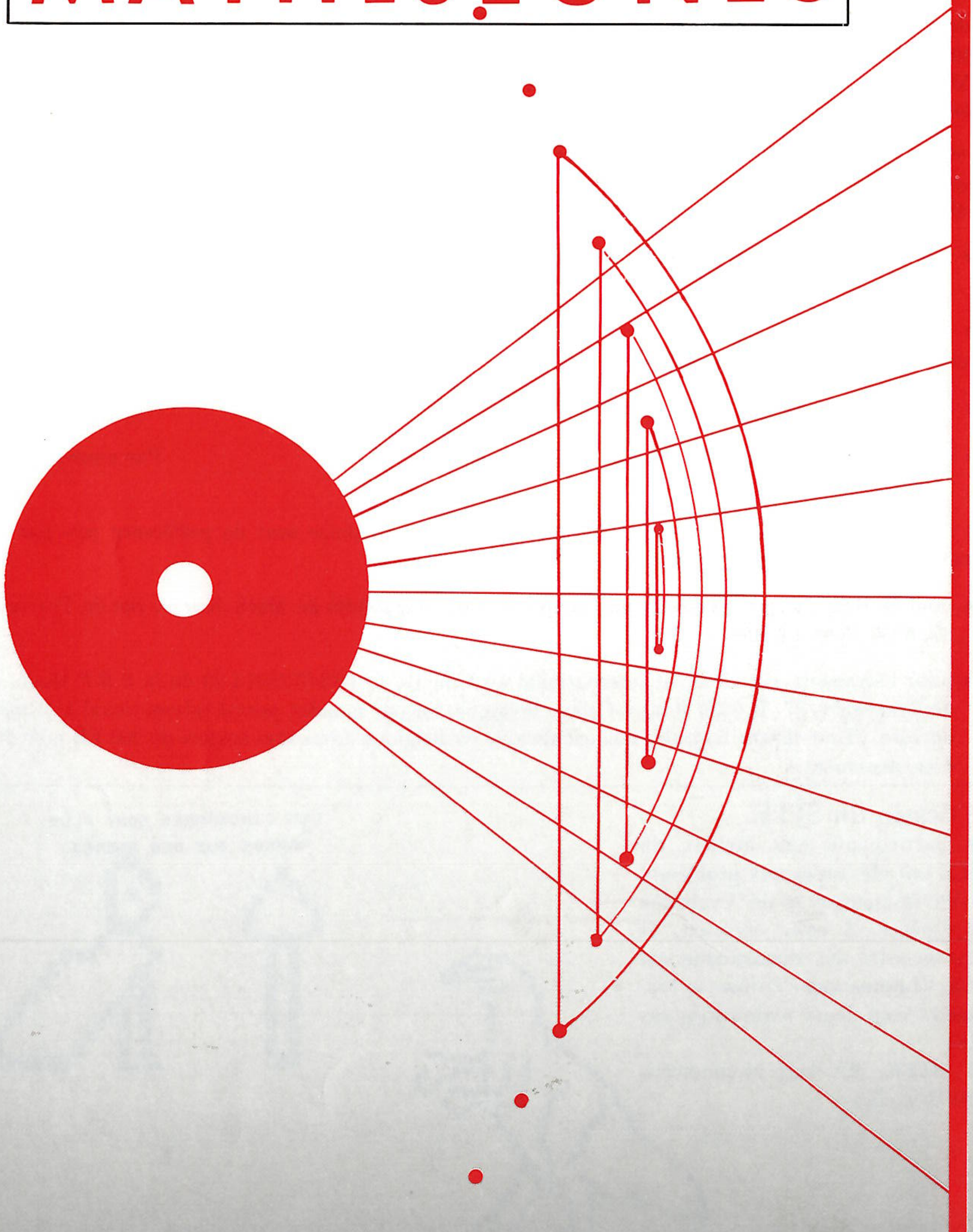
MATH-JEUNES



Périodique trimestriel - 12e année
Mars - Mai 1991 - N° 51
Bureau de dépôt Mouscron 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines. 7061 CASTEAU.
Comité de Rédaction: M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, J.Humier, N.Joelants, K.Martroye, G.Noël, A.Parent, M.Schneider, S.Trompler, P.Van Elsuwe, C.Villers
Illustrations: R.A.Cattaux, J.P.Boydens

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
- Isolés: 120 FB

Etranger :

- Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
- Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

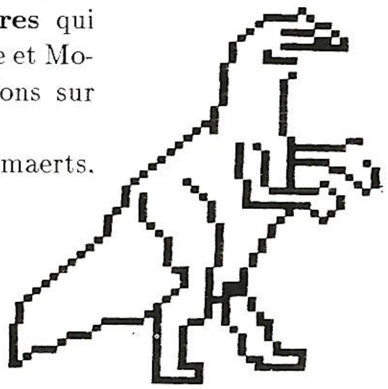
- Années complètes: 87-88, 88-89, 89-90 — Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 23, 24, 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35 — Par numéro: 10 FB
  (Etranger: 20 FB)

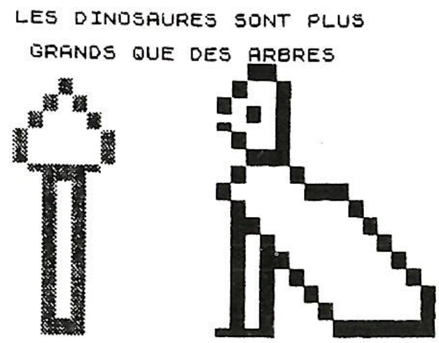
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Le dessin du SITE.

Les participants aux ateliers du **SITE** ont été initiés aux problèmes de l'environnement et de l'évolution des espèces. A cette occasion, ils ont rencontré des **dinosaures** qui ont fort impressionné Orhane et Mohamed. Voici leurs réalisations sur ZX81
LE SITE, 2A rue Mommaerts, 1080 Bruxelles.

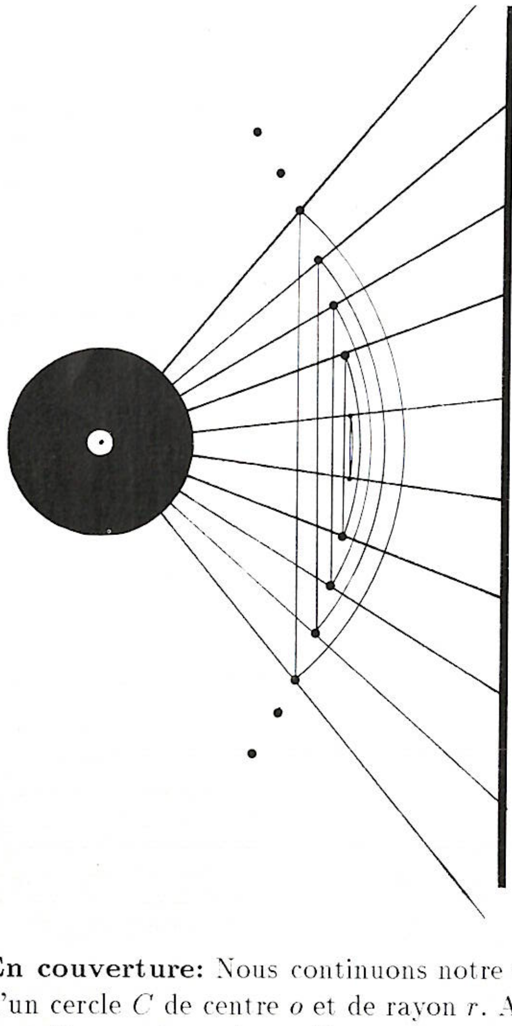




Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 51 Douzième année 1991

MATH-JEUNES



En couverture: Nous continuons notre étude de l'ensemble des points équidistants d'une droite D et d'un cercle C de centre o et de rayon r. As-tu esquissé le dessin de cette courbe ? Si oui, elle te rappelle peut-être quelque chose. Ne serait-ce pas une *parabole* ? Nous pouvons définir une parabole comme l'ensemble des points équidistants d'une droite (la directrice) et d'un point (le foyer). Si le point p est à distance d tant du cercle C que de la droite D, n'est-il pas à distance $d + r$ du centre o de C et d'une droite D' parallèle à D ? Pourquoi utilise-t-on le mot *foyer* pour désigner ce point particulier associé à une parabole ? Si tu ignores la réponse, demande à ton professeur de physique de te parler des miroirs paraboliques.

 Math-Jeunes n° 51, 42–42, 1991

Numération alphabétique et numération positionnelle

M. Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Tu sais certainement que les Romains écrivaient les nombres au moyen de lettres, les Grecs aussi, d'ailleurs, mais évidemment avec des lettres tirées de l'alphabet grec. Cette manière d'écrire les nombres s'appelle **numération alphabétique** ou **littérale**. Tu te rappelles encore l'une des variantes de la numération alphabétique romaine:

I	=	1	XIII	=	13	LXX	=	70
II	=	2	XIV	=	14	LXXX	=	80
III	=	3	XV	=	15	XC	=	90
IV	=	4	XVI	=	16	C	=	100
V	=	5	XVII	=	17	CC	=	200
VI	=	6	XVIII	=	18	CCC	=	300
VII	=	7	XIX	=	19	CD	=	400
VIII	=	8	XX	=	20	D	=	500
IX	=	9	XXX	=	30	DC	=	600
X	=	10	XL	=	40	DCC	=	700
XI	=	11	L	=	50	DCCC	=	800
XII	=	12	LX	=	60	CM	=	900
						M	=	1000

Si tu as quelque intuition, tu pourras sûrement écrire 3348 dans ce système de numération. Essaie ... Si cela ne va pas, demande à ton professeur de mathématiques ou de latin, il te l'expliquera. Tu verras alors que ce système n'est guère commode!

En 1202, Léonard de Pise écrit son **Liber Abbaci** c'est-à-dire le **Livre de l'Abaque** ou **Livre du Nombre**. A cette époque, le monde occidental avait déjà pris connaissance du système de **numération positionnelle** indo-arabe ([1]), mais ce système était très peu utilisé. Un des buts poursuivis par Léonard de Pise a été de prouver à ses contemporains la supériorité de ce système sur le système littéral: il donne d'ailleurs de multiples exemples très caractéristiques et montre, notamment, comment on peut opérer, les doigts dans le nez, ou presque, la multiplication de deux nombres de huit chiffres indo-arabes, et cela, de manière fort élégante et surtout très rapide. Tente un peu, avec des chiffres romains, de multiplier, "par écrit", 788 et 246!

Au fait, sais-tu pourquoi on dit **numération positionnelle**? Tout simplement, parce qu'un quelconque chiffre a une signification différente selon la **position** qu'il occupe dans le nombre. Ainsi, dans $CCCLIII = 353$, le "3" de première position (à droite) signifie trois unités, alors que celui de troisième position (à gauche), signifie trois centaines. Dans la notation littérale romaine, par contre, chaque "I" représente une unité, quelle que soit sa position, et chaque "C" représente une centaine quelle que soit la place qu'il occupe dans le nombre.

Le petit problème qui suit illustre le principe de numération positionnelle.

Si tu as un copain qui ne lit pas *Math-Jeunes*, demande lui de lancer deux dés, alors que, bien entendu, tu lui tournes le dos. Demande-lui encore de multiplier la marque d'un des deux dés par cinq, d'y ajouter sept, de doubler cette somme, d'y ajouter la marque de l'autre dé et enfin de te communiquer le résultat final. Eh bien ... Tu risques de l'épater en lui annonçant ce que les deux dés affichaient au départ ... Car, si tu soustrais quatorze du résultat final, tu obtiens un nombre de deux chiffres, chacun de ces chiffres représentant la marque de l'un et l'autre dés. Mais, pourquoi cela marche-t-il à tous les coups? ... Essaie de le démontrer! (problème extrait de *Mathematical Recreations*, par Maurice Kraitchik, Dover Pub. Inc., New York, 1953).

Essaie aussi de résoudre l'exercice suivant: Quels sont tous les nombres de deux chiffres qui, augmentés de 75% de leur valeur, donnent le nombre renversé? (Extrait de *Mathematics Teacher*, Vol 83, n° 7, 1990).

([1]) Les chiffres dits "arabes" sont en fait indiens: ils furent ramenés des Indes par les Arabes.

Ayez le bon réflexe

A propos d'une question du challenge inter-écoles IBM

C. Van Hooste, *Athénée Royal Vauban*

Voici la question:

"Si l'on écrivait à la suite, par ordre croissant et en chiffres significatifs, tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 222222222, combien de fois aurait-on écrit le chiffre zéro?"

Une première méthode consisterait à dénombrer tous ces zéros en scindant le travail en plusieurs étapes. Pour les nombres allant de 1 jusqu'à 199999999, il n'y a aucune difficulté particulière. Il n'en va pas de même entre 200000000 et 222222222: le terrain se couvre d'embûches car de nombreux zéros significatifs apparaissent à l'intérieur de ces nombres. La relative difficulté de ce procédé se révèle alors et il faut beaucoup de soin pour mener à bien le décompte des zéros.

Pourtant, une autre méthode s'impose d'elle-même: la récurrence. Dès la lecture de l'énoncé, on la flaire. En effet, compter les zéros nécessaires pour écrire les naturels depuis 1 jusqu'à $\underbrace{2\ldots2}_{n+1\ chiffres}$ doit relever du même principe que de compter ceux qu'il faut mettre en œuvre pour écrire les naturels depuis 1 jusqu'à $\underbrace{2\ldots2}_{n\ chiffres}$. Donc, plutôt que de dénombrer effectivement tous ces zéros, il vaut mieux s'intéresser au moyen de passer d'un comptage à l'autre. Ayons le bon réflexe!

Appelons E_n l'ensemble des naturels allant de 1 jusqu'à $\underbrace{2\ldots2}_{n\ chiffres}$ et z_n le nombre de zéros indispensables pour écrire tous ces nombres.

Les nombres de l'ensemble E_{n+1} peuvent être construits selon le schéma suivant:

E_n		E_{n+1}						
			1			...	9	A
1	→	10	11			...	19	
2	→	20	21			...	29	
⋮		⋮	⋮				⋮	
9	→	90	91			...	99	
10	→	100	101			...	109	
11	→	110	111			...	119	
⋮		⋮	⋮				⋮	
99	→	990	991			...	999	C
100	→	1000	1001			...	1009	
⋮		⋮	⋮				⋮	
999	→	9990	9991			...	9999	
⋮		⋮	⋮				⋮	
22...2 n chiffres	→	22...20	22...21	22...22	22...23	...	22...29	B

Comme le montre ce schéma, chaque nombre de E_n permet de fabriquer dix nombres de E_{n+1} en lui collant un chiffre supplémentaire à droite. Cependant, par ce moyen, quelques nombres parasites sont apparus (ceux de l'ensemble B) et certains nombres n'ont pas été créés (ceux de l'ensemble A) de sorte

Math-Jeunes n° 51, 44-48, 1991

que

$$E_{n+1} = (C \setminus B) \cup A$$

On est maintenant en mesure d'évaluer le nombre de zéros à utiliser pour écrire les nombres de E_{n+1}:

$$z_{n+1} = 10 \cdot z_n + \underbrace{2 \cdots 2}_{n\ chiffres} ,$$

en notant qu'aucun zéro n'entre dans la composition des nombres appartenant aux ensembles A et B.

Nous avons ainsi la formule de récurrence souhaitée. Exploitons-la pour obtenir z_9 comme il est demandé.

$$\begin{aligned} z_9 &= 10 \cdot z_8 + 2 \times 11111111 \\ 10 \cdot z_8 &= 10^2 \cdot z_7 + 2 \times 11111110 \\ &\vdots \\ 10^7 \cdot z_2 &= 10^8 \cdot z_1 + 2 \times 10000000 \\ z_9 &= 10^8 \cdot z_1 + 2 \times 87654321 \end{aligned}$$

De plus, il ne faut pas le moindre zéro pour écrire les entiers depuis 1 jusqu'à 2 donc $z_1 = 0$.

En définitive, on a

$$\begin{aligned} z_9 &= 2 \times 87654321 \\ &= 175308642 \end{aligned}$$

Force est de constater que ce procédé ne demande guère de calculs, ce qui lui procure une certaine élégance.

Quadratures

Y. Noël.

E.N.S. Mons

1. Introduction

"Construire à la règle et au compas" un carré ayant même aire qu'une figure donnée est un sujet qui a provoqué beaucoup de recherches pendant des siècles. Ce problème a amené, dans le cas du cercle, une grande crise, source de progrès encore plus grands. Ce sujet a déjà été abordé dans *Math-Jeunes* (MJ n° 41, automne 1988: Les constructions à la règle et au compas et les polygones réguliers - Claudine FESTRAETS, pp. 1-9). Nous allons nous occuper ici d'un autre problème particulier:

Construire, en n'utilisant qu'une règle et un compas, un carré ayant même aire qu'un polygone quelconque.

Pour indiquer que deux figures ont même aire, nous dirons que ces figures sont *équivalentes*. Notre problème s'énonce donc:

Construire, en n'utilisant qu'une règle et un compas, un carré équivalent à un polygone $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

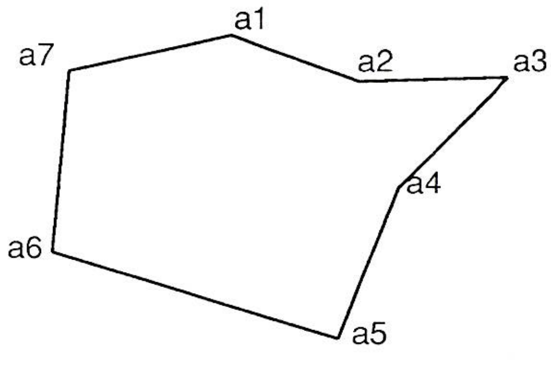


Figure 1

2. Simplifions le problème

...en remplaçant le polygone quelconque par un triangle abc.

2.1. Recherche d'un carré équivalent à un triangle *abc*

2.1.1. Egalité d'aires

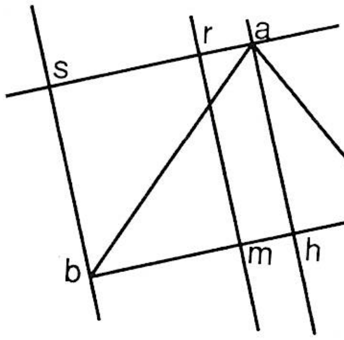


Figure 2

Si m est le milieu de $[bc]$ et si $ah \perp bc$, on a aire du triangle $abc = \frac{1}{2}.|bc|.|ah| = |bm|.|ah| =$ aire du rectangle $bmrs$. Ainsi, le rectangle $brms$ est équivalent au triangle abc. Nous utiliserons la référence TRIREC pour rappeler, dans la suite du texte, ce passage d'un TRIangle à un RECtangle équivalent.

2.1.2. Construction "TRIREC"

TRIREC nécessite la construction "à la règle et au compas" de :

- m milieu de $[bc]$
- P_1 perpendiculaire à bc comprenant m
- P_2 perpendiculaire à bc comprenant b
- P_3 perpendiculaire à P_2 comprenant a.

Ces constructions reposent toutes sur une propriété très importante que tu connais:

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment

Cette propriété permet de n'utiliser qu'une latte et un compas pour:

- Construire $\begin{cases}\text{le milieu d'un segment}\\ \text{la médiatrice d'un segment}\end{cases}$

  Les points x et y communs à deux arcs de même rayon centrés en b et c sont deux points de la médiatrice de $[bc]$.

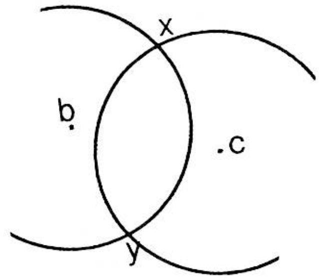


Figure 3

- Construire la droite comprenant un point p et perpendiculaire à une droite D.

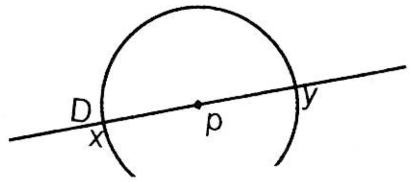


Figure 4

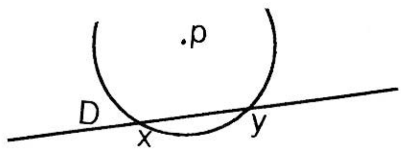


Figure 5

La droite cherchée est construite comme plus haut parce qu'elle est la médiatrice de $[xy]$.

Exerce-toi à réaliser *en utilisant uniquement une règle et un compas* (donc pas d'équerre, pas de rapporteur....) les constructions de la figure 2 ci-dessus.

Nous avons obtenu un rectangle $bmrs$ alors que nous cherchions un carré! Il reste donc à construire un CARré équivalent au RECtangle obtenu (RECCAR).

2.1.3. Construction "RECCAR".

La construction qui suit est basée sur un théorème classique:

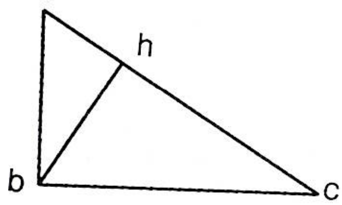


Figure 6

Dans tout triangle rectangle abc, si $ab \perp bc$ et $bh \perp ac$, on a $|bh|^2 = |ah|.|hc|$.

Les justifications nécessaires te sont données en encadré en fin d'article. Voici la construction adaptée à notre figure 2:

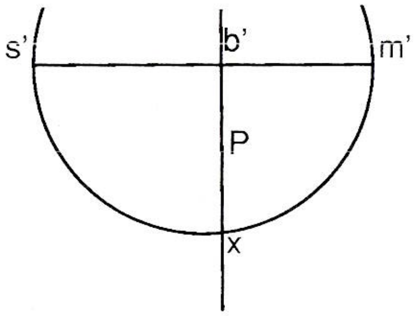


Figure 7

Aligner bout à bout deux segments de longueurs $|bm|$ et $|bs|(= |ah|)$. Tracer un demi-cercle sur $[s'm']$ comme diamètre. Tracer P perpendiculaire à $s'm'$ par b' pour obtenir le point x commun à P et au demi-cercle. Le triangle $s'xm'$ est rectangle et le carré cherché est un carré de côté $[b'x]$.

Ainsi le triangle abc et le carré $b'xyz$ ont même aire.

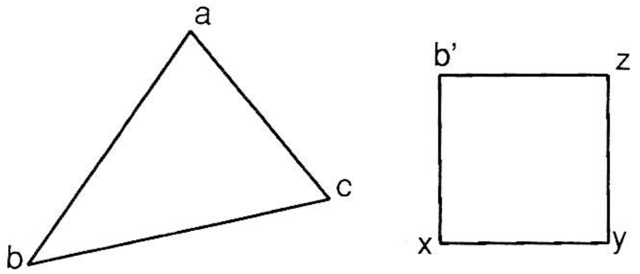


Figure 8

3. Comment obtenir un carré équivalent à un quadrilatère quelconque?

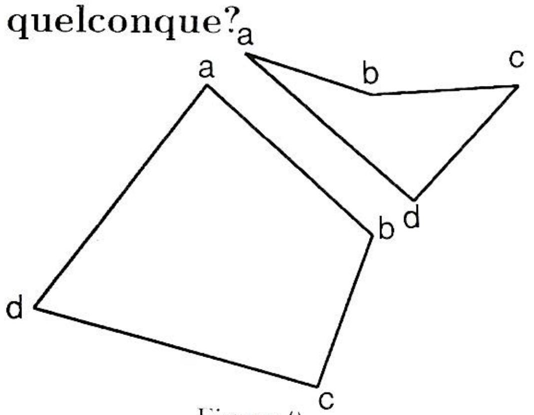


Figure 9

La diagonale bd partage chaque quadrilatère en deux triangles ayant $[bd]$ comme côté commun. Soit m le milieu de $[bd]$. Appliquons TRIREC à ces deux triangles — en prenant $[bm]$ comme premier côté du rectangle:

$$\begin{aligned} \text{aire } xyzt &= \text{aire } mxtd + \text{aire } mdzy \\ &= \text{aire } abd + \text{aire } bcd \\ &= \text{aire } abcd \end{aligned}$$

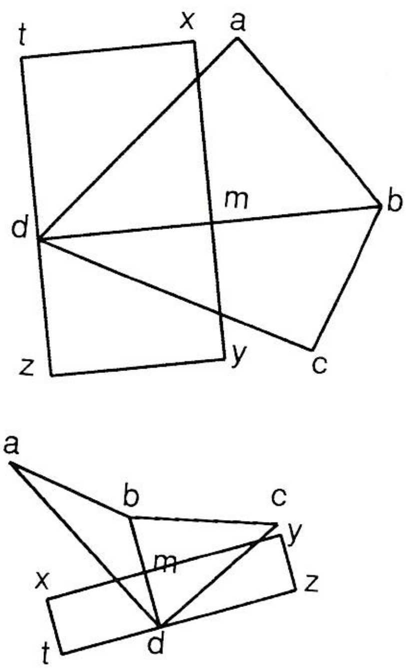


Figure 10

Le rectangle $xyzt$ est équivalent au quadrilatère donné. Il suffit maintenant d'appliquer RECCAR à ce rectangle.

4. Revenons au problème posé (fig.1)

- Le paragraphe 3 donne l'envie de découper le polygone en deux quadrilatères $a_1a_2a_3a_4$, $a_1a_4a_5a_6$ et un triangle $a_1a_6a_7$. Appliquons TRIREC à ce triangle et la construction décrite au paragraphe 3 aux deux quadrilatères. Nous obtenons trois rectangles:

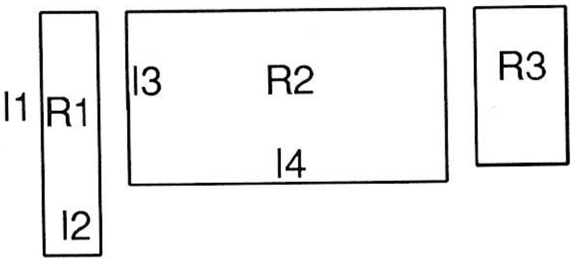


Figure 11

Si nous appliquons RECCAR à chacun de ces rectangles, nous obtiendrons *trois* carrés ...et le problème ne sera pas résolu puisque nous recherchons un *carré unique* équivalent au polygone (fig.1).

- Il faut donc construire un rectangle R dont l'aire est la somme des aires de R_1, R_2 et R_3. Nous obtiendrons finalement la solution du problème en appliquant RECCAR à R.

  Pour construire un rectangle R équivalent à $R_1 \cup R_2 \cup R_3$, nous devons choisir un des rectangles (R_2 par exemple) et une de ses dimensions (l_3 par exemple). Construire un rectangle R'_1 ayant une dimension égale à l_3 et équivalent à R_1. Procéder de manière analogue pour obtenir R'_3 équivalent à R_3. Le rectangle R sera alors obtenu en "juxtaposant convenablement" R'_1, R'_2 et R'_3.

- Construire un rectangle ayant une aire donnée et une dimension donnée: la méthode consiste à placer les rectangles dans un "grand rectangle" où des égalités d'aires sont évidentes.

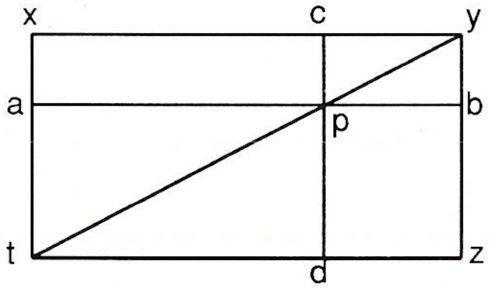


Figure 12

Si p est un point de la diagonale $[ty]$ du rectangle $xyzt$ et si $pa//xy$ et $pc//xt$, alors

$$\text{aire } xcpa = \text{aire } pbzd.$$

(Justifie cette égalité!)

Appliquons cette méthode en plaçant R_1 en $xcpa$ et en imposant la dimension l_3 en $[cy]$ pour obtenir R'_1 en $pbzd$.

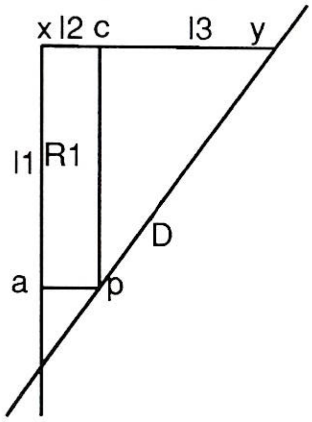


Figure 13

D diagonale du "grand rectangle" nous permet de trouver ce "grand rectangle" et R'_1.

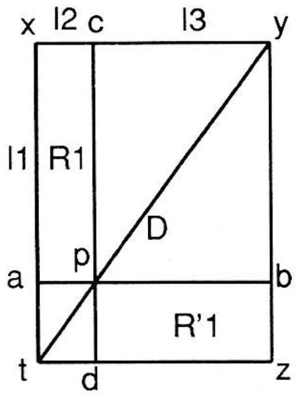


Figure 14

Un processus analogue fournit R'_3.

- Termine les constructions de R'_3, R et applique RECCAR à R pour obtenir le carré équivalent à $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

5. Complément

Deux propriétés importantes utilisées dans RECCAR.

- *Si le point u appartient au cercle C construit sur $[xy]$ comme diamètre, alors le triangle xuy est rectangle en u.*

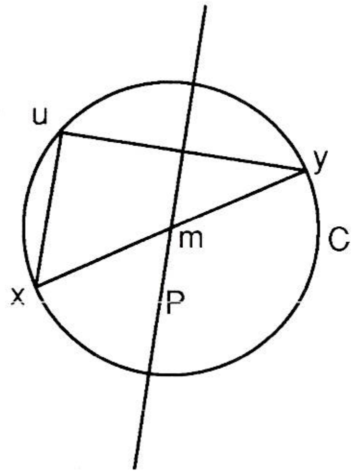


Figure 15

Par construction, m est le milieu de $[xy]$ et est le centre du cercle de rayon $|mx| = |my| = |mu|$.

Soit P la perpendiculaire à uy comprenant m. Comme le triangle umy est isocèle, P est à la fois hauteur et médiatrice dans ce triangle. Donc P coupe $[uy]$ en son milieu. Comme P coupe aussi $[xy]$ en son milieu, on a $P // ux$.

Enfin, de $P \perp uy$ et $P//ux$, on déduit $uy \perp ux$.

- *Dans tout triangle xuy rectangle en u. Si uh est une hauteur et h un point de xy, alors le carré construit sur $[uh]$ est équivalent au rectangle de dimensions $|xh|$ et $|hy|$.*

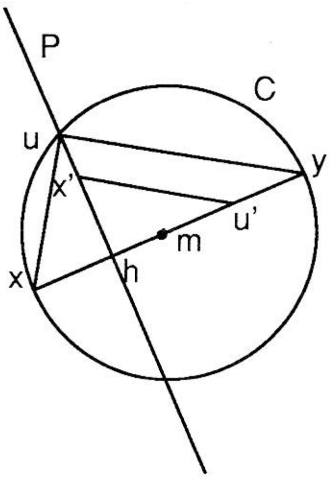


Figure 16

Appliquons au triangle chu la rotation de centre h et de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre : $\begin{cases} h \longmapsto h \\ x \longmapsto x' \\ u \longmapsto u' \end{cases}$

On a $xu \perp uy$ par hypothèse et $x'u' \perp xu$ par la rotation, donc $x'u' // uy$.

Considérons encore l'homothétie de centre h qui applique x' sur u. Elle applique aussi u' sur y et le rectangle $hx'su'$ sur le rectangle $huty$.

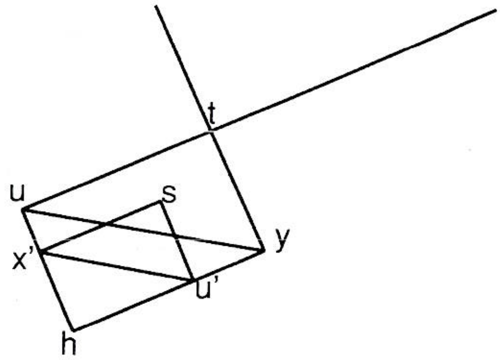


Figure 17

Donc s, t et h sont alignés et on retrouve une figure familière en complétant encore un peu le dessin:

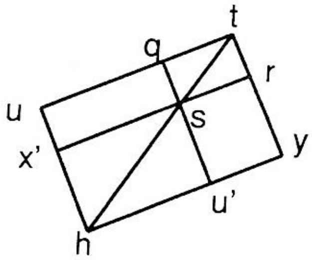


Figure 18

$$\begin{aligned} |uh|^2 &= |uh|.|hu'| \\ &= \text{aire } huty - \text{aire } u'sry - \text{aire } trsq \\ &= \text{aire } huty - \text{aire } x'uqs - \text{aire } trsq \\ &= |hy|.|hx'| = |hy|.|hx| \end{aligned}$$

La représentation des surfaces

M. Bekemans, *I.S.I.C.*

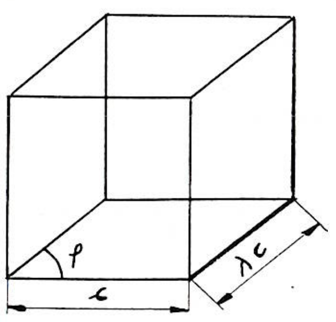
Tout le monde se trouve confronté un jour ou l'autre à l'étude de fonctions: étudiant, scientifique, ingénieur ... En effet, une courbe est toujours beaucoup plus parlante qu'une expression algébrique, mais la représentation n'est pas toujours aisée. Qui n'a jamais eu envie de taper sa fonction directement sur son micro-ordinateur et de la visualiser avant même d'en déterminer les caractéristiques. La tentation est grande, mais pour ce qui est de la représentation des fonctions de plusieurs variables, l'élaboration d'un programme informatique est un peu plus compliquée. Cet article vous propose quelques trucs pour rendre le travail un peu plus simple. Bon amusement!

1. La perspective cavalière

La perspective cavalière est simple à mettre en oeuvre et elle jouit en plus d'une propriété très importante: *"L'image d'une figure plane parallèle au plan de projection est isométrique à cette figure."* Cette perspective est caractérisée par deux paramètres :

- son angle de fuite φ
- son rapport de réduction λ

A titre d'exemple, voici l'image d'un cube de côté *c*



$\varphi = 45°$
$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Figure 1

2. Passage de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^2$

Le problème est d'associer au triplet (x, y, z) définissant la position d'un point dans l'espace, un couple (x', y') positionnant le point sur l'écran de l'ordinateur. La perspective cavalière associe aux vecteurs (1,0,0) et (0,0,1) de $\mathbb{R}^3$ les vecteurs (1,0) et (0,1) de $\mathbb{R}^2$. Quant au troisième vecteur unité $(0, 1, 0)$, définissant la profondeur, elle lui associe le vecteur $(\lambda \cos\varphi, \lambda \sin\varphi)$. Ainsi, au triplet (x,y,z) elle associe le couple:

$$x(1,0) + y(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi) + z(0,1)$$
$$= (x + y\lambda\cos\varphi, z + y\lambda\sin\varphi)$$

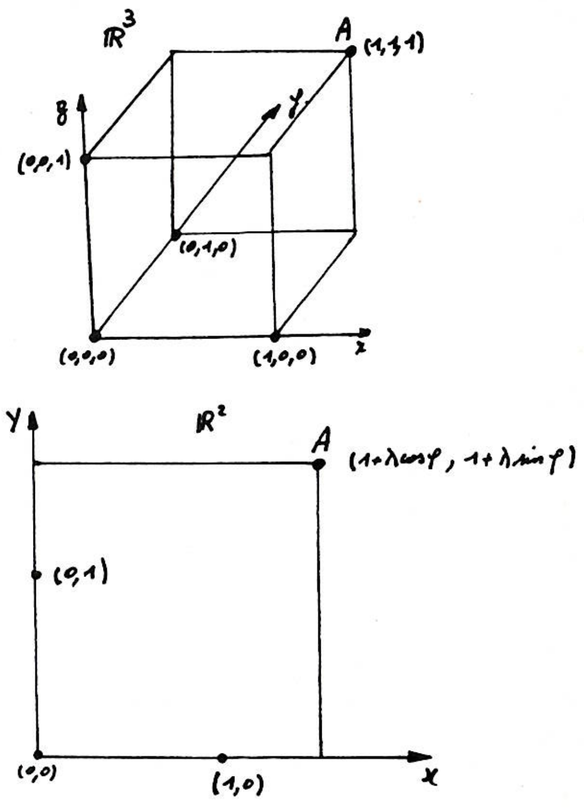


Figure 2

3. Fonction de deux variables

Une fonction de deux variables associe à chaque couple (x, y) un nombre z. Cette fonction est notée f, on écrit: $z = f(x, y)$. Le lieu géométrique des points vérifiant cette équation est une surface. Mais, si l'on représentait tous les points de la surface, le résultat serait tout à fait illisible. Il faut donc se limiter à une partie du domaine de la fonction. Nous choisirons un découpage en courbes parallèles au plan de projection. Nous obtenons ainsi pour diverses valeurs de y une succession de courbes à une variable $[z = f(x, y)]_{y=cste}$. On pourra se faire

ainsi en un rapide coup d'oeil, une image du relief de la surface.
Exemple: $z = \sin(x^2 + y^2)$

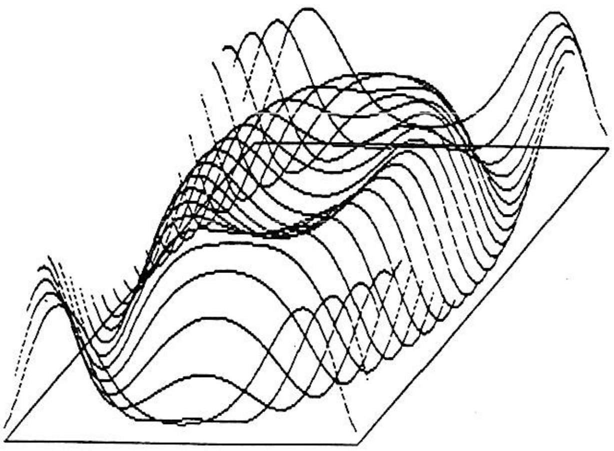


Figure 3

4. Suppression des parties cachées

Une amélioration nous permettra de ne représenter que les points visibles. Ce problème sera résolu aisément du fait de l'emploi de la perspective cavalière. Comme on le sait, la surface est représentée par une succession de courbes planes C_i résultant de son intersection avec un plan parallèle au plan de projection xoz.

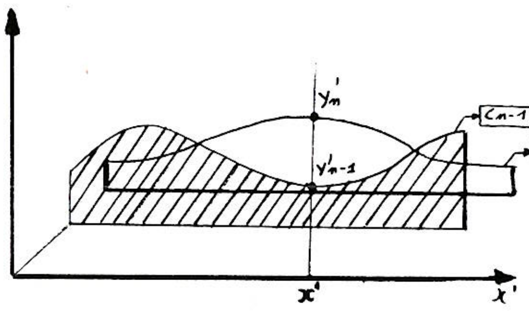


Figure 4: si $y'_n > y'_{n-1}$ alors le point est vu

Les parties vues de la courbe C_n seront les parties qui possèdent dans le plan $x'oy'$ une ordonnée supérieure à toutes les autres courbes de C_0 à C_{n-1}. Nous conserverons donc une courbe "enveloppe" qui sera la courbe des ordonnées maximum, que nous comparerons avec la nouvelle courbe à tracer pour décider des parties vues ou cachées. Après quoi, il faudra prendre soin de redéfinir une nouvelle courbe enveloppe en tenant compte de la dernière courbe tracée.

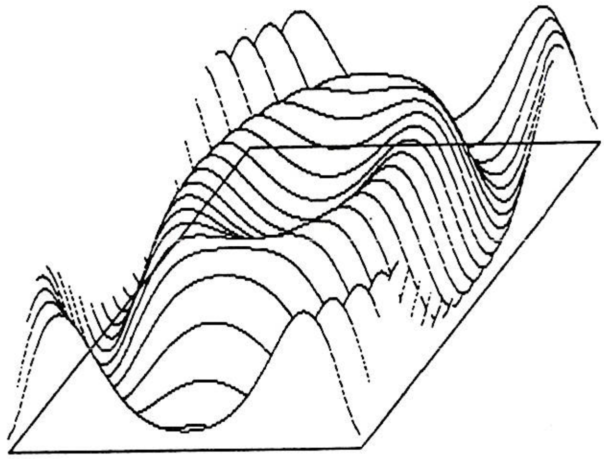


Figure 5

5. Surfaces pleines

On peut se demander s'il n'existe pas une autre manière de représenter une surface dans $\mathbb{R}^3$. Une autre méthode consiste à jouer avec la luminosité. Si on imagine que la surface est un drap que l'on éclaire avec des rayons lumineux parallèles, les différentes luminosités que va prendre la surface vont nous permettre de visualiser sa forme.

La quantité de lumière reçue en un point de la surface peut être déterminé à l'aide d'un produit scalaire. Nous pouvons en effet définir la direction de la lumière par un vecteur "orientation lumineuse", noté $\vec{L}$ de longueur 1, dirigé vers la source de lumière ([1]). Nous pouvons aussi considérer un vecteur de longueur 1 perpendiculaire au plan tangent à la surface au point observé et orienté vers le haut.

- Si la lumière arrive perpendiculairement à la surface, en éclairant sa face supérieure, l'angle des deux vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 1 et la luminosité est maximum, la surface est blanche.

- Si la lumière est rasante, l'angle est droit, le produit scalaire vaut 0 et la surface est beaucoup moins éclairée (grise).

- Si la lumière arrive perpendiculairement à la surface mais en éclaire sa face inférieure, les deux vecteurs sont en opposition, l'angle est plat, le produit scalaire vaut -1 et la luminosité est nulle, la surface est noire.

([1]) Nous supposons que les rayons lumineux sont parallèles

On pourra ainsi associer à chaque point une intensité lumineuse variant de 1 à -1. On représente alors le point par une marque plus ou moins grise en choisissant autant de nuances de gris que possible. Pour ce type de représentation, le nombre de couleurs est beaucoup plus important que la précision du dessin. Un minimum de 16 nuances est indispensable pour que l'effet soit réaliste.

Mais on peut se demander si la luminosité est une fonction linéaire de l'orientation. Si on la considère comme telle, la surface aura un aspect mat, sinon elle sera plus ou moins brillante suivant la fonction choisie.

Le résultat sur l'écran est satisfaisant car la transition des couleurs est très douce, sur l'imprimante, le résultat dépend très fort de la qualité de celle-ci.

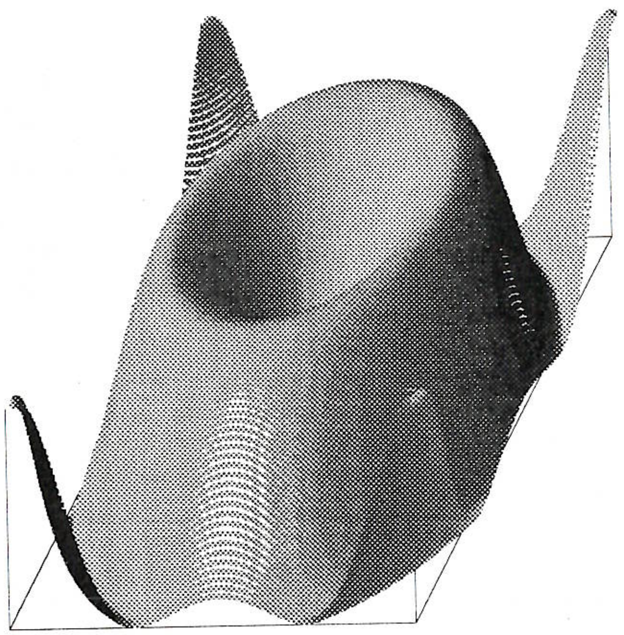


Figure 6

Si tu veux savoir comment il est possible de déterminer les coordonnées du vecteur perpendiculaire à une surface en un point, l'encadré ci-dessous peut t'intéresser. Tu dois cependant maîtriser les notions de dérivée partielle et de géométrie vectorielle.

Calculons d'abord les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ construits sur les tangentes t_1 et t_2:

$$\vec{u_1} = (0, 1, \operatorname{tg}\varphi)$$
$$\vec{u_2} = (0, 1, \operatorname{tg}\theta)$$

$\operatorname{tg}\varphi$ est la dérivée partielle de f par rapport à y et $\operatorname{tg}\theta$ est la dérivée partielle de f par rapport à x. Nous noterons $\operatorname{tg}\theta = f'_x, \operatorname{tg}\varphi = f'_y$.

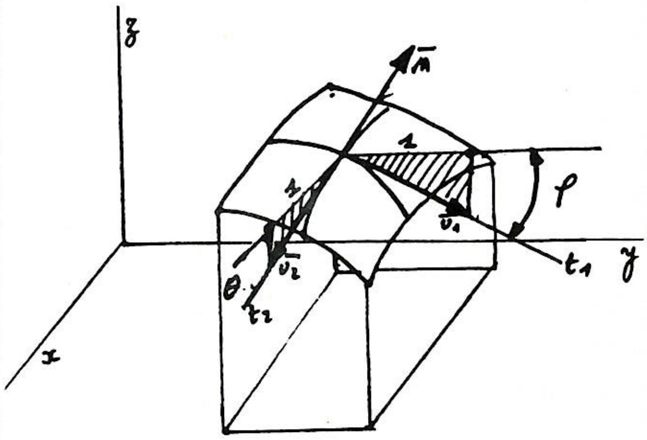


Figure 7

Le vecteur $\vec{n}$ doit être perpendiculaire au plan tangent de vecteurs directeurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$. Comme on le sait, toute droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan. On peut écrire:

$$\begin{cases} \vec{u_1} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{u_2} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{n} &= (x, y, z) \\ \vec{u_1} &= (0, 1, f'_y) \\ \vec{u_2} &= (1, 0, f'_x) \end{aligned}$$

En calculant les produits scalaires:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y + f'_y \cdot z = 0 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + f'_x \cdot z = 0 \end{cases}$$

Prenons $z = 1$ alors $x = -f'_x$ et $y = -f'_y$, $\vec{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$.

Le vecteur de longueur 1 proportionnel à $\vec{n}$ est:

$$\vec{n'} = \frac{\vec{n}}{\| \vec{n} \|} = \frac{-f'_x \cdot \vec{\imath} - f'_y \cdot \vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}}$$

Le coin de la tortue

Aucune réaction aux propositions faites dans le numéro précédent! Les dessins présentés étaient-ils trop compliqués à réaliser ? Nous y reviendrons dans le numéro 52 : tu peux encore nous envoyer des projets de programmes qui réalisent soit les dessins que nous publions, soit ceux de ta création. En attendant, voici une nouvelle suggestion : essaye de construire des variantes de *l'arbre de Pythagore*.

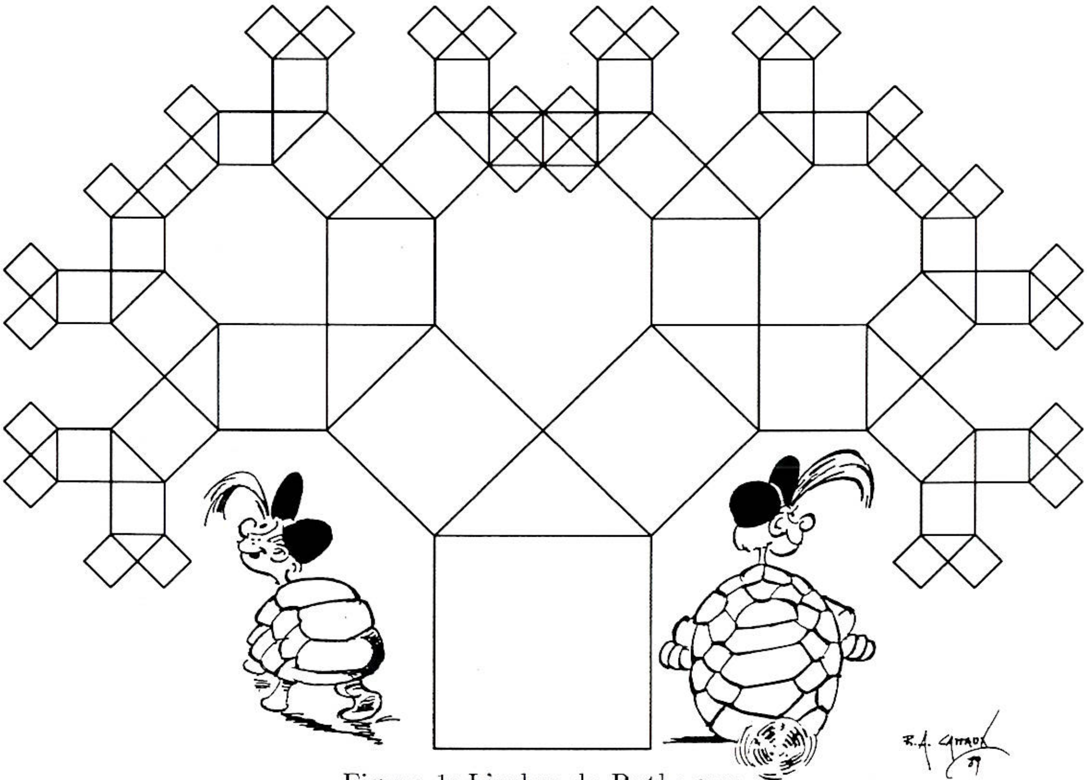


Figure 1: L'arbre de Pythagore

Voici le programme LOGO:

`Pour PYTHA :L :N`	L est la longueur du coté du carré de base
`(LOCAL "DIR "POSI)`	N est la hauteur de l'arbre (0: un seul carré)
`CARRE :L`	On dessine le carré de base
`SI :N = 0 ALORS STOP`	Si `N = 0`, on s'arrête
`AV :L DR 45`	Sinon, on retourne au coin supérieur gauche
`RELIE "DIR CAP RELIE "POSI XYCOR`	et on mémorise la position
`GA 90`	Quart de tour à gauche
`PYTHA :L / RCARREE 2 :N - 1`	Dessin de la branche de gauche
`LC FIXEXY :POSI FIXECAP :DIR BC`	On revient à la position mémorisée
`AV :L / RCARREE 2`	On se rend au départ de l'autre branche
`PYTHA :L / RCARREE 2 :N - 1`	Dessin de la deuxième branche
`Fin`	Et c'est fini !

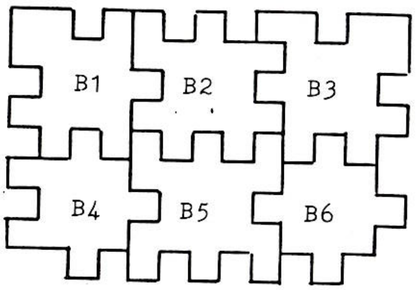
```
Pour CARRE :L
REPETE 4 [AV :L DR 90]
Fin
```

Puzzle

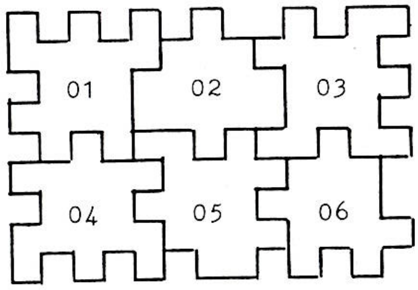
A. Parent,

• Sous le nom de "HAPPY CUBE", 6 puzzles en matière synthétique viennent de réaliser une percée très remarquée. Sous différentes couleurs indiquant leur degré de difficulté, leur inventeur, Dirk LAUREYSSENS, les présente selon la disposition ci-dessous:

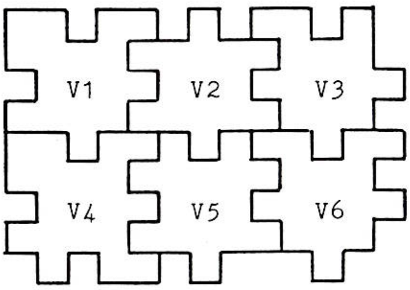
BLEU



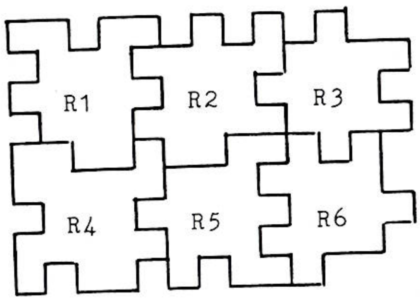
ORANGE



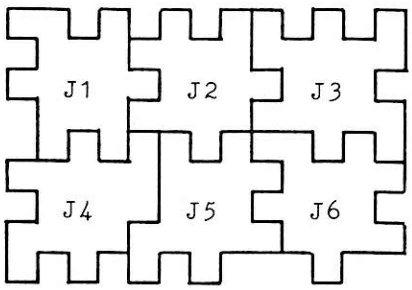
VERT



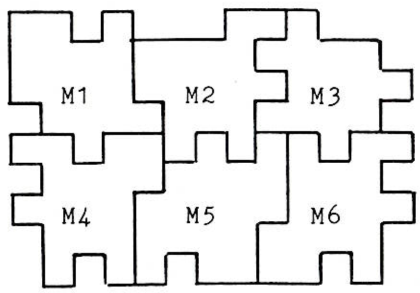
ROUGE



JAUNE



MAUVE



Afin de faciliter le repérage, chaque pièce est marquée de la première lettre de sa couleur et du numéro de sa position dans leur emballage.

Tu remarqueras que certaines pièces apparaissent dans une seule configuration, d'autres plusieurs fois; certaines ont un centre de symétrie, un ou plusieurs axes de symétrie.

• Considérons le mini-cube de base comme unité de volume; voici les mesures de chaque pièce dans l'ordre convenu:

BLEU

17	17	18
14	19	13

ORANGE

17	15	18
17	17	14

VERT

17	15	15
19	16	16

ROUGE

17	17	14
19	16	15

JAUNE

16	15	18
17	16	16

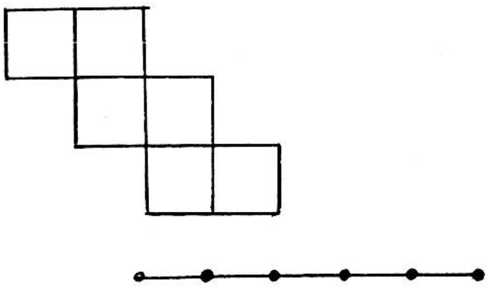
MAUVE

16	16	14
17	18	17

Les 6 pièces d'une même couleur permettent de reconstituer un cube de volume 125 minicubes, le vide central cubique est de 27 minicubes. Bien entendu, le volume des pièces de chaque couleur mesure 98 minicubes.

• Le cube reconstitué pose le problème de la sauvegarde de la solution. Songer à utiliser un développement du cube semble tout indiqué. Associons, à un tel développement, un graphe dans lequel les sommets représentent les faces du cube et les arêtes, les segments reliant deux faces voisines du développement.

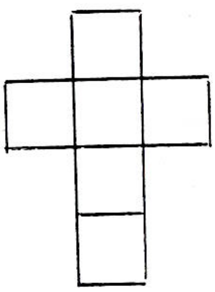
Voici un graphe issu de cette idée:

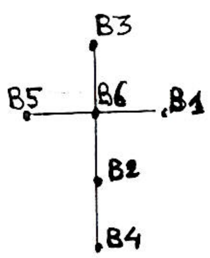


Remarque qu'il existe toujours un chemin reliant deux sommets quelconques du graphe; en effet, il est toujours possible de passer d'une face quelconque à une autre en parcourant la surface du cube. De plus, il est impossible de partir d'un sommet du graphe et d'y revenir en utilisant des arêtes différentes. Ce type de graphe porte le nom d'arbre.

Il en existe six différents de six sommets. Essaie de les découvrir et d'associer chacun des onze développements du cube à l'arbre correspondant. [1].

Revenons à notre puzzle en utilisant un autre développement du cube et son arbre associé marqué des pièces bleues positionnées.





Comme nos pièces ne sont pas les faces carrées du cube, leur situation est sans doute repérée, mais pas leur orientation.

En nous inspirant du codage d'une solution par couches superposées, proposé par MEEUS et TORBIJN , notons de bas en haut la position de chaque pièce.

Niveau 1

B5	B3	B6	B3	B3
B5	B6	B6	B6	B1
B6	B6	B6	B6	B6
B5	B6	B6	B6	B1
B5	B2	B6	B2	B1

Niveau 2

B3	B3	B3	B3	B3
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B2	B2	B2	B2	B1

Niveau 3

B5	B3	B3	B3	B1
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B5	B2	B2	B2	B2

Niveau 4

B3	B3	B3	B3	B3
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B2	B2	B2	B2	B1

Niveau 5

B5	B4	B3	B4	B3
B5	B4	B4	B4	B1
B4	B4	B4	B4	B4
B5	B4	B4	B4	B1
B5	B2	B4	B2	B2

Pour la reconstitution des cinq autres cubes ainsi que des différents solides proposés par l'inventeur à l'aide de

- 2 ou 3 couleurs
- 6 pièces de couleurs différentes
- 24 pièces
- 30 pièces

envoie-nous tes solutions. Utilise la méthode de codage ci-dessus.

• Si tu disposes du langage LOGO sur un ordinateur, la réalisation graphique des pièces est aisée. L'utilisation des procédures suivantes facilitera tes programmes et permettra un changement rapide de l'échelle en modifiant le nombre de pas de la procédure A

```
Pour A      Pour G      Pour D
AV 10       GA 90       DR 90
Fin         Fin         Fin
```

Convenons de positionner initialement la tortue au point le plus en bas et à gauche dans la configuration de l'emballage. N'oublie pas que B1 n'a pas d'axe de symétrie et qu'une autre procédure est indispensable afin d'utiliser la pièce B1 retournée.

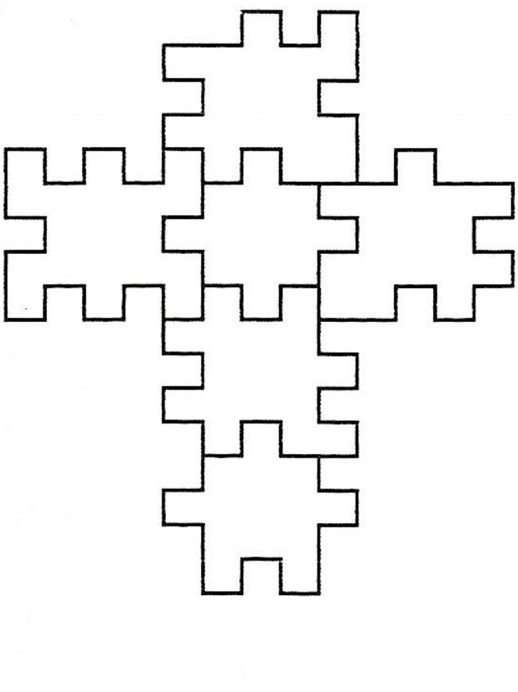
```
Pour B1                 Pour RB1
A G A                   A D A
REPETE 2[D A]           REPETE 2[G A]
REPETE 2[G A]           REPETE 2[D A]
REPETE 2[D A A]         REPETE 2[G A A]
D A                     G A
REPETE 2[G A]           REPETE 2[D A]
REPETE 2[D A]           REPETE 2[G A]
A G                     A D
REPETE 2[A D]           REPETE 2[A G]
A G A                   A D A
REPETE 2[A D]           REPETE 2[A G]
REPETE 2[A G]           REPETE 2[A D]
REPETE 2[A D]           REPETE 2[A G]
Fin                     Fin
```

Tu auras noté la particularité de ces programmes.

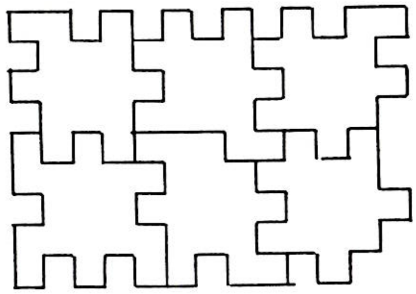
• Une fois réalisées toutes les pièces du puzzle, tu peux redessiner les 6 premières figures (page 53).

Bien sûr, la solution peut aussi faire l'objet d'un programme.

```
Pour CUBEBLEU
[B6]
LC G REPETE 6 [A] D BC [B5]
LC D REPETE 4 [A] G REPETE 8 [A] D BC
[B3]
LC REPETE 9 [A] D REPETE 7 [A] D BC [B1]
LC REPETE 9 [A] G REPETE 4 [A] G BC [RB2]
LC REPETE 5 [A] D REPETE 3 [A] D BC [B4]
Fin
```



• Pour la petite histoire, depuis quelques temps, les restaurants d'une chaîne de grandes surfaces française offrent à leurs clients un puzzle publicitaire blanc dans la configuration ci-dessous. Recherche l'éventuel lien de parenté avec un des 6 puzzles présentés.



Références

[1] Pierre TOUGNE, Combien de patrons un polyèdre peut-il avoir ? *Pour la science*, N° 103, (1986).

[2] J. MEEUS et P.-J. TORBIJN, Polycubes, *Ed. CEDIC*

pi-riforme

 Math-Jeunes n° 51, 56–57, 1991

P. Van Elsuwé

Eliminatoire 1991.

Le mercredi 23 janvier, 7517 élèves (1905 en première, 2396 en deuxième, 3216 en troisième) répartis dans 242 écoles pour l'épreuve Mini et 5568 (1766 en quatrième, 1842 en cinquième, 1960 en sixième) répartis dans 254 écoles pour l'épreuve Maxi ont participé à l'éliminatoire 1991 de l'Olympiade Mathématique.

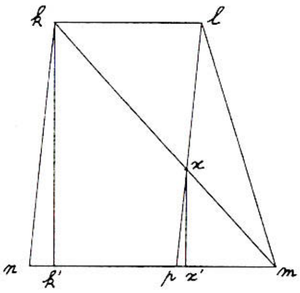
Une fois de plus, c'est avec enthousiasme que les participants se sont acharnés sur les 30 questions. Afin de pouvoir situer ta performance, tu trouveras en annexe un histogramme national de ces éliminatoires.

Je te propose quelques solutions aux problèmes posés.

Question 7 Mini

Aire du tapis : $2,5 \times 3,5 \text{ m}^2 = \frac{5}{8}$ aire du parquet
$\frac{1}{8}$ aire du parquet $= \frac{1}{5} \times 2,5 \times 3,5 \text{ m}^2 = 1,75 \text{ m}^2$
Aire du parquet non couvert par le tapis : $\frac{3}{8}$ aire du parquet $= 3 \times 1,75 \text{ m}^2 = 5.25 \text{ m}^2$.

Question 27 Mini, 20 Maxi



Considérons les segments $[k,k']$ et $[x,x']$ hauteurs respectivement du trapèze $klmn$ et du triangle xmp.

Comme $\widehat{kmn} = \widehat{xmp}$ et $\widehat{knm} = \widehat{xpm}$, les triangles kmn et xmp sont semblables. Dès lors, les segments homologues sont proportionnels:

$$\frac{|xx'|}{|kk'|} = \frac{|mp|}{|mn|}$$

Nous en déduisons que $|xx'| = \frac{|kk'|.|mp|}{|mn|} = 4$.

Question 5 Maxi

Appelons S la somme demandée. Nous avons

$$S = 100 + 101 + \cdots + 998 + 999$$

mais aussi

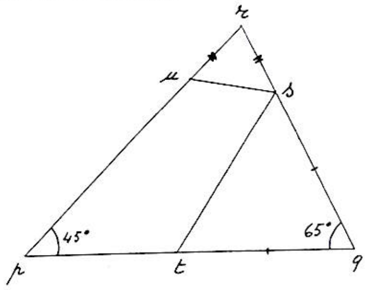
$$S = 999 + 998 + \cdots + 101 + 100$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons :

$$2S = (100 + 999) + \cdots + (999 + 100)$$

Comme toutes les sommes entre parenthèses sont égales à 1099, et qu'il y en a 900, nous avons $2S = 1099 \times 900$ et par conséquent $S = 494.550$.

Question 6 Maxi

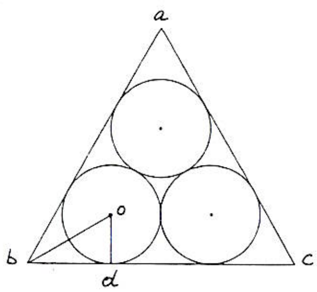


Comme $\widehat{qpr} = 45°$ et $\widehat{pqr} = 65°$, nous avons $\widehat{prq} = 180° - 45° - 65° = 70°$. Puisque $|qs| = |qt|$, le triangle sqt est isocèle et dès lors $\widehat{tsq} = \widehat{stq} = \frac{180° - 65°}{2} = 57°30'$.

Puisque $|rs| = |ru|$, le triangle sru est isocèle et dès lors $\widehat{rsu} = \widehat{rus} = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$.

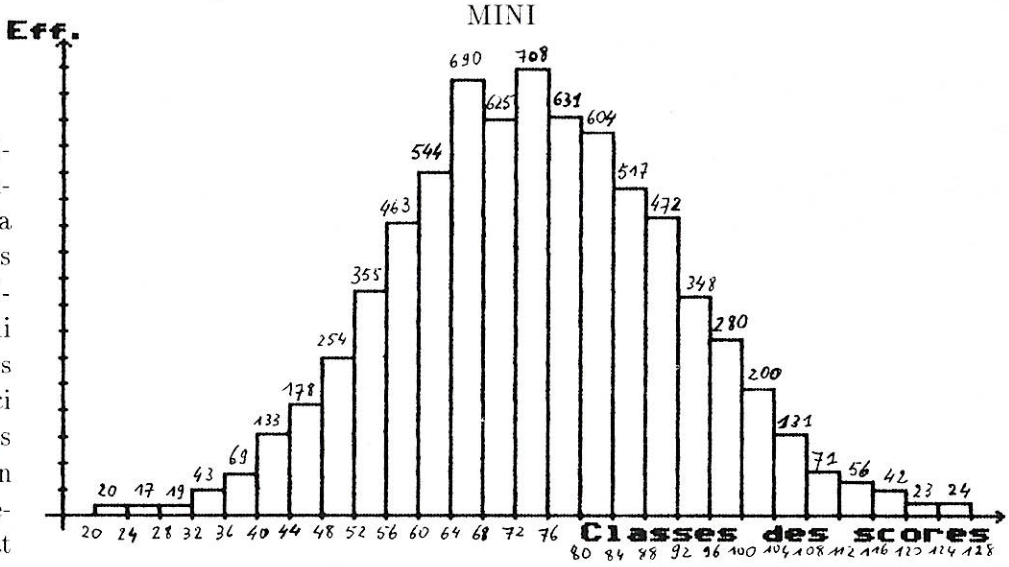
Comme $\widehat{rsu} + \widehat{ust} + \widehat{tsq} = 180°$, nous en déduisons que $\widehat{ust} = 180° - 55° - 57°30' = 67°30'$

Question 23 Maxi



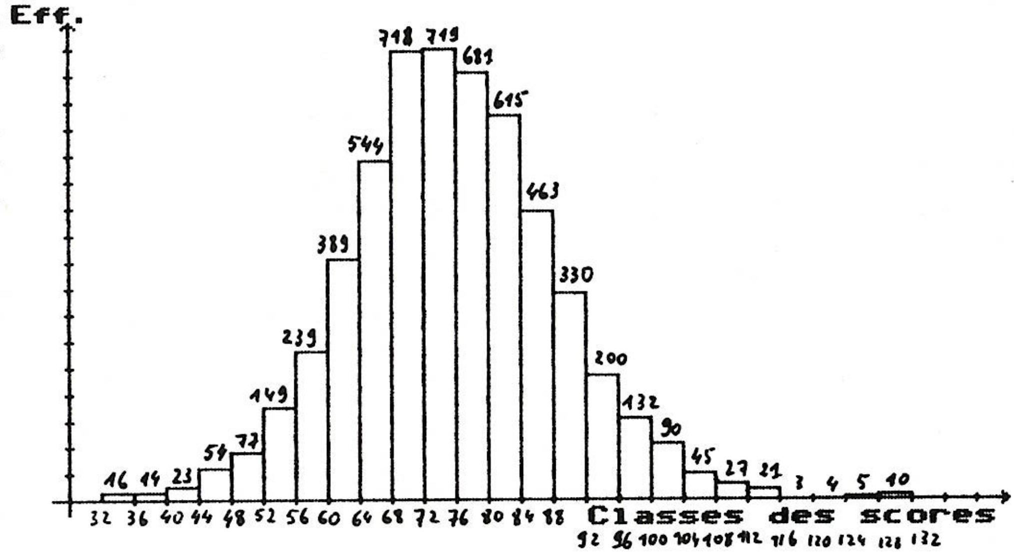
Histogrammes de l'éliminatoire

MINI



Eric LELEUX, de l'Institut Technique et Commercial de Boussu a réalisé les histogrammes des résultats de l'éliminatoire, tant en Mini qu'en Maxi et nous les a fait parvenir. Merci Eric ! Si tu souhaites plus de détails (combien d'élèves avaient exactement le même résultat que toi, combien fallait-il pour être sélectionné pour la demi-finale?...) demande au professeur responsable de l'Olympiade dans ton école: il a reçu un tableau complet, ainsi que les critères de sélection.

MAXI



	Mini	Maxi
Effectif	7517	5568
Mode	74	74
Moyenne	74,3	75,6
Médiane	72,5	75,1
Ecart-type	17,6	13,2

Appelons r le rayon cherché. Le triangle abc étant équilatéral, $\widehat{abc} = 60^\circ$. Le point o étant équidistant des droites ab et bc, appartient à la bissectrice de $\widehat{abc}$. Dès lors $\widehat{obd} = 30^\circ$.

Dans le triangle obd rectangle en d, on a : $|od| = |bd| \operatorname{tg} 30^\circ$ c'est-à-dire $r = (2-r)\frac{\sqrt{3}}{3}$. En résolvant cette simple équation du premier degré, on obtient $r = \sqrt{3} - 1$.

Demi-finale 1991

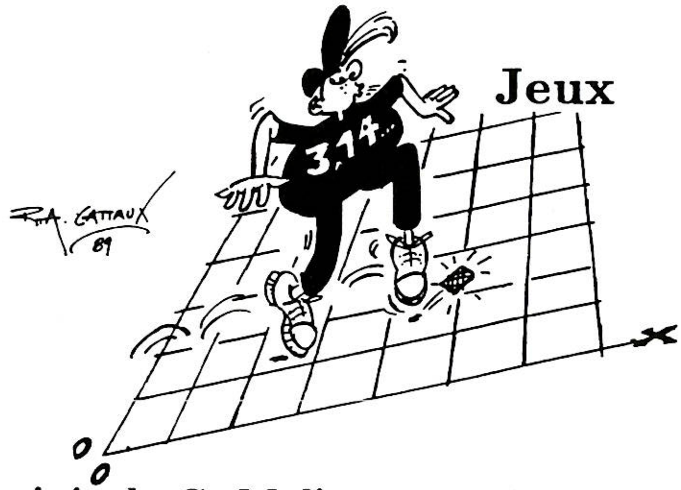
1074 élèves de Mini et 973 élèves de Maxi se sont qualifiés pour la demi-finale du 27 février. Le questionnaire Maxi de la demi-finale est celui de la première partie du test américain. Ce test est organisé le même jour dans le monde entier avec la participation de plus de 500.000 élèves.

En supplément de ton *Math-Jeunes* tu as reçu les questionnaires de ces demi-finales. Amuse-toi en essayant de répondre aux questions et vérifie tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous.

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mini	D	E	C	B	B	C	D	C	E	C
Maxi	E	E	A	C	E	E	B	C	D	B
Questions	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Mini	C	B	D	4	C	A	C	D	D	D
Maxi	B	D	D	C	B	D	D	D	B	E
Questions	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Mini	A	A	13	128	B	D	E	D	200	C
Maxi	A	B	C	D	D	C	C	B	B	B

Math-Jeunes n° 51, 58-59, 1991

Jeux



Les Mots Croisés de G. Malisse

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2						■			
3								■	
4				■			■		
5	■		■						
6					■				■
7							■		
8						■			
9		■							

Horizontalement:

1.Prouver
2.Accord - Indivisible
3.Décoration
4.Mesure - Début d'un verbe en anglais - Article
5.Uniques
6.Propre de l'homme - Rongeur
7.Particules - Pronom personnel
8.Personnage célèbre - On doit souvent calculer son aire
9.Qualifie un certain vent

Verticalement:

1.Se prolongea - Catégorie
2.Dépasse la mesure
3.Enjeu - Fleur
4.Retire - Dispersât
5.Claire - Longue période
6.De contrôle, parfois
7.Regimbe - Article - Très utile en math
8.Préposition - Missive
9.Penses - Article en néerlandais

A. Parent

Grille à décoder (G.Malisse)

Chaque nombre est toujours associé à la même lettre. Pour faciliter tes recherches, trois lettres sont déjà décodées.

1 P	2 A	3 R	4	5	6	5	1	7
3	5	7	8	3	■	3	2	4
7	9	9	7	■	4	7	4	7
1	7	8	3	7	8	10	7	10
2	10	5	2	4	7	■	3	■
3	■	10	5	3	7	11	7	10
2	■	2	10	7	10	■	10	7
4	5	11	■	11	■	12	■	11
5	11	4	7	11	10	7	10	■
13	4	7	3	7	11	4	■	8
11	7	■	7	■	13	4	7	10
■	11	13	■	2	12	7	4	5
7	4	5	7	3	■	10	■	11
11	7	7	■	7	4	■	9	7

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2												

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
		1		3								

Les auto-références

Si tu as pris goût à ce type de jeu, voici d'autres grilles. Rappelons qu'il s'agit de compléter le tableau pour que les affirmations soient vraies.

Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 4
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 5
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 6

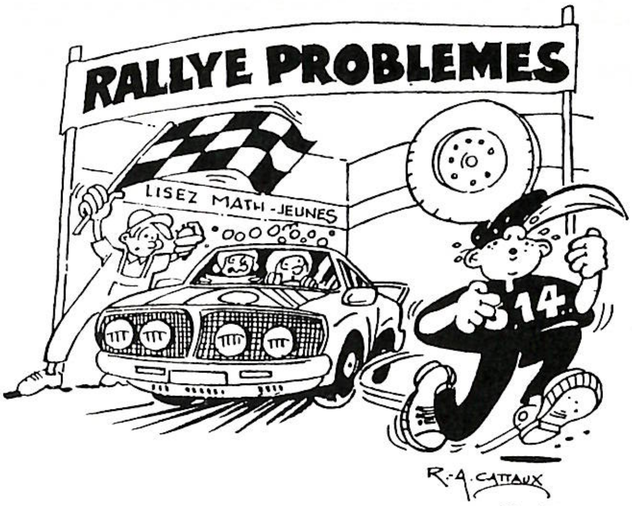
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 4
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 5
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 6
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 7
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 8

Nombres croisés

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Horizontalement:
1.Carré parfait
2.L'an dernier
3.Factorielle
4.Somme des deux premières lignes

Verticalement:
1.Nombre premier
2.Multiple de 137
3.La somme des chiffres est 22
4.Nombre palindrome



C. Festraets

Voici les six derniers problèmes de ce rallye. Envoyez vos solutions à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles avant le 10 avril. Cette date limite est impérative!

m7 Sur le côté AB d'un triangle ABC, on construit vers l'extérieur le triangle rectangle isocèle BAF avec $\widehat{BAF} = 90°$ et $|BA| = |AF|$; de même sur le côté AC, on construit vers l'extérieur le triangle rectangle isocèle CAE avec $\widehat{CAE} = 90°$ et $|CA| = |AE|$. Démontrer que la médiane AM du triangle ABC est perpendiculaire à EF.

m8 On développe le produit suivant

$$(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744}$$

et on obtient un certain polynôme. Quelle est la somme de tous ses coefficients?

m9 Deux voies ferrées rectilignes se croisent à angle droit. Deux trains de marchandises sont situés l'un sur l'une des voies, l'autre sur l'autre voie, le premier à 40 km du croisement et roulant vers celui-ci à la vitesse de 48km/h, le second à 50km du croisement et roulant vers celui-ci à la vitesse de 36km/h. Au bout de combien de minutes se trouveront-ils à une distance minimum l'un de l'autre et que vaut cette distance?

M7 a,b,c étant des naturels non nuls, déterminer (avec preuve) toutes les solutions du système

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

M8 Si les quatre faces d'un tétraèdre ont le même périmètre, sont-elles deux à deux superposables par un déplacement?

M9 Trois des racines de l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ sont $\text{tg}\, A$, $\text{tg}\, B$, $\text{tg}\, C$ où A, B, C sont les angles d'un triangle. Déterminer la 4e racine en fonction de p, q, r, s.

 Math-Jeunes n° 51, 60–60, 1991

Soir de Raid

P. Dupont, *Faculté agronomique de Gembloux*

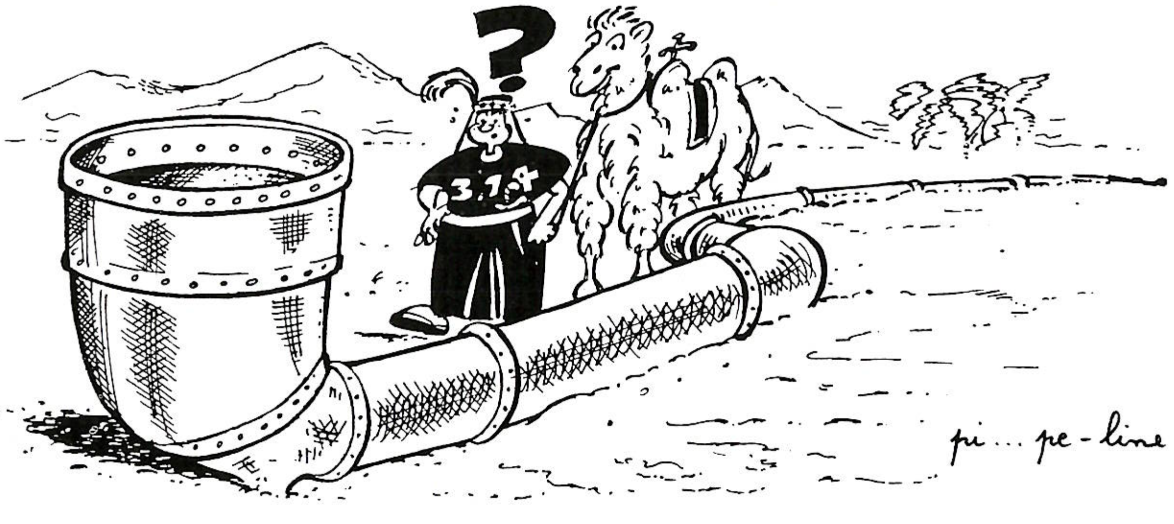
Si le texte ci-dessous ressemble si peu à un chef-d'œuvre littéraire, c'est que son auteur s'est ingénié à y dissimuler des noms de mathématiciens illustres. La règle du jeu est simple : les noms y sont à la lettre près, mais les accents ne sont pas nécessairement respectés; bien sûr, un nom peut chevaucher plusieurs mots du texte. Lecteur, combien en trouveras-tu? Seule indication : il y en a, en moyenne, plus d'un par ligne de texte.

La Land se traînait sur la piste depuis le matin. On pensait à s'arrêter, car dans moins d'une heure il ferait noir, lorsque le véhicule s'embourba. "Kilomètre 370" conclut Jacques, *le Vieux*, comme nous l'appelions; toujours flegmatique, le Vieux; personne ne tint d'ailleurs compte de sa remarque, car, comme Pierre, son neveu, le remarqua, il ne savait pas calculer; mais il était costaud. Tout le monde descendit et se mit à l'ouvrage. Il a fallu casser et lier des branches, pelleter,... Après beaucoup d'efforts, la voiture fut dégagée. Tout le monde était en sueur; "Ces pores m'énervent", pensait chacun. Le pneu était sali. "Ou villeux, plutôt" pensa Patrick, le médecin de l'équipe. De fait, ce pneu était usé jusqu'à la corde : il faudrait bientôt le remplacer.

Cependant, alors que personne n'y prenait garde, Anne se pâma : l'effort fourni? une grippe anodine? ou plus grave? L'estomac? la néphrite? "Nom de Dieu! Donnez-lui à boire!" s'écria Pierre; on rechercha le triste vin qui nous restait, mais Patrick s'interposa : "Qu'on la couvre plutôt; où est le turban acheté la semaine dernière? D'ailleurs, cela ne m'a pas l'air grave." Il l'examina rapidement, puis referma tout-de-suite sa trousse et conclut : "Ce n'est rien; ce travail aura abêti la belle demoiselle." Pierre se gaussait : "Il a mené l'auscultation à un train d'enfer; c'est du grand art, indiscutablement!" Personne ne trouva drôle la remarque du pince-sans-rire; le Vieux pensa même, *in petto*, "Tu m'emmerdes, car tes sarcasmes sont permanents". Au contraire, Anne remerciait Patrick : "Je me sens mieux; merci, mon gentil crollé."

Pendant ce temps, le soleil avait jeté son ultime rayon. Le Vieux décida : "On déballe tout, car tant qu'à faire, on s'arrête pour le bivouac; ne perdons pas de temps. Au travail, et tout le monde collabore; la nuit vient vite par ici, égoïste inerte s'abstenir, c'est notre devise!" Long discours, dans la bouche du Vieux...

Bientôt, la lune nous éclaira utilement. Il fallait manger, maintenant. On avala rapidement du poisson en boîte et de la macédoine de légumes (le jambon n'était plus très frais), puis on se réunit autour du feu. Bizarrement, on parlait toujours des vacances passées : "Tu te souviens de ce fjord, Anne? La Norvège...—Ne m'en parle pas, ce qu'on a eu froid. Pense plutôt à la grange où nous avons passé quinze petits jours dans les Causses. —Causses? Jamais de la vie! T'es toujours aussi paumée, c'étaient les Cévennes..." Et ainsi, une heure ou deux, puis chacun se retirait pour la nuit.



Solution des jeux

Les auto-références

Notons préalablement que les solutions ne sont pas nécessairement uniques.

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a 4 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 4
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 5
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 6

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0
Dans ce cadre, il y a 6 fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 5
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 6
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 7
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 8

Mots croisés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	D	E	M	O	N	T	R	E	R
2	U	N	I	T	E		U	N	E
3	R	O	S	E	T	T	E		V
4	A	R	E		T	O		L	E
5		M		S	E	U	L	E	S
6	R	I	R	E		R	A	T	
7	A	T	O	M	E	S		T	E
8	C	E	S	A	R		P	R	E
9	E		E	T	E	S	I	E	N

Nombres croisés

	1	2	3	4
1	1	3	6	9
2	1	9	9	0
3		7	2	0
4	3	3	5	9

Grille à décoder

1 P	2 A	3 R	4 T	5 I	6 C	5 I	1 P	7 E
3 R	5 I	7 E	8 U	3 R		3 R	2 A	4 T
7 E	9 L	9 L	7 E		4 T	7 E	4 T	7 E
1 P	7 E	8 U	3 R	7 E	8 U	10 S	7 E	10 S
2 A	10 S	5 I	2 A	4 T	7 E		3 R	
3 R		10 S	5 I	3 R	7 E	11 N	7 E	10 S
2 A		2 A	10 S	7 E	10 S		10 S	7 E
4 T	5 I	11 N		11 N		12 B		11 N
5 I	11 N	4 T	7 E	11 N	10 S	7 E	10 S	
13 O	4 T	7 E	3 R	7 E	11 N	4 T		8 U
11 N	7 E		7 E		13 O	4 T	7 E	10 S
	11 N	13 O		A	12 B	7 E	4 T	5 I
7 E	4 T	5 I	7 E	3 R		10 S		11 N
11 N	7 E	7 E		7 E	4 T		9 L	7 E