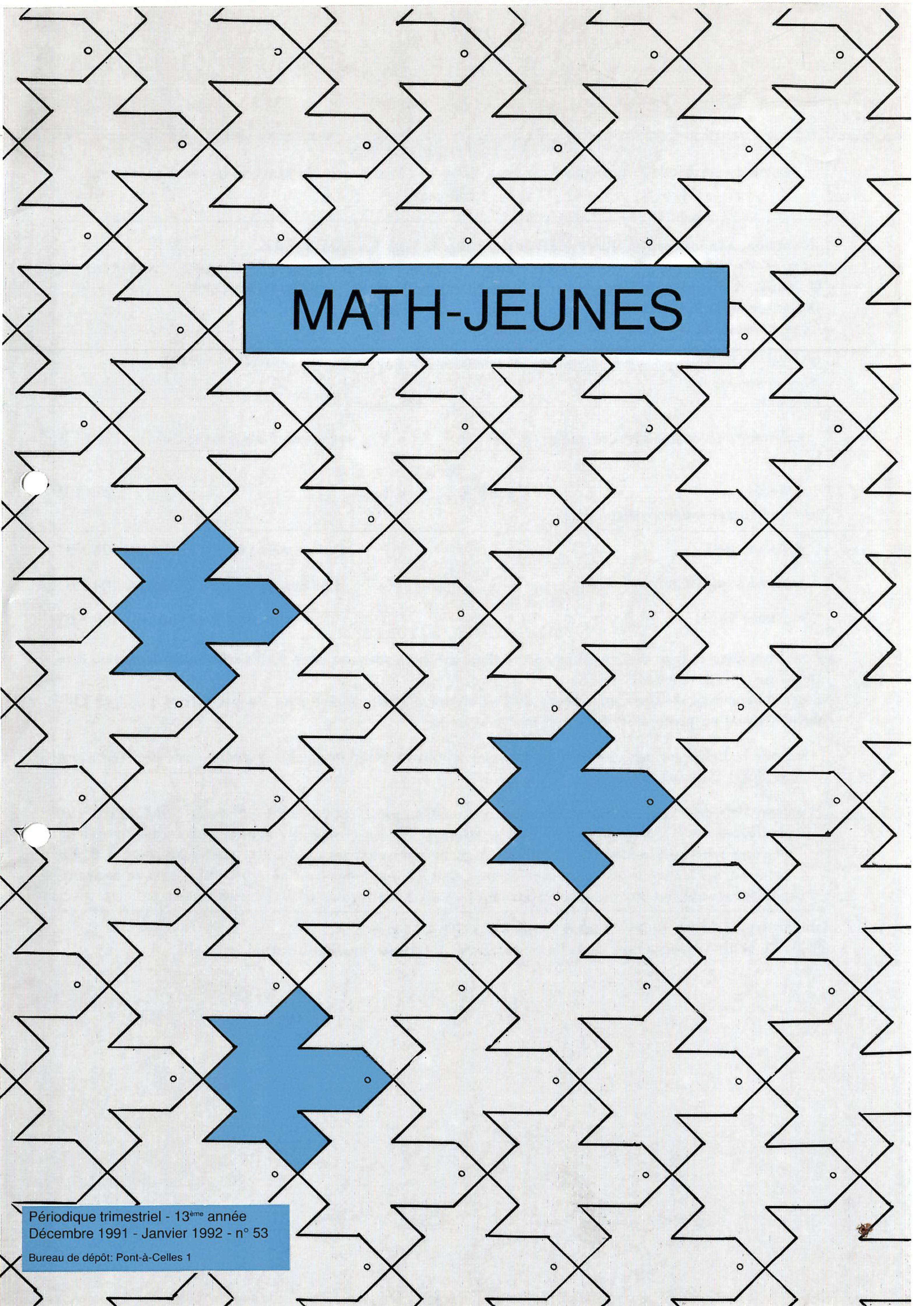


MATH-JEUNES

Périodique trimestriel - 13ème année
Décembre 1991 - Janvier 1992 - n° 53

Bureau de dépôt: Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: Place Matteotti 29 Bte 5. 7100 LA LOUVIERE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 100 FB
- Isolés: 140 FB

Etranger :

- Par paquet de 5 abonnements: 1000 FB
- Isolés: 280 FB

Anciens numéros encore disponibles:

- Avant 1987 — Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB)
- Années 88/89, 89/90 — Par année: 50 FB (Etranger: 100 FB)
- Année 90/91 — 80 FB (Etranger: 160 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez Nadine Debaille Joelants, Rue Delpierre 2, 7022 HARMIGNIES.

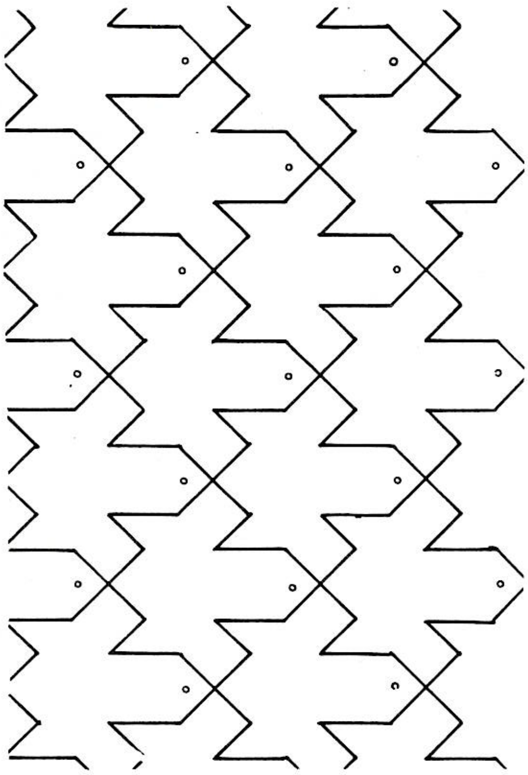
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 53 Treizième année 1991

MATH-JEUNES



L'histoire des nombres complexes

S. Trompler

ELIE CARTAN dit [1] : "*L'histoire des nombres imaginaires commence à partir du moment où, s'étant aperçu qu'un nombre négatif n'admet pas de racine carrée, on s'est vu conduit néanmoins à introduire dans le calcul formel le symbole représentant le résultat de l'extraction impossible d'une telle racine carrée*".

Nous sommes au 16ème siècle. L'équation du deuxième degré est résolue depuis l'antiquité grecque. Malgré les cas sans solution, par impossibilité d'extraire la racine carrée de nombres négatifs, elle n'a posé aucune question nouvelle. En effet, ces cas sont l'expression de problèmes géométriques, mécaniques, etc qui n'admettent pas non plus de solution.

Il en va tout autrement pour l'équation du troisième degré qui va fournir le premier exemple de problème possible, quoique sa solution exige la racine carrée d'un nombre négatif. Ce sont des mathématiciens italiens qui vont, les premiers, résoudre l'équation du troisième degré. Comme l'usage des nombres négatifs était beaucoup moins répandu qu'aujourd'hui, ils distinguent 3 cas, avec p et q positifs:

(a) $x^3 + px = q$
(b) $x^3 = px + q$
(c) $x^3 + q = px$

Figure 1: Nicolo TARTAGLIA

Figure 2: Girolamo CARDANO

Ils n'envisagent pas $x^3 + px + q = 0$ qui ne peut avoir de solution positive. Il n'est pas nécessaire d'envisager l'équation complète que nous écririons $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, car on peut évidemment tout diviser par a et qu'en posant $x' = x + \alpha$ on aboutit à $x'^3 + px' + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) en choisissant $\alpha = \frac{b}{3a}$.

SCIPIONE DAL FERRO (1465-1526) réussit à résoudre l'équation (a) aux environs de 1515. Mais il ne publie pas son procédé. Les recherches sont reprises par NICOLO FONTANA dit "IL TARTAGLIA" (1500?-1557) qui trouve en 1535 la solution des 3 cas. GIROLAMO CARDANO (1501-1576) l'apprend de lui et publie les démonstrations dans son "*Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unicus*" en 1545. IL TARTAGLIA et BOMBELLI (1530-?) reprennent ces solutions. Voyons-les de plus près parce qu'elles sont importantes par leur aspect géométrique. Nous nous arrêterons au cas (b): c'est celui qui peut être "irréductible".

Résoudre $x^3 = px + q$ revient à déterminer un cube C, de côté x et un parallélépipède P de base p et de hauteur x, tels que la différence de leurs volumes égale q ($x^3 - px = q$).

Appelons u et $3v$ les dimensions de la base du parallélépipède ($3v$ car nous le diviserons en 3 plus tard).

$$u \cdot 3v = p$$

Nous exigeons, en plus, que $u + v = x$. La figure 3 nous montre comment placer le parallélépipède P en 3 parties dans le cube C. Après avoir enlevé ces 3 parties du cube, il reste un solide qui est la somme de 2 cubes et qui doit valoir q

$$u^3 + v^3 = q$$

mais $v = \frac{p}{3u}$, d'où

$$u^3 + \frac{p^3}{27u^3} = q$$
$$(u^3)^2 - qu^3 + \frac{p^3}{27} = 0$$

et, enfin $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$

$v = \frac{p}{3u}$

$$v^3 = \frac{p^3}{27u^3} = \frac{p^3}{27\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)} = p^3\frac{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}{27(\frac{q^2}{4}-(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}))}$$

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

et donc $v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$

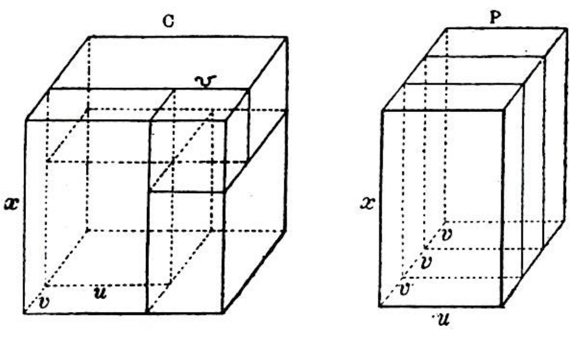


Figure 3

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + 3\sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Il est évident que, pour $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$, il n'y a pas de solution algébrique, ce qui a donné à ce cas le nom d'irréductible. Pourtant, il est toujours possible de trouver un cube et un parallélépipède qui satisfont aux conditions; lorsque x varie, le volume du cube varie proportionnellement à sa 3ème puissance et celui du parallélépipède proportionnellement à sa 1ère puissance. Donc, pour de petites valeurs de x, le volume du cube sera petit et ne pourra égaler la somme du parallélépipède et de q, mais quand x grandit, il dépasse cette somme. Il doit donc l'avoir égalée pour une valeur de x et il y a nécessairement une solution positive au cas (b).

Comment sortir de cette contradiction?

CARDANO entrevoit la possibilité de ne pas rejeter les racines carrées de nombres négatifs dès qu'elles permettent d'atteindre finalement la solution géométrique, mais il est mal à l'aise. Pendant ce temps, BOMBELLI écrit un traité complet et ordonné de tout ce qui est connu à son époque sur les équations des 4 premiers degrés. Sa discussion du cas irréductible du 3ème degré l'amène à envisager des nombres d'une espèce nouvelle qu'il appelle "piu di meno" ($\sqrt{-a}$) et "meno di meno" ($-\sqrt{-a}$). Il en définit les opérations et les applique quoiqu'il caractérise lui-même sa méthode d'extravagante et sophistiquée. Il en arrive à affirmer ainsi que l'équation du 2ème degré a toujours 2 solutions, distinctes ou non.

L'œuvre de BOMBELLI est étudiée pendant tout le siècle suivant, et paraît à tous extravagante et obscure, comme à son auteur.

Les progrès suivants sont accomplis par ALBERT GIRARD dans son "*Invention nouvelle en l'Algèbre*" (1629). On lui doit la première énonciation du théorème fondamental de l'algèbre (sur le nombre de solutions d'une équation du n-ème degré) [3]: "Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre" (c'est-à-dire que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue). "On peut donner trois noms aux solutions, vu qu'il y en a qui sont *plus que rien*; d'autres *moins que rien* et d'autres *enveloppées*, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$ comme $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables". Il ajoute "on pourrait dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles? Je respond, pour trois choses: pour la certitude de la reigle générale; et qu'il n'y a pas d'autre solution; et pour son utilité".

On lit dans la géometrie de *Descartes*: "au reste, tant les vrayes racines (positives) que les fausses (négatives) ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires". Le mot imaginaire pour ces nouveaux nombres est ainsi employé pour la première fois.

Des améliorations et des compléments successifs à l'étude des nombres imaginaires vont être apportés par G. WALLIS (1616-1703) dans son "*Treatise of Algebra*" (1685) et par Abraham DE MOIVRE (1667-1754) dans 3 mémoires, où il énonce son théorème célèbre, que nous écrivons avec nos notations actuelles, contenant le symbole i, introduit par *Eu-*

ler:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$$

où $\theta = \arccos\frac{a}{r}$ et $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Avec ces résultats, la théorie des opérations élémentaires sur les nombres complexes est complète mais, pendant un siècle encore, elle continue à provoquer un sentiment de malaise, car ces nombres restent des *signes*, sans interprétation géométrique. Pour l'atteindre, il fallait reconnaître [2] : "*que le concept de nombre complexe est l'évolution de celui de nombre réel, correspondant au passage de la condition de l'ordre à une dimension à celle d'un ordre double, à deux dimensions*"

CASPAR WESSEL (1745-1818), topographe danois écrit un mémoire sur ce sujet, mais il reste inconnu. GAUSS (1777-1855) ne publie pas ses recherches, auxquelles il fait cependant référence. Il faut attendre ARGAND (1768-1822) qui publie en 1806 son "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*". Ecoutons-le.

Il commence par faire des remarques sur les quantités négatives [4] : "deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend

1. l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées *absolument*;

2. l'idée du rapport des *directions* ou sens auxquelles elles appartiennent, rapport qui est l'identité ou l'opposition"...

"On trouvera que les différents cas que peut représenter le rapport des directions se réduisent à ceux qu'offrent les 2 proportions suivantes :

1. $+1 : +1 :: -1 : -1$

2. $+1 : -1 :: -1 : +1$

"qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion $+1 : +x :: +x : -1$
on est arrêté ici, ...car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif ...".

..."En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait au but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative".

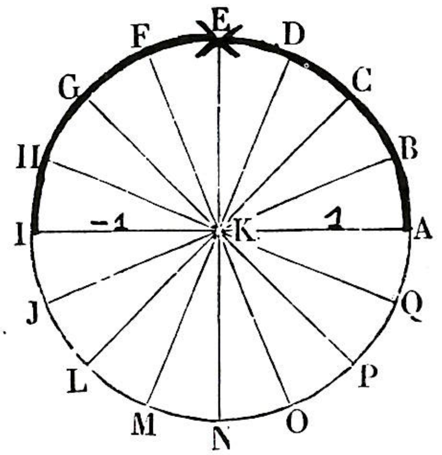


Figure 4

ARGAND prend KA comme 1 et KI comme -1. "La direction de KA est à la direction de KE ce que celle de KE est à la direction de KI". On voit aussi que KN satisfait aux mêmes conditions. Il a aussi construit KE tel que $+1 : +x :: +x : -1$ et KN tel que $+1 : -x :: -x : -1$.

Nous reconnaissons la construction de i et $-i$ dans ce que nous appelons le plan de GAUSS.

Il construit de même KC et KL, moyennes proportionnelles entre KA et KE, et ainsi de suite, nous donnant la construction des racines 2^n-ièmes de i et, progressivement, la représentation de tout nombre $a + bi$ ainsi que les opérations sur ces nombres.

C'est GAUSS, en 1831, qui a été dans son pays l'initiateur de la théorie géométrique des quantités complexes. Son autorité et l'importance des applications qu'il en fait à l'algèbre et à la théorie des nombres contribuent largement à emporter l'adhésion de tous les mathématiciens. En France, A. CAUCHY (1789-1857) donne une preuve supplémentaire de la légitimité des imaginaires dans sa théorie des équivalences algébriques. Les travaux du Norvégien N. H. ABEL (1802-1829) et de C. JACOBI (1804-1851) lèvent finalement tous les doutes.

Nous n'avons abordé ici que la genèse de la notion de nombre complexe. Il faudrait un autre travail pour en montrer les développements et les innombrables applications tant en mathématique qu'en physique.

Bibliographie

[1] Œuvres complètes d'Elie Cartan, partie II, vol I, pp 329 à 468. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1953.

[2] *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (Raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES), Ed. Zanichelli, Bologna 1900. Chapitre 9 : numeri complessi a due e a piu unita, di DUILIO GIGLI a Pavia.

[3] *La théorie des équations* dans l'*Invention nouvelle en l'Algèbre* d'ALBERT GIRARD, Mtt Bosmans (extrait de Mathesis) don de l'auteur en 1966 à la Bibliothèque Royale de Belgique.

[4] *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, R. ARGAND (nouveau tirage de la 2ème édition), Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1971.

Jouons avec les figures...

Ann Billiau, Aude De Ridder,
Marie-Paule Peiffer,
UCL

Imaginez-vous le prophète Mahomet traçant d'un seul coup de sabre sa signature formée de deux croissants entrelacés...

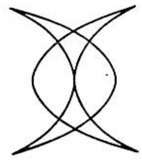
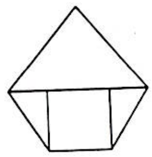
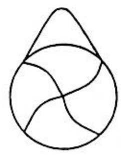
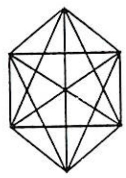
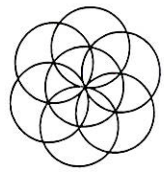
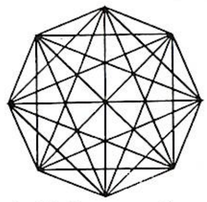


Fig. 1: Les croissants de Mahomet

Est-il possible de dessiner d'autres formes d'un seul coup de crayon? Exercez-vous sur la figure 1 et sur les exemples suivants.

a. Zorro b. Pagode c.Casquette

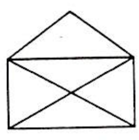
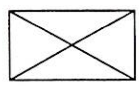




d. Polygone 6 e. Rosace f. Polygone 8

Quelles sont celles que l'on peut dessiner d'un seul coup de crayon?

Vous n'avez probablement pas rencontré trop de problèmes jusqu'à la figure d. Et les autres? Y aurait-il un truc, une astuce?

Reprenez les figures que vous avez dessinées d'un seul trait. Qu'ont-elles en commun? Faites de même pour les autres. Si vous manquez d'inspiration, observez de plus près ces deux enveloppes.

Enveloppe ouverte Enveloppe fermée

Vous ne voyez toujours pas? Voici une autre indication:

a) enveloppe ouverte
- 6 carrefours
- 10 chemins
- 4 carrefours sont de degré pair
- 2 carrefours sont de degré impair

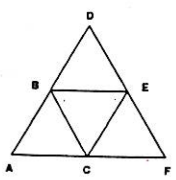
b) enveloppe fermée
- 5 carrefours
- 8 chemins
- 1 carrefour est de degré pair
- 4 carrefours sont de degré impair

Un **RESEAU** est un ensemble de points reliés entre eux par des droites ou des courbes; un **CHEMIN** est une ligne, droite ou courbe, joignant deux points d'un réseau; un **CARREFOUR** est un point d'un réseau et le **DEGRE D'UN CARREFOUR** est le nombre de chemins qui aboutissent au carrefour.

Reprenez maintenant les premières figures et comptez comme nous venons de le faire. Quelles conclusions en tirez-vous? Obtenez-vous les mêmes résultats que nous?

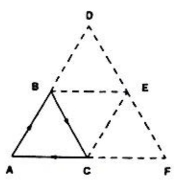
Nous avons tout d'abord constaté...
...qu'il est possible de reproduire d'un seul trait tous les réseaux qui ne possèdent aucun carrefour de degré impair. Le carrefour de départ qui sera également le carrefour d'arrivée est choisi arbitrairement.

Raisonnons sur un exemple.
Considérons un réseau ne contenant aucun carrefour de degré impair.



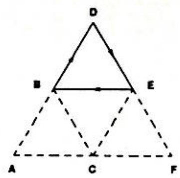
Prenons comme point de départ A qui est un carrefour de degré 2. Etant parti de A, on a déjà grignoté un chemin, il n'en reste donc qu'un. La seule possibilité est alors de revenir en A en fin de parcours. Le carrefour de départ est donc le carrefour d'arrivée.

Le trait le plus simple ayant A comme point de départ et d'arrivée est A-B-C-A, traçons-le et enlevons-le du réseau.

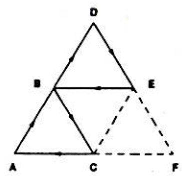


B, initialement de degré 4, devient de degré 2. Il reste donc de degré pair et peut à son tour être point de départ et d'arrivée.

Répétons l'opération en B et traçons le trait B-D-E-B.



La combinaison de ces deux opérations permet d'obtenir un seul trait A-B-D-E-B-C-A.



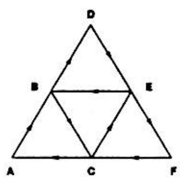
La démarche est la suivante:
Partant de A et arrivant en B, nous pouvons suivre trois chemins:

1. Redescendre vers C: à rejeter car on se restreindrait au chemin A-B-C-A.

2. Partir vers E: à écarter car le chemin B-E ne serait pas parcouru dans le sens voulu.

3. Partir vers D: parcours que nous choisirons. Suivons le trait B-D-E-B, lorsqu'on revient en B, il ne nous reste qu'une seule possibilité: aller vers C et on obtient le trajet A-B-D-E-B-C-A.

En répétant le même raisonnement en C, on parcourt ainsi toute la figure en un seul trait.



Remarquons que nous aurions très bien pu partir d'un autre point que A et que, même du point A, d'autres itinéraires sont possibles.

L'analyse du cas particulier ci-dessus s'étend au cas général pour autant que la figure étudiée soit *connexe* c'est-à-dire "composée d'un seul morceau". Prenons une figure quelconque ne comportant que des carrefours de degré pair. Tous les carrefours étant de degré pair, on peut y revenir autant de fois qu'on en est parti. Ceci prouve qu'il n'y a jamais de chemins non parcourus. La figure peut donc être dessinée complètement en un seul trait.

Qu'en est-il quand tous les carrefours ne sont plus de degré pair?

...temps de réflexion!

Le résultat suivant serait-il correct?

Il est possible de reproduire en un seul trait tous les réseaux qui possèdent deux carrefours de degré impair. Le carrefour de départ doit être un des carrefours de degré impair. L'autre sera carrefour d'arrivée.

Raisonnons encore sur un exemple:

Prenons la figure suivante où A et B sont des carrefours de degré impair.

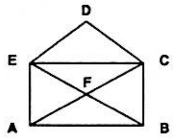


Fig. 2: Enveloppe ouverte

Montrons par l'absurde que le carrefour de départ doit être de degré impair.
Supposons que l'on parte de D (de degré pair), il faudra y revenir après être passé nécessairement en A. Comme ce dernier est de degré impair, il reste toujours un chemin non parcouru. Il faut donc partir de A ou de B.

Supposons que l'on parte de A et montrons que l'on doit nécessairement arriver en B. Partant de A, il ne reste plus qu'un nombre pair de chemins en ce point. A ne peut pas être point d'arrivée sinon on aurait un chemin inutilisé. Pour cette même raison, les carrefours de degré pair ne pourront jamais être point d'arrivée. Il ne reste donc que B comme possibilité d'arrivée. Ce dernier étant de degré impair, il nous laisse l'occasion d'y arriver sans devoir en repartir et donc de fermer notre réseau.

Choisissons donc A comme carrefour de départ et traçons le trait le plus simple aboutissant en B. En répétant le raisonnement utilisé précédemment, nous obtenons ce que nous voulions démontrer.

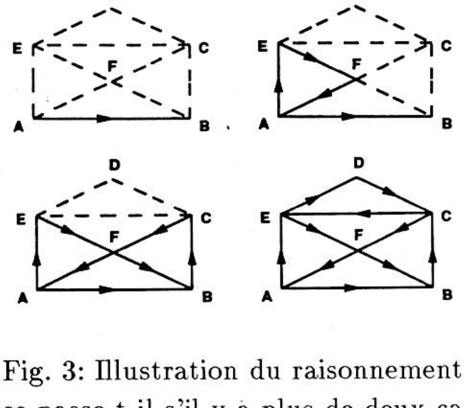


Fig. 3: Illustration du raisonnement.

Que se passe-t-il s'il y a plus de deux carrefours de degré impair? Avez-vous déjà essayé de dessiner une figure avec trois, quatre, cinq ou plusieurs carrefours de degré impair?

A notre grand étonnement, nous avons découvert que...

...*lorsqu'un réseau renferme des carrefours de degré impair, ceux-ci sont toujours en nombre pair.*

Essayons d'élucider ce mystère par récurrence:

1– Prenons le chemin le plus simple reliant deux points A et B.

A ——————————— B

Les carrefours A et B sont de degré un; dès lors, il y a un nombre pair de carrefours de degré impair.

2– Supposons que l'on ait un réseau avec N carrefours dont n sont de degré impair (où n est un nombre pair). Développer ce réseau implique que l'on ajoute au moins un chemin. Montrons qu'en ajoutant un chemin, le nombre de carrefours de degré impair reste pair. Trois cas sont à envisager:

a)Le chemin ne crée aucun carrefour. Cela implique que le chemin ajouté part d'un carrefour et arrive à un autre. Expliquons un cas en détail, les autres seront traités schématiquement. Si le carrefour de départ est de degré pair, comme on ajoute un chemin, il devient de degré impair. Le chemin peut arriver sur :

- un carrefour de degré pair. Ce dernier devient de degré impair. Le nombre de carrefours de degré impair est augmenté de deux. Il reste donc pair.

- un carrefour de degré impair. Il devient de degré pair. On a perdu un carrefour de degré impair et on en a gagné un. Le nombre total de carrefours de degré impair est inchangé.

Schématisons tous les cas possibles.

Appelons f l'action d'ajouter un nouveau chemin; k le nombre de carrefours de degré impair ajoutés.

Carrefour de départ	...après f	Carrefour d'arrivée	...après f	k
pair	impair	pair	impair	2
		impair	pair	0
impair	pair	pair	impair	0
		impair	pair	-2

b)Le chemin ajouté crée un nouveau carrefour. Une des extrémités du chemin est donc un carrefour existant l'autre est un nouveau carrefour (ce nouveau carrefour pouvant éventuellement être sur un chemin existant). Remarquons que si on place une extrémité du nouveau chemin:

• sur un chemin existant, on scinde ce chemin en deux, cette extrémité devient donc un carrefour de degré 3 (impair).

• ailleurs que sur un chemin existant, cette extrémité devient un carrefour de degré 1 (impair).
Dans tous les cas, on crée donc un carrefour de degré impair.

Carrefour de départ	...après f	Carrefour d'arrivée	...après f	k
pair	impair	pair	impair	2
impair	pair	pair	impair	0

c)Le chemin crée deux nouveaux carrefours. Au moins un de ces deux carrefours est sur un chemin préexistant (sinon le réseau ne serait plus connexe). La remarque ci-dessus, nous permet d'affirmer que les carrefours de départ et d'arrivée seront toujours de degré impair. On ajoute donc deux carrefours de degré impair.
Nous avons ainsi rencontré trois situations :

- on ajoute deux carrefours de degré impair.
- on retire deux carrefours de degré impair.
- on ne retire ni n'ajoute rien du tout.

Dans aucun des cas, nous n'avons modifié la parité du nombre de carrefours de degré impair. Quel que soit le nombre de chemins que l'on ajoute et la manière dont on les ajoute, le nombre de carrefours de degré impair restera toujours pair.
Essayez, pour terminer, de trouver en combien de traits on peut dessiner une figure qui comprend un nombre pair de carrefours de degré impair.

Après maintes réflexions, vous devriez trouver que...
...le nombre de traits nécessaires est égal à la moitié du nombre de carrefours de degré impair.

En effet, nous avons appris antérieurement que dans une figure où il y a deux carrefours de degré impair, l'un est point de départ et l'autre point d'arrivée. Un trait consomme donc deux carrefours de degré impair. S'il y a n carrefours de degré impair, il faudra $\frac{n}{2}$ traits pour dessiner notre figure (comme n est pair, on peut toujours effectuer cette division).

Les idées que nous venons de développer font partie d'une branche de la mathématique appelée *topologie*. En topologie, on ne tient par exemple pas compte des rapports de grandeur; ainsi, les figures suivantes sont équivalentes (chacune d'elle peut être déformée en une autre sans "déchirure").

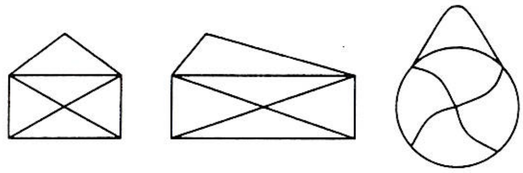


Fig. 4: Figures équivalentes

Rappelons que dans les développements ci-dessus, nous n'avons considéré que des figures connexes... avis aux amateurs!

Référence

Encyclopédie *Tout l'Univers*, ed. Hachette

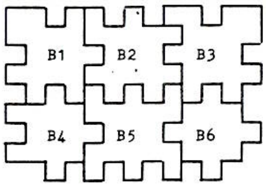
Math-Jeunes n° 53, 9–12, 1991

Puzzle: quelques solutions aux problèmes proposés dans le numéro 51

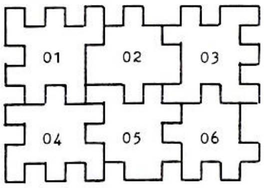
A. Parent, *Lycée de Mouscron*

• Dans le n° 51 de *Math-Jeunes*, nous avons présenté 6 puzzles en matière synthétique connus sous le nom de "HAPPY CUBE". Sous différentes couleurs indiquant leur degré de difficulté, leur inventeur, Dirk LAUREYSSENS, les présente selon la disposition ci-dessous:

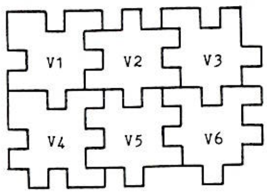
BLEU



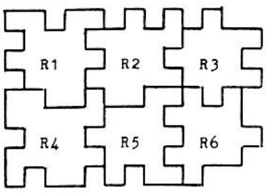
ORANGE



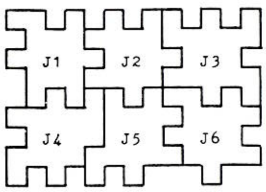
VERT



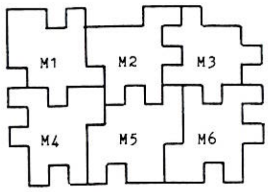
ROUGE



JAUNE



MAUVE



Afin de faciliter le repérage, chaque pièce est marquée de la première lettre de sa couleur et du numéro de sa position dans leur emballage.

Tu remarqueras que certaines pièces apparaissent dans une seule configuration, d'autres plusieurs fois; certaines ont un centre de symétrie, un ou plusieurs axes de symétrie.

• Considérons le mini-cube de base comme unité de volume; voici les mesures de chaque pièce dans l'ordre convenu:

BLEU

17	17	18
14	19	13

ORANGE

17	15	18
17	17	14

VERT

17	15	15
19	16	16

ROUGE

17	17	14
19	16	15

JAUNE

16	15	18
17	16	16

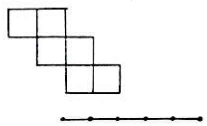
MAUVE

16	16	14
17	18	17

Les 6 pièces d'une même couleur permettent de reconstituer un cube de volume 125 minicubes, le vide central cubique est de 27 minicubes. Bien entendu, le volume des pièces de chaque couleur mesure 98 minicubes.

• Le cube reconstitué pose le problème de la sauvegarde de la solution. Songer à utiliser un développement du cube semble tout indiqué. Associons, à un tel développement, un graphe dans lequel les sommets représentent les faces du cube et les arêtes, les segments reliant deux faces voisines du développement.

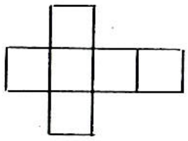
Voici un graphe issu de cette idée:

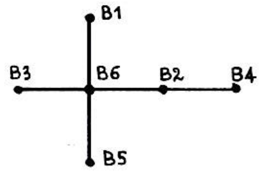


Remarque qu'il existe toujours un chemin reliant deux sommets quelconques du graphe; en effet, il est toujours possible de passer d'une face quelconque à une autre en parcourant la surface du cube. De plus, il est impossible de partir d'un sommet du graphe et d'y revenir en utilisant des arêtes différentes. Ce type de graphe porte le nom d'arbre.

Il en existe six différents de six sommets. Essaie de les découvrir et d'associer chacun des onze développements du cube à l'arbre correspondant [1].

Revenons à notre puzzle en utilisant un autre développement du cube et son arbre associé marqué des pièces bleues positionnées.





Comme nos pièces ne sont pas les faces carrées du cube, leur situation est sans doute repérée, mais pas leur orientation.

En nous inspirant du codage d'une solution par couches superposées, proposé par MEEUS et TORBIJN, notons de bas en haut la position de chaque pièce.

Niveau 1

B5	B3	B6	B3	B3
B5	B6	B6	B6	B1
B6	B6	B6	B6	B6
B5	B6	B6	B6	B1
B5	B2	B6	B2	B1

Niveau 2

B3	B3	B3	B3	B3
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B2	B2	B2	B2	B1

Niveau 3

B5	B3	B3	B3	B1
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B5	B2	B2	B2	B2

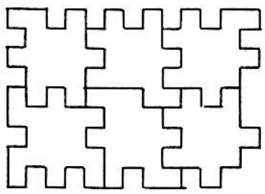
Niveau 4

B3	B3	B3	B3	B3
B5				B1
B5				B1
B5				B1
B2	B2	B2	B2	B1

Niveau 5

B5	B4	B3	B4	B3
B5	B4	B4	B4	B1
B4	B4	B4	B4	B4
B5	B4	B4	B4	B1
B5	B2	B4	B2	B2

• Depuis quelques temps, les restaurants d'une chaîne de grandes surfaces française offrent à leurs clients un puzzle publicitaire blanc dans la configuration ci-dessous.



Quelques solutions envoyées par des élèves du Lycée de Mouscron

• Des élèves de deuxième année précisent les pièces symétriques:

B4 — B5 (2 axes) — B6 (4 axes) — V2 (2 axes) — V5 — V6 — O2 — O4 — R3

celles ayant un centre de symétrie: B5 — B6 — V2

et les pièces dupliquées: B4 ⟷ R3, M3 ⟷ O6 retournée (notée O6R)

• Voici les 6 arbres à 6 sommets dont seuls les 5 premiers sont associés à des développements du cube:

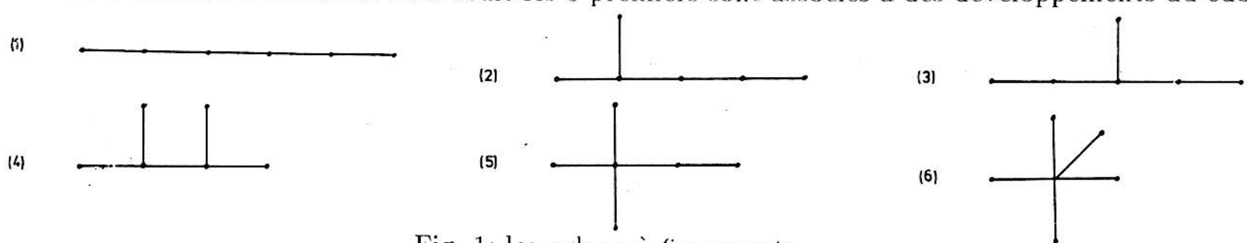


Fig. 1: les arbres à 6 sommets

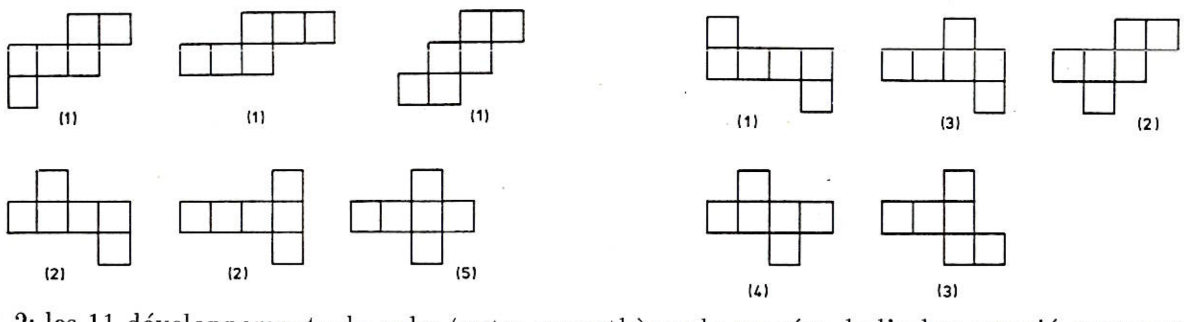


Fig. 2: les 11 développements du cube (entre parenthèses: le numéro de l'arbre associé correspondant).

La ligne du temps de *Math-Jeunes*

Dans les quatre numéros de *Math-Jeunes* de cette année scolaire 1991–1992, les deux feuilles centrales constitueront un encart **détachable** te permettant de reconstituer une ligne du temps sur laquelle tu trouveras des références à de grands Mathématiciens dont les travaux ont fortement marqué les programmes de mathématique de l'enseignement secondaire.
La rédaction de *Math-Jeunes* t'invite à détacher cet encart, à en séparer les deux feuillets et à les assembler pour reconstituer la ligne du temps que tu pourras afficher où tu veux et selon le plan d'assemblage que tu souhaites.
Tu constateras que l'épaisseur du trait utilisé est variable et proportionnelle au nombre d'années représentées sur la page.

-2600→-2480: pyramide de Gizeh (Egypte)

-1750: code d'Hammourabi

XIVè s av. J.-C.: Aménophis IV (ou Akhénaton) Toutankhamon

XIIIè s av. J.-C.: Ramsès II

-1250→-1184: guerre de Troie

-1200: Moïse

-1100: alphabet phénicien

-1000: Salomon

IXè s av. J.-C.: Homère

-776: 1ers Jeux Olympiques

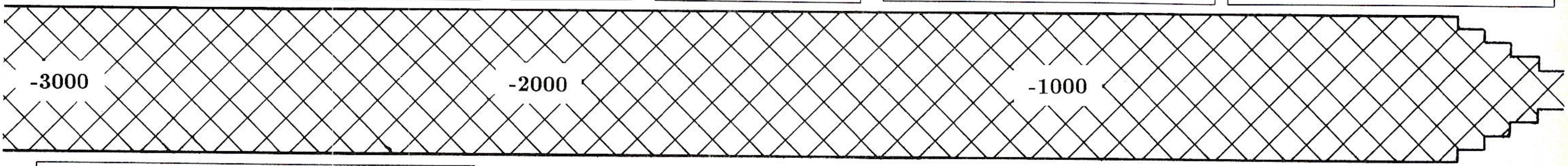
-753: fondation de Rome

-625→-539: Nabuchodonosor (Babylone)

-556: Boudha

-447→-431: construction du Parthénon à Athènes

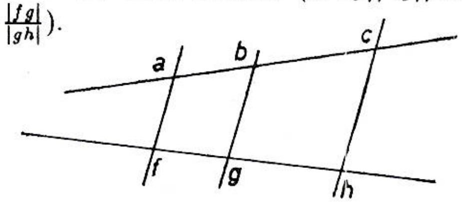
-336→-323: règne d'Alexandre le Grand



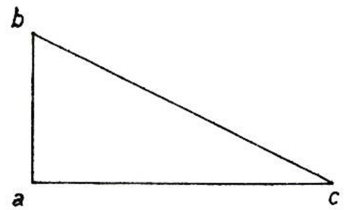
<u>Ecriture des nombres en Mésopotamie</u>(~ -3000)
Ce système d'écriture est celui qui a eu, avant le système décimal de position, la plus grande influence dans le monde scientifique, c'est un système de numération positionnelle essentiellement sexagésimal mais construit sur les bases alternées 10 et 6.
Il utilise 2 signes 𒁹 =1 et 𒌋 =10.

<u>Papyrus Rhind</u>(~ -1650)
Rouleau de papyrus acheté en 1858 à Louksor par Henry RHIND (avocat écossais) et conservé au British Museum à Londres, il s'agit d'une copie d'un document plus ancien (entre -2000 et -1800) réalisée vers -1650 par le scribe Ahmès. Il contient notamment 87 problèmes et leurs solutions (solutions toutes prêtes qu'aucune preuve, aucune figure n'explique).
Le papyrus Rhind ne peut être considéré comme un document scientifique au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

<u>THALÈS de Milet</u>(-624,-546)
On lui attribue diverses propositions dont "L'angle inscrit dans un demi-cercle est droit" et la proportionnalité des longueurs des segments déterminés par 3 parallèles sur deux sécantes (si $af//bg//ch$ alors $\frac{|ab|}{|bc|} = \frac{|fg|}{|gh|}$).



<u>PYTHAGORE de Samos</u>(VIè siècle av. J.-C.)
On admet qu'il fut l'élève de THALÈS. Aucun document, auncune biographie de lui ne nous sont parvenus. La philosophie Pythagoricienne repose sur la mise en exergue du nombre entier. PYTHAGORE a touché à la musique, aux proportions et à la géométrie. De son œuvre, on retient surtout le célèbre théorème liant les mesures des cotés d'un triangle rectangle ($|ab|^2 + |ac|^2 = |bc|^2$, ce théorème était en fait déjà connu des chinois en 1100 av. J.-C., PYTHAGORE l'a redécouvert 5 siècles plus tard), le premier contact avec les nombres irrationnels et les tables de multiplication.



<u>PLATON</u>(-428,-348)
On lui attribue l'introduction de la méthode analytique dans la démonstration mathématique. Elève de SOCRATE, il eut une influence sur les activités mathématiques de son époque. Il a donné son nom aux 5 polyèdres réguliers appelés solides Platoniciens: il s'agit du tétraèdre régulier (4 faces)(1), de l'hexaèdre régulier (cube)(2), de l'octaèdre régulier (8 faces)(3), du dodécaèdre régulier (12 faces)(4) et de l'icosaèdre régulier (20 faces)(5). Les faces de (1),(3) et (5) sont des triangles équilatéraux, celles de (2) sont des carrés et celles de (4) sont des pentagones réguliers.

<u>ARISTOTE</u>(-384,-322)
Elève de PLATON, il nie l'existence de l'infini accessible mais accepte l'infini potentiel. Il a été à la base du développement d'une forme de logique et, en particulier, du syllogisme.

-300: construction de la grande muraille de Chine

IIIè s av. J.-C.: bibiothèque d'Alexandrie

IIIè & IIè s av. J.-C.: guerres puniques (Rome ↔Carthage)

fin IIè s–début Iè s av. J.-C.: guerre civile à Rome (Marius Sylla)

Ier s av. J.-C.: Cléopâtre
César
Auguste (début de l'Empire à Rome)

64: 1ères persécutions des chrétiens à Rome (sous Néron)

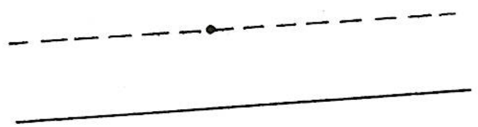
79: destruction de Pompéi (Vésuve)

IIè s→Vè s: invasions germaniques

122: construction du mur d'Hadrien (Angleterre)

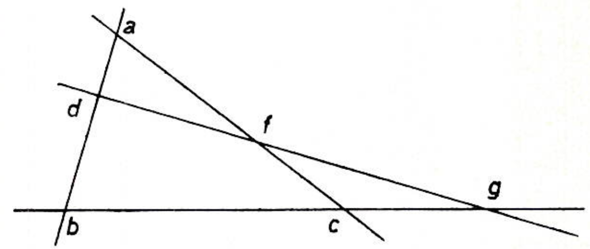
-300 **1**

EUCLIDE(IIIè s. av. J.-C.)
Auteur fécond, sa réputation repose sur les *Eléments* qui ont dominé l'enseignement de la géométrie jusqu'à la moitié du XXè siècle. Les *Eléments* comportent des définitions, axiomes, postulats et propositions répartis en 13 livres (8 livres de géométrie et 5 livres d'arithmétique). Le cinquième de ces postulats (*le* postulat d'Euclide) dit: "Par un point pris hors d'une droite, il n'existe qu'une seule droite parallèle à cette droite".



APOLLONIUS de Perge
($\sim -262, \sim -200$)
Dans son traité sur les coniques (8 livres), il développe la plupart de leurs propriétés connues, il y définit pour la première fois les *ellipses*, *paraboles* et *hyperboles* comme sections de plans avec un cône.

MÉNÉLAÜS d'Alexandrie (fin du Ier s.)
Il a développé la trigonométrie sphérique, il est connu par son théorème:
$\frac{|ad|}{|db|}\frac{|bg|}{|gc|}\frac{|cf|}{|fa|} = 1$ ou $\frac{\vec{ad}}{\vec{db}}\frac{\vec{bg}}{\vec{gc}}\frac{\vec{cf}}{\vec{fa}} = -1$.



HÉRON d'Alexandrie(Ier s.)
Il a laissé son nom à la formule (due à ARCHIMÈDE) permettant de déterminer l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs α, β, γ:
$S = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$ où $p = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

ARCHIMÈDE(-287,-212)
C'était certainement un mathématicien à l'intelligence très ouverte. On connait de lui le mot "Eureka" qu'il prononça en découvrant la première loi de l'hydrostatique et la phrase "Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde".
C'est lui qui a introduit le mot *parabole*, on lui doit également un calcul précis de la valeur de π et plusieurs calculs de volumes et d'aires.

PAPPUS d'Alexandrie (IVè s.)
Il a contribué à répandre la mathématique grecque à Alexandrie. Il est l'auteur du traité *Collection*

PTOLÉMÉE($\sim 90, \sim 168$)
Astronome et mathématicien, son théorème dit que dans tout quadrilatère convexe inscriptible *abcd*, on a $|ac||bd| = |ab||cd| + |bc||ad|$ et $\frac{|ac|}{|bd|} = \frac{|ab||ad|+|bc||cd|}{|ab||bc|+|cd||ad|}$.
Ce théorème conduit à la formule $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

ERATOSTHÈNE(-284,-192)
On lui doit une méthode permettant d'extraire les nombres premiers d'une suite de nombres (le "Crible d'Eratosthène").
Il a effectué la première mesure du méridien terrestre.

DIOPHANTE (325,409)
DIOPHANTE a surtout travaillé l'arithmétique. Une équation *diophantienne* est une équation de la forme $P(x, y, z, \ldots) = 0$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$) dont on cherche les solutions dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$).

Solution des jeux

Nombre auto-référent

Une solution est 6210001000, en as-tu trouvé d'autres?

Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	3	2	7	6	8
2	5	9	0	4	9
3	3	1	5		5
4	5	6		7	9
5	3		1	2	5

Mots croisés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A	L	G	E	B	R	E		O
2	L	I	E		L	A	R	D	S
3	G	E	O	M	E	T	R	I	E
4	E		M	I	S	E	E	S	
5	B	L	E	S	S	E	S		A
6	R	A	T	E	E	S		N	I
7	E	R	R	E	S		G	A	G
8		D	I	S		N	A	B	U
9	O	S	E		A	I	G	U	S

Questions des olympiades

MINI: 1.10; 2.A; 3.D; 4.C

MAXI: 1.19; 2.B; 3.E; 4.D

Grilles des moyennes

	6	14	
2	10	12	8
32	20	16	28
	22	4	

	7	3	
5	9	13	21
15	11	19	35
	1	17	

- Le puzzle blanc (publicitaire) est le jaune dans la configuration suivante:

$$BC1 \longleftrightarrow J1,\ BC2 \longleftrightarrow J5,\ BC3 \longleftrightarrow J6R,\ BC4 \longleftrightarrow J3,\ BC5 \longleftrightarrow J4,\ BC6 \longleftrightarrow J2$$

- Quelques solutions:

PUZZLE MAUVE (SOLUTION DE CÉDRIC PARENT)

Niveau 1

M4	M4	M3	M4	M4
M6	M4	M4	M4	M4
M4	M4	M4	M4	M2
M6	M4	M4	M4	M2
M6	M4	M5	M4	M5

Niveau 2

M3	M3	M3	M3	M2
M6				M2
M6				M2
M6				M2
M6	M5	M5	M5	M5

Niveau 3

M6	M3	M3	M3	M3
M6				M2
M6				M2
M6				M2
M5	M5	M5	M5	M5

Niveau 4

M3	M3	M3	M3	M2
M6				M2
M6				M2
M6				M2
M5	M5	M5	M5	M2

Niveau 5

M6	M3	M1	M1	M1
M6	M1	M1	M1	M1
M1	M1	M1	M1	M2
M6	M1	M1	M1	M1
M5	M1	M5	M5	M2

PUZZLE JAUNE–VERT: PRISME À BASE CARRÉE (SOLUTION DE BÉRANGÈRE PARENT)

Niveau 1

V1	V1	V2	V1	V1
J2	V1	V1	V1	V1
V1	V1	V1	V1	V6
J2	V1	V1	V1	V1
J1	J1	V1	J1	V6

Niveau 2

V2	V2	V2	V2	V2
J2				V6
J2				V6
J2				V6
J2	J1	J1	J1	V6

Niveau 3

J2	V2	V2	V2	V6
J2				V6
J2				V6
J2				V6
J1	J1	J1	J1	J1

Niveau 4

V2	V2	V2	V2	V2
J2				V6
J2				V6
J2				V6
J2	J1	J1	J1	V6

Niveau 5

J3	J3	V2	J3	J3
J5				V5
J2				V6
J5				V5
J4	J1	J4	J1	V6

Niveau 6

J5	J3	J3	J3	J5
J5				V5
J5				V5
J5				V5
J4	J4	J4	J4	J4

Niveau 7

J3	J3	J3	J3	J3
J5				V5
J5				V5
J5				V5
J4	J4	J4	J4	V5

Niveau 8

J5	J3	J3	J3	V5
J5				V5
J5				V5
J5				V5
J5	J4	J4	J4	J4

Niveau 9

J6	J3	J6	J3	J3
J6	J6	J6	J6	V5
J5	J6	J6	J6	J6
J6	J6	J6	J6	V5
J5	J6	J4	J6	J4

CUBE DE 24 PIÈCES (SOLUTION DE MARIE DUPONCHEEL (6È ANNÉE A.R. MOUSCRON))

Niveau 1

O4	O4	M3	O4	J4	B1	J4	B1	B2
O5	O4	O4	O4	B1	B1	B1	B1	B2
O4	O4	O4	O4	O4	B1	B1	B1	B1
O5	O4	O4	O4	B1	B1	B1	B1	B2
O4	O4	B4	O4	B1	B1	J5	B1	J5
M4	B4	B4	B4	J5	J5	J5	J5	J5
B4	B4	B4	B4	B4	J5	J5	J5	M5
M4	B4	B4	B4	J5	J5	J5	J5	M5
R5	B4	R5	B4	R5	J5	M1	J5	M5

Niveau 2

O5	M3	M3	M3	J4	J4	J4	J4	J4
O5								B2
O5								B2
O5								B2
O5								B2
M4								M5
M4								M5
M4								M5
R5	R5	R5	R5	R5	M1	M1	M1	M1

Niveau 3

M3	M3	M3	M3	J4	J4	J4	J4	B2
O5								B2
O5								B2
O5								B2
O5								M5
M4								M5
M4								M5
M4								M5
M4	R5	R5	R5	M1	M1	M1	M1	M5

Niveau 4

O5	M3	M3	M3	M3	J4	J4	J4	J4
O5								B2
O5								B2
O5								B2
M4								B2
M4								M5
M4								M5
M4								M5
R5	R5	R5	R5	M1	M1	M1	M1	M5

Niveau 5

O5	M3	O6	M3	J1	J1	J4	J1	J4
B3								B2
O5								V1
B3								B2
M4								M5
M4								M5
V2								M5
M4								O1
M4	V5	R5	V5	M1	M1	J6	M1	O1

Niveau 6

B3	O6	O6	06	O6	J1	J1	J1	V1
B3								V1
B3								V1
B3								V1
V2								O1
V2								O1
V2								O1
V2								O1
V2	V5	V5	V5	V5	J6	J6	J6	J6

Niveau 7

O6	O6	O6	O6	J1	J1	J1	J1	J1
B3								V1
B3								V1
B3								V1
B3								V1
V2								O1
V2								O1
V2								O1
V5	V5	V5	V5	J6	J6	J6	J6	O1

Niveau 8

B3	O6	O6	O6	O6	J1	J1	J1	V1
B3								V1
B3								V1
B3								V1
V2								O1
V2								O1
V2								O1
V2								O1
V2	V5	V5	V5	V5	J6	J6	J6	J6

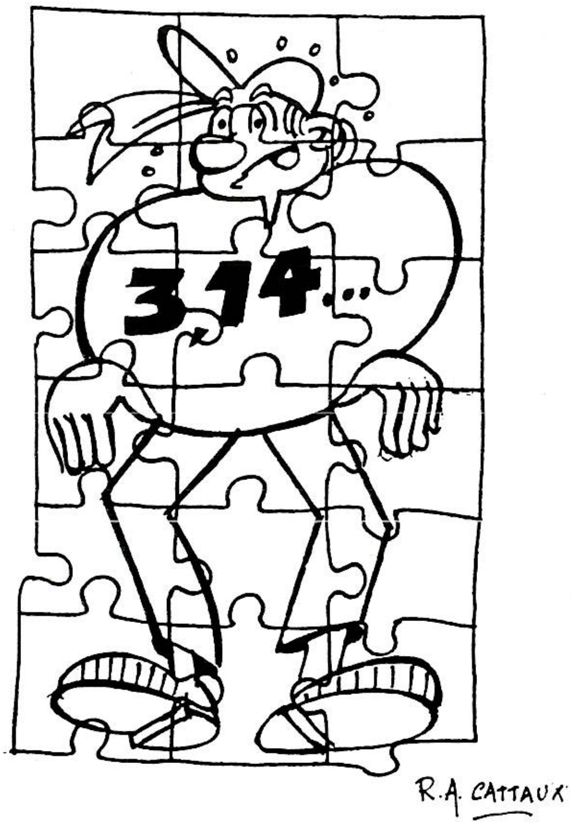
Niveau 9

B3	O2	O2	O6	V3	J1	V3	J1	V1
B3	O2	O2	O2	V3	V3	V3	V3	V1
O2	O2	O2	O2	O2	V3	V3	V3	V3
B3	O2	O2	O2	V3	V3	V3	V3	V1
B3	O2	O2	M6	M6	R3	V3	R3	V1
M6	M6	M6	M6	M6	R3	R3	R3	O1
V2	M6	M6	M6	R3	R3	R3	R3	R3
M6	M6	M6	M6	M6	R3	R3	R3	O1
M6	V5	M6	V5	J6	J6	R3	J6	O1

Références

[1] Pierre TOUGNE, Combien de patrons un polyèdre peut-il avoir ? *Pour la science*, N° 103, (1986).

[2] J. MEEUS et P.-J. TORBIJN, Polycubes, *Ed. CEDIC*



Math-Jeunes n° 53, 13–14, 1991

Une méthode graphique de résolution de l'équation du second degré

M. Famelart, *Institut Sainte-Claire, Soignies*

Cette méthode, dite de *l'orthogone de* Lill a été proposée en 1867 par Lill qui était capitaine dans l'armée autrichienne.

1. Considérons l'équation classique

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nous pouvons toujours nous arranger pour que le coefficient b soit positif. Cela étant fixé, nous allons associer à l'équation une ligne polygonale comportant deux angles droits et trois côtés KL, LM et MN de longueurs $A = |a|$, $B = b$ et $C = |c|$. Selon que le produit $a.c$ est positif ou négatif, la configuration adoptée est différente:

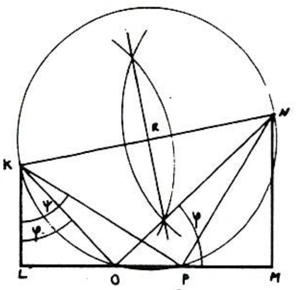


Figure 1: $a.c > 0$

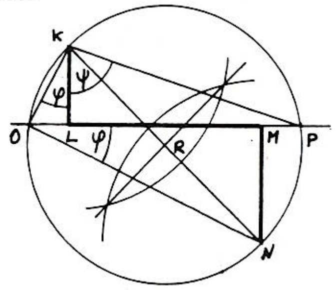


Figure 2: $a.c < 0$

On trace alors le cercle de diamètre KN et on note O et P ses points d'intersection (éventuels) avec la droite LM.

2. Exemples : Traçons les figures associées aux équations $2x^2 + 5x + 3 = 0$ et $2x^2 + 5x - 3 = 0$:

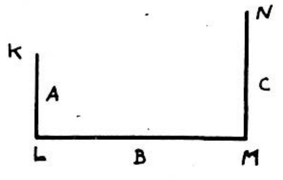


Fig. 3: $2x^2 + 5x + 3 = 0$

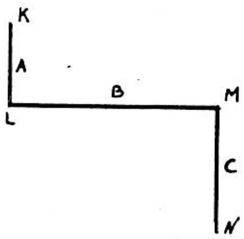


Fig. 4: $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3. Sous quelle condition le cercle de diamètre $[KN]$ coupe-t-il la droite LM ?

- Si a et c sont de signes contraires, les points K et N sont de part et d'autre de la droite LM. Le cercle de diamètre $[KN]$ coupe donc certainement cette droite.
- Si a et c sont de même signe, le centre de ce cercle est le milieu de $[KN]$. Sa distance à la droite LM vaut $\frac{A+C}{2}$. Son rayon vaut $\frac{1}{2}|KN|$. Mais le segment $[KN]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure $|LM| = B$ et dont l'autre côté mesure $|C - A|$. On a donc $|KN|^2 = B^2 + (C - A)^2$.

  Ainsi, le cercle de diamètre $[KN]$ coupe la droite LM en deux points si et seulement si

  $$\frac{A+C}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + (C-A)^2}$$

  En élevant les deux membres au carré, et en simplifiant, nous obtenons la condition

  $$B^2 - 4AC > 0$$

  ce que nous pouvons écrire

  $$b^2 - 4ac > 0$$

  puisque $B = b$ et, ac étant positif, $AC = |a| \cdot |c| = |ac| = ac$.

Tout cela te rappelle-t-il quelque chose ?

4. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède donc 0, 1 ou 2 racines selon que le cercle de diamètre $[KN]$ ne coupe pas, est tangent ou est sécant à la droite LM. Ne pouvons-nous nous attendre à ce que les racines de l'équation soient liées aux points d'intersection (éventuels) du cercle et de la droite ?

Supposons qu'il y ait deux points d'intersection O et P, et notons φ l'angle $\widehat{OKL}$ et ψ l'angle $\widehat{PKL}$. Montrons que $\operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{tg}\psi$ sont, au signe près, les racines de l'équation.

L'angle $\widehat{KON}$ est droit, car inscrit dans un demi-cercle. Le triangle KLO est semblable au triangle OMN puisque ces deux triangles ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires:

$$KL \perp OM \quad LO \perp NM \quad KO \perp ON$$

Donc $\widehat{OKL} = \widehat{NOM} = \varphi$.

Au vu du triangle rectangle KLO, on a

$$|OL| = |KL|.\operatorname{tg}\varphi = A\operatorname{tg}\varphi$$

Et au vu du triangle OMN, on a

$$C = |NM| = |OM|.\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

- Si a et c sont de même signe, le point O est situé entre L et M. On a donc dans ce cas $|OM| = |LM| - |OL| = B - |OL| = b - |OL|$. D'où $C = (b - |OL|)\,\mathrm{tg}\,\varphi = b\,\mathrm{tg}\,\varphi - A\,\mathrm{tg}^2\,\varphi$

  D'où $A\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - b\,\mathrm{tg}\,\varphi + C = 0$

  ♠ Si a et c sont positifs, alors $A = a$, $C = c$ et $a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - b\,\mathrm{tg}\,\varphi + c = 0$
  $-\mathrm{tg}\,\varphi$ est donc une racine de l'équation.

  ♠ Si a et c sont négatifs, alors $A = -a$, $C = -c$ et $a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + b\,\mathrm{tg}\,\varphi + c = 0$
  Cette fois, $\mathrm{tg}\,\varphi$ est une racine de l'équation.

- Si a et c sont de signes opposés, le point O est situé à l'extérieur de $[LM]$ de sorte que $|OM| = |LM| + |OL| = B + |OL| = b + |OL|$. D'où $C = (b + |OL|)\,\mathrm{tg}\,\varphi = b\,\mathrm{tg}\,\varphi + A\,\mathrm{tg}^2\,\varphi$

$$A\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + b\,\mathrm{tg}\,\varphi - C = 0$$

  ♠ Si a est positif et c négatif, alors $A = a$, $C = -c$ et $a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + b\,\mathrm{tg}\,\varphi + c = 0$
  $\mathrm{tg}\,\varphi$ est donc une racine de l'équation.

  ♠ Si a est négatif et c positif, alors $A = -a$, $C = c$ et $a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - b\,\mathrm{tg}\,\varphi + c = 0$
  Cette fois, $-\mathrm{tg}\,\varphi$ est une racine de l'équation.

En procédant de la même façon pour $\mathrm{tg}\,\psi$, nous obtenons l'équation $A\,\mathrm{tg}^2\,\psi - b\,\mathrm{tg}\,\psi + C = 0$ lorsque $ac > 0$ et $A\,\mathrm{tg}^2\,\psi - b\,\mathrm{tg}\,\psi - C = 0$ lorsque $ac < 0$.

Ces résultats nous permettent de construire le tableau suivant:

	$c > 0$	$c < 0$
$a > 0$	$-\mathrm{tg}\,\varphi, -\mathrm{tg}\,\psi$	$\mathrm{tg}\,\varphi, -\mathrm{tg}\,\psi$
$a < 0$	$-\mathrm{tg}\,\varphi, \mathrm{tg}\,\psi$	$\mathrm{tg}\,\varphi, \mathrm{tg}\,\psi$

5. Appliquons cette méthode à l'équation correspondant à la figure 3. En mesurant soigneusement les segments $[OL]$ et $[KL]$, on obtient $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2}{2} = 1$. Comme nous sommes dans le cas $a > 0$ et $c > 0$, une première racine est -1. En mesurant $[PL]$ et $[KL]$, on trouve $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{3}{2}$, de sorte que la deuxième racine est -1,5. Evidemment, en général tu ne trouveras que des valeurs approchées des racines...

Procède de la même manière pour l'équation associée à la figure 4. Tu dois trouver 0,5 et -3 comme racines.

6. La méthode graphique qui vient d'être expliquée est mentionnée dans l'ouvrage de A. Ronveaux [1]. Dans le numéro de février 1991 de la revue américaine *Mathematics Teacher*, [2], nous trouvons une adaptation de cette méthode à la géométrie analytique.

Reprenons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

En la divisant par le coefficient a, écrivons-la sous la forme $x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Sur un diagramme cartésien, portons alors les points R, de coordonnée $(0, 1)$ et S, de coordonnée $(-\beta, \gamma)$.

On trace alors le cercle de diamètre RS et note O et P ses points d'intersection (éventuels) avec l'axe ox. Les abscisses de O et P sont les racines de l'équation $x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Essaie de justifier cette construction en la ramenant à celle de l'orthogone de Lill.

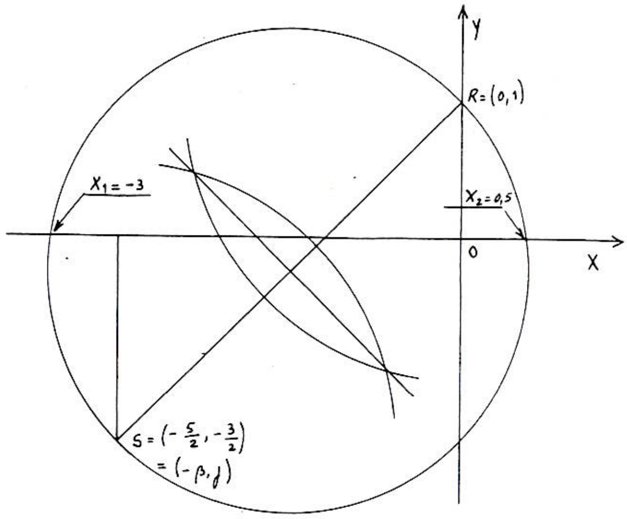


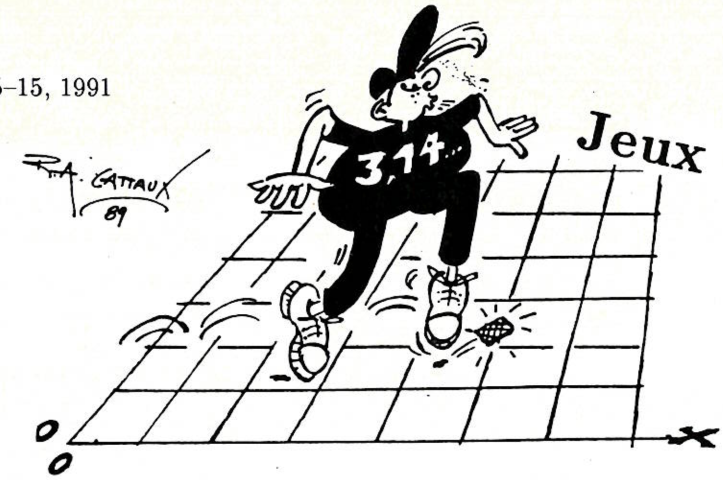
Fig. 5

Références

[1] A. Ronveaux, Introduction aux équations aux différences finies, *Ed. Lidec*, Montréal, 1966.

[2] W.M. Patterson and A.M. Lubecke, A special circle for quadratic equations, *The Mathematics Teacher*, Vol. 84, N° 2 , 125-127, (1991).

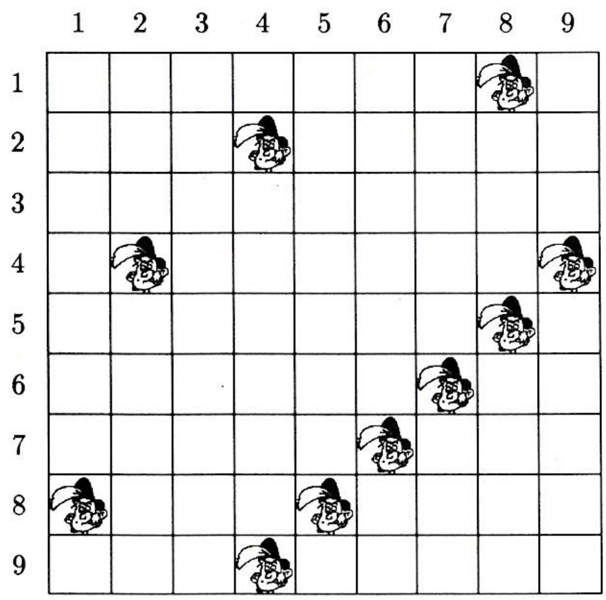
Si tu souhaites recevoir une copie de cet article (en anglais), envoie à la rédaction une enveloppe timbrée (14F) avec ton adresse.



Nombre auto-référent

Ecris un nombre N de dix chiffres (en base dix) tel que le 1er chiffre soit égal au nombre de zéros contenus dans l'écriture de N, le 2ème chiffre au nombre de "1", le 3ème chiffre au nombre de "2", etc jusqu'au dixième et dernier chiffre qui est égal au nombre de "9" contenus dans l'écriture de N.

Mots croisés (par G. Malisse)



Horizontalement et verticalement

1. Partie de la mathématique
2. Unit - Graisses de porc
3. Partie de la mathématique
4. Pariées
5. Les élèves le sont parfois au cours de gym.
6. Manquées, mal envoyées - Négation
7. Vagabondes - Effet comique
8. Parles - Début de Nabuchodonosor
9. N'a pas peur - Certains angles le sont

A.Parent

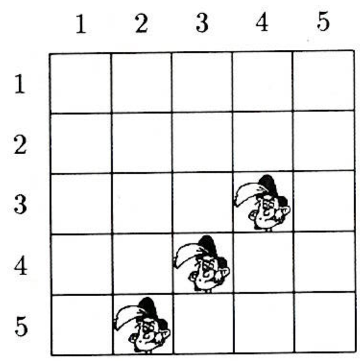
Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	6	14	
2			8
32			28
	22	4	

	7	3	
5			21
15			35
	1	17	

Nombres croisés (par C. Parent)



Horizontalement

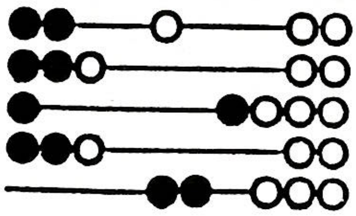
1. Puissance de 8
2. Puissance de 9
3. Multiple de 9
4. Produit de deux nombres consécutifs – Nombre premier
5. Cube

Verticalement

1. Palindrome
2. Carré
3. Multiple de 15
4. Puissance de 2 – Produit d'un carré et d'un cube
5. Multiple de 1991

Math-Jeunes n° 53, 16–17, 1991

OMB
OLYMPIADE
MATHEMATIQUE BELGE



P. Van Elsuwé

Cette année, pourquoi pas toi?

L'Olympiade Mathématique Belge en est cette année à sa dix-septième édition. Elle est ouverte aux élèves de toutes les sections et de tous les niveaux du secondaire. Elle se subdivise en deux épreuves parallèles dénommées "Mini" (destinée aux élèves des trois premières années des humanités) et "Maxi" (destinée à ceux des trois dernières années). Elle comporte trois stades: une éliminatoire qui se déroule dans les écoles, une demi-finale qui regroupe environ 15% de l'effectif initial et qui se déroule dans dix centres régionaux et une finale à laquelle participent une cinquantaine d'élèves en "Mini" et en "Maxi". A l'issue de cette finale le jury retient une vingtaine de lauréats pour chacune des deux épreuves.

Les "petits" peuvent aussi devenir des "grands"

Afin d'encourager la participation d'élèves appartenant aux classes non terminales, un classement séparé des élèves de 1ère, 2ème et de ceux de 4ème et 5ème est établi. Les meilleurs de ceux-ci seront retenus en vue des demi-finales et finales et des prix spéciaux sont prévus pour les meilleurs finalistes de ces classes. Le niveau de difficulté de l'éliminatoire MINI vise à la rendre accessible à des élèves de 1ère et 2ème année. N'hésite donc pas à t'inscrire quelle que soit ton année d'étude.

La participation

D'année en année la participation n'a fait que croître. Le nombre de participants qui était de 760 en 1976, de 3331 en 1981, de 11485 en 1986 atteignait le chiffre record de 18724 en 1990 avec 8236 participants et 296 écoles représentées en "Maxi" et 10488 participants et 281 écoles représentées en "Mini".

L'organisation du concours

Les dates importantes pour l'Olympiade 1992 sont les suivantes:

- *Mercredi 22 janvier 1992 : éliminatoire*
- *Mercredi 11 mars 1992 : demi-finale*
- *Mercredi 29 avril 1992 : finale*
- *Samedi 23 mai 1992 : proclamation des résultats.*

Note immédiatement ces dates dans ton agenda.

Comment préparer l'épreuve?

Voici maintenant quelques conseils qui te permettront, je l'espère, de mieux réussir tes olympiades.

Avant l'éliminatoire:

• Demande à ton professeur de mathématique des questionnaires des olympiades précédentes.

Tu peux également te procurer deux manuels qui reprennent les questions et les réponses des olympiades précédentes :

- **Olympiades Mathématiques Belges 1 (1976–1981)**
- **Olympiades Mathématiques Belges 2 (1982–1987)**

Demande à ton professeur comment les obtenir.

• Lis attentivement les instructions. Tu peux les trouver en première page du questionnaire de l'éliminatoire 1991 ou dans le *Math-Jeunes*numéro 49.

• Revois quelques notions importantes. Confectionne-toi quelques fiches de synthèse (attention: tu ne pourras les emporter avec toi le jour des olympiades, mémorise-les donc). A titre d'exemple voici quelques sujets possibles: produits remarquables, caractères de divisibilité, formules dans les triangles, formules de périmètre, d'aire et de volume, formules de trigonométrie, etc.

• Prépare ton matériel: papier quadrillé, papier millimétré, bic, crayon, gomme, latte, compas, rapporteur.

Pendant l'éliminatoire:

• Travaille calmement mais rapidement.
• Lis très attentivement les questions. Chaque mot a son importance.
• Les questions sont plus ou moins classées par ordre de difficulté croissante. Essaie donc de les résoudre dans l'ordre. Toutefois, si une question ne t'inspire pas passe sans tarder à la suite. Tu y reviendras éventuellement plus tard.
• Rappelle-toi que pour les questions sans réponse préformulée, la réponse est toujours un nombre entier compris entre 0 et 999. Par conséquent des réponses du genre -3, $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$, π, a, $\cos 30^\circ$ sont manifestement fausses.

Un coup d'œil sur des questions posées

Afin de te familiariser avec le genre de problèmes proposés, je t'ai sélectionné quelques questions posées lors des éliminatoires de ces quatre dernières années. A toi de te tester. Une "astuce" te permettra parfois de gagner du temps.
Les réponses sont données à la page "Solutions des jeux"; ne va pas trop vite les consulter.

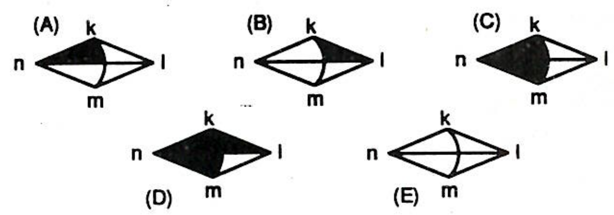
Questions "Mini"

1 *(Sans réponse préformulée)*
Dans ce carré magique, la somme des nombres figurant dans une ligne quelconque, une colonne quelconque ou une diagonale quelconque est toujours la même. Donner la valeur de y.

17	12	13
y		
	16	

2 Si tous les lapins gentils sont gris, alors
(A) les lapins qui ne sont pas gris ne sont pas gentils
(B) les lapins qui ne sont pas gentils ne sont pas gris
(C) les lapins qui ne sont pas gentils sont gris
(D) les lapins qui ne sont pas gris sont gentils
(E) les lapins gris sont gentils

3 Dans le losange $klmn$, l'ensemble des points p tels que $|pn| < |nk|$ ou $|pk| < |pm|$ est ombré. Quelle figure est correcte?



4 Dans un triangle rectangle, si l'hypoténuse est deux fois plus longue qu'un des côtés de l'angle droit, que vaut l'angle opposé à ce côté?

a 45° b 40° c 30° d 50° e 60°

Questions "Maxi"

1 *(Sans réponse préformulée)*
Le lendemain de son anniversaire en 1991, une personne constate que son âge (en années) égale la somme des chiffres de son année de naissance. Quel est alors son âge?

2 Un confiseur fabrique des bonbons fourrés de forme sphérique. L'intérieur est une boule de crème dont le rayon vaut les $\frac{3}{4}$ du rayon total du bonbon. L'extérieur est en chocolat. Quel est le rapport du volume de la crème au volume du chocolat?

a $\frac{27}{64}$ b $\frac{27}{37}$ c $\frac{3}{4}$ d 3 e aucune des réponses précédentes

3 On écrit la suite des nombres naturels sans aucune séparation entre les chiffres décimaux:

$$0123456789101112131415161718192021222\ldots$$

Quel sera le 1002ème chiffre écrit?

a 0 b 3 c 5 d 6 e 7

4 Le reste de la division par $x^2 - 1$ de

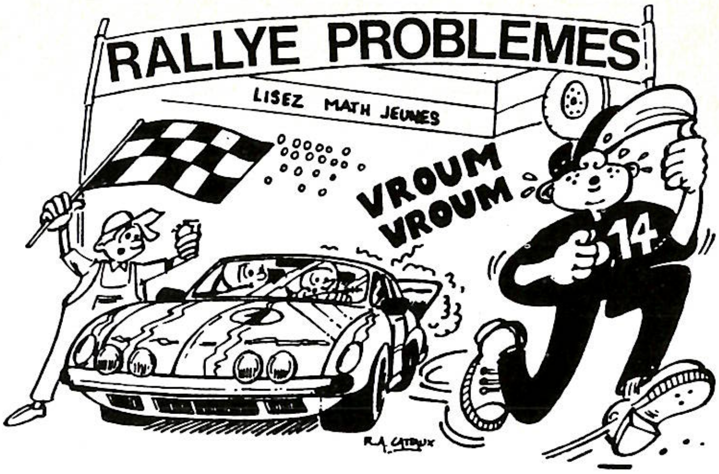
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{99} + x^{100}$$

est

a $50x + 1$ b $50x - 1$ c $51x + 50$ d $50x + 51$ e un autre polynôme

Je te souhaite dès maintenant bon amusement et bon succès le 22 janvier, date de l'éliminatoire dans ton école.

Math-Jeunes n° 53, 18–18, 1991



C. Festraets

Le rallye-problèmes 1991-1992 comportera trois étapes publiées dans les numéros 53, 54 et 55 de *Math-Jeunes*. Dans chaque numéro, vous trouverez des problèmes plus spécialement destinés aux élèves des trois classes inférieures, ils sont numérotés m1, m2, ...m9; tandis que les problèmes destinés aux élèves des classes supérieures sont numérotés M1, M2, ...M9. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer sa solution de n'importe quel problème.

Les solutions des différents problèmes seront rédigées sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes interviendront dans le classement final. Veillez à ce que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées et à ce que figures et démonstrations soient sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 15 décembre à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles. Il ne sera pas tenu compte des envois tardifs.

m1 Quelle est la somme totale de tous les chiffres utilisés pour écrire tous les nombres de un à un milliard (inclus).
(Pour les puristes..., la somme des chiffres est définie comme étant la somme des nombres représentés au moyen de ces chiffres).

m2 Une fourmi se trouve sur un verre cylindrique à l'extérieur et à 2 cm du bord supérieur. Un grain de sucre est collé à l'intérieur du verre à 4 cm du bord supérieur. La fourmi et le grain de sucre sont dans un même plan de symétrie du verre et ce dernier a un diamètre de 6 cm. Quelle est, à 1 mm près, la longueur du plus court chemin que peut emprunter la fourmi pour parvenir au sucre?

m3 Deux poulies de diamètres différents, reliées par une courroie sans fin, s'entraînent mutuellement. La plus petite fait 400 tours/min de plus que la grande. Lorsque la plus grande fait 5 tours, elle met une seconde de plus que la plus petite lorsqu'elle fait aussi 5 tours. Combien de tours/min font chacune des deux poulies?

M1 Un building a la forme d'un parallélépipède rectangle. Son volume est 75000 m^3. La chaleur perdue par unité de surface à travers le sol est le cinquième de celle perdue par unité de surface à travers les murs ou le toit. Quelles doivent être les dimensions du building pour que la perte de chaleur soit minimum?

M2 Démontrer que, quel que soit le tétraèdre $ABCD$, on a

$$|AB|\cdot|CD|+|AC|\cdot|BD|\geqslant|AD|\cdot|BC|$$

($|AB|$ désigne la longueur du segment $[AB]$).

M3 On donne un cercle, son centre O et trois points distincts A, B, C situés sur ce cercle. Construire l'orthocentre H du triangle ABC en n'utilisant que la règle non graduée.
(Il est donc permis de tracer des droites, de joindre des points par une ligne droite, mais toute construction qui nécessite l'équerre, le rapporteur ou le compas est interdite).

Le jeu de Nim

M. Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

1. Note historique

Charles BOUTON [3] a fait une analyse complète de ce jeu et lui a "collé" une théorie mathématique. Selon lui, il était joué au début de ce siècle, sous certaines formes, dans pas mal de collèges américains et lors de certaines fêtes de charité. Quoiqu'on ait souvent attribué à ce jeu une origine orientale, il semble vraisemblable que son nom vient de l'impératif singulier du verbe allemand *nehmen* qui signifie *prendre*. Dans cette conjugaison, il s'écrit *nimm*; BOUTON aurait simplement fait sauter le second "*m*" final.

2. Règles du jeu

Ce jeu oppose deux adversaires que nous appellerons M et J (deux initiales célèbres !). Sur une table, sont disposés trois tas de jetons. Le nombre de jetons de chaque tas est arbitraire; mais il est préférable, comme nous allons le voir, qu'il n'y ait pas, au départ, deux tas égaux. Les règles sont simples: un joueur, M ou J – peu importe car le jeu est impartial – sélectionne **un** des tas de jetons et en ôte **au moins un, plusieurs ou la pile entière.** Les joueurs opèrent chacun à leur tour; celui qui prend le ou les derniers jetons a gagné.

3. Stratégie du jeu

BOUTON remarque qu'il existe un ensemble de combinaisons qu'il appelle *"sûres"*; par exemple, un tas de 1, un tas de 2 et un tas de 3, que nous noterons $(1,2,3)$ ou encore $(1,4,5)$, $(1,6,7)$, $(2,4,6)$, $(5,9,12)$,... Il démontre que, si l'un des joueurs parvient à laisser sur table l'une de ces combinaisons sûres, son adversaire ne pourra en faire autant, mais, par contre, qu'au coup suivant, le premier joueur sera à nouveau capable de laisser sur table une nouvelle combinaison sûre.

Il faut remarquer que:

1. si le jeu démarre avec un seul tas non vide, celui qui commence doit gagner (il lui suffit de prendre tous les jetons)
2. si on commence avec deux tas égaux, le second joueur doit gagner (il lui suffit d'imiter, dans l'autre tas, les mouvements du premier et, dès lors, il est sûr de ramasser le ou les derniers jetons)
3. si au départ, il y a sur table deux tas inégaux, le premier joueur doit gagner (il lui suffit d'égaliser les deux tas et il se trouve alors second joueur dans la position précédente)
4. s'il y a trois tas de jetons, en vertu de ce qui précède, le joueur qui, le premier, égalise deux tas ou en annule un est perdant. Si tu n'es pas convaincu de la véracité de cette dernière assertion, discutes-en avec un copain: elle résulte des affirmations 2 et 3!

3.1. Somme-Nim

Définissons une nouvelle opération sur l'ensemble des nombres naturels: la *somme-Nim.* Soient n nombres naturels $d_1, d_2, \ldots, d_n$ et soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ leurs équivalents dans le système de numération binaire. Ecrivons ces n nombres (en notatation binaire) sur n lignes, de manière telle que les unités binaires soient alignées à droite et effectuons alors, dans chaque colonne, une *addition modulo 2.* L'addition modulo 2 consiste à faire une addition "normale" puis à prendre le reste de la division du résultat par 2. L'équivalent, en numération décimale, du binaire ainsi obtenu s'appelle la *somme-Nim* des n nombres $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Comme exercice, je te propose de calculer la somme-Nim de 3, 7 et 9; si tu as bien compris ce qui précède, tu dois trouver 13. De même, la somme-Nim de 5, 9 et 12 vaut 0.

3.2. Combinaison sûre

BOUTON affirme qu'une combinaison est sûre si la somme-Nim des effectifs de ses tas vaut 0. Il raisonne ainsi: si deux nombres quelconques sont donnés, le troisième qui forme avec ceux-ci une combinaison sûre (somme-Nim = 0) est univoquement déterminé: il suffit, en effet, dans leur écriture binaire, de placer des 0 ou des 1 dans les différentes colonnes, de manière à totaliser 0 modulo 2 dans chacune des colonnes. Il est tout aussi évident de voir que, si trois nombres (a, b, c) constituent une combinaison sûre, deux quelconques d'entre eux déterminent univoquement le troisième.

3.3. Théorème 1

Si M laisse sur table une combinaison sûre, J ne peut en faire autant lors du prochain mouvement.

Démonstration: Puisque J ne peut modifier qu'une seule pile, il lui est impossible de se placer dans une combinaison sûre, puisque M avait laissé sur table, dans un certain tas, l'**unique** nombre de jetons qui formait avec ceux des deux autres tas une combinaison sûre.

3.4. Théorème 2

Si M laisse sur table une combinaison sûre et si J diminue l'un des tas, M peut toujours, au coup suivant, décrémenter l'une des deux autres piles, de manière à se replacer dans une combinaison sûre.

Démonstration: Il faut remarquer d'abord, que si un nombre binaire diminue, cela se traduit par le fait, qu'en l'examinant de gauche à droite, la première différence que l'on rencontre est un "1" qui se transforme en "0". En effet, si, parcourant le nombre de gauche à droite, la première différence rencontrée était un "0" qui passe à "1", le nombre ne pourrait qu'augmenter, car la situation serait la suivante:

$$xx \ldots xx0xx \ldots xx$$

$$xx \ldots xx1yy \ldots yy$$

or, le nombre de $(n+1)$ chiffres $0xx \ldots xx$ vaut **au maximum** $2^n - 1$, alors que le nombre de $(n+1)$ chiffres $1yy \ldots yy$ vaut **au minimum** 2^n.

Supposons que M ait laissé sur table une combinaison sûre et que J ait ensuite diminué l'un des tas, soit α le numéro de la première colonne (en lisant de gauche à droite) où un "1" a été remplacé par un "0". Puisque M s'était placé dans une combinaison sûre, il ne peut plus y avoir dans cette colonne α qu'un seul "1" et ainsi, J ne peut se trouver dans une combinaison sûre. Par contre, au coup suivant, M sélectionnera la ligne où il reste un "1" en colonne α, changera ce "1" en "0", ce qui, en vertu de ce que nous venons de voir, diminue le nombre total de jetons et ensuite, il adaptera les colonnes situées à droite de la colonne α (les colonnes à gauche de la colonne α resteront évidemment inchangées) de manière à ce que la somme modulo 2 dans chacune des colonnes soit égale à 0. Ainsi, M aura récupéré une position sûre. En poursuivant ainsi le jeu, l'une des piles sera finalement annulée. Si J l'annule, puisqu'il est incapable de se placer dans une combinaison sûre, les deux tas restants seront nécessairement inégaux et M sera le vainqueur (voir ci-dessus). Par contre, si c'est M qui l'annule, puisqu'il lui est toujours possible de se placer dans une combinaison sûre, les deux piles restantes seront nécessairement égales et il ne pourra que gagner (voir également ci-dessus). Par conséquent, le premier joueur qui parvient à laisser sur table une combinaison sûre est certain de remporter la partie.

Bon amusement!...

Bibliographie

[1] BALL W.W. Rouse — COXETER H.S.M., *Mathematical Recreations and Essays*, 30th edition, Dover Publ. Inc., New York, 1987.

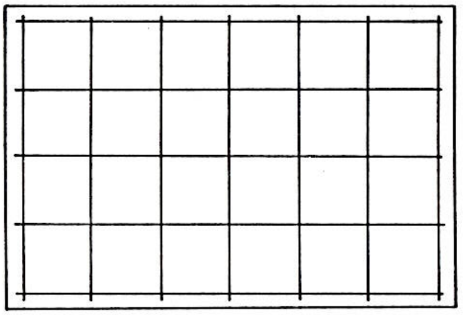
[2] BERLEKAMP E.R. — CONWAY J.H. — GUY R.K., *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press Inc., London, 1982 (2 vol.)

[3] BOUTON Ch. L., *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Ann. of Math., Princeton 3(2), 1902, pp. 35-39.

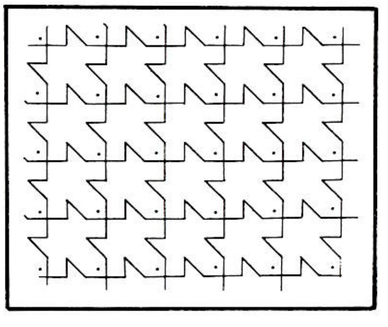
Couverture: Les couvertures de *Math-Jeunes* seront consacrées cette année aux pavages du plan euclidien par des polygones réguliers non étoilés. Un tel *pavage du plan* est un ensemble, les puristes diraient plutôt une famille $\mathcal{T}$ de polygones non étoilés. $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots\}$ qui couvre le plan de façon qu'il ne reste pas de trou et qu'il n'y ait aucun chevauchement (bord à bord). $T_1, T_2, \ldots$ sont appelés *pavés.* Si vous n'avez pas bien compris ce qu'est ce type de pavage, jetez un coup d'œil vers le sol mais, de préférence, dans une pièce dite "carrelée".

On peut montrer qu'il existe exactement 11 pavages distincts du plan par des polygones réguliers non étoilés, pour lesquels chaque sommet est "du même type". On les appelle *pavages archimédiens.* Le *type* d'un sommet est désigné par $(a.b.c\ldots)$ si, en tournant autour de ce sommet, on rencontre un a-gone, un b-gone, un c-gone, ... Dans le but d'obtenir une écriture unique pour chaque type, on donne l'expression $(a.b.c\ldots)$ de telle manière qu'elle soit, dans l'ordre lexicographique, la première de toutes les expressions obtenues par permutation cyclique de $a, b, c, \ldots$ Si vous avez des doutes sur le sens de cette dernière phrase, n'hésitez pas à en parler à votre professeur de mathématique.

La couverture de ce premier *Math-Jeunes* de l'année était à l'origine un pavage de type (4.4.4.4), que l'on note aussi (4^4).



Notre responsable de la couverture a jugé que cela était quelque peu monotone. Aussi, en s'inspirant de l'œuvre de M.C. Escher, a-t-elle déformé chaque carré, de manière à obtenir:



Si vous vous intéressez un peu à l'art graphique, je vous conseille un petit coup d'œil sur l'œuvre de Maurits Cornelis Escher, graveur et dessinateur hollandais né en 1898 et mort en 1971 (par exemple, M.C. ESCHER, *L'œuvre graphique*, éd. Solin, 1973).
En attendant les prochains numéros, je vous propose de réfléchir aux questions suivantes:

- Quels sont les dix autres pavages archimédiens du plan?
- Quelles sont les isométries qui les conservent?

Vous pouvez toujours nous envoyer vos suggestions! Bonne année scolaire ...