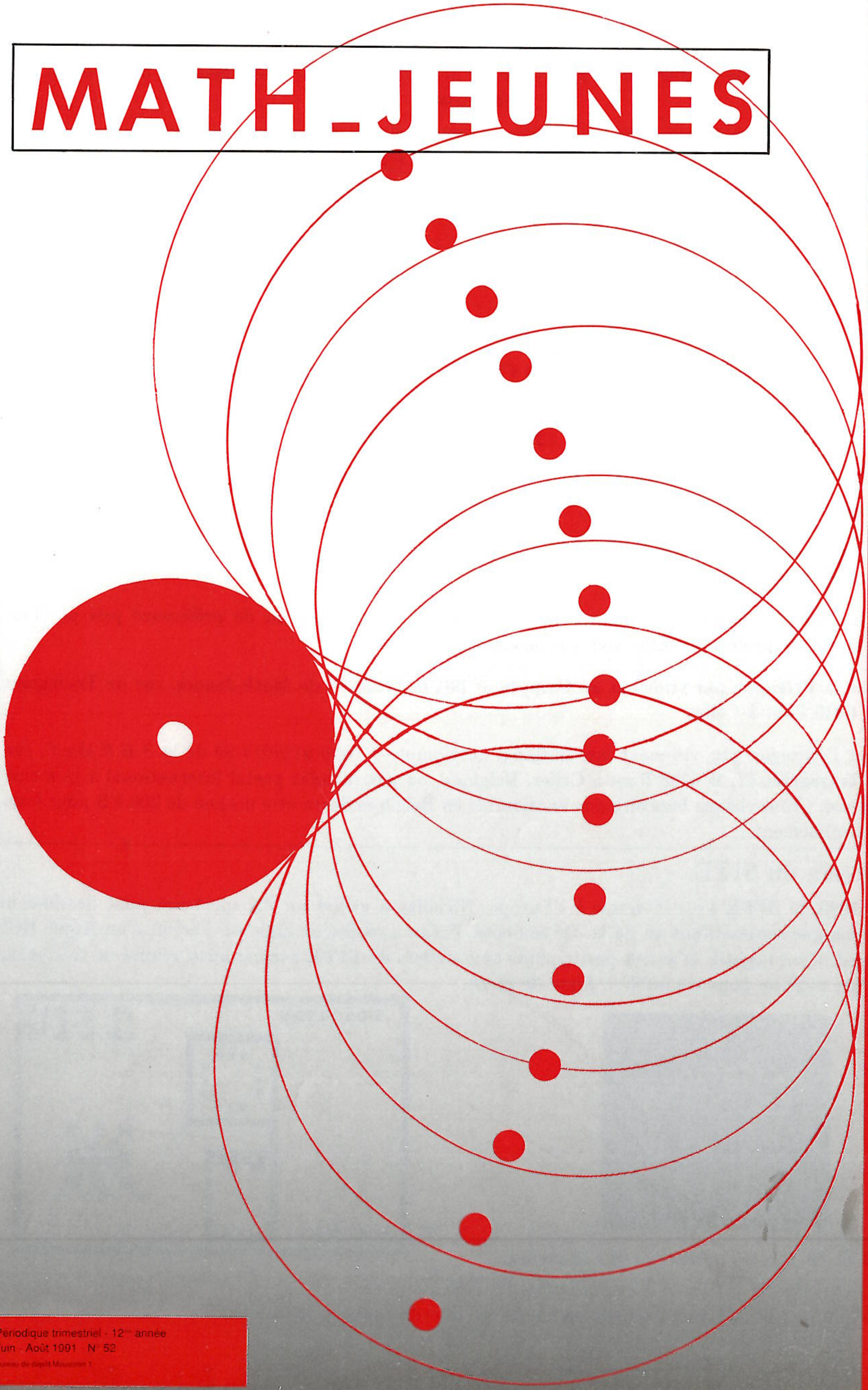
MATH_JEUNES



Périodique trimestriel - 12ème année
Juin - Août 1991 - N° 52
Bureau de dépôt Mouscron 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7061 CASTEAU.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
- Isolés: 120 FB

Etranger :

- Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
- Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

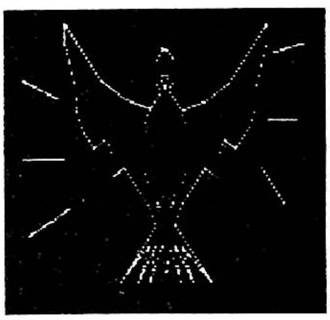
- Années complètes: 87-88, 89-90 — Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 24, 25, 26, 33, 34, 35, 41, 43, 44 (Etranger: 20 FB) — Par numéro: 10 FB

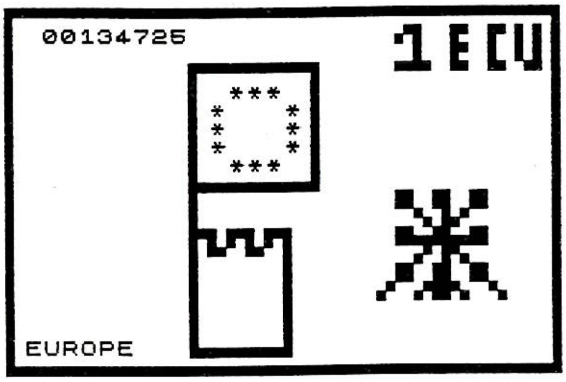
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Le dessin du SITE.

En mai 1990, le **SITE** s'est intéressé à l'Europe. Nicholas a utilisé un ZX spectrum pour dessiner un billet de banque représentant un ECU. De son côté, Ercan a réalisé un aigle sur l'écran d'un Apple IIGS et l'a imprimé en négatif. D'autres participants aux ateliers du **SITE** avaient aussi réalisé de très beaux dessins que nous ne pouvons publier, faute de place.



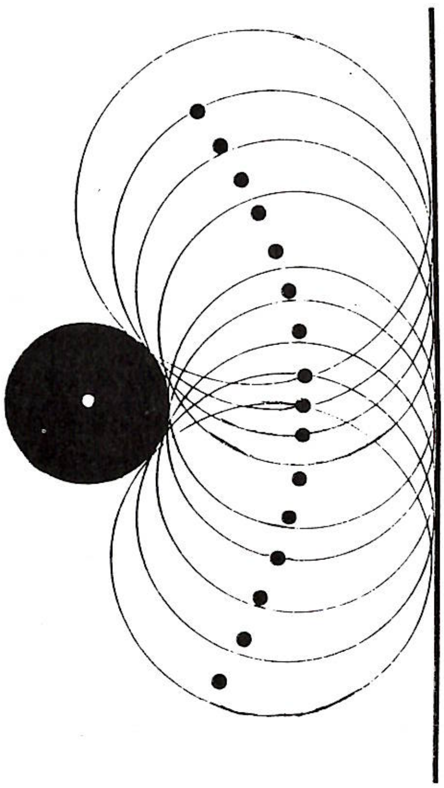


LE SITE, 2A rue Mommaerts, 1080 Bruxelles.

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 52 Douzième année 1991

MATH-JEUNES



En couverture: L'ensemble des points équidistants d'une droite D et d'un cercle C est bien une parabole P. Sur la couverture, nous avons représenté le cercle, la droite et une famille de points appartenant à la parabole. Chacun de ces points est centre d'un cercle tangent à la fois à C et D. Peux-tu trouver l'équation de la parabole P ? Suppose que le rayon de C vaut 1 et note a la distance du centre de C à D. Choisis alors un système d'axes et calcule l'équation de P. On peut toujours faire en sorte que l'équation d'une parabole s'écrive $y^2 = 2px$. Comment faut-il procéder dans le cas présent ? Où placer les axes ? Et combien vaut p en fonction de a ?

Math-Jeunes n° 52, 62–62, 1991

Le coin de la tortue

Les dessins que nous t'avons présentés dans les numéros 51 et 52 sont réalisés à l'aide de routines *récursives.* On appelle ainsi des routines qui s'appellent elles-mêmes. Tu en connais certainement une depuis longtemps: pour dessiner un cercle, il suffit d'exécuter le programme 1. La dernière instruction de cette routine consiste à la rappeler elle-même. Exactement comme si en BASIC, on retournait au début du programme. Mais tu as tout de suite vu le défaut de la méthode: l'ordinateur ne s'arrêtera jamais. Pour y remédier (programme 2), introduisons un *test d'arrêt*: pour que la routine ne soit exécutée que 120 fois (pourquoi 120 ?), nous plaçons un compteur qui est diminué de 1 à chaque exécution.

```
Pour CERCLE
AV 2
DR 3
CERCLE
Fin
```

Programme 1

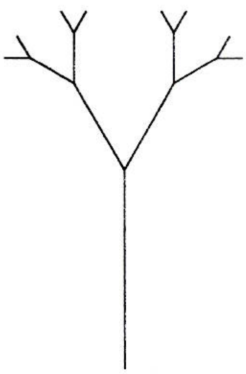
```
Pour CERCLE :N
SI :N = 0 ALORS STOP
AV 2
DR 3
CERCLE :N-1
Fin
```

Programme 2

Quand il arrive à 0, l'ordinateur s'arrête. (C'est une façon qui peut paraître compliquée de réaliser l'instruction `REPETE 120 [AV 2 DR 3]`.) Mais il n'est pas obligatoire que ce soit à la dernière instruction de la routine qu'on rappelle la routine elle-même. On peut même la rappeler plusieur fois dans le corps du programme. Considère par exemple la routine suivante:

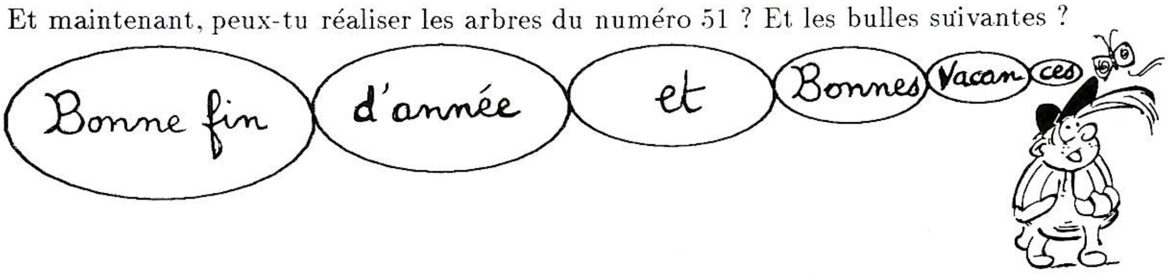
```
Pour ARBRE :N :L          :N est la hauteur de l'arbre, :L la longueur du tronc
SI :N = 0 ALORS STOP      Test d'arret : retour à la routine d'appel
AV :L                     Avancer de :L (dessin du tronc)
GA 30                     Prendre l'orientation du sous-arbre de gauche
ARBRE :N-1 :L/2           Dessiner le sous-arbre de gauche
DR 60                     Prendre l'orientation du sous-arbre de droite
ARBRE :N-1 :L/2           Dessiner le sous-arbre de droite
GA 30                     Reprendre l'orientation de départ
RE :L                     Revenir au pied de l'arbre
Fin
```

La dernière instruction `RE :L` est nécessaire si on veut que le sous-arbre de droite se place sur le tronc en face du sous-arbre de gauche. Et voici le résultat pour :N = 4



La récursivité est une technique très puissante qui permet de réaliser des figures compliquées (ou des calculs compliqués) à l'aide de programmes courts et simples, dès qu'on a compris le principe. Mais c'est une méthode qui encombre la mémoire de l'ordinateur, car celui-ci doit retenir beaucoup d'informations. Par exemple, pour réaliser l'arbre ci-contre avec :N = 4, l'ordinateur entre 4 fois dans la routine ARBRE pour dessiner les 4 traits situés les plus à gauche. Et chaque fois qu'il entre dans un nouvel exemplaire de ARBRE, il doit retenir les adresses de retour. Il doit aussi retenir les valeurs des variables. Pour peu que le niveau de récursion devienne élevé (4 c'est peu !), la place nécessaire peut devenir prohibitive. De plus, tout le travail de gestion de la mémoire prend aussi beaucoup de temps. Les langages récursifs nécessitent donc des ordinateurs de grande capacité et très rapides.

Et maintenant, peux-tu réaliser les arbres du numéro 51 ? Et les bulles suivantes ?



Un peu de bricolage

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

Avertissement: Cet article est présenté en deux parties. Il est demandé au lecteur de "jouer le jeu" en respectant les consignes données à la fin de la première partie.

1. Première partie

1.1. Préambule

Vous savez tous ce qu'est un cube. Vous savez qu'il possède six faces qui sont toutes des carrés isométriques. Il est donc possible de construire un cube par un assemblage simple mais convenable de ces six carrés préalablement découpés dans la matière souhaitée. C'est ainsi que sont construites, en bois

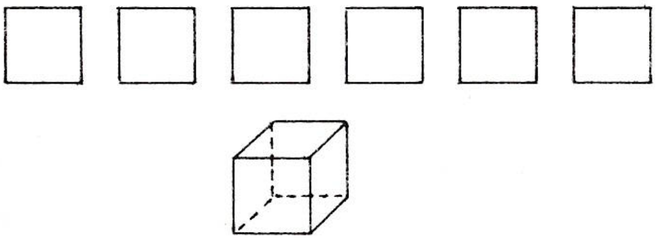


Figure 1

par exemple, les boîtes aux lettres en forme de dé à jouer qu'il n'est pas rare de voir devant certaines maisons. Vous savez certainement encore qu'il est possible de fabriquer un cube sans que ses six faces soient toutes séparées, notamment lorsque la matière utilisée se laisse plier. Il suffit alors d'utiliser un développement du cube.

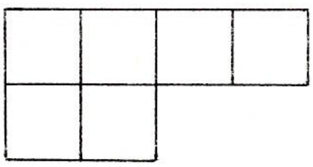


Figure 2

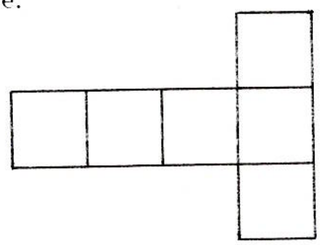


Figure 3

Vous savez enfin que n'importe quelle configuration qui soit la juxtaposition de six carrés isométriques ne constitue pas nécessairement le développement d'un cube (figures 2 et 3). Un cube comporte six faces; il porte donc encore le nom d'hexaèdre (*hexa* est un préfixe qui signifie "six").

Pour conforter votre conviction, nous vous proposons de construire des cubes en utilisant divers développements de votre cru. L'emploi de fiches quadrillées, en carton bristol, facilite grandement les tracés et les découpes. Le papier collant s'avère également très efficace pour assurer les collages nécessaires. Bon travail.

1.2. Sur cette lancée...

Maintenant, je vous propose de construire un autre polyèdre (*poly* est un préfixe qui signifie "plusieurs"). Il est clairement défini par le croquis ci-dessous dans lequel les différents sommets sont désignés par des numéros. Après tout, il n'y a pas de raison de toujours utiliser des lettres pour désigner des points (figure 4)! Ajoutons, pour être complet, que la face 2345 est un carré et que l'arête [12] lui est perpendiculaire et possède la même longueur que chacune des 4 arêtes formant le carré dont on vient de parler. Afin de vous permettre de mieux percevoir cette figure de l'espace, vous pouvez imaginer qu'elle est formée à partir d'un carré de base, d'un pylône dressé perpendiculairement à la base en 2 et dont le sommet est relié à l'aide de câbles tendus, aux sommets 3,4 et 5. Il est possible de fabriquer ce polyèdre non régulier (au contraire du cube qui est régulier) en dessinant un de ses développements et en juxtaposant convenablement certaines de ses faces. Mais que sont les faces de ce polyèdre ? Observez la figure 4 avant de lire la suite. Voilà, vous avez trouvé que le polyèdre proposé possède 5 faces. C'est donc un pentaèdre (*penta* est un préfixe signifiant "cinq"). Ces faces sont respectivement: un carré (2345) de côté c, deux triangles rectangles isocèles (123 et 125) dont les côtés de l'angle droit ont c pour longueur (un célèbre théorème nous dit qu'alors

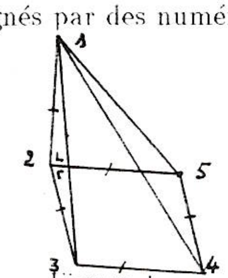


Figure 4

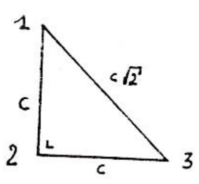


Figure 5

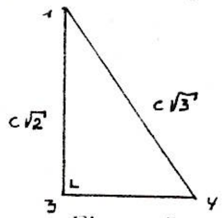


Figure 6

l'hypoténuse [13] a pour longueur $c\sqrt{2}$)(figure 5) et deux triangles rectangles non isocèles (134 et 154) dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs c et $c\sqrt{2}$ (dans ce cas l'hypoténuse [14] a pour longueur $c\sqrt{3}$ (figure 6). Un développement propice à la construction du pentaèdre P est donc le suivant (voir figure 7).

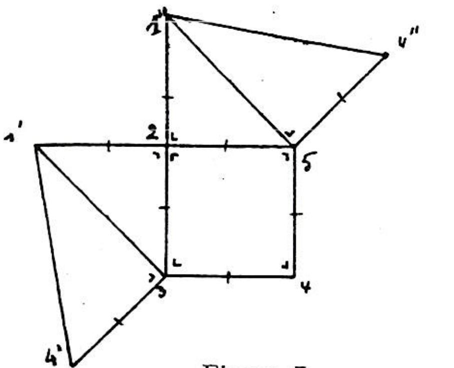


Figure 7

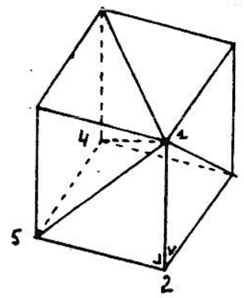


Figure 8

Nous vous invitons maintenant à agir en reproduisant trois fois ce développement, en le découpant et en reconstituant ainsi trois fois le pentaèdre proposé (en appuyant fortement le tracé des futures arêtes [13], [23], [25] et [15], cela facilite le pliage). Essayez d'assembler ces trois pentaèdres. Si vous les placez judicieusement, vous reconstituez un ...cube (figure 8). Observez bien ce cube et vous constaterez que:

- trois de ses faces (une dans chacune des "directions") sont des carrés
- les faces qui leur sont opposées sont formées de la réunion des triangles rectangles isocèles
- Le segment [14] du polyèdre P est une diagonale du cube (donc chaque diagonale d'un cube d'arête c a $c\sqrt{3}$ pour longueur).

1.3. Et alors ...?

Après tout, il n'y a pas de raison de se limiter à la construction d'un cube. Je vous propose donc de faire une pause dans la lecture de cet article et de mettre ce temps à profit pour réaliser la construction d'un parallélépipède rectangle (figure 9) par juxtaposition de trois pentaèdres à bases rectangulaires dont les développements sont, avec les adaptations nécessaires, du même type que dans le cas du cube.

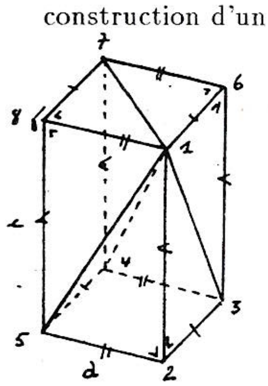


Figure 9

Quand vous en aurez terminé avec ce travail vous pourrez alors entamer la lecture de la deuxième partie de l'article. A bientôt donc pour les commentaires.

2. Deuxième partie

2.1. Préambule

Dans la première partie de l'article, nous vous proposions de faire la preuve de votre aptitude au bricolage en vous demandant de construire 3 pentaèdres dont un assemblage convenable permettait de reconstituer un parallélépipède rectangle. Pour vous aider, vous pouviez prendre modèle, avec les adaptations nécessaires, sur la réalisation d'un cube selon le même procédé. Mais peut-être, avez-vous éprouvé quelques surprises au cours du travail proposé. Alors voici quelques commentaires à ce sujet.

2.2. Commentaires

Tout d'abord, la réalisation d'un croquis d'étude permet de se rendre compte de la situation de chacun des pentaèdres par rapport aux autres. Examinons donc la figure 9. Nous constatons que les trois pentaèdres ont des rectangles comme "bases". Les dimensions de ces rectangles sont alternativement deux des dimensions du parallélépipède envisagé et la troisième dimension sert de hauteur. En développant ces pentaèdres comme nous l'avons fait pour le cube, nous obtenons les développements ci-dessous. Nous ne doutons pas que vous avez su réaliser cela (figure 10). Vous avez alors assemblé ces trois pentaèdres en veillant à ce que, comme pour le cube, les trois quadrilatères de base, donc ici les rectangles, aient un sommet commun. Et c'est ici que vous avez peut-être pu avoir une désagréable surprise.

Le troisième pentaèdre pouvait très bien refuser de s'imbriquer correctement dans l'espace laissé disponible par les deux autres (figure 11). Dans ce cas, vous avez probablement constaté que c'était dû au fait que ce pentaèdre était "à l'envers". Il vous suffisait donc de le retourner, comme on le fait d'un gant, pour que tout rentre dans l'ordre (figure 12).

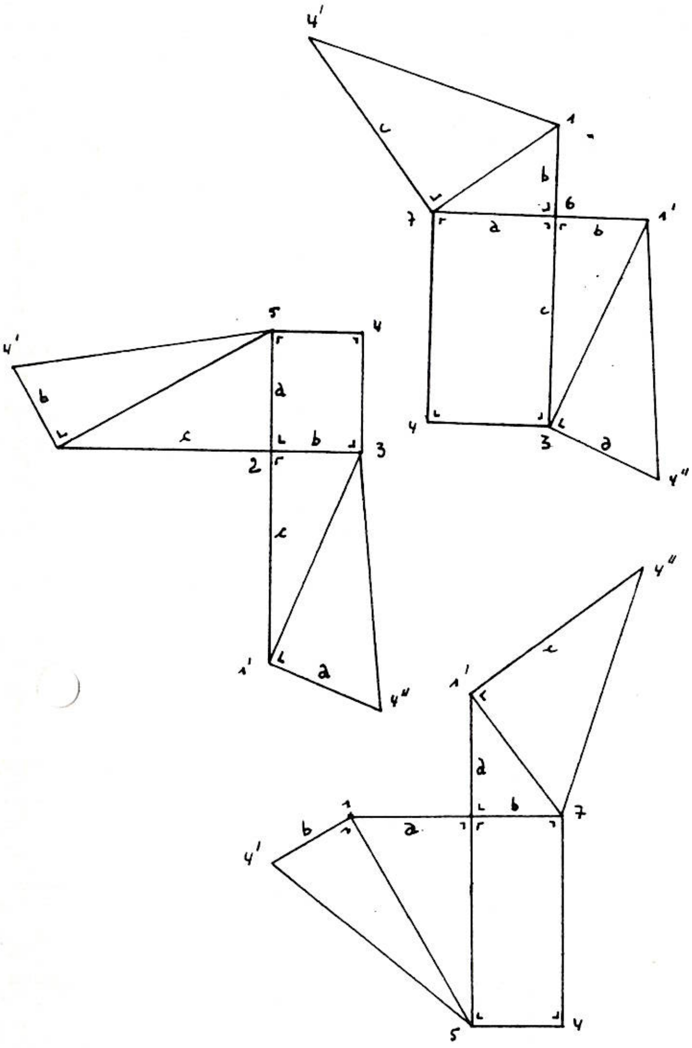


Figure 10

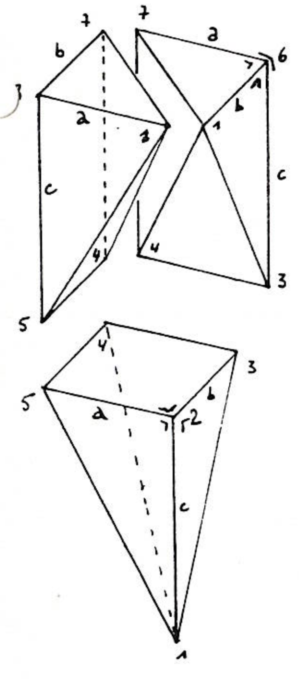


Figure 11

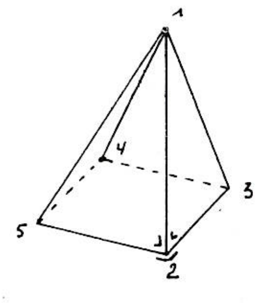


Figure 12

2.3. Mais encore...

Il semble donc que l'on puisse parler d'orientation dans l'espace comme on le fait pour la droite (figure 13) et pour le plan (figure 14).

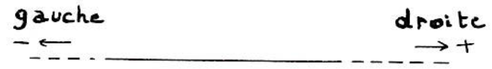


Figure 13

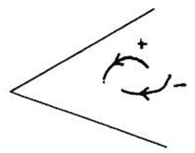


Figure 14

Ainsi donc, il convenait que les trois pentaèdres formant le parallélépipède rectangle aient tous une orientation convenable. Mais comment définir cette orientation. Voici, une suggestion découlant de votre expérience issue elle-même des manipulations et essais de constructions que vous avez effectués (c'est important de réaliser ces expérimentations donc de ne pas se contenter de lire un texte comme celui-ci). Une nouvelle observation critique de la figure 9 fait apparaître la constante suivante: si vous suivez le demi pourtour de la base rectangulaire de chacun des pentaèdres de façon à passer par le pied de la cinquième arête (ce que nous avons appelé "pylône" dans la première partie de cet article), en veillant à "tourner" dans le sens positif du plan de base lorsque vous parcourez successivement les distances a puis b, b puis c, c puis a, alors le cinquième sommet du pentaèdre se trouve toujours du même côté (soit à votre droite, soit à votre gauche). Si vous avez dû retourner un des pentaèdres c'est parce qu'il n'était pas orienté de la même façon (selon notre définition) que les deux autres. Remarquez au passage que sur trois pentaèdres, il y en aura toujours au moins deux orientés de la même façon. C'est une application du principe dit "des tiroirs". Et pourquoi donc n'avons-nous pas eu ce problème d'orientation avec les pentaèdres formant le cube ? Je vous laisse le soin d'examiner à nouveau votre réalisation du cube et de trouver vous-même la raison de cette absence obligée du problème.

Math-Jeunes n° 52, 66–68, 1991

Le jeu de Robinson

H. Lehning, (Extrait de *Tangente* n° 17, septembre–octobre 1990)

Ce tableau contient:
...fois le chiffre 1
...fois le chiffre 2
...fois le chiffre 3
...fois le chiffre 4
...fois le chiffre 5
...fois le chiffre 6
...fois le chiffre 7
...fois le chiffre 8
...fois le chiffre 9
...fois le chiffre 0

Le jeu consiste à remplir les blancs de façon que l'affirmation contenue dans le tableau soit vraie. On peut chercher une solution complète (10 lignes), ou une solution ne comportant qu'une partie des 10 lignes du tableau.

Ce jeu a été inventé par un mathématicien américain contemporain, Raphaël Robinson. Voici, à mon avis, la plus jolie façon de le résoudre:

1. Vous remplissez les blancs de manière arbitraire, par exemple en mettant un chiffre 1 à la place de chaque blanc. Utilisons le codage suivant pour représenter cette situation:

11/12/13/14/15/16/17/18/19/10

Chaque ligne du tableau est représentée en juxtaposant simplement le nombre d'utilisations et le chiffre correspondant, sans écrire la mention "fois le chiffre". Les barres de fraction indiquent les changements de ligne.

2. Vous considérez ce nombre comme le terme initial d'une suite qui se raconte (voir encadré ci-contre); le terme suivant est alors:

111/12/13/14/15/16/17/18/19/10

En effet, dans le premier terme, nous comptons 11 fois le chiffre 1, 1 fois le chiffre 2, etc.

De même, le nombre suivant est:

121/12/13/14/15/16/17/18/19/10

3. Si un terme est égal à son prédécesseur c'est qu'il se raconte lui-même, donc il s'agit d'une solution du jeu de Robinson. Le but est évidemment d'arriver à cette situation. Toutes les solutions de ce jeu peuvent être trouvées ainsi. Cette méthode peut vous sembler très particulière; en fait, il s'agit d'une méthode très féconde en Mathématiques. De nos jours, elle porte le nom de méthode du point fixe.

Quand les suites se racontent

Soit la suite dont les premiers termes sont:

0,
10,
1110,
3110,
132110,
13123110,...

Quel est le terme suivant ?

Chaque terme raconte le précédent: l'avant-dernier terme 132110, par exemple, contient 1 fois le chiffre 3, 1 fois le chiffre 2, 3 fois le chiffre 1 et 1 fois le chiffre 0 d'où 13123110 qui est le dernier terme.

Le suivant est alors 23124110.

Dans le numéro 8 de la revue française *Tangente* (page 33), l'auteur énonce le théorème : "*Toute suite de ce type est périodique de période 1,2 ou 3 à partir d'un certain rang*". Il en propose une démonstration à l'aide d'un ordinateur. D'autre part, il en a publié une démonstration "à la main" dans le *College Mathematical Journal* de mars 1990.

◇ A la recherche de toutes les solutions

On peut tout d'abord remarquer que les solutions sont majorées. Désignons en effet par n_{max} le plus grand des nombres du tableau, et supposons que le nombre c de ses chiffres est supérieur à 1.

Le nombre total de chiffres présents dans la partie gauche du tableau est inférieur à $10c$, puisque chaque ligne ne peut contenir plus de c chiffres. Aucun des chiffres n'apparaît donc plus de $10c+1$ fois; notamment, $n_{max} < 10c + 1$.

Mais $n_{max} > 10^{c-1} - 1$, puisqu'il s'écrit avec c chiffres. On en tire $10^{c-1} - 1 < 10c + 1$, qui n'est vraie que pour des valeurs de c inférieures à 3. Avec $c = 2$, aucun des nombres ne pourra donc dépasser 21. On en déduit facilement toutes les solutions, par essai de toutes les suites possibles.

Bien entendu, il est nécessaire de réduire d'abord le nombre de cas à analyser. On peut utiliser un ordinateur, mais il est également possible de faire un raisonnement "classique" pour affiner la majoration précédente.

Ici, je me contenterai de dresser la liste des solutions. Pour en simplifier la lecture, je noterai $\langle n \rangle$ le fait que n lignes, choisies arbitrairement parmi les lignes possibles, soient complétées avec le chiffre 1.

• Solutions à 10 lignes

On ne trouve que deux solutions,
111/22/⟨8⟩, **71/32/23/27/⟨6⟩**

Ces deux solutions donnent les tableaux suivants:

Ce tableau contient:
11 fois le chiffre 1
2 fois le chiffre 2
1 fois le chiffre 3
1 fois le chiffre 4
1 fois le chiffre 5
1 fois le chiffre 6
1 fois le chiffre 7
1 fois le chiffre 8
1 fois le chiffre 9
1 fois le chiffre 0

Ce tableau contient:
7 fois le chiffre 1
3 fois le chiffre 2
2 fois le chiffre 3
1 fois le chiffre 4
1 fois le chiffre 5
1 fois le chiffre 6
2 fois le chiffre 7
1 fois le chiffre 8
1 fois le chiffre 9
1 fois le chiffre 0

◊ Les solutions partielles

• Solutions à 9 lignes

L'écriture **111/⟨8⟩** conduit à 9 solutions car il y a 9 façons de choisir 8 lignes parmi les 9 restantes.

De même, la suite **61/32/23/26/⟨5⟩** nous donne 6 solutions.

• Solutions à 8 lignes

51/32/23/25/⟨4⟩ donne 15 solutions car il y a $(6 \times 5)/2$, soit 15 façons de choisir 4 lignes parmi 6 possibles (voir encadré p.68).

• Solutions à 7 lignes

41/32/23/24/⟨3⟩ donne 20 solutions car il y a $(6 \times 5 \times 4)/(3 \times 2)$, soit 20 façons de choisir 3 lignes parmi 6 possibles (voir encadré p.68).

• Solutions à 5 lignes

31/22/33/⟨2⟩, qui donne 21 solutions en plaçant parmi les sept autres lignes les deux lignes complétées avec des 1.

• Solutions à 4 lignes

La suite **31/33/⟨2⟩** donne 28 solutions, puisqu'il reste à choisir 2 lignes parmi 8.

• Solutions à 1 ligne

Une seule suite, **22**, qui donne évidemment une solution unique.

Finalement, nous trouvons 109 solutions au jeu de Robinson si nous nous autorisons à effacer des lignes.

◊ Jeux à deux tableaux

TABLEAU A	TABLEAU B
Le tableau B contient:	Le tableau A contient:
...fois le chiffre 1	...fois le chiffre 1
...fois le chiffre 2	...fois le chiffre 2
...fois le chiffre 3	...fois le chiffre 3
...fois le chiffre 4	...fois le chiffre 4
...fois le chiffre 5	...fois le chiffre 5
...fois le chiffre 6	...fois le chiffre 6
...fois le chiffre 7	...fois le chiffre 7
...fois le chiffre 8	...fois le chiffre 8
...fois le chiffre 9	...fois le chiffre 9
...fois le chiffre 0	...fois le chiffre 0

Il s'agit de remplir les blancs des deux tableaux de manière distincte, de façon à ce que les deux affirmations contenues dans ces tableaux soient vraies.

Pour trouver les solutions, il suffit de chercher les suites qui se racontent de période 2. Nous trouvous 31 solutions si nous nous autorisons à effacer des lignes.

• Solutions à 10 lignes

Les deux tableaux de l'unique solution sont associés aux suites
71/42/14/17/28/⟨5⟩ et **81/22/24/27/18/⟨5⟩**.

Ceci donne pour solution unique:

TABLEAU A	TABLEAU B
Le tableau B contient:	Le tableau A contient:
7 fois le chiffre 1	8 fois le chiffre 1
4 fois le chiffre 2	2 fois le chiffre 2
1 fois le chiffre 3	1 fois le chiffre 3
1 fois le chiffre 4	2 fois le chiffre 4
1 fois le chiffre 5	1 fois le chiffre 5
1 fois le chiffre 6	1 fois le chiffre 6
1 fois le chiffre 7	2 fois le chiffre 7
2 fois le chiffre 8	1 fois le chiffre 8
1 fois le chiffre 9	1 fois le chiffre 9
1 fois le chiffre 0	1 fois le chiffre 0

• Solutions à 9 lignes

61/42/14/16/27/⟨4⟩, **71/22/24/26/17/⟨4⟩** qui donne 5 solutions.

• Solutions à 8 lignes

51/42/14/15/26/⟨3⟩, **61/22/24/25/16/⟨3⟩** qui donne 10 solutions.

• Solutions à 6 lignes

31/42/13/24/⟨2⟩, **41/22/23/24/⟨2⟩** qui donne 15 solutions.

◇ Au-delà de deux tableaux

• Jeux à trois tableaux

De même, nous trouvons 10 suites de période 3, elles utilisent 7 lignes:
41/42/13/14/25/⟨2⟩, **51/22/13/34/15/⟨2⟩**, **51/22/23/14/15/⟨2⟩**.

TABLEAU A	TABLEAU B	TABLEAU C
Le tableau C contient:	Le tableau A contient:	Le tableau B contient:
4 fois le chiffre 1	5 fois le chiffre 1	5 fois le chiffre 1
4 fois le chiffre 2	2 fois le chiffre 2	2 fois le chiffre 2
1 fois le chiffre 3	1 fois le chiffre 3	2 fois le chiffre 3
1 fois le chiffre 4	3 fois le chiffre 4	1 fois le chiffre 4
2 fois le chiffre 5	1 fois le chiffre 5	2 fois le chiffre 5
1 fois le chiffre 6	1 fois le chiffre 6	1 fois le chiffre 6
1 fois le chiffre 7	1 fois le chiffre 7	1 fois le chiffre 7

Cette solution est la seule solution du jeu de Robinson à trois tableaux, à la modification près des chiffres 6 et 7 en deux autres chiffres non utilisés.

• Jeu à quatre tableaux ou plus

D'après le théorème concernant les suites qui se racontent, tous ces jeux sont impossibles (voir encadré "*Quand les suites se racontent*").

Liste des jeux à 1, 2 ou 3 tableaux			
Nombre de lignes	1 tableau	2 tableaux	3 tableaux
	impossible, possible (lignes obligatoires)		
10	possible	possible	impossible
9	possible (1)	possible (1,2,4,6,7)	impossible
8	possible (1,2,3,5)	possible (1,2,4,5,6)	impossible
7	possible (1,2,3,4)	impossible	possible (1,2,3,4,5)
6	impossible	possible (1,2,3,4)	impossible
5	possible (1,2,3)	impossible	impossible
4	possible (1,3)	impossible	impossible
3	impossible	impossible	impossible
2	impossible	impossible	impossible
1	possible (2)	impossible	impossible

L'embarras du choix

Choisir 4 objets parmi 6 équivaut à choisir 2 = 6-4 objets parmi 6. En effet, il suffit de laisser ces deux là et de prendre les autres! Appelons a, b, c, d, e et f ces objets. Il y a 6 choix possibles du premier. Supposons que l'on ait choisi a, il reste alors 5 choix possibles du second: b, c, d, e ou f. Il en est de même si l'on a choisi b, c, d, e ou f en premier. En tout, nous obtenons donc $5+5+5+5+5+5 = 6 \times 5$ choix possibles de 2 objets parmi 6. Arrêter là constitue une erreur classique ... En effet, nous retrouvons chaque choix deux fois. Par exemple (a, b) et (b, a). Finalement, nous obtenons $(6 \times 5)/2$, soit 15 choix possibles de 2 objets parmi 6. De même, il y a $(6\times5\times4)/(3\times2)$, soit 20 choix possibles de 3 objets parmi 6.

◇ Et dans d'autres bases ?

On pourrait penser que la périodicité des suites qui se racontent est propre à la base 10; en fait il n'en est rien. Plus précisément, en bases 2, 4 et 5, la suite est de période 1. En base 3, elle est de période 1 ou 3, en base 6, de période 1 ou 2. Dans toutes les autres bases, elle est de période 1, 2 ou 3.

De plus, les solutions données plus haut donnent toutes les solutions possibles, sauf en bases 2 et 3.

On trouve également, en base 2, pour le jeu à un tableau, **1001/110** qui correspond à :

Ce tableau contient :	100 fois le chiffre 1
	11 fois le chiffre 0

De même, pour un seul tableau, on trouve aussi en base 3: **21/102/20**, **101/100**, et **101/22/100** (nous laissons au lecteur le soin de construire les tableaux).

Jeu à trois tableaux

Une seule solution supplémentaire, en base 3:

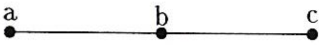
TABLEAU A	TABLEAU B
Le tableau C contient:	Le tableau A contient:
10 fois le chiffre 1	11 fois le chiffre 1
10 fois le chiffre 2	1 fois le chiffre 2
1 fois le chiffre 0	10 fois le chiffre 0
TABLEAU C	
Le tableau B contient:	
12 fois le chiffre 1	
1 fois le chiffre 2	
2 fois le chiffre 0	

P. Van Elsuwé

1. Demi-finales 1991

1006 élèves de MINI (192 en 1ère, 300 en 2ème, 514 en 3ème) et 886 élèves de MAXI (247 en 4ème, 302 en 5ème, 337 en 6ème) se sont présentés à la demi-finale du 27 février. Je te propose des solutions à quelques problèmes posés.

Question 16 MINI



b milieu de $[ac]$

Le temps t_1 mis pour parcourir le trajet de a à b à la vitesse moyenne x est $t_1 = \frac{|ab|}{x}$

Le temps t_2 mis pour parcourir le trajet b à c à la vitesse moyenne y est $t_2 = \frac{|bc|}{y} = \frac{|ab|}{y}$

La vitesse moyenne sur le trajet total de a à c est

$$\frac{|ac|}{t_1 + t_2} = \frac{2|ab|}{\frac{|ab|}{x} + \frac{|ab|}{y}} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

N.B.: Cette moyenne est appelée moyenne harmonique des vitesses x et y. Elle est en fait l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des vitesses x et y.

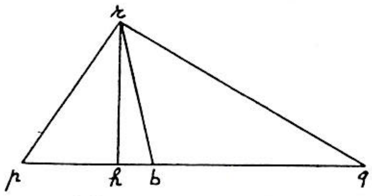
L'erreur la plus fréquemment commise est de calculer la vitesse moyenne comme moyenne arithmétique des vitesses. Celle-ci est valable lorsque les vitesses se maintiennent pendant des **temps égaux**. Ici, les vitesses ne se maintiennent pas pendant le même laps de temps mais bien sur des **distances égales.** Dans ce cas, c'est la moyenne harmonique qu'il faut utiliser.

Question 17 MINI

$$\begin{aligned}
S_{1990} &= (1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots \\
&\quad +(1989-1990) \\
&= (-1)+(-1)+(-1)+\ldots+(-1) \\
&= (-1).995 = -995 \\
S_{1991} &= S_{1990} + 1991 \\
S_{1990} + S_{1991} &= 2S_{1990} + 1991 \\
&= -1990 + 1991 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Question 23 MINI

Appelons rb la bissectrice intérieure et rh la hauteur issues de r. Nous avons $\widehat{prq} = 180° - (56° + 30°) = 94°$. Dès lors $\widehat{brp} = 47°$. Dans le triangle phr rectangle en h, $\widehat{prh} = 180° - (90° + 56°) = 34°$. Par conséquent $\widehat{brh} = \widehat{prq} - \widehat{prh} = 13°$



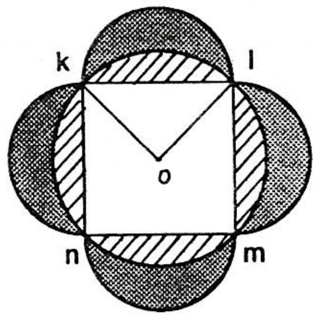
Question 29 MINI

Appelons o le centre du cercle circonscrit ou carré $klmn$. En appliquant le théorème de PYTHAGORE au triangle kol rectangle en o, on obtient $|kl| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Nous avons :

aire de la région hachurée = aire du cercle de diamètre $[km]$− aire du carré $klmn = 100\pi - 200$.

Dès lors, aire de la région ombrée = $4\times$ aire du demi-cercle de diamètre $[kl]$− aire de la région hachurée $= 4 \times 25\pi - (100\pi - 200) = 200$.



Question 9 MAXI

Appelons respectivement P_0, P_1, P_2 la population à l'instant $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0(1+\frac{i}{100}) \\ P_2 &= P_1(1+\frac{j}{100}) = P_0(1+\frac{i}{100})(1+\frac{j}{100}) \\ &= P_0(1+\frac{i}{100}+\frac{j}{100}+\frac{ij}{100\times 100}) \end{aligned}$$

La population P_0 a donc augmenté de $(i+j+\frac{ij}{100})\%$ entre l'instant $t=0$ et l'instant $t=2$.

Question 20 Maxi

L'équation $(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(4^x+2^x-6)^3$ est équivalente aux équations suivantes:

$$\begin{aligned} &(2^x-4)^3+(4^x-2)^3 = \\ &\quad [(4^x-2)+(2^x-4)]^3 \\ &\quad (4^x-2)^3+3(4^x-2)^2(2^x-4) \\ &\quad +3(4^x-2)(2^x-4)^2+(2^x-4)^3 \\ &3(4^x-2)(2^x-4)(4^x+2^x-6)=0 \end{aligned}$$

L'équation $4^x-2=0$ admet pour solution $\frac{1}{2}$.
L'équation $2^x-4=0$ admet pour solution 2.
L'équation $4^x+2^x-6=0$ équivalente à l'équation $(2^x)^2+2^x-6=0$ admet pour solution 1.
Dès lors la somme de tous les nombres réels x vérifiant l'équation de départ vaut $\frac{1}{2}+2+1=\frac{7}{2}$

Question 25 Maxi

$T_n = 1+2+\ldots+n$ est la somme des n premiers nombres entiers et vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ (démontre cette affirmation). Dès lors

$T_n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

et $\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$

Par conséquent pour $n=2,3,4,\ldots$

$P_n = \frac{2.3}{1.4}\cdot\frac{3.4}{2.5}\cdot\frac{4.5}{3.6}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)n}{(n-2)(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)} = \frac{3.n}{n+2}$

Dès lors $P_{1991} = \frac{3\text{x}1991}{1993} = \frac{5973}{1993}$ est plus proche de 2,9.

Question 29 Maxi

Le triangle abc est équilatéral donc $\widehat{abc}=\widehat{bca}=\widehat{cab}=60^\circ$. La symétrie orthogonale d'axe pq amène a sur a' donc $|ap|=|a'p|, |aq|=|a'q|$ et $\widehat{paq}=\widehat{pa'q}=60^\circ$

Par le théorème de Pythagore généralisé on a :

$$\begin{aligned} |pq|^2 &= |pa'|^2+|a'q|^2-2|pa'||a'q|\cos\widehat{pa'q} \\ &= |pa'|^2+|a'q|^2-|pa'||a'q| \qquad (1) \end{aligned}$$

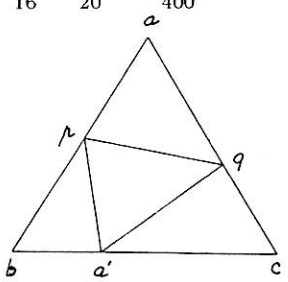
mais aussi :

$$\begin{aligned} |pa'|^2 &= |pb|^2+|ba'|^2-2|pb||ba'|\cos\widehat{pba'} \\ |pa'|^2 &= (|ab|-|pa'|)^2+|ba'|^2-(|ab|-|pa'|)|ba'| \\ |pa'|^2 &= 9-6|pa'|+|pa'|^2+1-(3-|pa'|) \end{aligned}$$

dès lors $|pa'|=\frac{7}{5}$

$$\begin{aligned} |a'q|^2 &= |a'c|^2+|cq|^2-2|a'c||cq|\cos\widehat{a'cq} \\ |a'q|^2 &= |a'c|^2+(|ac|-|a'q|)^2-|a'c|(|ac|-|a'q|) \\ |a'q|^2 &= 4+9-6|a'q|+|a'q|^2-2(3-|a'q|) \end{aligned}$$

dès lors $|a'q|=\frac{7}{4}$
En remplaçant $|pa'|$ et $|a'q|$ par leur valeur dans la relation (1) on obtient :
$|pq|^2=\frac{49}{25}+\frac{49}{16}-\frac{49}{20}=\frac{49\text{x}21}{400}$ dès lors $|pq|=\frac{7}{20}\sqrt{21}$



2. Finales 1991

Les demi-finales du 27 février dernier ont permis de sélectionner 60 élèves en Mini et 57 élèves en Maxi pour la finale du 17 avril. Les critères de sélection étaient les suivants:

	1è	2è	3è	4è	5è	6è
Score $\geqslant$	81	87	98	96	100	106
Nombre d'élèves qualifiés	12	18	30	15	14	28

Le jour de la finale, 57 élèves en Mini et 52 en Maxi étaient présents. Tu trouveras ci-dessous les questions proposées aux finalistes.

Questions de la finale Mini

1. Quand Anne, Marie et Paul mangent à la cantine, chacun d'eux commande un steak ou une brochette. Si Marie choisit le steak, Paul, par esprit de contradiction, prend une brochette. Une et une seule des deux jeunes filles commande du steak. Paul et Anne ne prennent pas de brochette simultanément. Qui a pu commander un steak hier et une brochette aujourd'hui?

2. Dans un cube, les 27 points suivants sont marqués en vert:
   - les sommets;
   - les milieux des arêtes;
   - les centres des faces;
   - le centre du cube.

   Combien de triplets de ces points verts sont alignés (par triplet, il faut comprendre un ensemble de trois points dont l'ordre n'a pas d'importance; un triplet est aligné si ses trois points appartiennent à une même droite)?

3. Considérons les 1140 produits $1 \times 3980, 2 \times 3980, 3 \times 3980, \ldots, 1140 \times 3980$. Combien de ces produits sont divisibles par 1140? Généralisez votre raisonnement afin de donner en fonction des deux naturels positifs a et b le nombre des produits parmi $1 \times b, 2 \times b, 3 \times b, \ldots, a \times b$ qui sont divisibles par a.

4. Dans un carré de sommets consécutifs a, b, c, d, un point variable m est pris sur la diagonale $[ac]$. Les perpendiculaires aux côtés $[ab]$ et $[bc]$ passant par m coupent respectivement $[ab]$ en p et $[bc]$ en q. Démontrez que la médiatrice du segment $[pq]$ passe par un point fixe, indépendant du choix de m sur $[ac]$.

Questions de la finale MAXI

1. Démontrer que pour tout naturel n l'entier
   $E(n) = 3^{n+2}2^{2n+1} + 5^{2n+1}2^{n+2}$
   est divisible par 19.

2. Un cube en sapin est peint en orange, puis scié en n^3 petits cubes de même taille (où n est un naturel strictement positif). Quelle est la moyenne des nombres de faces peintes de ces n^3 petits cubes?

3. Décrivez, en donnant leurs degrés et leurs coefficients, toutes les fonctions polynomiales f de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ satisfaisant, pour $x, y \in \mathbb{Z}$,

   $$f(x+y) + 1 = f(x) + f(y) + 2xy.$$

4. Dans l'intérieur d'un tétraèdre de sommets a, b, c, d, combien existe-t-il de points o pour lesquels les quatre tétraèdres de sommets respectifs o, b, c, d; a, o, c, d; a, b, o, d; a, b, c, o ont même volume? Déterminez ce(s) point(s) o.

***

La proclamation solennelle des résultats de la 16ème Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 4 mai aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur. En voici les résultats :

Lauréats de la Mini-Olympiade

Premier prix

1. Bemelmans Xavier, (3e), Inst. St. Xavier, Verviers

Deuxièmes prix

2. Dandoy Alexandre, (2e), Coll. Don Bosco, Bruxelles
3. Nguyen Huan-Hien, (1e), A.R. de Spa
4. Hainaut Xavier, (3e), Inst. Notre Dame, Arlon
5. Moons Benoît, (3e), Coll. St. Augustin, Enghien
   Van Elewyck Véro., (3e), Ath. Ad.Max, Bruxelles
7. Pastoret Vanessa, (3e), Lycée Dachbeeck, Bruxelles
8. Michiels Tom, (3e), Collège Notre Dame, Wavre
9. Devillers Alice, (3e), A.R. de Waterloo
   Kerschen Gaëtan, (3e), Inst. St. Louis, Liège
11. Kervyn Xavier, (2e), Lyc. Martin V, LLN

Troisièmes prix

12. De Woot Frédéric, (3e), Coll. St. Michel, Bruxelles
    Letawe Géraldine, (3e), Inst. Paix Notre Dame, Liège
    Massa Charles-Henri, (3e), Inst. St. Xavier, Verviers
    Masschelein Bernard, (2e), Coll. Don Bosco, Bruxelles
    Pinchart Laurent, (2e), A.R. de Mons
    Polus Joël, (3e), A.R. de Jambes
18. Henricot Anne Cécile, (3e), Lyc. Rodange, Luxembourg
19. Delcroix Peggy, (3e), A.R. Riva Bella, Braine L'Alleud
    Libert Benoît, (3e), Inst. Notre Dame, Beauraing

Quatrièmes prix

21. Limbourg Bernard, (3e), Inst. St Remacle, Marche
    Muyldermans Benoît, (3e), Coll. St. Michel, Bruxelles
    Ranieri Sébastien, (3e), Coll. St Augustin, Gerpinnes
24. Chisogne Christophe, (3e), Sém. St Joseph, Bastogne
25. Luyckx Arnaud, (2e), Inst. de la Providence, LLN
26. De Becker R., (2e), A.R. Riva Bella, Braine L'Alleud

Prix spéciaux

Ballieu Nicolas, (1e), A.R. de Charleroi, Becco Christophe, (1e), Inst. St. Louis, Liège, Dandoy Alexandre, (2e), Coll. Don Bosco, Bruxelles, De Becker Raphaël, (2e), A.R. Riva Bella, Braine L'Alleud, D'Hoedt Sandrine, (2e), A.R. Vauban, Charleroi, Kervyn Xavier, (2e), Lycée Martin V, Ottignies LLN, Luyckx Arnaud, (2e), Inst. de la Providence, Ottignies LLN, Masschelein Bernard, (2e), Coll. Don Bosco, Bruxelles, Nguyen Huan-Hien, (1e), A.R. de Spa, Obozinski Guillaume, (1e), Lycée Français, Bruxelles, Pinchart Laurent, (2e), A.R. de Mons.

Ont également participé à cette finale

Caprace Jérôme, (3e), Coll. St. Remacle, Stavelot, De Lauw Erwan, (2e), Coll. Don Bosco, Bruxelles, De Menten Sébastien, (3e), Ec. Abbatiale de Maredsous, Denée, De Nicolo Manuel, (1e), Inst. St Joseph, Charleroi, Delvaux Jérome, (2e), Coll. St. Barthélémy, Liège, Dessauvages Caroline, (1e), Coll. St. Vincent, Soignies, Devos Jean-Philippe, (2e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Devuyst Michaël, (1e), Inst. St Joseph, Florennes, Garrigues Cédric, (2e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Goffin Catherine, (2e), St Boniface Parnasse, Bruxelles, Heck Cyril, (3e), A.R. de Malmedy, Hiernaux Yves, (1e), Ath. Ad.Max, Bruxelles, Kaczmarek Nicolas, (2e), Coll. St. Hubert, Bruxelles, Kaivez Thomas, (1e), Collège Cardinal Mercier, Braine L'Alleud, Laroche Thomas, (3e), Inst. St Joseph, Ciney, Leens Frédéric, (3e), Ecole Normale, Braine le Comte, Leroy Sébastien, (2e), St Boniface Parnasse, Bruxelles, Leterme Stéphane, (3e), Inst. St. Michel, Verviers, Louveaux Quentin, (3e), Collège Notre Dame, Wavre, Mohymont Bernard, (3e), Inst. Notre Dame, Beauraing, Robinet Sévrine, (2e), Inst. St Joseph, Ciney, Rosenfeld Itay, (3e), Ath. Ganenou, Bruxelles, Stievenart Benjamin, (1e), Coll. St. Julien, Ath, Vermaere Marc, (3e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Vieira Ramos Miguel, (1e), Coll. Notre Dame, Tournai, Wailliez Isabelle, (2e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Wiaux Yves, (3e), Coll. St Michel, Gosselies.

Lauréats de la Maxi-Olympiade 1991

Premiers prix

1. Louveaux Jérome, (6e), Coll. Notre Dame, Wavre
   Zeihen Pascal, (6e), Lycée Classique, Diekirch
3. De Poortere Etienne, (6e), Lyc. Jacqmain, Bruxelles
   Legras Jérome, (6e), Lycée Français, Bruxelles
   Ling Fu Sin, (6e), Ath. Ad.Max, Bruxelles
   Periquet Denis, (6e), Coll. Sacré Cœur, Charleroi

Deuxièmes prix

7. Eloy Jean-Marc, (6e), A.R. de Jemeppe/Sambre
   Piccione Patrick, (6e), Lycée Français, Bruxelles
9. Glineur François, (5e), A.R. de Quièvrain
10. Desset Claude, (5e), Séminaire St Joseph, Bastogne
    Dutrifoy Alexandre, (6e), GPH, Gosselies
    Krantz Tom, (6e), Lycée Rodange, Luxembourg
13. Bruyère Isabelle, (6e), A.R. Collard, Beauraing
    Cautaerts Vincent, (6e), Lycée Jacqmain, Bruxelles
    Piret Gilles, (5e), Lyc. Martin V, LLN

Troisièmes prix

16. Fleury Raphaël, (6e), A.R. de Liège 1
    Horowitz Joël, (5e), Coll. Marie-José, Anvers
18. Mincke Olivier, (6e), A.R. de Ath
    Peeters Michaël, (6e), Coll. St. Vincent, Soignies
20. Bettens Frédéric, (6e), Lycée Jacqmain, Bruxelles
21. Mirzabekiantz Alex., (6e), Coll. St. Michel, Bruxelles

Prix spéciaux

Bourgeois Frédéric, (4e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Desset Claude, (5e), Séminaire St Joseph, Bastogne, Glineur François, (5e), A.R. de Quièvrain, Horowitz Joël, (5e), Lycée Anvers Coll. Marie-José, Anvers, Luxen François, (4e), Int St. François Xavier, Verviers, Niederkorn Philippe, (5e), Inst. Ste Marie, Arlon, Piret Gilles, (5e), Lycée Martin V, Louvain La Neuve, Seve Philippe, (4e), Ecole Européenne, Kirchberg, Van Huffel Denis, (4e), Ath. Ad.Max, Bruxelles.

Ont également participé à cette finale

Ajdler Arnaud, (4e), Ath. Maïmonide, Bruxelles, Badot Pierre-Yves, (6e), A.R. de Namur, Daloze Vincent, (5e), A.R. de Hannut, Daubie Emmanuel, (4e), A.R. de Jodoigne, De Clippel Valérie, (4e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Donckels Frédéric, (5e), Lycée Martin V, Louvain La Neuve, Galles Paul, (5e), Lyc. Michel Rodange, Luxembourg, Kockaert Pascal, (5e), Coll. Don Bosco, Bruxelles, Kreins Jerry, (6e), Lyc. Rodange, Luxembourg, Leurquin Vincent, (6e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Nachtergal Philippe, (6e), Coll. Card.Mercier, Braine l'Alleud, Petre Paul, (4e), St Boniface Parnasse, Bruxelles, Plennevaux Rodrigue, (6e), Coll. St. Michel, Bruxelles, Poll Bénédicte, (5e), Inst. de l'Enfant Jésus, Nivelles, Potier Denis, (4e), Collège Notre Dame, Tournai, Reynaert David, (6e), A.R. de Namur, Rochez Jean-Christophe, (6e), Ec. Royale des Cadets, Bruxelles, Schanen Patrick, (4e), Lyc. Rodange, Luxembourg, Seigneur Olivier, (6e), A.R. de Marchin, Servadio Fabian, (6e), A.R. Vauban, Charleroi, Servais Frédéric, (6e), Lycée Martin V, Louvain la Neuve, Smets Didier, (4e), Inst. St. Joseph, Châtelet, Van

Math-Jeunes n ° 52, 73–78, 1991

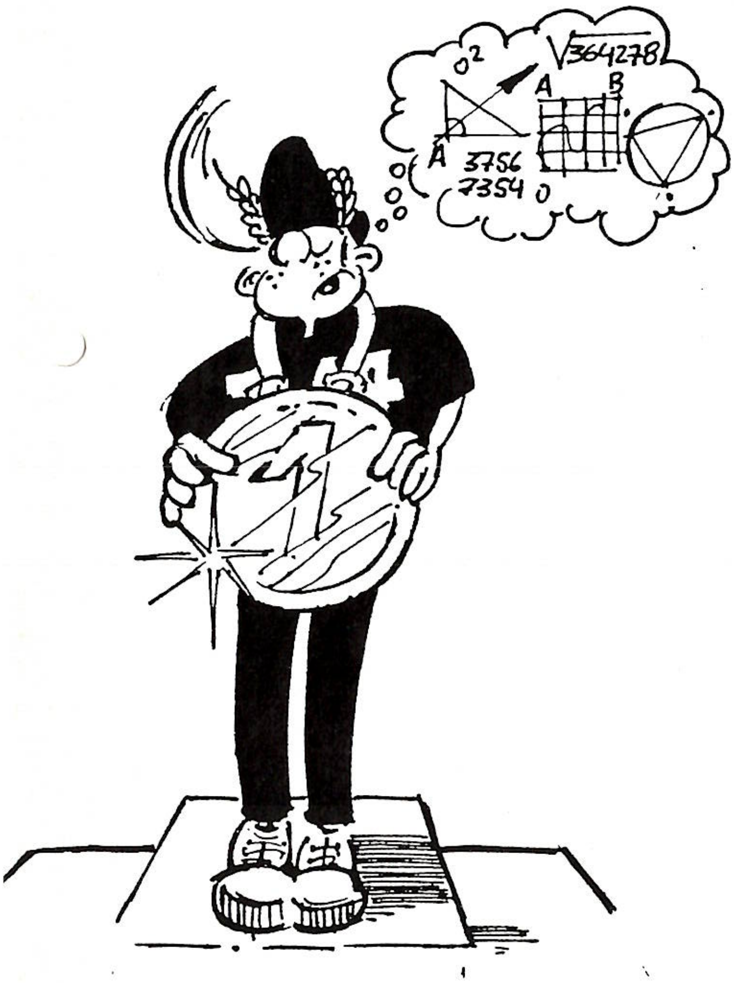
Assche Gilles, (5e), A.R. de Waterloo, Van Tuykom Alex, (4e), Coll. St. Pierre, Bruxelles, Van Vijve Mathieu, (4e), Coll. Card.Mercier, Braine L'Alleud, Van der Straeten Arnaud, (5e), Ath. Bockstael, Bruxelles.

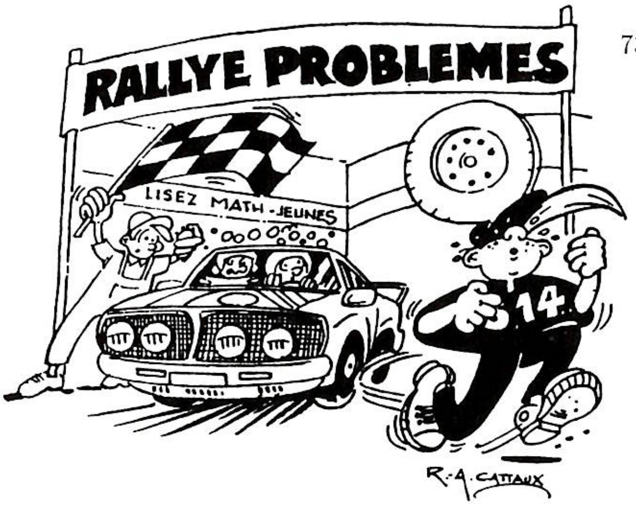
Prix Willy Vanhamme

Ce prix, octroyé pour la plus belle démonstration, a été attribué à Alice DEVILLERS, (3e), de l'Athénée Royal de Waterloo.

3. Olympiades Internationales 1991

En 1991, les Olympiades Mathématiques Internationales se dérouleront du 15 au 23 juillet à Stockholm en Suède. Notre pays sera représenté par 3 élèves francophones et 3 élèves néerlandophones. Les 3 élèves francophones seront désignés au mois de mai. En espérant qu'ils nous rapportent quelques médailles, je leur souhaite, dès à présent, bonne chance.





C. Festraets

1. Solutions des problèmes des numéros 49, 50 et 51

La plupart des solutions publiées ci-après m'ont été envoyées par des élèves de 2e, 3e, 4e, 5e et 6e années d'humanités (et même par un étudiant de 1ère candidature). Vous trouverez leurs noms à la suite de chaque solution. Si vous ne lisez pas votre nom, bien que vous m'ayez fait parvenir (dans les délais) vos solutions, cela ne signifie pas nécessairement que vous vous êtes trompé, mais votre réponse n'était pas celle de la majorité, ou elle était plus longue, moins élégante ou moins directe. Si vous désirez des précisions, vous pouvez toujours m'écrire. Je vous rappelle ci-dessous mon adresse.

En ce qui concerne les derniers problèmes, les délais d'impression de *Math-Jeunes* m'obligent à fournir des solutions à la composition avant d'avoir pu examiner les vôtres. Ne soyez donc pas étonné qu'aucun nom ne soit mentionné.

Envoyez votre courrier (questions, suggestions d'énoncés, ...) à C. FESTRAETS, 36, rue J.-B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

$\mathbf{m}_1$ Décomposons le cube $6 \times 6 \times 6$ en 216 petits cubes $1 \times 1 \times 1$. Puis colorions chacun de ces petits cubes soit en noir, soit en blanc de la manière indiquée par la figure 1.

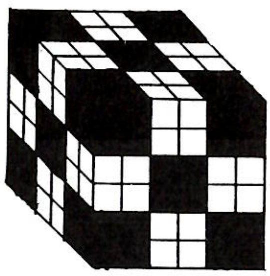


Figure 1

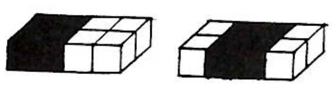


Figure 2

Il y a de la sorte 112 petits cubes noirs et 104 petits cubes blancs dans le grand cube. Or toute brique $1 \times 2 \times 4$ disposée à l'intérieur du grand cube contient le même nombre (4) de petits cubes blancs et de petits cubes noirs (figure 2). Donc, il est impossible de remplir exactement le grand cube avec ces briques (on en mettra au plus 26, il restera un bloc de 8 petits cubes noirs). (Solution de Claude DESSET, François GLINEUR, Quentin LOUVEAUX).

m$_2$

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & a^3 + b^3 \geqslant ab^2 + a^2 b \\
\Leftrightarrow\ & (a^3 - ab^2) + (b^3 - a^2 b) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & a(a^2 - b^2) - b(a^2 - b^2) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a^2 - b^2)(a - b) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a + b)(a - b)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

ce qui est vrai, car $(a - b)^2 \geqslant 0$ et $a + b > 0$ par hypothèse.

L'égalité est réalisée si et seulement si $a = b$.

(Solution de Vincent COUTAERTS, Etienne DE POORTERE, Claude DESSET, Jean-Emmanuel DUPONT, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Quentin LOUVEAUX, Philippe NIEDERKORN, Didier SMETS, Eric STEENHOUT, Corinne THIELS).

m$_3$ Le triangle abc est équilatéral; désignons par α la longueur de son côté et par h la longueur de la hauteur abaissée d'un sommet sur le côté opposé. On a d'une part, aire $(abc) = \frac{1}{2}\alpha.h$ d'autre part

$$\begin{aligned}
\text{aire } (abc) &= \text{aire } (pbc) + \text{aire } (pca) + \text{aire } (pab) \\
&= \frac{1}{2}|ps|.|bc| + \frac{1}{2}|pt|.|ca| + \frac{1}{2}|pu|.|ab| \\
&= \frac{1}{2}|ps|.\alpha + \frac{1}{2}|pt|.\alpha + \frac{1}{2}|pu|.\alpha \\
&= \frac{1}{2}.\alpha.(|ps| + |pt| + |pu|)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $|ps| + |pt| + |pu| = h$ et la somme $|ps| + |pt| + |pu|$ est constante quelle que soit la position du point p.

(Solution de Claude DESSET, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Quentin LOUVEAUX, Didier SMETS).

m$_4$ Chacun des angles de l'octogone A vaut $\frac{1}{2}(360° - 90°) = 135°$. Pour que cet octogone soit régulier, il suffit que ses côtés aient même longueur. En notant α la longueur d'un côté du carré B et β celle des côtés horizontaux et verticaux du carré A, il suffit donc de choisir $\alpha = \beta$.

Soit x la longueur d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle de "coin"; on a

$$x^2 + x^2 = \alpha^2 \quad x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \quad x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

On aura donc $\alpha = \beta$ si $2\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha = |ab|$, d'où $\alpha = \frac{|ab|}{1+\sqrt{2}}$. On a alors aire $(B) = \alpha^2$ et

aire (A) = aire du carré $abcd$ – aire des 4 "coins"

$$\begin{aligned}
\text{aire } (A) &= (\alpha + 2x)^2 - 4(x^2/2) \\
&= \alpha^2 + 4\alpha x + 2x^2 \\
&= \alpha^2 + 2\alpha^2\sqrt{2} + \alpha^2 \\
&= 2\alpha^2(1 + 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

D'où $\frac{\text{aire } (A)}{\text{aire } (B)} = 2(1 + \sqrt{2})$.

(Solution de Etienne DE POORTERE, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Quentin LOUVEAUX, Philippe NIEDERKORN, Corinne THIELS).

m$_5$ Si un homme fait x achats à x.100F chacun, il dépense x^2.100F; si sa femme fait y achats à y.100F chacun, elle dépense y^2.100F Comme chaque époux dépense 6300F de plus que sa femme, on a:

$$\begin{aligned}
& x^2.100 - y^2.100 = 6300 \\
& x^2 - y^2 = 63 \\
& (x - y)(x + y) = 63 = 1.63 = 3.21 = 7.9
\end{aligned}$$

x, y étant entiers et $x - y \leqslant x + y$, on a trois possibilités:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 63 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = 32 \\ y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 21 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$$

Jean a fait 23 achats de plus que Louise; la seule possibilité est de 32 achats pour Jean et 9 pour

Louise. Pierre a fait 11 achats de plus que Marie; la seule possibilité est de 12 achats pour Pierre et 1 pour Marie. On a ainsi :

$$\begin{cases} \text{32 achats pour Jean, 31 pour sa femme;} \\ \text{12 achats pour Pierre, 9 pour sa femme;} \\ \text{1 achat pour Marie, 8 pour son mari.} \end{cases}$$

Les couples sont donc (Jean, Anne), (Pierre, Louise) et (Paul, Marie).

(Solution de Claude DESSET, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Quentin LOUVEAUX, Philippe NIEDERKORN).

m_6 Soient a, b les deux nombres entiers positifs, $a > b$. On a l'équation

$$(a+b)+(a-b)+a.b+\frac{a}{b}=243$$

Après simplification et réduction au même dénominateur, il vient $\frac{2ab+ab^2+a}{b} = 243$ d'où $a(2b+b^2+1) = 243b$ et

$$a=\frac{243b}{(b+1)^2}$$

a est entier, donc $(b+1)^2$ divise exactement $243b$, mais $b+1$ et b n'ont pas de facteur commun, donc $(b+1)^2$ divise $243 = 3^5$.

On a

- soit $(b+1)^2 = 1$, alors $b = 0$ ce qui ne convient pas.
- soit $b+1)^2 = 3^2$, alors $b = 2$ et $a = \frac{243.2}{3^2} = 54$.
- soit $(b+1)^2 = 3^4$, alors $b = 8$ et $a = \frac{243.8}{3^4} = 24$.

(Solution de Etienne DE POORTERE, Claude DESSET, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Philippe NIEDERKORN, Quentin LOUVEAUX, Corinne THIELS).

m_7 Orientons le plan (voir figure 3) et considérons la rotation de centre X, milieu de BF, et d'angle 90° (dans le sens des aiguilles d'une montre). Cette rotation applique F sur A, A sur B et E sur E' tel que $\widehat{ABE'} = \widehat{FAE} = 180° - \widehat{BAC}$ et $|BE'| = |AE| = |AC|$.

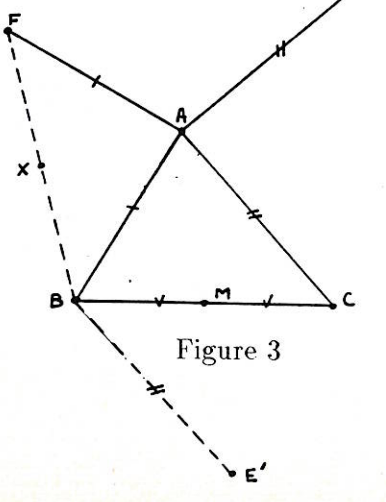


Figure 3

$ACE'B$ est donc un parallélogramme et les points A, M, E' sont alignés (sur une diagonale de ce parallélogramme). Or AE' est l'image de FE par la rotation d'angle 90°, donc $AE' \perp FE$.

m_8 $(1-3x+3x^2)^{743}.(1+3x-3x^2)^{744}$ est un polynôme de degré $2 \times 743 + 2 \times 744 = 2974$. Développons-le suivant les puissances croissantes de x :

$$(1-3x+3x^2)^{743}.(1+3x-3x^2)^{744} = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2974}x^{2974}$$

Dans les deux membres, remplaçons x par 1, on obtient : $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2974}$. La somme des coefficients est donc égale à 1.

m_9 Fixons l'origine des espaces sur les deux voies au point de croisement de celles-ci et l'origine des temps au moment où les deux trains sont respectivement à 40 et 50 km de ce croisement.

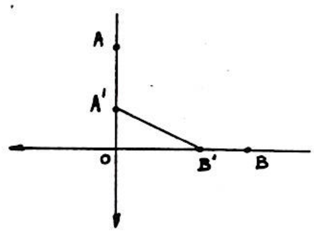


Figure 4

Le premier train occupe à l'instant 0 la position A d'abscisse -40 et à l'instant t la position A' d'abscisse $-40+48t$.

Le second train occupe à l'instant 0 la position B d'abscisse -50 et à l'instant t la position B' d'abscisse $-50+36t$.

En appliquant le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} |A'B'|^2 &= (-40+48t)^2+(-50+36t)^2 \\ &= 3600t^2-7440t+4100 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré prend sa valeur minimum pour $t = \frac{7440}{2 \times 300}$ et $|A'B'|$ vaut alors 16. Nous pouvons aussi résoudre l'équation du second degré en t:

$$3600t^2-7440t+4100-|A'B'|^2=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 7440^2-4.3600.(4100-|A'B'|^2)=0 \\ &= 14400|A'B'|^2-3686400 \\ &= 14400(|A'B'|^2-256) \\ t &= \frac{7440 \pm 120\sqrt{|A'B'|^2-256}}{7200} \end{aligned}$$

Cette équation n'admet de solution réelle que si $|A'B'|^2 \geqslant 256$. La plus petite valeur de $|A'B'|$ est donc $\sqrt{256} = 16$ et dans ce cas, $t = \frac{7440}{7200} = \frac{93}{90}$; les deux trains ont roulé pendant $\frac{93}{90}h = 62min$.

M$_1$ Il faut évidemment que le produit $m.n$ soit multiple de 4.

1er cas: l'un des nombres, m ou n, est multiple de 4. La solution est alors évidente. Si, par exemple, m est multiple de 4, on peut recouvrir l'échiquier avec n rangées de $\frac{m}{4}$ dominos chacune.

2ème cas: m et n sont pairs, sans être multiples de 4: $m = 4a + 2$ et $n = 4b + 2$.

Numérotons les cases de l'échiquier comme indiqué ci-dessous et partageons-le en quatre rectangles de dimensions $2 \times 2, 2 \times 4a, 2 \times 4b, 4a \times 4b$.

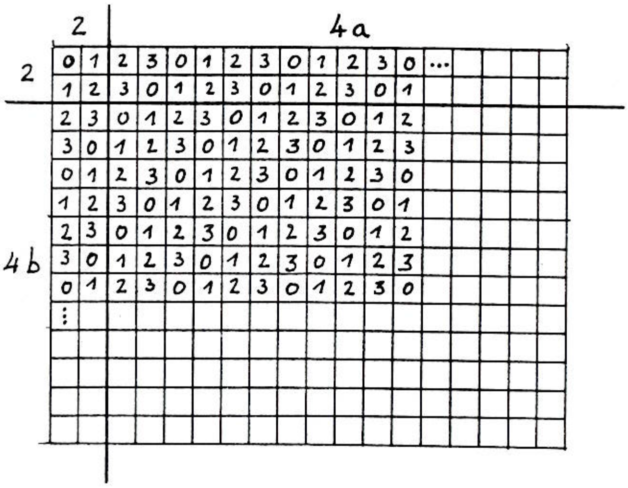


Figure 5

Remarquons que lorsqu'on place un domino 4×1 sur l'échiquier (horizontalement ou verticalement), on couvre quatre cases portant les numéros 0, 1, 2, 3 (pas nécessairement dans cet ordre). Tout échiquier qui peut être recouvert entièrement avec des dominos 4×1 comporte donc autant de cases "0" que de cases "1", que de cases "2" et que de cases "3". C'est le cas des trois rectangles $2 \times 4a$, $2 \times 4b$ et $4a \times 4b$ (en vertu du 1er cas). Ce n'est donc pas le cas du grand rectangle, puisque dans le carré 2×2, on ne trouve pas 0, 1, 2 et 3.

Conclusion: On peut recouvrir entièrement un échiquier $m \times n$ avec des dominos 4×1 ssi m ou n est multiple de 4.

(Solution de Claude DESSET, Alexandre DUTRIFOY, Vincent LEFEVRE, Jérome LOUVEAUX, Philippe NIEDERKORN).

M$_2$ $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1990} = (5 + 2\sqrt{6})^{995}$

$A = (5 + 2\sqrt{6})^n$
$= C_n^0 5^n + C_n^1 5^{n-1}.2\sqrt{6} + \ldots + C_n^i 5^{n-i}(2\sqrt{6})^i + \ldots + C_n^n(2\sqrt{6})^n$
$B = (5 - 2\sqrt{6})^n$
$= C_n^0 5^n - C_n^1 5^{n-1}.2\sqrt{6} + \ldots + (-1)^i C_n^i 5^{n-i}(2\sqrt{6})^i + \ldots + (-1)^n C_n^n(2\sqrt{6})^n$

Pour $n = 995$, on a
$A + B = 2.(C_{995}^0 5^{995} + C_{995}^2 5^{n-2}(2\sqrt{6})^2 + \ldots + C_{995}^{994} 5.(2\sqrt{6})^{994})$

$A + B$ est entier, multiple de 2 et de 5, donc multiple de 10. Evaluons B: $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$, donc

$$\begin{aligned} B &= (5 - 2\sqrt{6})^{995} < (5 - 4,8)^{995} = 0,2^{995} \\ \log B &< \log 0,2^{995} = 995(\log 2 - \log 10) \\ &< 995(0,31 - 1) \\ &< -686 \end{aligned}$$

Ainsi $B < 10^{-686}$. A est donc égal à un multiple de 10 moins un nombre inférieur à 10^{-686}. D'òu les chiffres qui encadrent la virgule dans le développement décimal de A sont 9 et 9.

(Solution de Vincent COUTAERTS, Etienne DE POORTERE, Claude DESSET, Jérome LOUVEAUX, Philippe NIEDERKORN).

M$_3$ Puisque a, b, c sont les mesures des longueurs des côtés d'un triangle, alors $|a - b| < c$. D'autre part, on a toujours: $|a - b| \geqslant 0$. Donc $0 \leqslant (a - b)^2 < c^2$ et $0 \leqslant a^2 + b^2 - 2ab < c^2$.

De même : $0 \leqslant b^2 + c^2 - 2bc < a^2$ et $0 \leqslant a^2 + c^2 - 2ac < b^2$.
Donc $0 \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ac < a^2 + b^2 + c^2$.
Donc $2ab + 2bc + 2ac \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2) < a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.
Donc $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$ et $2(a^2 + b^2 + c^2) < (a + b + c)^2$.

Donc $S \leqslant 3R$ et $2R < S$. Donc $\boxed{\frac{1}{3} \leqslant \frac{R}{S} < \frac{1}{2}}$

(Solution de France-Aline AMERIJCKX, Etienne DE POORTERE, Claude DESSET, Alexandre DUTRIFOY, François GLINEUR, Patrick KREPS, Vincent LEFEVRE, Didier SMETS, Eric STEENHOUT.)

M$_4$ Si les quatre nombres de départ ne sont pas tous égaux, nous allons montrer qu'après un nombre fini d'étapes, le plus grand (ou l'un quelconque des plus grands) diminue d'une unité au moins. Donc, au bout d'un nombre fini d'étapes, le plus grand atteindra zéro et alors les quatre nombres seront égaux à zéro. Si a, b, c, d sont les quatre nombres de départ, nous aurons pour une étape le schéma suivant (dans les tableaux qui suivent, tout nombre situé sur la (n+1)-ème ligne est la différence des deux nombres qui occupent les cases voisines dans la n-ème ligne. Le premier nombre d'une ligne est répété entre parenthèses à la cinquième position.)

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & (a) \\ |a-b| & |b-c| & |c-d| & |d-a| & \end{array}$$

Il est clair que si aucun des quatre nombres a, b, c, d ne vaut zéro, le plus grand des quatre nombres $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$, $|d-a|$ est strictement inférieur au plus grand des quatre nombres a, b, c, d. Reste à examiner ce qui se passe lorsqu'il y a un ou plusieurs zéros dans le quadruple (a, b, c, d).

1. Trois zéros

$$\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & 0 & (a) \\ a & 0 & 0 & a & (a) \\ a & 0 & a & 0 & (a) \\ a & a & a & a & \end{array}$$

2. Deux zéros

$$\begin{array}{lccccccl} \mathbf{1} & a & 0 & b & 0 & (a) & & \\ & a & b & b & a & & & \\ \mathbf{2} & a & 0 & 0 & a & (a) & & \\ & a & 0 & a & 0 & (a) & & \\ & a & a & a & a & & & \\ \mathbf{3} & a & 0 & 0 & b & (a) & & a \neq b \\ & a & 0 & b & c & (a) & & c = |b-a| \neq 0 \\ & a & b & d & e & & & d = |b-c|, e = |c-a| \end{array}$$

d et e ne peuvent être simultanément égaux à 0, car sinon $a = b$. Examinons le cas $d = 0 \neq e$ (on aura un résultat similaire pour $e = 0 \neq d$). Dans ce cas $b = c \neq a$ et $b = |b-a| \neq a$, d'où $a = 2b$ et $e = |b-2b| = b$.

$$\begin{array}{ccccc} a=2b & b & d=0 & e=b & (a=2b) \\ b & b & b & b & \end{array}$$

3. Un zéro

$$\begin{array}{lccccccl} \mathbf{1} & a & b & c & 0 & (a) & & a \neq b \neq c \neq a \\ & |a-b| & |b-c| & c & a & & & \\ \mathbf{2} & a & b & a & 0 & (a) & & a \neq b \\ & |a-b| & |b-a| & a & a & & & \\ \mathbf{3} & a & a & b & 0 & (a) & & a \neq b \\ & 0 & d & b & a & (0) & & d = |a-b| \neq 0 \\ & d & e & d & a & & & e = |d-b| \end{array}$$

si $e = |d-b| = 0$, alors $b = d = |a-b|$ d'où $a = 2b$

$$\begin{array}{lccccc} & b & 0 & b & 2b & (b) \\ & b & b & b & b & \\ \mathbf{4} & a & a & a & 0 & (a) \\ & 0 & 0 & a & a & \end{array}$$

on est ramené à l'un des cas précédents (deux zéros).

Donc, lorsque dans le quadruple figurent un ou plusieurs zéros, on est ramené en quatre étapes au plus soit à quatre nombres égaux, soit à quatre nombres tous différents de zéro.

(Solution de Etienne De Poortere, Claude Desset, Alexandre Dutrifoy, François Glineur, Vincent Lefevre, Jérome Louveaux, Philippe Niederkorn)

$\mathbf{M_5}$ On dira qu'un chemin qui va de la station X à la station Y est "plus court" qu'un autre s'il comporte moins de stations intermédiaires (cette définition permet qu'il y ait éventuellement plusieurs "plus courts" chemins pour aller de X en Y).

Soit A une station quelconque et B une des stations les plus éloignées de A, c'est-à-dire qu'en allant de A à B par le plus "court" chemin, le nombre de stations intermédiaires est supérieur ou égal au nombre de stations intermédiaires sur le trajet de A à n'importe quelle autre station.

Fermons la station B. Pour aller de la station C à la station D, il n'est pas nécessaire de passer par B, sinon les trajets CBA et DBA seraient plus longs que BA, ce qui est contraire à notre hypothèse.

On peut donc aller de toute station C à toute station D, bien que B soit fermée.

$\mathbf{M_6}$ Supposons qu'il existe un quadrilatère gauche $abcd$ ayant quatre angles droits. bc et ad ne sont pas coplanaires, donc ne sont pas parallèles; il existe donc une et une seule direction de plans parallèles à bc et ad. Soit α un plan appartenant à cette direction.

$ab \perp bc$ et $ab \perp ad$, donc $ab \perp \alpha$

$cd \perp bc$ et $cd \perp ad$, donc $cd \perp \alpha$

Dès lors, $ab // cd$, ce qui est contraire à notre hypothèse (les côtés opposés ne sont pas coplanaires).

$\mathbf{M_7}$ $$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

$3abc$ étant strictement positif, on a $b < a$ et $c < a$ d'où $b + c < 2a$ et $2(b+c) = a^2 < 4a$.

On obtient ainsi $a < 4$ et puisque a est pair (car $a^2 = 2(b+c)$, la seule valeur de a est 2. Dès lors

$b+c=2$, ce qui entraîne $b=c=1$. On vérifie que la solution $a=2$, $b=c=1$ satisfait au système proposé : $\begin{cases} 8-1-1=3.2.1.1 \\ 4=2.(1+1) \end{cases}$

M₈ Désignons par a, b, c, d, e, f les longueurs des six côtés du tétraèdre

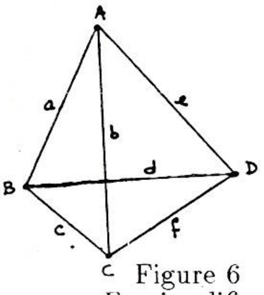


Figure 6

Les quatre faces ayant même périmètre, on a

$$\begin{cases} a+b+c=a+d+e \\ a+b+c=b+e+f \\ a+b+c=c+d+f \end{cases}$$

En simplifiant chacune de ces égalités, il vient

$$\begin{cases} b+c=d+e & (1) \\ a+c=e+f & (2) \\ a+b=d+f & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2): \; b-a=d-f$$
$$(3): \; a+b=d+f$$

d'où $2b=2d$ et $b=d$, $2a=2f$ et $a=f$ et en remplaçant dans (1), on a : $c=e$ ce qui donne la situation décrite par la figure ci-dessous.

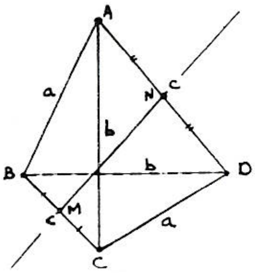


Figure 7

Si M et N sont les milieux respectifs de $[BC]$ et de $[AD]$, la rotation d'axe MN et d'angle 180° applique A sur D, B sur C et C sur B, donc le triangle ABC sur le triangle DCB.

(Remarque : on voit facilement que MN est perpendiculaire à BC et à AD car les triangles BNC et AMD sont isocèles). Il existe donc un déplacement qui applique chacune des faces sur une autre face.

M₉ Soit α la 4e racine de l'équation. On a :
$x^4-px^3+qx^2-rx+s=(x-\operatorname{tg}A)(x-\operatorname{tg}B)(x-\operatorname{tg}C)(x-\alpha)$

En identifiant les deux membres, il vient

$$\begin{cases} \operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C+\alpha=p \\ \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A+\alpha(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)=Q \\ \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\alpha(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A)=r \\ \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\alpha=s \end{cases}$$

On sait que, pour $A+B+C=180°$, on a $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$. Posons $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=k$ et $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A=t$

Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} k+\alpha & =p \quad (1) \\ t+\alpha k & =q \quad (2) \\ k+\alpha t & =r \quad (3) \\ k\alpha & =s \quad (4) \end{cases}$$

De (1) et de (4), on tire $k=p-\alpha=\frac{s}{\alpha}$, d'où $\alpha^2=p\alpha-s$.

Eliminons t entre (2) et (3) : $\begin{cases} \alpha t+\alpha^2k=\alpha q \\ k+\alpha t=r \end{cases}$ d'où $\alpha^2k-k=\alpha q-r$.

En remplaçant α^2 par $p\alpha-s$ et k par $p-\alpha$ dans cette dernière relation, on obtient

$$(p\alpha-s)(p-\alpha)-p+\alpha=\alpha q-r$$
$$p^2\alpha-sp-p\alpha^2+s\alpha-p+\alpha=\alpha q-r$$

Remplaçons à nouveau α^2 par $p\alpha-s$,

$$p^2\alpha-sp-p(p\alpha-s)+s\alpha-p+\alpha=\alpha q-r$$
$$\alpha(s-q+1)=p-r$$
$$\alpha=\frac{p-r}{s-q+1}$$

(On a supposé implicitement $s\neq 0$, donc $\alpha\neq 0$ et le triangle ABC non dégénéré).

Voici la liste des lauréats de notre rallye-problèmes. Ils ont tous fait preuve de fidélité en participant à chaque étape et de beaucoup d'imagination en envoyant d'excellentes solutions. A tous, nos félicitations.

Premiers prix

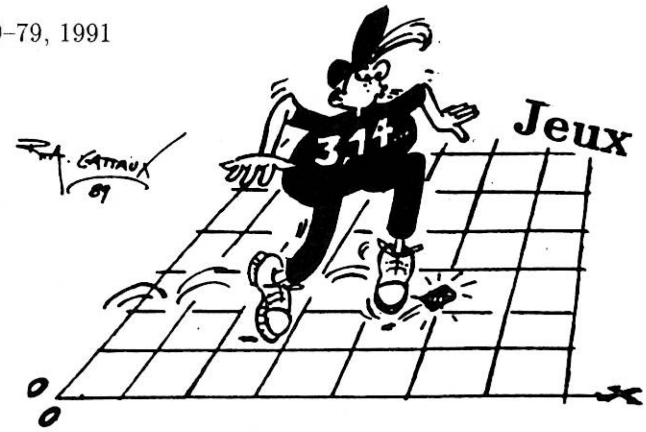
De Poortere, Etienne (17 ans), Lyc. Jacqmain, Bruxelles; Desset, Claude (17 ans), Sém. St. Joseph, Bastogne; Dutrifoy, Alexandre (17 ans), Providence Humanités, Gosselies; Glineur, François (16 ans), A. R. Quiévrain; Lefèvre, Vincent (17 ans), Lycée P. de Fermat, Toulouse; Louveaux, Jérôme (17 ans), Coll. N. Dame, Basse-Wavre; Louveaux, Quentin (13 ans), Coll. N. Dame, Basse-Wavre; Niederkorn, Philippe (16 ans), Inst. Ste Marie, Arlon; Steenhout, Eric (15 ans), Ath. F. Blum, Bruxelles

Deuxième Prix

Thiels, Corinne (20 ans), A.R. Binche;

Accessit

Leroy, Sébastien (12 ans), Inst. St. Boniface-Parnasse, Bruxelles



A.Parent

Mots Croisés par G. Malisse

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2	■					■			
3				■					■
4			■	■					
5									
6				■			■		
7		■			■				
8						■		■	
9			■						

Horizontalement

1. Prouves
2. Prénom de Rossi – Accord
3. N'a pas de frontières – Astuce
4. Mesure chinoise – Certains nombres en algèbre
5. Partie de la mathématique
6. Lentilles – Condition – Article contracté
7. Préposition – Amertume, méchanceté
8. Complètement détruits
9. Préposition – Amenées vers soi

Verticalement

1. Partie de la mathématique
2. Os de l'oreille – Sa fin est fêtée
3. Posa – Risques
4. Indéfini – Clair
5. Possessif – Condition
6. Difficile
7. Donner des coups – Entourée d'eau
8. Célèbre en mathématique
9. Hypothèse – Uniques

Nombres Croisés

	1	2	3	4
1	2		■	■
2		3		
3	■		5	
4	■			7

Complète la grille de manière à conserver la symétrie par rapport à la diagonale donnée et à obtenir (horizontalement et verticalement) des nombres premiers partout.

	1	2	3	4
1				
2				■
3				
4				

Horizontalement

1. Les quatre chiffres sont différents et chacun s'obtient en ajoutant le même entier au précédent
2. Lorsque tu connaîtras le premier chiffre, il faudra choisir le plus petit nombre premier possible
3. On obtient le même nombre en le lisant de droite à gauche
4. Nombre premier

Verticalement

1. Les quatre chiffres sont différents et chacun s'obtient en multipliant le précédent par le même entier
2. Les nombres obtenus en regardant
   - le premier chiffre
   - les deux premiers chiffres
   - les trois premiers chiffres
   - les quatre chiffres

   sont tous premiers
3. Nombre premier
4. Nombre premier – Un carré parfait

 Math-Jeunes n° 52, 80–83, 1991

Soir de Raid: solution

P. Dupont, *Faculté agronomique de Gembloux*

Voici le texte publié dans Math-Jeunes n° 51, avec indication des noms que l'auteur y a consciemment *dissimulés. Il est bien sûr possible qu'il s'en trouve d'autres.*

La Land se traînait sur la piste depuis le matin. On pensait à s'arrêter, `Cardan`s moins d'une heure il ferait noir, lorsque le véhicule s'em`Bourbaki`lomètre 370" conclut Jacques, `Levi`*eux*, comme nous l'`Appel`ions; toujours flegmatique, le Vieux; personne ne tint d'ailleurs compte de sa remarque, car, comme Pierre, son nev`Euler`emarqua, il ne savait `Pascal`culer; mais il était co`Staudt`out le monde descendit et se mit à l'ouvrage. Il a fal`Lucas`ser et `Lie`r des branches, `Pell`eter,... Après beaucoup d'efforts, la voiture fut dégagée. Tout le monde était en sueur; "Ces p`Oresme`nervent", pensait chacun. Le pneu é`Tait` sa`Liouville`ux, plutôt" pensa Patrick, le médecin de l'équipe. De fait, ce pneu était usé jusqu'à la corde : il faudrait bientôt le remplacer.

Cependant, alors que personne n'y prenait garde, Anne se pâma : l'effort fourni? une grip`Peano`dine? ou plus grave? L'esto`Mac Lane`phrite? "Nom de `Dieudonné`z-lui à boire!" s'écria Pierre; on rechercha le tri`Stevin` qui nous restait, mais Patrick s'interposa : "Qu'on la couvre plutôt; où est le tur`Banach`eté la semaine dernière? D'ailleurs, cela ne m'a pas l'air grave." Il l'examina rapidement, puis re`Fermat`out-de-suite sa trousse et conclut : "Ce n'est rien; ce travail au`Raabe`ti l`Abel`le demoiselle." Pierre se `Gauss`ait : "Il a `Menelaüs`cultation à un train d'enfer; c'est du grand `Artin`discutablement!" Personne ne trouva drôle la remarque `Dupin`ce-sans-rire; le Vieux pensa même, *in petto*, "Tu m'emmer`Descartes` sarcasmes sont permanents". Au contraire, Anne remerciait Patrick : "Je me sens mieux; merci, `Monge`ntil c`Rolle`."

Pendant ce temps, le soleil avait jeté son ulti`Méray`on. Le Vieux décida : "On déballe tout, `Cartan`t qu'à faire, on s'arrête pour le bivouac; `Neper`dons pas de temps. Au travail, et tout le monde colla`Borel`a nuit vient vite par ici. Égoï`Steiner`te s'abstenir, c'est notre devise!" Long discours, dans la bouche du Vieux...

Bientôt, la lune nous é`Clairaut`ilement. Il fallait man`Germain`tenant. On avala rapidement du `Poisson` en boîte et de la macédoine de légumes (le jam`Bonnet`ait plus très frais), puis on se réunit autour du feu. Bizarrement, on parlait toujours des vacances passées : "Tu te souviens de ce f`Jordan`ne? La Norvège...—Ne m'en parle pas, ce qu'on a eu froid. Pense plutôt à `Lagrange` où nous avons passé quinze pe`Tits` jours dans les Causses. —Causses? Jamais de la `Viète`s toujours aussi paumée, c'étaient les Cé`Venn`es..." Et ainsi, une heure ou deux, puis chacun se retirait pour la nuit.

* *
*

Voici à présent quelques mots au sujet de chacune de nos victimes, présentées dans l'ordre alphabétique. (Le prénom usuel est en caractères *penchés* lorsque ce n'est pas le premier.)

Qu'on ne s'y trompe pas; si les Français sont indiscutablement les plus nombreux dans cette liste, ce n'est ni en raison d'un quelconque chauvinisme linguistique de notre part, ni parce que la France aurait, plus que toute autre nation, été propice à l'éclosion de mathématiciens de valeur. La raison en est, simplement que les noms à consonance française étaient plus faciles à dissimuler dans un texte en français.

Un autre mot de mise en garde : en aucun cas, la longueur de la notice ne doit être considérée comme un indice de la valeur du personnage dont elle parle.

Enfin, il n'est pas mauvais de rappeler que *Math-Jeunes* a publié en 1984–1985 dans les numéros 21 à 24 les biographies d'un grand nombre de mathématiciens. La liste ci-dessous reprend certains d'entre eux, mais en comporte également de nouveaux, surtout parmi les contemporains.

- Niels Henrik ABEL, mathématicien norvégien (Île de Finnøy 1802–Froland 1829); il prouva que l'équation algébrique générale de degré cinq ne peut se résoudre par radicaux. Ses travaux ont également porté sur les séries potentielles et sur les fonctions elliptiques.
- Kenneth APPEL; il ne s'agit pas de Paul Émile APPELL, mathématicien français (Strasbourg 1855–Paris 1930), mais du mathématicien

étatsunien qui, en 1976 et en collaboration avec Wolfgang HAKEN, démontra, à l'aide de volumineux calculs sur ordinateur, le théorème des quatre couleurs.

• Emil ARTIN, mathématicien allemand (Vienne 1898–Hambourg 1962); travaux en algèbre commutative et en théorie des nombres.

• Stefan BANACH, mathématicien polonais (Cracovie 1892–Lvov 1945); créateur de l'analyse fonctionnelle moderne, il fonda l'école de Lvov. Un *espace de* BANACH est un espace vectoriel normé complet; une des conséquences du *paradoxe de* BANACH-TARSKI est qu'il est possible de découper une boule en cinq morceaux qu'on peut ensuite réassembler pour former deux boules de même rayon que la première.

• Pierre Ossian BONNET, mathématicien français (Montpellier 1819–Paris 1892); travaux sur la géométrie différentielle des surfaces. Le Théorème de GAUSS-BONNET met en rapport la courbure totale d'une surface et sa caractéristique d'EULER-POINCARÉ.

• Émile Félix Édouard Justin BOREL, mathématicien et homme politique français (Saint-Affrique 1871–Paris 1956); ses recherches ont notamment porté sur la théorie des fonctions; on lui doit une notion de *mesure* d'un ensemble de points qui généralise celle de JORDAN et qui ouvre la voie à l'intégrale de LEBESGUE. Il a été l'auteur de plusieurs des bons volumes de la collection *Que sais-je?* aux Presses Universitaires de France.

• Nicolas BOURBAKI; pseudonyme collectif d'un groupe de mathématiciens, fondé au début des années 1930 par Henri CARTAN, Claude CHEVALLEY, Jean DELSARTE, Jean DIEUDONNÉ et André WEIL. L'équipe se renouvelle par cooptation; bien que l'anonymat soit en principe de rigueur, on sait que le groupe n'est plus exclusivement français. Depuis 1939, il publie un gigantesque traité de référence, les *Éléments de mathématique*.

• Jérôme CARDAN, alias Gerolamo ou Hieronymo CARDANO, philosophe, médecin et mathématicien italien (Pavie 1501–Rome 1576); dans son *Ars magna*, il donne une méthode de résolution de l'équation du troisième degré, due en fait à Niccolo FONTANA, dit TARTAGLIA (c'est-à-dire *le Bègue*); en revanche, c'est bien à CARDAN lui-même que l'on doit le joint articulé qui porte son nom.

• Élie Joseph CARTAN, mathématicien français (Dolomieu 1869–Paris 1951); importantes contributions à l'étude de la topologie algébrique, des variétés différentielles, des groupes de LIE (dont il a considérablement amélioré la classification établie par KILLING). Il est le créateur de la théorie des spineurs et, avec POINCARÉ, du calcul différentiel extérieur. — Son fils Henri Paul CARTAN, mathématicien français (Nancy 1904); travaux en théorie des fonctions analytiques et, surtout, en algèbre homologique. Son influence sur les mathématiques françaises provient de son rôle dans le groupe BOURBAKI et de sa position de directeur des études à l'École normale supérieure (de 1940 à 1965).

• Alexis Claude CLAIRAUT, astronome et mathématicien français (Paris 1713–*id.* 1765); géomètre précoce (il fut admis à l'Académie des Sciences à l'âge de dix-huit ans!), il prouva que toute cubique plane a un point d'inflexion et fut l'un des premiers à étudier les courbes gauches, qu'il appelait *courbes à double courbure*.

• René DESCARTES, philosophe et savant français (La Haie [Touraine], aujourd'hui Descartes [Indre-et-Loire] 1596–Stockholm 1650); on le considère comme le fondateur de la géométrie analytique, car il a développé et appliqué des idées qui remontent en fait à APOLLONIUS DE PERGE; à cet effet, il a affiné la notation algébrique de l'époque, lui donnant essentiellement le caractère que nous lui connaissons encore aujourd'hui. Il est aussi à compter dans les précurseurs du calcul différentiel, pour sa méthode de construction des tangentes (supplantée toutefois par celle de FERMAT). D'autres travaux de DESCARTES concernent le nombre de racines d'une équation algébrique.

• Jean Alexandre Eugène DIEUDONNÉ, mathématicien français (Lille 1906); membre fondateur de BOURBAKI, mais aussi auteur, à titre personnel, de nombreux travaux en topologie et en théorie des groupes classiques notamment, ainsi qu'en histoire des mathématiques. Célèbre pour ses prises de positions tranchées.

• Baron Charles DUPIN, mathématicien et homme d'état français (Varzy [Nivernais] 1784–Paris 1873); élève de MONGE, il étudia la théorie des surfaces et les systèmes triples orthogonaux, laissant son nom à l'*indicatrice* des courbures normales et à la *cyclide*, qui est l'enveloppe d'une famille de sphères tangentes à trois sphères fixes.

• Leonhard EULER, mathématicien suisse (Bâle 1707–Saint-Pétersbourg 1783); ce génial calculateur a travaillé dans tous les domaines des sciences exactes de son temps; le plus impressionnant est cependant dans ses contributions au jeune calcul infinitésimal, ses puissantes méthodes intuitives n'étant parfois justifiées que bien plus tard.

• Pierre Simon DE FERMAT, magistrat, mathématicien et physicien français (Beaumont-de-Lomagne 1601–Castres 1665); précurseur de NEWTON et LEIBNIZ dans la fondation du calcul différentiel et de DESCARTES dans celle de la géométrie analytique, fondateur avec PASCAL du calcul des probabilités, il est surtout connu pour ses travaux —en amateur— d'arithmétique, dont il nous a, hélas, laissé de nombreux résultats sans démonstrations...

• Carl Friedrich GAUSS, astronome, mathématicien et physicien allemand (Brunswick 1777–Göttingen 1855); il fut surnommé *le Prince des mathématiciens*. On ne peut passer sous silence ses travaux d'arithmétique, de probabilités (*loi normale* ou *loi de* LAPLACE-GAUSS), ainsi que sur la théorie des surfaces (*courbure totale* ou *courbure de* GAUSS); on lui doit aussi plusieurs démonstrations du Théorème fondamental de l'algèbre : *Tout polynôme à coefficients complexes possède une racine complexe.*

• Sophie GERMAIN, mathématicienne française (Paris 1776–*id.* 1831); étude des lames vibrantes et des surfaces minimales; approfondissement des travaux de LE GENDRE en arithmétique.

• Camille JORDAN, mathématicien français (Lyon 1838–Paris 1922); il joua un rôle de premier plan dans le développement de la théorie des groupes, prolongeant notamment les travaux de GALOIS et d'ABEL; pour ses travaux en théorie de l'intégration (la *mesure de* JORDAN), il fut amené à définir les courbes planes qui portent son nom et qui partagent le plan en deux régions.

• Comte Joseph *Louis* DE LAGRANGE, mathématicien français (Turin 1736–Paris 1813); en analyse, on lui doit des résultats sur les polynômes de TAYLOR et sur les équations différentielles; c'est lui qui introduisit la notation f' pour désigner la dérivée de la fonction f. Il s'est également occupé d'arithmétique, et ses recherches sur la résolution des équations algébriques furent l'une des sources des travaux de GALOIS.

• Beppo LEVI, mathématicien italien (Turin 1875–Rosario [Argentine] 1961); son nom a été donné à un théorème sur les suites croissantes de fonctions intégrables (dit aussi *Théorème de la convergence monotone*). — Ne pas confondre avec Eugenio Elia LEVI (Turin 1883–Subido 1917), avec Tullio LEVI-CIVITA (Padoue 1873–Rome 1941) ni avec Paul LÉVY (Paris 1886–*id.* 1971).

• Sophus LIE, mathématicien norvégien (Nordfjordeid 1842–Christiania, aujourd'hui Oslo 1899); travaux essentiels en théorie des groupes en vue d'applications à l'analyse et à la géométrie différentielle. Un *groupe de* LIE est un groupe muni d'une structure de variété analytique.

• Joseph LIOUVILLE, mathématicien français (Saint-Omer 1809–Paris 1882); il a étudié les transformations conformes et créé, avec Charles HERMITE, la théorie abstraite des fonctions elliptiques. On lui doit également les premiers exemples de nombres transcendants.

• Édouard LUCAS, mathématicien français (1842–1891); travaux en arithmétique, dont certains aspects sont bien connus des amateurs de "récréations mathématiques".

• Saunders MAC LANE, mathématicien étatsunien (Norwich [Connecticut] 1909); travaux en topologie et en topologie algébrique. Avec Samuel EILENBERG, il fonde dans la première moitié des années 1940 la *théorie des catégories*, pour formaliser la notion de structure mathématique.

• MENELAÜS (ou MENELAOS) D'ALEXANDRIE, mathématicien et astronome grec (fin du Ier siècle apr. J.-C.); ses travaux ont contribué à la trigonométrie et ont fondé la géométrie sphérique et la trigonométrie sphérique. On se souviendra également de son Théorème sur la section d'un triangle par une droite.

• Hugues *Charles* Robert MÉRAY, mathématicien français (Chalon-sur-Saône 1835–Dijon 1911); outre des contributions à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, on lui doit une des premières définitions rigoureuses des nombres réels (au moyen des suites de CAUCHY).

• Gaspard MONGE, comte de Péluse, mathématicien français (Beaune 1746–Paris 1818); nous n'évoquerons pas ici son rôle dans la vie publique française et dans l'épopée napoléonienne. Mentionnons simplement qu'il fut l'un des grands organisateurs de l'École polytechnique. On lui doit des travaux en géométrie différentielle et, surtout, la création de la géométrie descriptive, mise au point pour les besoins du génie.

• John NEPER, alias NAPIER, baron de Merchiston, mathématicien écossais (Merchiston 1550–*id.* 1617); il consacra près de vingt ans à la mise au point de la théorie et de tables des logarithmes dits aujourd'hui naturels ou *népériens*; il collabora ensuite avec BRIGGS pour la publication de tables de logarithmes décimaux. Les *bâtons de Neper* sont des réglettes chiffrées qui facilitaient la multiplication écrite.

• Nicole (alias Nicolas) ORESME, savant français (En Normandie, v. 1320–Lisieux 1382); on peut le considérer comme l'inventeur de la représentation graphique des fonctions, à l'occasion de son étude de ce que nous appelons aujourd'hui mouvement rectiligne uniformément accéléré.

• Blaise PASCAL, savant, penseur et écrivain français (Clermont-Ferrand 1623–Paris 1662); ce n'est pas le lieu ici de rappeler ses innombrables travaux en philosophie et en théologie, en physique, en géométrie, en arithmétique,... Rappelons seulement qu'il a redécouvert, à l'occasion de travaux qui fondèrent le calcul des probabilités (en collaboration avec FERMAT), le triangle arithmétique qui porte son nom mais qui était, en fait, déjà connu des Chinois bien avant notre ère. — C'est son père Étienne PASCAL (1588–1651) qui a laissé son nom au *limaçon*.

• Giuseppe PEANO, mathématicien italien (Spinetta [Cuneo] 1858–Turin 1932); essentiellement logicien, il utilisa pour publier ses travaux un système de notations formalisées de son invention, la *pasigraphie*, qui nuisit à la diffusion de ses idées; on retient cependant son axiomatisation de l'arithmétique et, dans un autre domaine, sa célèbre courbe remplissant tout un carré.

• John PELL, mathématicien et astronome anglais (Southwyke [Sussex] 1610–Londres 1685); son principal motif de pérennité est d'avoir laissé son nom à l'équation diophantienne $y^2 - nx^2 = 1$ (où n est un naturel), résolue en fait par FERMAT.

• Siméon *Denis* POISSON, mathématicien français (Pithiviers 1781–Paris 1840); ses travaux portent sur le calcul des probabilités (*loi de* POISSON), la mécanique rationnelle et la physique mathématique.

• Joseph Ludwig RAABE, mathématicien suisse (Brody [Galicie, aujourd'hui Pologne] 1801–Zurich 1859); son nom est resté attaché (en concurrence avec ceux de DUHAMEL et de DARBOUX) à un critère de convergence des séries positives.

• Michel ROLLE, mathématicien français (Ambert 1652–Paris 1719); le Théorème qui porte aujourd'hui son nom est issu de sa *théorie des cascades* pour séparer les racines d'une équation algébrique.

• Karl Georg *Christian* VON STAUDT, mathématicien allemand (Rothenburg ob der Tauber 1798–Erlangen 1867); il a donné une définition purement projective du rapport anharmonique et une axiomatique de la géométrie projective qui la dégagent entièrement de la géométrie euclidienne.

• Jakob STEINER, mathématicien suisse (Utzenstorf 1796–Berne 1863); on a dit de lui qu'il était le plus grand géomètre depuis APOLLONIUS DE PERGE, alias APOLLONIOS DE PERGA (Perge v. 262–Alexandrie v. 180 av. J.-C.); il a notamment contribué de manière essentielle au renouvellement de la géométrie projective au XIX^e siècle. De nombreux êtres géométriques ont l'honneur de porter son nom : *ellipse de* STEINER, *hypocycloïde* STEINER,...

• Simon STEVIN, alias Simon DE BRUGES, mathématicien et physicien flamand (Bruges 1548–La Haye 1620); il étudia la statique et l'hydrostatique; il étendit les possibilités de la numération décimale en introduisant ce qui deviendrait notre virgule pour séparer la partie entière de la partie fractionnaire et fut le premier à exposer les règles de calcul sur les nombres écrits selon ces méthodes.

• Peter Guthrie TAIT, mathématicien et physicien écossais (Dalkeith 1831–Édimbourg 1901); élève de HAMILTON, il étudia les quaternions; en physique, il collabora avec lord KELVIN.

• Jacques TITS, mathématicien belgo-français (Uccle 1930); pour tout détail sur sa vie et son œuvre, nous renvoyons à l'article de Francis BUEKENHOUT paru dans *Math-Jeunes* **49** de novembre 1990.

• John VENN, mathématicien anglais (1834–1923); il avait, dans l'usage des diagrammes ensemblistes auxquels nous donnons son nom (1880), été précédé par Johann Christoph STURM (1661), LEIBNIZ (1666), Johann Christian LANGE (1712) et EULER (1770).

• François VIÈTE, juriste et mathématicien français (Fontenay-le-Comte 1540–Paris 1603); il est le père du symbolisme algébrique moderne; on lui doit les formules exprimant les coefficients d'une équation algébrique en fonction de ses racines ainsi qu'une expression de π comme produit infini, qu'il utilisa pour en donner une approximation avec dix décimales. Il a assis la trigonométrie plane ainsi que la trigonométrie sphérique et publié des tables de fonctions trigonométriques. Il déchiffra pour Henri IV le code des armées de Philippe II d'Espagne, ce dont celui-ci se plaignit au pape, arguant que ce résultat n'avait pu être obtenu que par sorcellerie.

Solution des jeux

Mots Croisés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	D	E	M	O	N	T	R	E	S
2		T	I	N	O		O	U	I
3	A	R	T		T	R	U	C	
4	L	I			R	E	E	L	S
5	G	E	O	M	E	T	R	I	E
6	E	R	S		S	I		D	U
7	B		E	N		F	I	E	L
8	R	A	S	E	S		L		E
9	E	N		T	I	R	E	E	S

Nombres Croisés

Voici une solution exploitant les nombres premiers les plus petits possibles

	1	2	3	4
1	2	3		
2	3	3	0	1
3		0	5	3
4		1	3	7

Si on refuse les nombres commençant par zéro, voici une autre solution:

	1	2	3	4
1	2	3		
2	3	3	1	3
3		1	5	1
4		3	1	7

Peut-être as-tu trouvé une autre solution; tu as alors utilisé des nombres premiers supérieurs aux nôtres.

	1	2	3	4
1	1	3	5	7
2	2	1	1	
3	4	1	1	4
4	8	9	9	9

Avec ce numéro s'achève la douzième année de publication de *Math-Jeunes*.
MATHieu exécute une dernière π-rouette pour te souhaiter de bons résultats scolaires et de bonnes vacances. Il te donne rendez-vous en novembre prochain dans le numéro 53.
N'oublie pas de le réclamer à ton professeur de mathématiques !