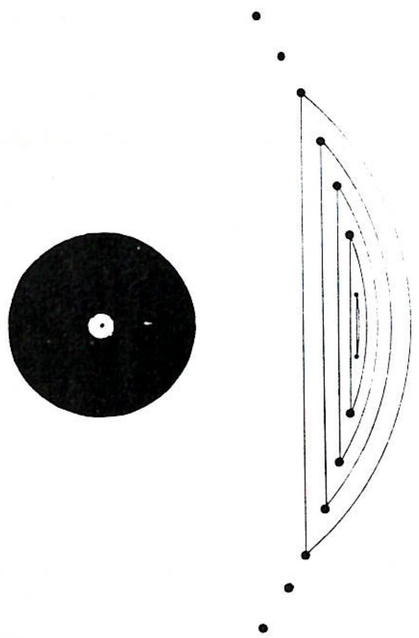


Si toi aussi tu as rédigé un programme graphique, envoie-nous ta réalisation, nous publierons les meilleurs dessins reçus.

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 50 Douzième année 1991

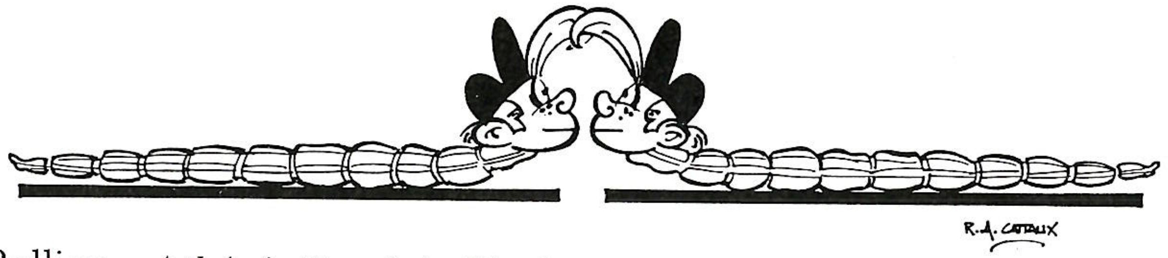
Math-Jeunes



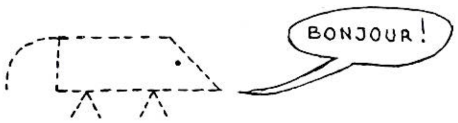
En couverture: Notre problème, posé en couverture de *Math-Jeunes* n 49 évolue petit à petit! Nous avons choisi cinq distances. Pour chaque distance L, nous avons dessiné *un* ensemble A de points à distance L de la droite et *un* ensemble B de points à distance L du cercle. Chaque fois, nous avons trouvé deux points communs à A et B ...donc deux points de la courbe cherchée. Pour une des distances L que nous avons choisies, dessine *l*'ensemble AA de *tous* les points à distance L de la droite et *l*'ensemble BB de *tous* les points à distance L du cercle. Trouves-tu ainsi des points supplémentaires de la courbe cherchée? Peux-tu justifier que cette courbe admet un axe de symétrie? Comprend-elle des points "très éloignés"?

Math-Jeunes n° 50, 22–23, 1991

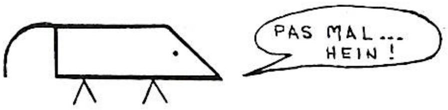
Petite mise au point à propos des isométries



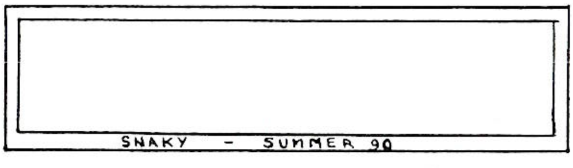
M. Ballieu, *Athénée Royal de Binche*



Je suis la souris Mychka; je suis née dans le plan, ce qui n'est pas toujours drôle: je me sens parfois raplapla... Normal me diras-tu: mon corps n'a même pas l'épaisseur de la feuille de papier de ton *Math-Jeunes* et la mine de ton crayon est trop grosse pour représenter ma silhouette. C'est pour cela que le gars qui me dessine a tracé des pointillés. Une chance...il m'a confié que cela lui faisait perdre du temps de tracer tous ces pointillés ! Alors, il te demande un petit effort d'imagination: il propose de me dessiner en trait plein. Moi...ça me va ! On me verra mieux dans *Math-Jeunes* !



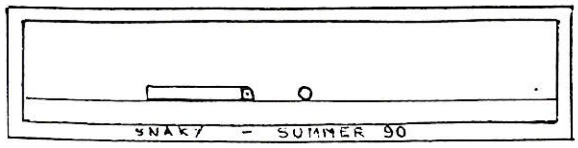
Je viens de recevoir des nouvelles de mon cousin Snaky qui habite Londres. Il m'envoie une photo de ses dernières vacances:



Tu le vois, dans son salon, à côté de son nouveau ballon de plage...?

Ah! Zut! J'oubliais... Tu n'as pas dû le remarquer, ni son ballon d'ailleurs. Snaky, il a encore moins de chance que moi: il est né sur une droite! Tu vas encore devoir faire preuve d'imagination...

Recommençons (avec l'imagination en plus): voici mon cousin Snaky et son nouveau ballon de plage:



C'est un tout petit serpent Snaky ! Pas venimeux pour un penny ! Et tout mince, tout mince, avec ça ! Ne l'oublie pas, toi qui vis dans l'espace à trois dimensions: Snaky n'a pas d'épaisseur; son ballon non plus d'ailleurs.

Dans sa lettre, il m'écrit qu'il a reçu la visite du PDG, et, qu'après cela, il lui est arrivé plein de trucs ! Le PDG ... ? Le Prince Des Géomètres, bien sûr !

Snaky se reposait dans son living-droite à côté de son ballon, lorsque ...

Tout **déplacé** sur sa droite, qu'il était...
Une autre fois...

Tout **retourné** sur sa droite, qu'il était...

Cela te rappelle sûrement quelque chose... Nous allons analyser ensemble ce qui s'est passé.

D'abord, remarquons ce qui est commun aux deux situations:

1. Pour toi, qui vis dans l'espace à trois dimensions, il y a eu **déplacement** de Snaky.

2. Tu n'as **pas vu** le mouvement, je veux dire, la **trajectoire** du mouvement, puisque, entretemps, la lumière s'est éteinte.

3. Ce n'est pas seulement Snaky qui a été déplacé dans l'espace, mais **tous les points de la droite** sur laquelle il vit **ont été déplacés**. En effet, regarde bien encore: le ballon de Snaky a bougé, lui aussi.

4. La **taille** de Snaky **n'a pas changé**. Les mesures sont restées les mêmes. On parle dès lors d'**isométrie** de la droite, du grec *ισον μετρον*, ce qui signifie **même mesure.**

Ensuite, constatons qu'il existe une différence fondamentale entre les deux situations:

1. Dans le premier cas,

   - avant: Snaky est **à gauche** de son ballon;
   - après: Snaky se trouve encore **à gauche** de son ballon.

   Cela s'appelle un **déplacement** de la droite; en fait, la droite glisse sur elle-même. Tout **déplacement** de la droite est une **translation**.

2. Dans le second cas,

   - avant: Snaky est **à gauche** de son ballon;
   - après: Snaky se trouve **à droite** de son ballon.

   On appelle cela un **retournement** de la droite. Tout **retournement** de la droite est une **symétrie centrée**.

Pour donner une définition plus ou moins rigoureuse des isométries de la droite, nous avons besoin de la notion de permutation et, plus spécialement ici, de la notion de permutation des points d'une droite.

Considère une droite d, vois-la comme un ensemble de points et imagine (depuis le début, on te demande d'avoir de l'imagination; c'est certainement acquis, maintenant !) et imagine donc que tu puisses "ôter" un à un les points de cette droite (tu verras plus tard que cela cause bien des ennuis de tenter d'énumérer un à un les points d'une droite !). Surtout, n'en perds pas: conserve-les bien dans un récipient suffisamment grand. Une fois que tu les as tous, ferme bien ton récipient car il ne s'agit pas d'en égarer. Secoue à volonté et puis, en en extrayant un à un les points, "reconstitue" une nouvelle droite, en prenant bien garde à mettre un et un seul point à chaque emplacement et à combler tous les trous.

En fait, tu viens ainsi d'opérer une **permutation** des points de la droite d. On dit aussi qu'il y a **bijection** entre les points de la première droite d que tu avais considérée et ceux de la "nouvelle" droite que tu as reconstituée:

> *Tout point (de la droite d) possède une et une seule image (dans la nouvelle version reconstituée) et tout point (de la nouvelle version) est image d'un et un seul point (de la droite d).*

Maintenant, nous pouvons énoncer:

Les **isométries** de la droite sont les permutations des points de la droite qui **conservent** strictement les **distances.**

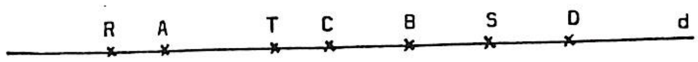
Les isométries de la droite se répartissent en **déplacements** et en **retournements.**

Tout **déplacement** de la droite est une **translation.**

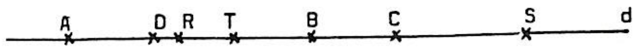
Tout **retournement** de la droite est une **symétrie centrée.**

Tu dois maintenant pouvoir résoudre sans peine les deux petits problèmes ci-dessous:

1. Si C et D représentent les images respectives des points A et B de la droite d par l'isométrie i_1 de cette droite, recherche les images U, V et W des points R, S et T par cette même isométrie i_1.



2. Si C et D représentent les images respectives des points A et B de la droite d par l'isométrie i_2 de cette droite, recherche les images U, V et W des points R, S et T par cette même isométrie i_2.



Math-Jeunes n° 50, 24–28, 1991

Entrelacs celtiques

G. Noël, *Université de Mons*

1. De vieilles pierres

Si vous visitez un jour l'Ecosse, ne manquez pas de vous intéresser aux *Pictish Stones.* Ces pierres gravées et sculptées ont été érigées du 7ème au 9ème siècle par les Pictes, un peuple qui occupait la majeure partie de l'Ecosse dès le début de notre ère, et qui a été vaincu par les Scots vers 850. Depuis, on ne parle plus des Pictes...

Certains dessins symboliques figurant sur les pierres pictes ont une signification qui est restée inconnue jusqu'à nos jours. D'autres ont simplement une fonction ornementale. Il s'agit très souvent d'entrelacs, parfois extrêmement compliqués. Vous pouvez les admirer au musée national d'Edimbourg, mais aussi dans d'autres musées et tout simplement au bord des chemins, au milieu des champs.

Figure 1: Glamis

Figure 2: Morham

(°) Ce texte est reproduit avec l'autorisation du Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons.

Figure 3: Invergowrie

Nous pouvons examiner ces dessins de plusieurs points de vue. Nous pouvons nous mettre dans la peau de l'artiste qui doit les concevoir, ou dans celle du tailleur de pierre qui doit les réaliser concrètement. (Parfois ces deux personnes peuvent n'en faire qu'une!) Nous pouvons aussi les aborder d'un point de vue mathématique, étudier leurs caractéristiques, essayer de les distinguer. C'est ce que nous allons faire, en nous limitant aux dessins les plus simples.

2. La figure de base

Le dessin de base d'un entrelacs celtique est du type suivant:

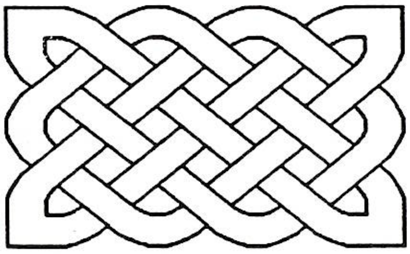


Figure 4

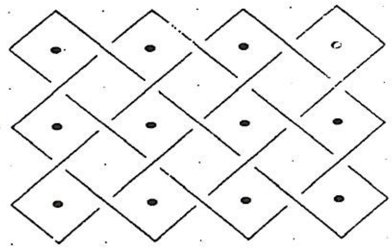


Figure 5

Nous pouvons imaginer que des clous ont été plantés aux sommets d'un quadrillage. L'entrelacs est alors obtenu en "enroulant" une corde autour des clous. Aux croisements, la corde doit passer alternativement au-dessus et en-dessous des brins qu'elle croise. A chaque croisement nous indiquons quel est le brin qui passe au-dessus de l'autre en interrompant le tracé de celui qui passe en dessous. Les dessins ci-dessus sont basés sur un quadrillage 4×3.

Notons a le nombre de clous en largeur et b le nombre de clous en hauteur. Selon les valeurs de a et b, nous observons des phénomènes différents:

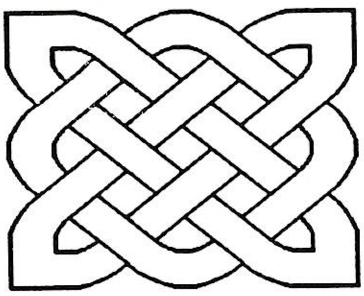


Figure 6: $a = 3$, $b = 3$

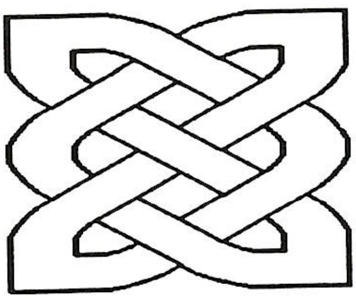


Figure 7: $a = 2$, $b = 3$

La figure 6 apparaît différente des autres: le dessin est constitué de 3 boucles entrelacées au lieu d'une seule.

Nos "boucles" sont en fait ce que le mathématicien appelle des *nœuds*. Il s'agit de courbes fermées pouvant se croiser elles-mêmes. Nous devons les imaginer dans l'espace, de sorte qu'à chaque croisement, nous pouvons distinguer le brin "du dessus" et celui "du dessous". Sous la plume d'Alain VALETTE, *Math-Jeunes* a consacré un article à la théorie des nœuds. (*Math-Jeunes* n° 37, 1987). On le lira avec profit.

Nos entrelacs nous posent plusieurs questions: selon les valeurs de a et b, combien un entrelacs complet comporte-t-il de nœuds ? Voici les figures correspondant à d'autres valeurs de a et b.

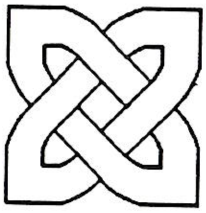


Figure 8: $a = 2, b = 2$
2 nœuds, 4 croisements

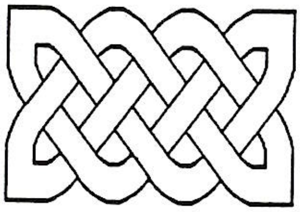


Figure 9: $a = 4$, $b = 2$
2 nœuds, 10 croisements

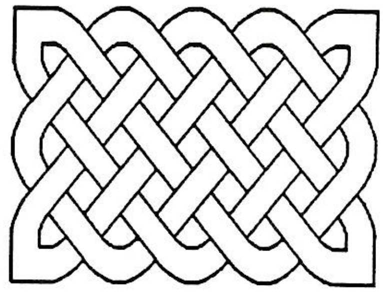


Figure 10: $a = 5$, $b = 3$
1 nœud, 22 croisements

On pense que les artistes pictes faisaient en sorte qu'un seul nœud soit suffisant pour engendrer l'entrelacs complet. Quelles valeurs choisissaient-ils pour a et b? Combien un entrelacs comporte-t-il de croisements? Quelle est la longueur d'un nœud? Ces nœuds et ces entrelacs peuvent-ils être dénoués (c'est à dire séparés les uns des autres sans couper la corde) ? Essayons de répondre à ces questions.

3. Combien de nœuds ?

Pour étudier la situation, nous allons placer nos clous en les points de coordonnées paires du plan. Ainsi, dans le cas $a = 4$, $b = 3$, les clous occupent les positions $(0,0)$, $(2,0)$, ..., $(6,0)$, $(0,2)$, ..., $(6,2)$, ..., $(6,4)$.

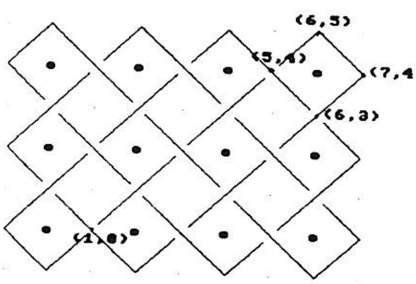


Figure 11

Un nœud part du point $(1,0)$ et fait avec l'horizontale un angle de 45°. Il passe donc par les points $(2,1)$, $(3,2)$, ... Et il arrive ainsi en $(5,4)$. Pour tourner autour du clou situé en $(6,4)$, il passe successivement par les points $(6,5)$, $(7,4)$ et $(6,3)$. Il poursuit alors son petit bonhomme de chemin, passe une deuxième fois par $(1,0)$, (mais dans l'autre direction), continue et revient finalement en $(1,0)$ dans la direction de départ.

Nous pouvons déjà remarquer que ce nœud ne passe par aucun point dont les deux coordonnées sont paires (ce sont les clous), ni par aucun point dont les deux coordonnées sont impaires. Il passe au total par 31 sommets du quadrillage. Parmi ceux-ci, 14 sont situés au bord du dessin. Les 17 autres sont des points de croisement, le nœud y passe deux fois. Si nous prenons comme unité de longueur la distance du point $(1,0)$ au point $(2,1)$, sa longueur est donc de $14 + 17 \times 2 = 48$ unités.

Essayons de généraliser ces constatations au cas où a et b sont quelconques.

Nous plaçons les clous en les points $(0,0), \ldots, (2a-2, 2b-2)$. Partant du point $(1,0)$, un nœud restera à l'intérieur du rectangle délimité par les points $(-1,-1)$, $(-1,2b-1)$, $(2a-1,2b-1)$ et $(2a-1,-1)$. Ce rectangle contient $(2a+1)(2b+1) = 4ab+2a+2b+1$ sommets du quadrillage parmi lesquels on trouve ab sommets de coordonnées toutes deux paires (ce sont les clous) et $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1$ sommets de coordonnées toutes deux impaires (le nœud n'y passe pas non plus). Il nous reste ainsi $2ab+a+b$ sommets du quadrillage par où le nœud *peut* passer. Ces $2ab+a+b$ sommets se répartissent en $2a+2b$ points du bord et $2ab-a-b$ points de croisement.

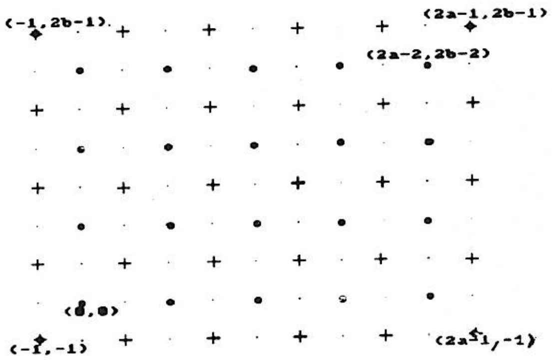


Figure 12

Mais attention, nous avons vu qu'il faut parfois *plusieurs* nœuds pour obtenir un entrelacs celtique complet. La longueur totale de ce noeuds est facile à déterminer. En effet, l'unité étant comme précédemment la distance du point $(1,0)$ au point $(2,1)$, cette longueur totale est exactement égale au nombre de sommets du quadrillage situés sur le parcours des nœuds, chaque point de croisement devant évidemment être compté deux fois. La longueur totale des noeuds est donc $2(2ab-a-b)+2a+2b = 4ab$. Déterminons à présent la longueur d'un nœud.

Examinons les *abscisses* des sommets du quadrillage par lesquels passe le nœud qui part de $(1,0)$:

$$1, 2, 3, \ldots, 2a-2, 2a-1, 2a-2, 2a-3, \ldots, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$$

Les abscisses augmentent d'abord de 1 à $2a-1$, ensuite, elles diminuent jusque -1, et reviennent à 1. A partir de là, elles reprennent les mêmes valeurs qu'auparavant: $2, 3, 2a-1, \ldots$. Cette suite est donc périodique de période $4a$. De la même façon, la suite des *ordonnées* des sommets du quadrillage par lesquels passe le nœud est périodique de période $4b$.

Le nœud se referme, quand sa longueur est un multiple aussi bien de la période $4a$ relative aux abscisses que de la période $4b$ relative aux ordonnées. La longueur d'un nœud est donc le plus petit commun multiple de $4a$ et $4b$. Appelons m ce p.p.c.m.:

$$m = ppcm(4a, 4b) = 4ppcm(a, b)$$

Comme visiblement tous les nœuds ont même longueur, le nombre de nœuds est simplement le quotient de $4ab$ par $4ppcm(a,b)$. Comme le produit de deux nombres est égal au produit de leur p.p.c.m. par leur p.g.c.d., il vient tout simplement

$$n = pgcd(a, b)$$

Ainsi, on utilisera un seul nœud chaque fois que a et b sont premiers entre eux.

On trouverait le même résultat en constatant que la longueur totale des nœuds constituant un entrelacs celtique de base vaut $4ab$ (considérer les carrés centrés sur les ab clous) et en divisant $4ab$ par $4ppcm(a,b)$.

4. De nouveaux entrelacs

On l'a vu sur les reproductions, les artistes pictes réalisaient des entrelacs beaucoup plus compliqués (et beaucoup plus beaux) que nos figures de base. Comment s'y prenaient-ils?

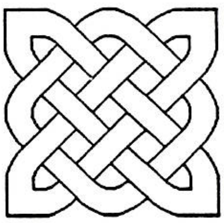


Figure 13

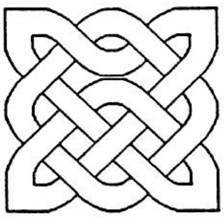


Figure 14

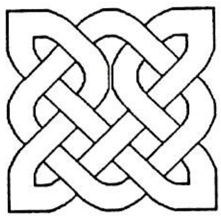


Figure 15

L'idée est assez simple: partons d'un entrelacs de base (figure 13) et supprimons un croisement en établissant soit une jonction horizontale (figure 14) soit une jonction verticale (figure 15). Ce processus peut être renouvelé en divers endroits, y compris pour des croisements situés près du bord.

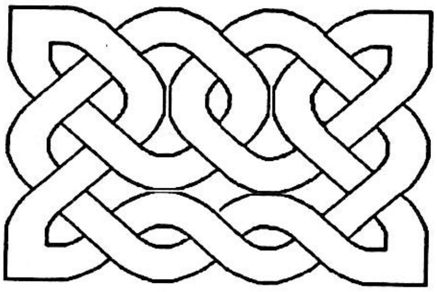


Figure 16

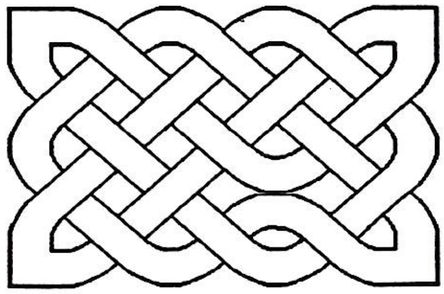


Figure 17

C'est à l'artiste de choisir la nature des jonctions et leurs emplacements de façon esthétique. La méthode précédente peut comporter des variantes, par exemple en joignant des parties du dessin qui ne sont pas immédiatement voisines. On rencontre aussi des figures formées de plusieurs entrelacs de base connectés entre eux (figure 19) ou des nœuds dédoublés longitudinalement (figure18). Quant à la forme globale du dessin, elle peut ne pas être rectangulaire (figure20).

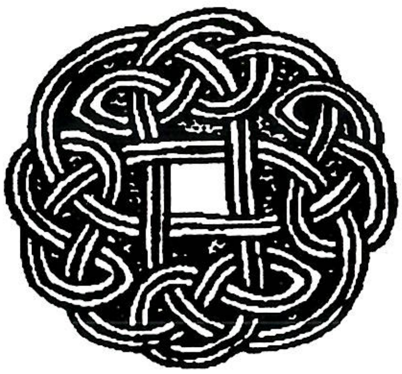


Figure 18

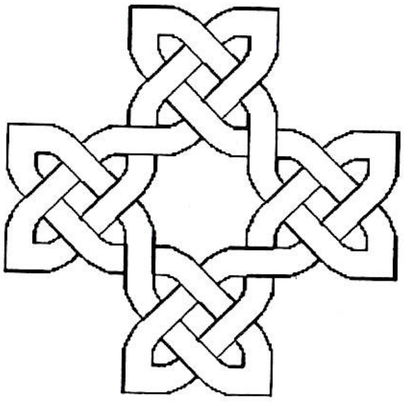


Figure 19

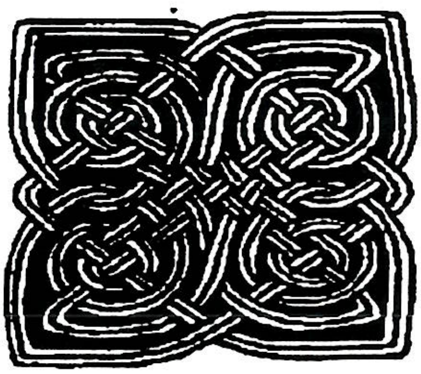


Figure 20

Bibliographie

[1] George BAIN, *Celtic art: the methods of construction*, Constable 1951.

[2] Ian BAIN, *Celtic knotwork*, Constable, 1986.

[3] Alain VALETTE, *Histoire de nœuds*, Math-Jeunes, n° 37, 19–24, 1987.

Math-Jeunes n° 50, 29–32, 1991

Le problème de l'indien confronté à son tour de garde

G. Delande, *Facultés Universitaires de Namur*

Un indien surveille un territoire carré dont nous appellerons a, b, c, d les quatre sommets consécutifs. Partant d'un point x du territoire, il avance en ligne droite vers le sommet a. Arrivé à mi-distance de x et a, en i, il prend la direction de b. A nouveau, ayant accompli en j la moitié de la distance $|ib|$, il bifurque de j vers c. Enfin, depuis le milieu k de $[jc]$, il se dirige vers d et termine sa ronde au point y équidistant de k et d.

- *Déterminez le ou les points x pour lequel ou lesquels l'indien achèvera sa ronde là où il l'a commencée (c'est-à-dire $x = y$).*
- *Un autre indien doit garder un territoire en forme de parallélogramme en effectuant une ronde définie comme précédemment. Trouvez les points de départ et d'arrivée de sa ronde.*

Ces questions font partie d'un problème proposé à la fois aux finalistes Mini et Maxi de la 14ème Olympiade Mathématique Belge (1989). Rappelons tout d'abord que dans le numéro précédent de *Math-Jeunes* Martine Cnudde a développé les types de solutions généralement adoptées par les finalistes de la catégorie Mini dans le cas du carré. Nous nous proposons d'étendre ce problème au cas où le territoire de l'indien est un polygone quelconque d'un nombre quelconque de côtés.

La solution générale que nous allons présenter fait appel à un outil dont les jeunes finalistes sous-estiment vraisemblablement l'efficacité: les homothéties.

1. Cas du quadrilatère

1.1. Analyse du problème

abcd est le territoire de l'indien.

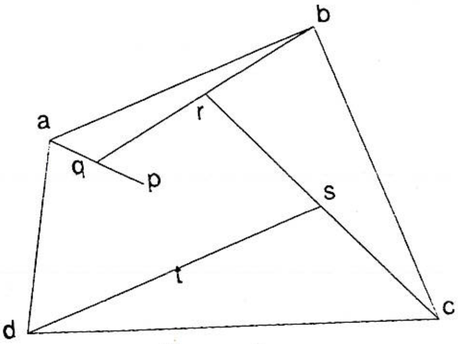


Figure 1

Imaginons que l'indien part d'un point p choisi quelconque dans le plan du territoire. Il avance en direction de a et s'arrête à mi-distance en un point q. Si nous notons h_1 l'homothétie de centre a et de rapport $\frac{1}{2}$, alors

- $h_1(p) = q$ est le milieu de $[ap]$.

De même, si nous notons h_2, h_3, h_4, les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres respectifs b, c, d, alors

- $h_2(q) = r$ est le milieu de $[qb]$;
- $h_3(r) = s$ est le milieu de $[rc]$;
- $h_4(s) = t$ est le milieu de $[sd]$.

Le point t est donc l'image de p par la composée des quatre homothéties h_1, h_2, h_3 et h_4. Le problème est de trouver un point p tel que $p = t$. Il peut se résoudre en deux phases :

1. Identifier la composée des quatre homothéties h_1, h_2, h_3, h_4.
2. Déterminer le ou les points appliqués sur eux-mêmes par cette composée.

Si h' et h'' sont deux homothéties de centres différents et de rapports respectifs r' et r'' avec $r'r'' \neq 1$, la composée $h'' \circ h'$ est une homothétie h de rapport $r'r''$; de plus, les trois centres de h, h' et h'' sont alignés.

(Au cas où cette propriété t'échapperait, vois l'explication dans les annexes 1 et 2.)

Dès lors, en vertu de l'associativité de la composition des homothéties, la composée

$$H = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$$

est une homothétie de rapport $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

$H(p) = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(p) = h_4 \circ h_3 \circ h_2(q) = h_4 \circ h_3(r) = h_4(s) = t \neq p$.

L'indien ne peut pas partir du point p, car les conditions imposées à sa ronde exigent qu'il la termine en son point de départ. Imaginons qu'un tel point existe; nous le notons x (provisoirement inconnu);

$$H(x) = x$$

x est donc un point fixe de l'homothétie H. Or, toute homothétie de rapport différent de 1 n'a qu'un point fixe: son centre. Par conséquent, le point cherché x est le centre de l'homothétie $H = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

1.2. Construction du point x ... et tracé de la ronde de l'indien

Puisque $H(p) = t$ et que x est le centre de l'homothétie H, les points p, t, x sont alignés. Puisque le rapport $\frac{1}{16}$ de cette homothétie est positif, le centre x n'appartient pas au segment $[p, t]$; par contre t appartient au segment $[p, x]$. On a alors

$$16|xt| = |xp| \text{ et } |xp| = |xt| + |tp|$$

D'où $|tp| = 15|xt|$.

Ainsi, on trouve x en prolongeant le segment $[pt]$ d'une longueur $|tx| = \frac{1}{15}|pt|$. La ronde de l'indien se trace en joignant les points $i = h_1(x), j = h_2(i), k = h_3(j), x = h_4(k)$.

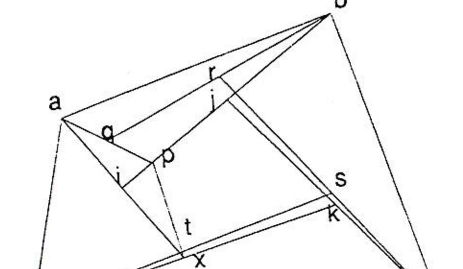


Figure 2

1.3. Remarques

1. Sur un dessin aussi petit que la figure, il n'est pas aisé de situer x avec précision, vu qu'il faut diviser $|pt|$ par 15. Nous obtenons un meilleur résultat en construisant $H(p') = t'$ à partir d'un point p' assez éloigné de p (contour $p'q'r's't'$, figure 3). p', t' et x étant alignés, le point x est l'intersection des droites pt et $p't'$. A partir de x, on trace la ronde de l'indien tout en vérifiant que $k \in dx$ avec x milieu de $[kd]$. Remarquez que la construction serait un peu plus rapide en choisissant p et p' en deux sommets du territoire.

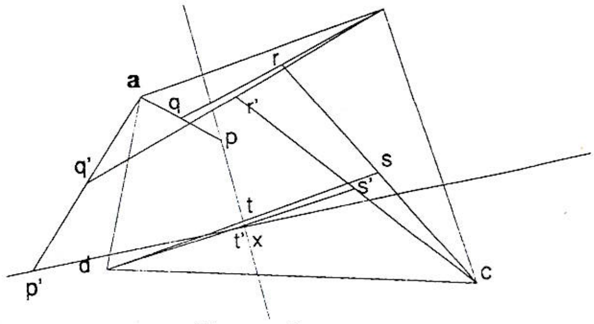


Figure 3

2. Un autre procédé économique pour découvrir le point x est de construire l'image de points particuliers. Par exemple,

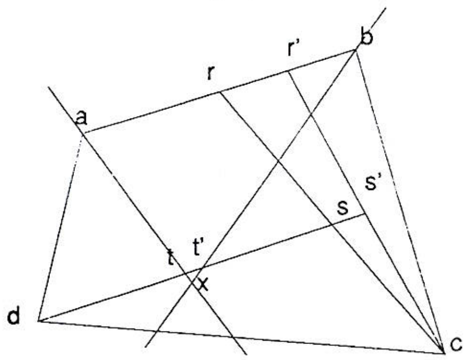


Figure 4

- $H(a) = t$ (parcours $aarst$)
- $H(b) = t'$ (parcours $brr's't'$)

x est l'intersection des droites at et bt'. Ce procédé n'a exigé que la construction de six droites. Essayez-le dans le cas d'un parallélogramme, puis d'un carré.

3. La remarque suivante est moins importante que les deux précédentes, mais vaut néanmoins la peine d'être citée. Toute droite étant parallèle à son image par une homothétie, on a $pp'//qq'//rr'//ss'//tt'$ (dessinez ces droites si nécessaire), compte-tenu des rapports, on a $|tt'| = \frac{1}{2}|ss'| = \frac{1}{4}|rr'| = \frac{1}{8}|qq'| = \frac{1}{16}|pp'|$. D'autre part, le centre de la composée de deux homothéties de centres différents étant aligné avec ceux-ci:

- le centre u de $h_2 \circ h_1$ appartient à la droite ab. Et puisque $h_2 \circ h_1[pp'] = [rr']$, pr et $p'r'$ se coupent en un point u de ab.

- Même constatation en posant $h_u = h_2 \circ h_1$. On a : $h_3 \circ h_u[pp'] = [ss']$. Les droites ps et $p's'$ se coupent en un point v de la droite uc.
- De même pour $h_v = h_3 \circ h_u$. On a: $h_4 \circ h_v[pp'] = [tt']$. pt et $p't'$ se coupent au point x de la droite vd.
- Les points d, x, k, v sont donc alignés.

1.4. Cas particulier: le territoire de l'indien est un carré

1. On aurait pu découvrir un point à partir duquel tracer la ronde de l'indien en construisant $h_1 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2$ ou $h_2 \circ h_1 \circ h_4 \circ h_3$ ou $h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ h_4$. On trouverait par exemple que le point fixe de $h_1 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2$ est i (figure 2 que tu as dessinée dans le cas d'un carré). Mais s'il part de i, l'indien doit d'abord se diriger vers b puisqu'on effectue l'homothétie h_2 en premier lieu. Les sommets du carré $abcd$ jouent donc le même rôle dans la recherche de la ronde de l'indien. Or, une rotation de 90° de centre o applique $abcd$ sur $bcda$; d'où aussi $xijk$ sur $ijkx$. Le centre du carré primitif est donc aussi le centre d'une rotation de 90° qui conserve le contour cherché. En conséquence, celui-ci est un carré.

2. Il nous suffit de savoir que le contour cherché est un parallélogramme pour découvrir un moyen plus rapide encore pour construire le trajet de l'indien. A cet effet, prolongeons $[ib]$ jusqu'à son intersection f avec ad. Puisque $ijkx$ est un parallélogramme : $fj // dk$.

   Dans le triangle axd: i est le milieu de $[ax]$ et $if // dx$. Le théorème de Thalès nous apprend que f est le milieu du côté $[ad]$. Le même raisonnement nous permet de conclure que:

   - cj coupe $[ab]$ en son milieu r,
   - dk coupe $[bc]$ en son milieu n,
   - ax coupe $[cd]$ en son milieu m.

   On en déduit que le tour de garde de l'indien s'obtient en traçant les quatre droites am, bf, cr et dn. A partir de là, on retrouve aisément que $xijk$ est un carré.

2. Cas général

- Supposons à présent que le territoire de l'indien est un polygone tout à fait quelconque dont le nombre de côtés est n. Nous procédons exactement comme dans le cas du quadrilatère. Après avoir désigné par $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et dont les centres respectifs sont les sommets consécutifs du polygone, nous construisons le centre de l'homothétie $h = h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_2 \circ h_1$ (rapport $\frac{1}{2^n}$). La ronde de l'indien s'en déduit sans difficulté. Construisez-la en choisissant une valeur quelconque de n.
- Nous l'avons réalisée ci-dessous dans le cas du triangle ($n = 3$) :

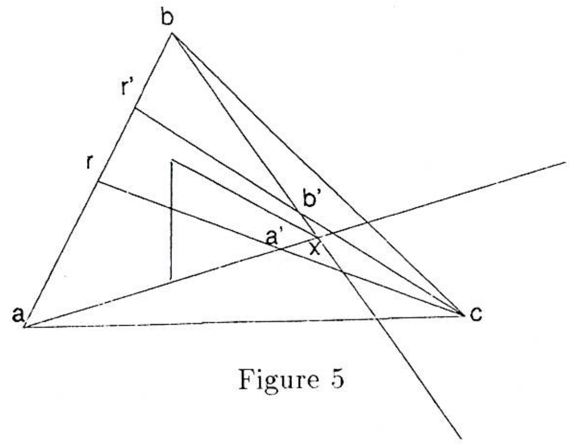


Figure 5

$$H(a) = a' \; ; \; H(b) = b'; \; aa' \cap bb' = \{x\}$$

- Remarques

  ♠ En choisissant des points particuliers, nous n'avons dû tracer que quatre droites pour trouver x. Mais deux auraient suffi, sachant que $|xa'| = \frac{1}{8}|xa|$.

  ♠ Contrôle : $a'b' // ab$

3. Annexes

3.1. La composée de deux homothéties de même centre.

Composer deux homothéties de même centre est facile. Considérons par exemple les homothéties h' de centre o et de rapport 2 et h'' de centre o et de rapport $\frac{2}{3}$

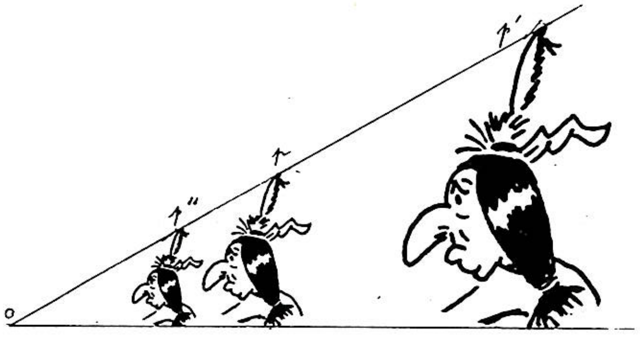


Figure 6

$$(h'' \circ h')(F) = h''(F') = F''$$

Puisque h' est de rapport 2 : $|op'| = 2|op|$.
Puisque h'' est de rapport $\frac{2}{3}$: $|op''| = \frac{2}{3}|op'|$.
Par conséquent $|op''| = \frac{4}{3}|op|$.

Si nécessaire, vous pouvez recommencer la figure et le raisonnement pour d'autres positions de p. Le résultat est toujours le même: o, p et p'' sont toujours alignés et on a toujours $|op''| = \frac{4}{3}|op|$. Ainsi, $h'' \circ h'$ est une homothétie de rapport $\frac{4}{3}$ et de centre o. De façon plus générale :

La composée de deux homothéties h', h'' de centre o et de rapports k', k'' est l'homothétie de centre o et de rapport $k'.k''$.

3.2. La composée de deux homothéties de centres différents.

Essayons de composer l'homothétie h' de centre o' et de rapport 2 avec l'homothétie h'' de centre o'' et de rapport $\frac{1}{3}$. Choisissons p en dehors de $o'o''$ et posons $p' = h'(p)$, $p'' = h''(p')$

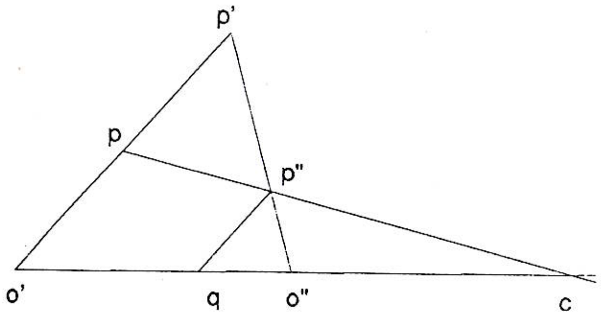


Figure 7

$$|o'p'| = 2|o'p|;\ |o''p''| = \frac{1}{3}|o''p'|$$

- Traçons d'abord la droite parallèle à $o'p$ comprenant le point p'' et notons q son intersection avec la droite $o'o''$;

q est l'image de o' par h''

Par conséquent $|o''q| = \frac{1}{3}|o''o'|$. Ainsi ce point q ne dépend pas de la position de p. Vérifiez cette affirmation: placez p ailleurs sur la figure et contrôlez que q n'a pas changé de place (aux erreurs de dessin près).

- Traçons maintenant la droite pp'' et notons c son intersection avec $o'o''$. On a alors, d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{|cp''|}{|cp|} = \frac{|cq|}{|co'|} = \frac{|qp''|}{|o'p|}$$
$$= \frac{|qp''|}{|o'p'|}.\frac{|o'p'|}{|o'p|} = \frac{|o''p''|}{|o''p'|}.\frac{|o'p'|}{|op|}$$
$$= \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}$$

Ainsi $|cp''| = \frac{2}{3}|cp|$ et $|cq| = \frac{2}{3}|co'|$.

Croyez-vous que la position du point c dépende de celle de p? Sur la droite $o'o''$, il y a deux points x pour lesquels $|xq| = \frac{2}{3}|xo'|$. L'un est extérieur au segment $[o'q]$, l'autre lui est intérieur. Dans le cas de notre figure, le point c est nécessairement extérieur à $[o'q]$, quelle que soit la position de p. Le point c n'a donc qu'une possibilité: il est toujours à la même place. (Pour d'autres cas de figures, il serait à l'intérieur de $[o'q]$.)

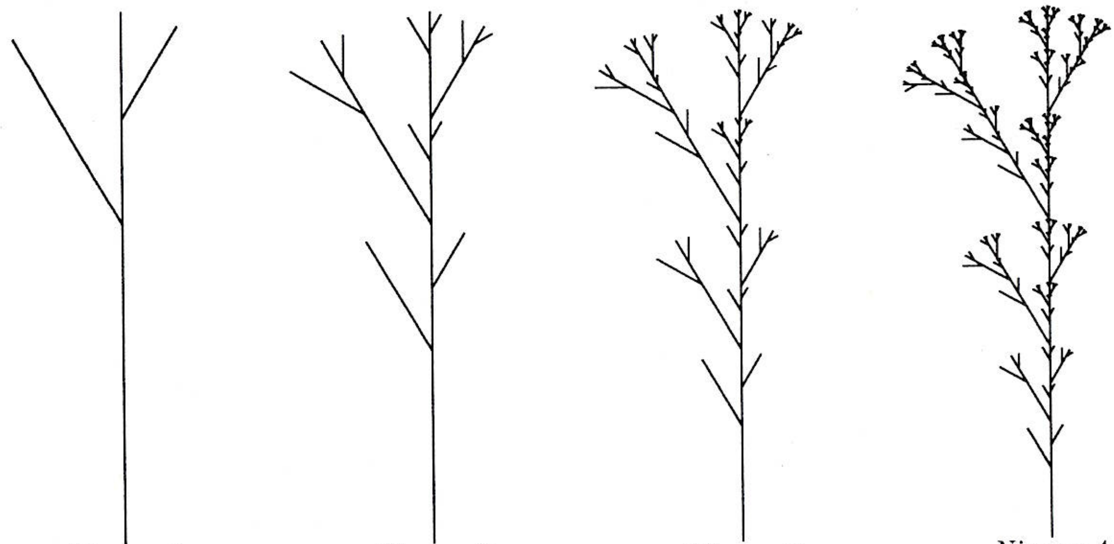
Mais puisque c est toujours à la même place, la relation $|cp''| = \frac{2}{3}|cp|$ montre que p'' est l'image de p par l'homothétie de centre c et de rapport $\frac{2}{3}$.

Notre raisonnement n'est pas tout à fait complet. Il faudrait examiner ce qui se passe si le point p est sur la droite $o'o''$, et montrer qu'on a encore $|cp''| = \frac{2}{3}|cp|$. Il faudrait aussi remplacer les rapports 2 et $\frac{1}{3}$ par des rapports quelconques. Néanmoins nous espérons t'avoir convaincu de ce qui suit:

La composée de deux homothéties h' et h'' de centres différents o' et o'' et de rapports k' et k'' est une homothétie dont le centre est aligné avec o' et o'' et dont le rapport vaut $k'k''$.

Le coin de la tortue

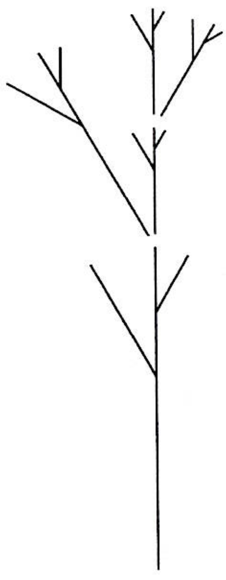
Etais-tu abonné à *Math-Jeunes* en 1989–1990? Si oui, tu as sûrement remarqué les dessins qui illustraient la première page de chaque numéro. Pour ceux qui n'étaient pas parmi nos lecteurs à l'époque, les voici à nouveau:



Niveau 1 Niveau 2 Niveau 3 Niveau 4

As-tu deviné que ces arbres étaient réalisés à l'aide d'un programme `LOGO`? Et quel programme? Analysons ces figures ensemble.

Remarque que la figure 2 est constituée de cinq parties semblables à la figure 1. De la même façon, la figure 3 est formée de cinq parties semblables à la figure 2 et la figure 4 est formée de cinq parties semblables à la figure 3.



Combien de fois retrouve-t-on la figure 1 dans la figure 3 ? et dans la figure 4 ? Si les longueurs des 5 segments de la figure 1 sont 3, 2, 1, 1 et 1, quelles sont les longueurs des segments des figures 2, 3, 4 ?

Une unité de longueur, `L`, étant fixée, convenons que les segments de la figure 1 sont de longueurs `3L, 2L, L, L, L`. Alors, le programme `LOGO` suivant dessine cette figure 1.

1	`AV 3*:L`	Avancer la tortue de a à b.
2	`GA 30`	Tourner de trente degrés vers la gauche.
3	`AV 2*:L`	Avancer de b à c.
4	`RE 2*:L`	Reculer en b.
5	`DR 30`	Tourner de trente degrés vers la droite.
6	`AV :L`	Avancer de b à d.
7	`DR 30`	Tourner de trente degrés vers la droite.
8	`AV :L`	Avancer de d à e.
9	`RE :L`	Reculer en d.
10	`GA 30`	Tourner de trente degrés vers la gauche.
11	`AV :L`	Avancer de d en f

Si tu as accès à un ordinateur qui peut travailler en `LOGO`, introduis le programme précédent en l'appelant `FIG1 :L`. Il te suffit alors d'exécuter `FIG1 20`, `FIG1 50`, `FIG1 100`, ...pour réaliser la figure 1 à des échelles différentes.

Essaye à présent de dessiner la figure 2. Dans le programme précédent, tu dois remplacer les lignes 1, 3, 6, 8 et 11 par des instructions qui dessinent la figure 1 à la bonne échelle. Tu dois donc écrire `FIG1 ....` Calcule l'expression qui doit remplacer les "...". Attention elle n'est pas la même pour les cinq lignes 1, 3, 6, 8 et 11.

Maintenant tu dois pouvoir facilement écrire des programmes qui réalisent les figures 3 et 4. Mais voici notre défi: écrire un seul programme qui permet de dessiner n'importe laquelle des figures 1 à 4, quand on lui donne le numéro de la figure et la valeur de `:L`. N'oublie pas qu'un programme `LOGO` peut s'appeler lui-même.

Essaie aussi, en appliquant le même principe de dessiner d'autres arbres. Fais varier les angles, les longueurs et le numéro de figure. Tu peux aussi essayer de courber les branches! Envoie tes projets à l'adresse de la rédaction. Bon courage!

OMB
OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

P. Van Elsuwé

Le 23 janvier s'est déroulée l'éliminatoire de la seizième Olympiade Mathématique Belge. Les grèves dans l'enseignement au premier trimestre ont obligé les organisateurs à reculer la date extrême d'inscription à ces Olympiades. Il m'est donc impossible au moment où j'écris ces quelques lignes de te fournir une estimation du nombre d'inscrits. De plus amples renseignements te parviendront dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

En supplément de ton *Math-Jeunes*, tu reçois les questionnaires des éliminatoires Mini et Maxi 1991. Amuse-toi à essayer de résoudre ces problèmes. Tu pourras contrôler tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous. Des résolutions détaillées de certains problèmes paraîtront dans le numéro suivant.

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MINI	C	D	C	C	A	B	A	E	13	B	D	C	E	E	D	D	D	B	B	324	E	40	D	C	1	D	B	D	D	D
MAXI	D	D	B	E	D	A	B	D	13	E	19	B	A	E	D	6	D	B	D	B	A	91	B	C	D	A	B	D	D	D

Rappel des dates importantes:

- Mercredi 27 février 1991 de 14h à 15h30: demi-finale dans les dix centgres régionaux.
- Mercredi 17 avril 1991 de 13h30 à 17h30: finale à Namur aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix.
- Samedi 4 mai 1991: proclamation des résultats à Namur.

Dis-moi, nombre, es-tu bon?

M. Lardinois, *Université de Mons, 2ème candidature* •

DÉFINITION *Un entier naturel non nul n est dit "bon" ssi on peut trouver k naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ et $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$.*

Exemples: $32 = 2 + 3 + 9 + 18$ et $55 = 3 + 4 + 8 + 8 + 8 + 24$.

Question: Quels sont tous les nombres bons?

Il y a plusieurs manières d'aborder ce problème, mais globalement le raisonnement que l'on effectue comporte trois parties dont l'ordre de présentation importe peu; ce sont trois "tiroirs" dont la réunion livre le résultat attendu (ou en tout cas cherché ...). J'ai arbitrairement choisi ici de vous présenter ma démarche dans l'ordre où les idées m'étaient venues lors de la résolution du problème.

Une rapide observation montre que tous les carrés parfaits sont bons (il suffit de prendre $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = k$ si $n = k^2$) cependant que, par exemple, 2, 3 et 5 ne le sont pas.

Une recherche un peu plus fine permet déjà de parvenir à un premier ensemble de résultats importants: si n est bon alors de $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$ et de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ on déduit que $2n+8 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 4 + 4$ est bon aussi car $\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. De même, l'égalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ permet de voir que si n est bon alors $2n + 9$ l'est aussi et enfin on obtiendra de la même façon que $2n + 2$, $3n + 6$,$3n + 8$ et $2n + 29$ sont bons aussi à partir respectivement des égalités $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 1$ (nous utiliserons couramment ces relations par la suite).

C'est en combinant les deux constatations relatives à $2n + 8$ et $2n + 9$ que l'on en arrive à formuler un premier théorème:

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que tous les naturels compris (au sens large) entre n_0 et $2n_0 + 7$ sont bons, alors tous les naturels supérieurs ou égaux à n_0 sont bons.

En voici une preuve:

1. $2n_0 + 8$ et $2n_0 + 9$ sont bons puisque n_0 est bon.
2. $2n_0 + 10 = 2(n_0 + 1) + 8$ et $2n_0 + 11 = 2(n_0 + 1) + 9$ sont bons puisque $n_0 + 1$ est bon.
3. $2n_0 + 12 = 2(n_0 + 2) + 8$ et $2n_0 + 13 = 2(n_0 + 2) + 9$ sont bons puisque $n_0 + 2$ est bon.
4. ...
5. $4n_0 + 22 = 2(2n_0 + 7) + 8$ et $4n_0 + 23 = 2(2n_0 + 7) + 9$ sont bons puisque $2n_0 + 7$ est bon.
6. $4n_0 + 24 = 2(2n_0 + 8) + 8$ et $4n_0 + 25 = 2(2n_0 + 8) + 9$ sont bons puisque $2n_0 + 8$ est bon.
7. ...

La deuxième partie du raisonnement va maintenant consister à rechercher une valeur de n_0 (la plus petite possible pour limiter au maximum les calculs) qui vérifie l'hypothèse de notre premier théorème. Et là, tous les moyens sont ... bons!

La meilleure stratégie est d'observer les petites valeurs de n, disons $n \leqslant 60$ pour fixer les idées, et de travailler par "crible" en encadrant les nombres bons carrés parfaits, puis de leurs doubles plus 2, 8 ou 9, puis d'utiliser de la même manière les autres relations (voir tableaux).

Commençons par encadrer les carrés parfaits ainsi que 32 et 55 dont nous savons déjà qu'ils sont bons.

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	10	11	12	13	14	15
$\boxed{16}$	17	18	19	20	21	22	23	24	$\boxed{25}$	26	27	28	29	30
31	$\boxed{32}$	33	34	35	$\boxed{36}$	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	$\boxed{49}$	50	51	52	53	54	$\boxed{55}$	56	57	58	59	60

Encadrons ensuite les nombres du type $2n+2$, $2n+8$ et $2n+9$ si n est déjà encadré, par exemple nous encadrons 10 car $10 = 2 \times 1 + 8$ et 22 car $22 = 2 \times 10 + 2$

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	13	14	15
$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	18	19	$\boxed{20}$	21	$\boxed{22}$	23	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$
$\boxed{31}$	$\boxed{32}$	33	$\boxed{34}$	35	$\boxed{36}$	37	38	39	$\boxed{40}$	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	44	45
$\boxed{46}$	47	$\boxed{48}$	$\boxed{49}$	$\boxed{50}$	51	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	$\boxed{56}$	$\boxed{57}$	$\boxed{58}$	$\boxed{59}$	$\boxed{60}$

Encadrons encore les nombres du type $3n+6$, $3n+8$ et $2n+29$ si n est déjà encadré:

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	13	14	15
$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	19	$\boxed{20}$	21	$\boxed{22}$	23	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$
$\boxed{31}$	$\boxed{32}$	$\boxed{33}$	$\boxed{34}$	$\boxed{35}$	$\boxed{36}$	$\boxed{37}$	$\boxed{38}$	$\boxed{39}$	$\boxed{40}$	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	44	45
$\boxed{46}$	$\boxed{47}$	$\boxed{48}$	$\boxed{49}$	$\boxed{50}$	$\boxed{51}$	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	$\boxed{56}$	$\boxed{57}$	$\boxed{58}$	$\boxed{59}$	$\boxed{60}$

On a encadré cette fois $18 = 3 \times 4 + 6$, $37 = 2 \times 4 + 29$, $33 = 3 \times 9 + 6$, $35 = 3 \times 9 + 8$, $47 = 2 \times 9 + 29$, $38 = 3 \times 10 + 8$, $39 = 3 \times 11 + 6$, $51 = 2 \times 11 + 29$. Mais puisque 18 est à présent encadré, nous pouvons aussi encadrer $2 \times 18 + 8 = 44$ et $2 \times 18 + 9 = 45$.

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	13	14	15
$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	19	$\boxed{20}$	21	$\boxed{22}$	23	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$
$\boxed{31}$	$\boxed{32}$	$\boxed{33}$	$\boxed{34}$	$\boxed{35}$	$\boxed{36}$	$\boxed{37}$	$\boxed{38}$	$\boxed{39}$	$\boxed{40}$	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	$\boxed{44}$	$\boxed{45}$
$\boxed{46}$	$\boxed{47}$	$\boxed{48}$	$\boxed{49}$	$\boxed{50}$	$\boxed{51}$	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	$\boxed{56}$	$\boxed{57}$	$\boxed{58}$	$\boxed{59}$	$\boxed{60}$

La lecture des tableaux permet de constater que tous les naturels compris entre 24 et 60 sont bons et dès lors on peut conclure via la première partie (si $n_0 = 24$ alors $2n_0 + 7 = 55 < 60$) que tout $n \geqslant 24$ est bon.

Pour terminer notre travail, le troisième tiroir est l'étude des naturels $n \leqslant 23$, sachant que 1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20 et 22 sont déjà bons.

Je vais pour cela utiliser l'inégalité des moyennes harmonique et arithmétique:

$$\frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

ou $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}) \geqslant k^2$, valable quels que soient $k \leqslant 1$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ strictement positifs.

Pour ceux qui la découvrent, en voici une démonstration élémentaire: si on développe $(a_1 + \cdots + a_k)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k})$, *on a* k *termes égaux à* $1 = \frac{a_i}{a_i}$ *et* $k^2 - k$ *termes du type* $\frac{a_i}{a_j}$ *avec* $i \neq j$. *Retranchons* k *aux deux membres et regroupons* $\frac{a_i}{a_j}$ *et* $\frac{a_j}{a_i}$; *il faut prouver*

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k-1}}\right) \geqslant k^2 - k$$

Le premier membre comporte $\frac{k(k-1)}{2}$ *parenthèses et chacune de ces parenthèses vaut au moins 2 car de* $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$ *on déduit* $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ *quel que soit* $x > 0$. *Le premier membre est donc supérieur ou égal à* $\frac{k(k-1)}{2} . 2 = k^2 - k$.

Dans le cas qui nous occupe, l'inégalité des moyennes harmonique et arithmétique me permet d'écrire $n \geqslant k^2$ ou $k \leqslant \sqrt{n}$.

Comme $n \leqslant 23$, on a $k \leqslant 4$ et on va donc obtenir tous les naturels bons inférieurs ou égaux à 23 en décomposant 1 en somme d'au plus 4 inverses d'entiers naturels : $1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}$ avec $k \leqslant 4$.

Si $k = 1$, on a $\frac{1}{a_1} = 1$ donc $a_1 = 1$ et $n = 1$. On retrouve bien que 1 est bon.

Si $k = 2$, on a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$. Vu la symétrie de l'équation, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $a_1 \leqslant a_2$.

- Si $a_1 = 1$, $\frac{1}{a_2} = 0$ et on n'a pas de solution.
- Si $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ et cela confirme que $2 + 2 = 4$ est bon.
- Si $a_1 > 2$, on a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqslant \frac{2}{a_1} < 1$ et il n'y a plus de solution.

Si $k = 3$, on a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$. Ici aussi on va supposer $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$.

- Si $a_1 = 1$, il n'y a pas de solution.
- Si $a_1 = 2$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$ qui admet par les mêmes procédés (3,6) et (4,4) comme solutions.
- Si $a_1 = 3$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$ qui admet (3,3) comme seule solution.
- Si $a_1 > 3$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqslant \frac{3}{a_1} < 1$ et il n'y a plus de solution.

On voit donc que $3 + 3 + 3 = 9$, $2 + 4 + 4 = 10$ et $2 + 3 + 6 = 11$ sont bons.
Si $k = 4$, on a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$.

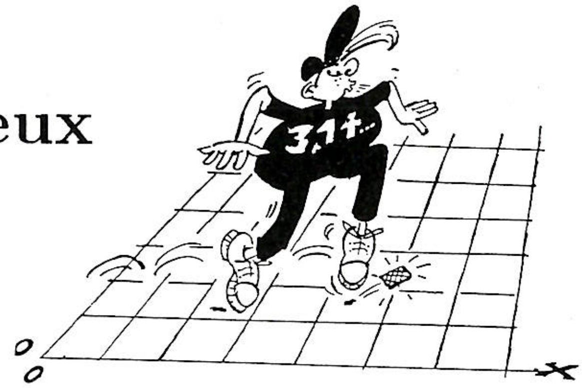
- Si $a_1 = 1$, pas de solution.
- Si $a_1 = 2$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{2}$.
  - ♠ Si $a_2 = 2$, pas de solution.
  - ♠ Si $a_2 = 3$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{6}$ qui admet (7,42), (8, 24), (9, 18), (10, 15) et (12,12) comme solutions.
  - ♠ Si $a_2 = 4$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{4}$ qui admet (5,20), (6,12) et (8,8) comme solutions.
  - ♠ Si $a_2 = 5$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{3}{10}$ qui admet (5,10) comme solution.
  - ♠ Si $a_2 = 6$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{3}$ qui admet (6,6) comme solution.
  - ♠ Si $a_2 > 6$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \leqslant \frac{3}{a_2} < \frac{1}{2}$ et plus de solution.
- Si $a_1 = 3$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{2}{3}$.
  - ♠ Si $a_2 = 3$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{3}$ qui admet (4,12) et (6,6) comme solutions.
  - ♠ Si $a_2 = 4$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{5}{12}$ qui admet (4,6) somme solution.
  - ♠ Si $a_2 > 4$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \leqslant \frac{3}{a_2} \leqslant \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ et plus de solution.
- Si $a_1 = 4$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{3}{4}$.
  - ♠ Si $a_2 = 4$, on a $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{2}$ qui admet (4,4) comme solution.
  - ♠ Si $a_2 > 4$, on a $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \leqslant \frac{3}{a_2} < \frac{3}{4}$ et plus de solution.
- Si $a_1 > 4$, on a $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \leqslant \frac{4}{a_1} < 1$ et ...c'est fini!

Nous avons ainsi confirmation de ce que les nombres 54, 37, 32, 30, 29, 31, 24, 22, 22, 20, 22, 18, 17 et 16 sont bons. Mais cette fois nous sommes sûrs d'avoir trouvé tous les nombres bons inférieurs à 24.

On peut dès lors conclure en affirmant qu'à l'exception de 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21 et 23, tous les entiers naturels non nuls sont bons.

Math-Jeunes n° 50, 38-38, 1991

Jeux



A. Parent

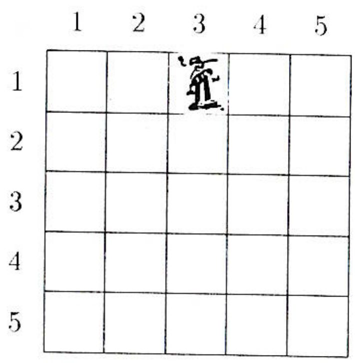
Auto-références

Dans le dernier numéro de ta revue préférée on te proposait la recherche d'une solution à une grille auto-référente. En voici une autre, un peu moins facile.

Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 4

Si tu as attrapé le virus de ce type de jeu, je te propose de trouver une solution à cette même grille, mais en travaillant dans la base 5.

Nombres croisés



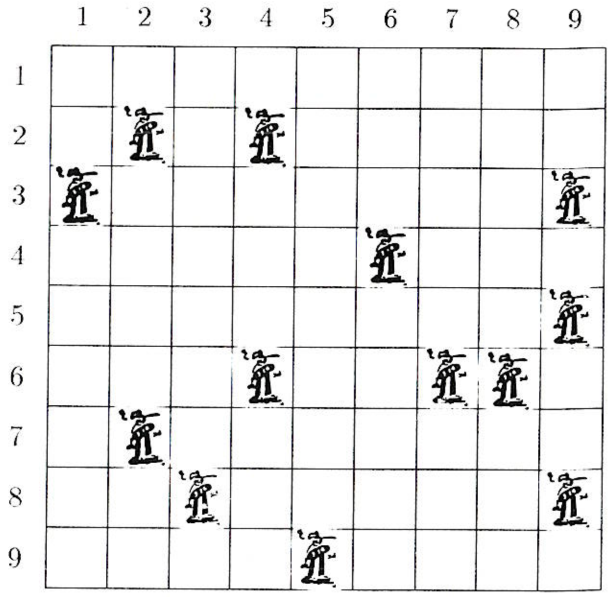
Horizontalement:

1. Carré parfait – multiple de 7
2. Puissance de 2
3. Multiple de 71
4. Juxtaposition de deux cubes
5. Juxtaposition de multiples de 46

Verticalement:

1. Puissance de 2
2. 8e puissance
3. Juxtaposition de doublets
4. Produits de 641 par un carré
5. Multiple de 126

Mots croisés

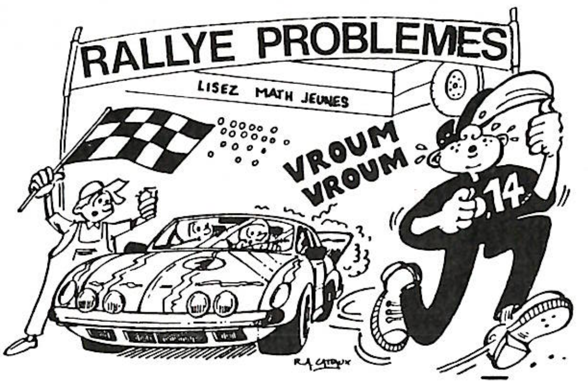


Horizontalement:

1. A faire pour le cours de français
2. Ouvris les fenêtres
3. Ratées
4. Intersection de deux sécantes – l'oiseau le fait
5. Utiles pour le chat
6. Ignorant – note
7. De cinéma, souvent
8. Conjonction – qui ont bien servi
9. Acide – va en justice

Verticalement

1. Petit cours d'eau – Rêves
2. Ce n'est pas ici tout près – pronom personnel
3. Elles sont illimitées
4. Sans motif – obtenue
5. Prendras
6. Au golf – prénom féminin
7. Autre prénom – démonstratif
8. Dans le désert – vit
9. Conjonction – Le meilleur



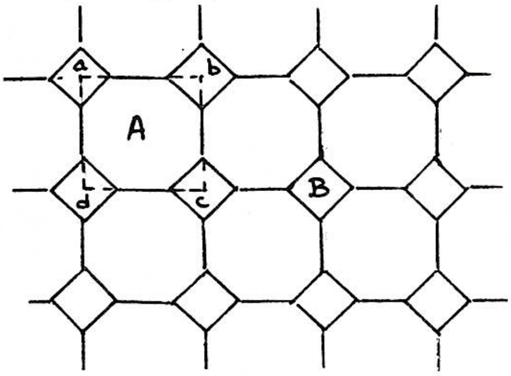
C. Festraets

Beaucoup de nos lecteurs n'ont reçu le n° 49 de *Math-Jeunes* que tardivement. Nous accepterons donc les solutions aux problèmes de ce n° 49 jusqu'au 20 février 1991. Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1990-1991. Rappelons que les trois premiers concernent (en principe) les élèves des trois classes inférieures et les trois derniers concernent les élèves des trois classes supérieures.

Présentez soigneusement vos solutions, chaque problème étant rédigé sur une (ou plusieurs) feuilles séparées et chaque feuille comportant vos nom, prénom, âge, adresse, classe et école.

Envoyez vos solutions à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 15 mars 1991.

m4 Voici un morceau de pavage situé dans un plan. A est un octogone "inscriptible" dans un carré (voir figure) et B est un carré.



A est inscrit dans le carré abcd.

L'octogone A peut-il être régulier? Si oui, quel est alors le rapport des aires de A et de B.

m5 Trois ménages vont au marché. Les maris sont Jean, Pierre et Paul, les femmes sont Marie, Louise et Anne. Dans ce marché, chaque achat coûte un nombre entier de billets de 100F. Chacune des six personnes effectue un certain nombre d'achats qui coûtent, chacun, un nombre de billets de 100F égal au nombre d'achats qu'elle a effectué. Jean a fait 23 achats de plus que Louise et Pierre en a fait 11 de plus que Marie. En outre, chaque époux a dépensé 6300F de plus que sa femme. Trouver qui est l'époux de qui.

m6 Avec deux nombres entiers positifs, on a effectué les quatre opérations suivantes:

1. on les a additionnés,
2. on les a soustraits (le plus petit du plus grand),
3. on les a multipliés,
4. on les a divisés.

Puis on a fait la somme de ces quatre résultats et on trouve 243. Quels sont ces nombres?

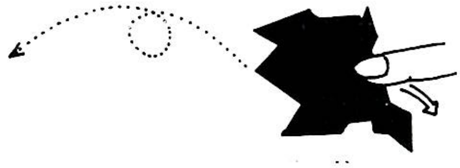
M4 On donne quatre entiers a, b, c, d positifs ou nuls. On construit successivement :
$a_1 = |a-b|, b_1 = |b-c|, c_1 = |c-d|, d_1 = |d-a|$,
$a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$,
$a_3 = |a_2 - b_2|$, etc.
Démontrer qu'après un nombre n fini d'étapes, les quatre entiers a_n, b_n, c_n, d_n sont égaux.

M5 Dans cette ville, le métro est conçu de sorte qu'il est toujours possible de relier par métro deux stations quelconques (éventuellement, on peut changer de rame). Démontrer que, dans ces conditions, il existe une station telle que si on la ferme et qu'aucune rame ne puisse plus y passer, il est encore possible d'aller en métro de n'importe quelle autre station à n'importe quelle autre station.

M6 Existe-t-il, dans l'espace de dimension 3, un quadrilatère gauche (les côtés opposés ne sont pas coplanaires) ayant quatre angles droits?

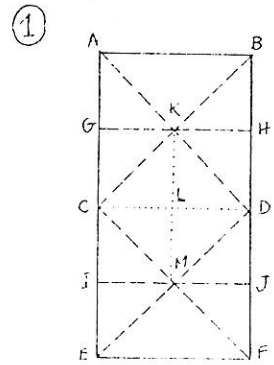
Math-Jeunes n° 50, 40–40, 1991

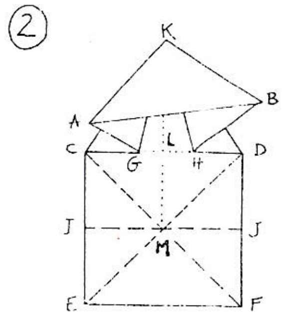
Une grenouille pour tous



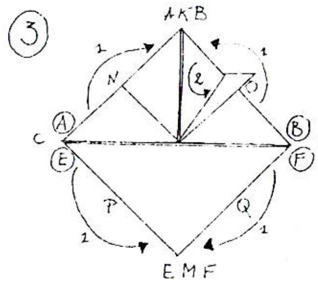
M.-N. Vincke,

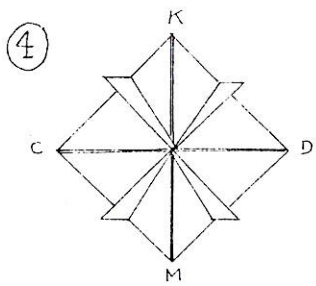
Math-Jeunes vous offre une grenouille en papier. Vous pouvez organiser des concours de sauts, mais pas pendant le cours de mathématique!





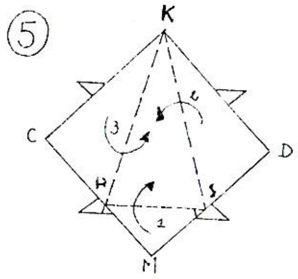
Découpez un rectangle de papier qui fasse exactement 2 carrés. Pliez selon les diagonales de chacun de ces carrés et marquez bien les plis (AD, BC, CF et ED). Retournez votre feuille et marquez par un pli les médianes GH et IJ des deux carrés. Depliez votre feuille.



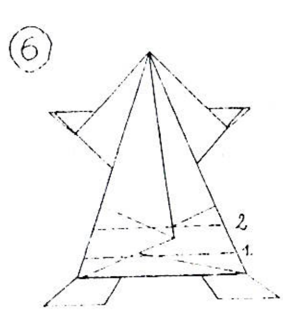


Déposez les plis GK et HK sur le segment KL. Faites de même avec les plis IM et JM sur le segment ML. Vous obtenez ainsi un carré.

Ramenez les coins A et B sur K ainsi que les coins E et P sur M.



Déposez ensuite le côté AL sur la droite NL, le côté BL sur la droite DL. Faites de même en posant EL sur PL et FM sur QL. (vous obtenez le schéma 4).
Retournez votre travail, la pointe M vers vous. Rabattez la pointe M vers le plus haut, le plus loin possible sans déchirer le papier (voir le dessin), puis pliez selon les droites KR et SK.



Votre grenouille est presque terminée. Il ne vous reste plus qu'à créer le ressort qui la fera sauter, faites le pli n° 1 vers le haut (bien sur les pattes) puis un second vers le bas au-delà des pattes. Pour la faire sauter, placer votre doigt sur le pli 2 et lachez rapidement le doigt.... Bon amusement

Solution des jeux

Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	1	6		2	8
2	6	5	5	3	6
3	3	5	5	0	0
4	8	3	3	7	5
5	4	6	3	6	8

Mots croisés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	R	E	D	A	C	T	I	O	N
2	U		R		A	E	R	A	I
3		L	O	U	P	E	E	S	
4	P	O	I	N	T		N	I	D
5	L	I	T	I	E	R	E	S	
6	A	N	E		R	E			A
7	N		S	E	A	N	C	E	S
8	E	T		U	S	E	E	S	
9	S	U	R	E		E	S	T	E

Auto-références

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a 11 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4