

# MATH-JEUNES

•

•

Périodique trimestriel - 14<sup>ème</sup> année  
Février - Mars 1992 - n° 54

Bureau de dépôt: Pont-à-Celles 1

## MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

**Rédaction, administration:** Place Matteotti 29 Bte 5, 7100 LA LOUVIERE.

**Comité de Rédaction:** M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, J.HUMIER, N.JOELANTS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, P.VAN ELSUWE, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS

**Illustrations:** R.A.CATTAUX

**Conception de la couverture:** K.MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

**Abonnements:**

**Belgique:**

**Etranger :**

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 100 FB      • Par paquet de 5 abonnements: 1000 FB

- Isolés: 140 FB      • Isolés: 280 FB

**Anciens numéros encore disponibles:**

- Avant 1987      Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB)
- Années 88/89, 89/90      Par année: 50 FB (Etranger: 100 FB)
- Année 90/91      80 FB (Etranger: 160 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez Nadine Debaille Joelants, Rue Delpierre 2, 7022 HARMIGNIES.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

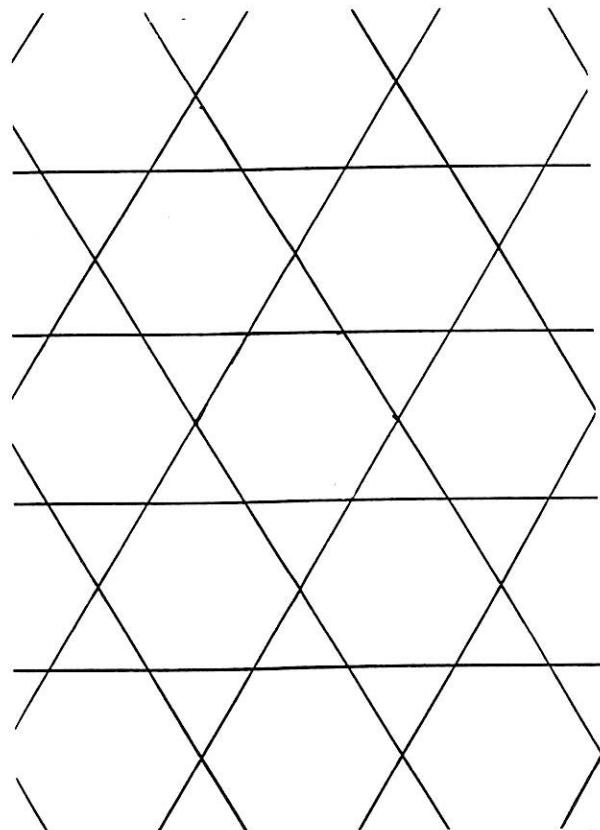
La rédaction de *Math-Jeunes* présente à tous les lecteurs ses meilleurs vœux de bonne, heureuse et fructueuse année. Elle leur offre, en couverture, un deuxième pavage archimédien du plan, le type (3.6.3.6), à trois petites fantaisies près!

A propos de Max ESCHER dont il fut question dans le dernier numéro, nous avons omis de signaler que *Math-Jeunes* n° 43 (année 88-89) lui avait consacré tout un article. De plus, dans ce même numéro, on trouve aussi un article de Françoise VALETTE sur les pavages du plan et de l'espace.

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

©SBPM Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.

# MATH-JEUNES



Jacques Bair, Applications des  
nombres de Fibonacci

**22**

**26**

Sophie et Patrick Tréfouis, Tous les  
chemins mènent à Rome. Mais ils  
n'ont pas tous la même longueur!

**29**

André Parent, Jeux-problèmes

**31**

Christian Van Hooste, A la recherche du  
barycentre du triangle "fil de fer"

**34**

M.O. Vanderschueren-Louppe Structure  
et isomorphisme. Compositions  
géométriques attrayantes: *Une ronde de  
ronds*

**38**

Rallye Problèmes

Jeux

**39**

**40**

Dix-septième Olympiade Mathématique  
Belge

# Applications des nombres de Fibonacci

Jacques Bair, Université de Liège

## 1. D'un problème à l'autre

Lors de la résolution d'un problème mathématique, une démarche importante et souvent fructueuse consiste à se ramener à un problème étudié précédemment et dont la solution est connue. C'est d'ailleurs l'une des clés fondamentales de la recherche en mathématique.

De façon humoristique, le raisonnement tenu par le mathématicien peut être caricaturé par cette histoire classique concernant des oeufs à faire bouillir [3, p.150].

### Situation:

Dans une cuisine, il y a des oeufs près du réchaud à gaz et un évier à eau froide.

Un mathématicien (ou un polytechnicien) doit faire bouillir ces oeufs. Un physicien aussi.

### Problème A

*Une casserole est suspendue à un clou. Il s'agit de décrire tous les gestes élémentaires nécessaires pour obtenir des oeufs bouillis.*

*Essayez : tout le monde fait à peu près comme vous.*

### Problème B

*Maintenant la casserole est pleine d'eau froide, avec dedans les oeufs à faire bouillir, sur l'un des brûleurs du réchaud à gaz non encore allumé.*

*...Le physicien allume ce brûleur... etc*

*...Et le mathématicien ? Certainement pas :*

*- il enlève délicatement les oeufs et les pose près du réchaud,*

*- il vide la casserole dans l'évier,*

*- il la suspend au clou et s'écrie triomphalement : "Je suis ramené au problème précédent !"*

Nous nous proposons d'illustrer cette petite histoire en traitant quelques problèmes variés et souvent bien concrets. Ils ont la particularité de se référer à un même modèle fort classique en mathématique, à savoir la suite de Fibonacci.

## 2. Aperçu théorique sur les nombres de Fibonacci

Dans son livre "Liber Abacci", Léonard de Pise, encore connu sous le nom de Léonard FIBONACCI (né à Pise vers 1175 et mort à une époque incertaine) étudia (en 1202) une suite de nombres construite de la manière suivante : les deux premiers termes sont égaux à 1, tandis que tout terme ultérieur sera la somme des deux termes qui le précédent. Il s'agit donc de la suite, dite *suite de Fibonacci*, suivante :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

En posant  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_3 = 2$ ,  $f_4 = 3$ ,  $f_5 = 5$ ,  $f_6 = 8$ ,  $f_7 = 13, \dots$ , ces nombres, qui sont souvent appelés *nombres de Fibonacci*, vérifient l'égalité suivante valable pour tout entier  $n$  au moins égal à 3 :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}. \quad (1)$$

Remarquons que la suite pourrait également commencer avec  $f_0 = 0$ ; en effet, l'égalité (1) est encore vraie pour  $n = 2$ .

L'équation (1) est dite *récurrente*, car la connaissance de  $f_1$  et de  $f_2$  permet de calculer de proche en proche  $f_3$ , puis  $f_4$  et successivement tous les termes de la suite.

Sans détailler la théorie générale des équations récurrentes, signalons une manière de construire la *solution générale* de (1). On pense à une *solution donnée* par une fonction exponentielle : en effet, si on avait une équation plus simple du type  $x_n = \lambda x_{n-1}$ , alors visiblement la solution serait donnée par  $x_n = \lambda^n x_0$  puisque l'on trouve successivement  $x_1 = \lambda x_0$ ,  $x_2 = \lambda x_1 = \lambda(\lambda x_0) = \lambda^2 x_0$ ,  $x_3 = \lambda x_2 = \lambda(\lambda^2 x_0) = \lambda^3 x_0, \dots$  Si donc  $\lambda^n$  est solution de l'équation (1), alors on a

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \quad (2)$$

où, après simplification par  $\lambda^{n-2}$  et en ramenant tout dans un même membre :

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \quad (3)$$

Réciroquement, une solution algébrique de l'équation (3), appelée *équation caractéristique* de

(1), livre une solution de (1) : pour le voir, il suffit évidemment de multiplier les deux membres de (3) par  $\lambda^{n-2}$ , ce qui donne (1).

Or, l'équation (3) possède les deux solutions  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , de sorte que  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$  et  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  sont les solutions de (1); on peut montrer que la solution générale de (1) est donnée par :

$$f_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (4)$$

En prenant successivement  $n = 0$  et  $n = 1$ , on trouve  $0 = C_1 + C_2$  et

$$1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

ce qui livre  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$  et  $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ . En conséquence, la solution générale de (1) vaut, pour tous  $n = 0, 1, 2, \dots$  :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (5)$$

Voici un petit programme informatique (écrit en GWBASIC) permettant d'obtenir les  $N$  premiers nombres de Fibonacci.

```

10 PRINT "Choisir le nombre N d'éléments
de la suite : N="
20 INPUT N
30 LET A=1
40 LET B=1
50 PRINT "L'élément numéro 1 vaut :";A
60 PRINT "L'élément numéro 2 vaut :";B
70 FOR I = 3 TO N
80 LET F = A+B
90 PRINT "L'élément numéro";I;"vaut :";F
100 LET B=A
110 LET A=F
120 NEXT I
130 END

```

Donnons quelques remarques à propos de cette théorie.

De façon inattendue, les nombres de Fibonacci, qui sont bien entendu tous des  *nombres entiers*, s'écrivent à l'aide de nombres irrationnels, à savoir le fameux *nombre d'or*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$$

et son inverse

$$\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618.$$

De plus, la suite de Fibonacci est riche en propriétés arithmétiques intéressantes où interviennent (entre autres) nombres premiers et divisibilité [5, p. 12]. Ce modèle trouve des applications parfois surprenantes [2, p. 80].

Ainsi, il existe dans la nature certaines plantes en formes de spirales; ces courbes se présentent quelquefois en deux ensembles formant une révolution en sens opposé, chaque jeu étant constitué par un nombre fixe de spirales. Par exemple, chez la plupart des marguerites, il y a 21 spirales dans un sens et 34 dans l'autre; dans les écailles de pommes de pin, on dénombre 5 spirales dans un sens et 8 dans l'autre; dans les protubérances des ananas, on compte respectivement 8 et 13 spirales. Ces différents nombres (21 et 34, 5 et 8, 11 et 13) sont en fait deux termes consécutifs dans la suite de Fibonacci.

Par ailleurs, les nombres de Fibonacci jouent apparemment un rôle important dans les arts. En effet, le nombre d'or, qui vaut approximativement le rapport de deux nombres consécutifs (et supérieurs à 3) dans la suite de Fibonacci, possède une valeur esthétique certaine : pour preuve, le rapport de 1 à  $\phi \simeq 1,618$  se retrouve dans de nombreux chefs-d'œuvre de l'architecture ancienne et moderne.

La suite de Fibonacci est également exploitée en mathématique, notamment dans la construction d'algorithmes en programmation non linéaire (par exemple, pour trouver une approximation du minimum d'une fonction dans un intervalle donné).

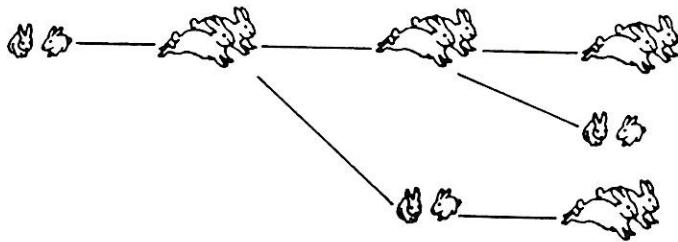
### 3. Problèmes

#### Problème 1

*Un éleveur achète deux lapins âgés d'un mois et de sexes opposés.*

*On suppose que les lapins atteignent l'âge adulte après deux mois; par ailleurs, tous les mois, deux lapins adultes et de sexes opposés donnent naissance à deux lapereaux de sexes opposés; enfin, on admet que les lapins ne meurent pas.*

Comment évoluera le nombre de couples de lapins de cette personne ? [5, p. 11].



En comptant systématiquement les couples de lapins, on peut trouver les premiers nombres  $c_n$  de couples après  $n$  mois : on a visiblement  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 3, \dots$ . D'une manière générale, pour tout entier  $n$  au moins égal à 3, les couples existant à l'instant  $n - 1$  seront encore en vie à l'instant  $n$  (puisque les lapins ne meurent jamais); par ailleurs, tout couple vivant à l'instant  $n - 2$  donne naissance à un nouveau couple à l'instant  $n$ ; on a donc  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ , de sorte que les nombres  $c_n$  coïncident avec les termes  $f_{n+1}$  de la suite de Fibonacci.

### Problème 2

Un kangourou se déplace sur un chemin constitué d'une succession de cases. Son mode de déplacement est le suivant : ou bien il passe d'une case dans la suivante, ou bien il saute par dessus une et une seule case.

Combien ce kangourou a-t-il de manières distinctes de se rendre de la première à la  $n$ -ième case ? [5, p. 12]

1	2	3	4	...	$n - 2$	$n - 1$	$n$
---	---	---	---	-----	---------	---------	-----

Désignons par  $x_n$  le nombre de manières distinctes de se rendre de la première à la  $n$ -ième case. On trouve facilement :  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ . A partir de là, le comptage devient plus laborieux. Supposons alors le problème résolu, c'est-à-dire le kangourou parvenu dans la  $n$ -ième case. A l'étape précédente, il se trouvait soit dans la case numérotée  $n - 1$  (d'où il est passé directement dans la  $n$ -ième case), soit dans la case numérotée  $n - 2$  (d'où il a sauté par dessus la  $(n - 1)$ -ième case). On obtient dès lors, pour tout entier  $n$  au moins égal à 3,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Les nombres  $x_n$  sont ceux de la suite de Fibonacci.

### Problème 3

De combien de façons peut-on vider un récipient contenant  $n$  litres d'eau avec des verres de 1 litre et de 2 litres ? [1, p. 84].

Le nombre cherché dépend évidemment de  $n$ ; notons-le  $u_n$ .

Il est clair que  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 2$ .

Supposons  $n \geq 3$ , puis établissons une formule de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$ . Pour obtenir  $u_{n+1}$ , remarquons que la dernière opération s'effectue soit avec un verre de 1 litre (et l'on avait alors versé  $n$  litres), soit avec un verre de 2 litres (auquel cas il y avait déjà  $n - 1$  litres). Il en résulte que

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

et les nombres  $u_n$  coïncident avec les nombres  $f_{n+1}$  de Fibonacci.

### Problème 4

Un compte bancaire est alimenté, systématiquement et uniquement en fin de chaque année, par deux personnes notées  $A$  et  $B$ .

La première année,  $A$  et  $B$  placent chacun une unité monétaire.

Chacune des années suivantes,  $A$  verse une somme égale au placement global de l'année précédente, tandis que la quote-part de  $B$  coïncide seulement avec le versement effectué par  $A$  l'année précédente.

Déterminer les sommes placées sur ce compte.

Pour l'année  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), désignons par  $a_n$  (resp.  $b_n$ ) le capital placé par  $A$  (resp.  $B$ ) à la fin de l'année numéro  $n$ ; la somme totale versée cette même année vaut donc  $c_n = a_n + b_n$ .

On sait que  $a_1 = b_1 = 1$ , d'où  $c_1 = 1 + 1 = 2$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur à 1, on a  $a_n = c_{n-1}$  et  $b_n = a_{n-1}$ . Dès lors,  $c_2 = a_2 + b_2 = c_1 + a_1 = 2 + 1 = 3$ . Pour  $n$  au moins égal à 3,

$$c_n = c_{n-1} + a_{n-1} = c_{n-1} + c_{n-2},$$

partant, chaque nombre  $c_n$  est égal au nombre  $f_{n+2}$  de Fibonacci.

### Problème 5

On considère un système de signalisation qui comprend seulement deux signaux  $S$  et  $T$  (par exemple, les points et les traits en morse).

On appelle "message" toute succession de ces deux signes.

Sachant qu'un signe  $S$  (resp.  $T$ ) réclame exactement 1 (resp. 2) unité(s) de temps pour être transmis d'un endroit  $A$  vers un endroit  $B$ , et que le

premier signe d'un message est toujours  $S$ , on demande la capacité  $c$  de  $B$  par rapport à  $A$ , à savoir (d'après Shannon),

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 N_n}{n},$$

où  $N_n$  désigne le nombre total de messages qui peuvent être transmis de  $A$  vers  $B$  après  $n$  unités de temps ( $n$  étant un nombre entier) [2, p. 80].

D'après l'énoncé,  $N_1$  est égal visiblement à 1; par ailleurs,  $N_2$  vaut également 1 car, après 2 unités de temps, le seul message possible est formé de 2 fois le signe  $S$ . Plus généralement, le dernier signe de tout message d'une durée  $n$  (avec  $n$  entier et  $n \geq 3$ ) est  $S$  ou  $T$ , d'où on a évidemment  $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$ . La solution de cette équation récurrente s'écrit donc

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Le calcul de  $c$  peut s'effectuer comme suit :

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log_2 \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}{n} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log_2 \left[ 1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right] \\ &= \log_2 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \simeq 0,69. \end{aligned}$$

## Problème 6

On construit une suite de rectangles de la manière suivante.

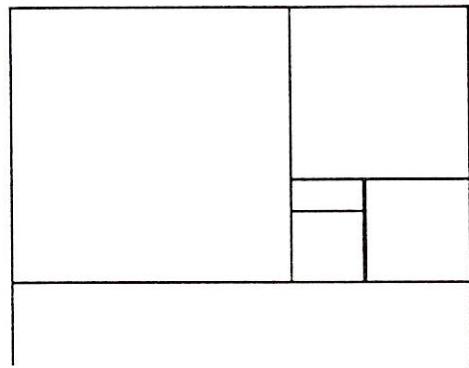
On part d'un rectangle quelconque.

Ensuite, en tournant toujours dans le même sens (par exemple, le sens trigonométrique), on accolé un carré sur le grand côté du rectangle obtenu à l'étape précédente. On poursuit indéfiniment cette opération.

a) Que peut-on dire des côtés des rectangles ainsi obtenus ?

b) Considérer le cas particulier où le rectangle de départ est un carré de côté 1 (auquel cas, on choisit arbitrairement un de ses côtés pour construire le deuxième carré).

c) Trouver, dans le cas général, la limite du rapport des deux côtés des rectangles obtenus [4, p. 101].



a) Désignons par  $c_0$  et  $c_1$  les deux côtés du premier rectangle. Ceux du deuxième rectangle sont, par construction,  $c_1$  et  $c_2 = c_1 + c_0$ . De proche en proche, on trouve, pour tout entier  $n$  au moins égal à 2 :

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1},$$

ce qui donne l'égalité suivante :

$$c_n = A \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

les deux constantes  $A$  et  $B$  pouvant être déterminées dès que  $c_0$  et  $c_1$  sont connus.

b) Dans le cas particulier où  $c_0 = c_1 = 1$ , les nombres  $c_n$  sont ceux de la suite de Fibonacci; l'on peut écrire

$$c_n = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

c) Revenons au cas général pour calculer la limite du rapport des deux côtés des rectangles :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}} \left[ \frac{c_1 + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}{c_1 + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Cette limite coïncide donc avec le nombre d'or.

## Bibliographie

[1] AKKAR M. et M.T.- EL MOSSADEQ A., *Les mathématiques par les problèmes (Olympiades nationales et internationales, Rallyes, concours, divertissemens)*, Sochepress, Casablanca, 1985, 305 pages.

- [2] BAIR J. - HINNION R. - JUSTENS D., *Applications économiques au service de la mathématique*, Ed. Soc. Belge Prof. Math., 1989, 139 pages.
- [3] BAREIL H. - ZEHREN C., *Classe de seconde: un outil pour des changements*, Publ. A.P.M.E.P., n° 79, Paris, 1990.
- [4] HUBAUT X., *Mathématique du secondaire*, Bruxelles, 1988.
- [5] FESTRAETS C., Malgré les programmes, comment introduire de l'arithmétique dans notre enseignement, *Mathématique et Pédagogie*, 38, 1982, pp. 5-30.
- [6] VILLERS C., A la rencontre du nombre d'or, *Mathématique et Pédagogie*, 21, 1979, pp. 19-38.

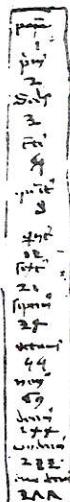
Problème des lapins extrait d'une des copies du "Liber Abacci" de LÉONARD DE PISE (manuscrit I72 SUP conservé à la Bibliothèque Ambrosienne de Milan).

Tous les chemins mènent à Rome. Mais ils n'ont pas tous la même longueur!

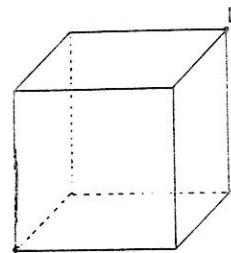
Sophie et Patrick Tréfouis,  
Athénée Royal de Mons

## 1. Prologue : la fourmi dans sa chambre (Fable).

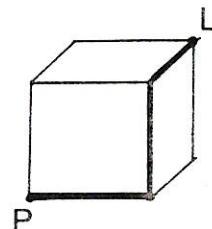
Une fourmi vivait  
En un réduit cubique  
Drôle d'idée, me direz-vous,  
Et moi je répondrai:  
Il n'est point de sots logements.  
Elle avait élu domicile  
En un sommet de sa chambrette.  
Nommons-le *L*.  
Un jour, alors qu'elle flânait  
Le téléphone sonna.  
Elle se trouvait  
Au point *P*,  
Sommet du cube  
Opposé à *L*  
Où était le combiné  
Ne sachant point voler  
-Quoi de plus naturel pour Madame Fourmi?-  
Elle se hâta  
En prenant le chemin le plus court  
Ami lecteur, dites-moi donc  
Quelle fut la route suivie!



## 2. Solution

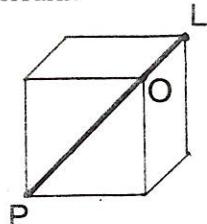


- Un trajet suivant les arêtes du cube n'est certainement pas le plus court:



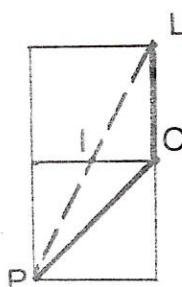
- Alors? Cherchez avant de lire la suite.

Si la fourmi longe une diagonale, elle gagne du terrain.



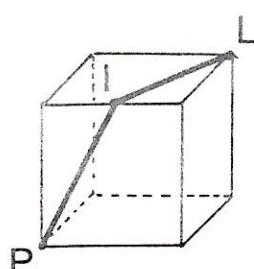
- Rien de mieux?

Voici l'idée maîtresse: le chemin le plus court entre 2 points est la ligne droite. C'est parfait! Dans le dessin précédent,  $P$ ,  $O$  et  $L$  sont alignés! Sur la *représentation* du cube, oui, mais en réalité? Développons les faces avant et supérieure du cube (relevons le "couvercle").



$POL$ : le trajet précédent.  
Que pensez-vous de  $PIL$ ?

Il est plus court! C'est même le plus court.



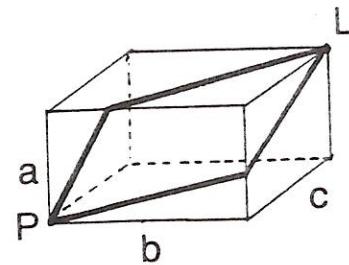
$I$  est le milieu de l'arête, puisque nous avons affaire à un cube.

- Ce chemin est-il unique?

Non. Cherchez bien: il y en a 6.

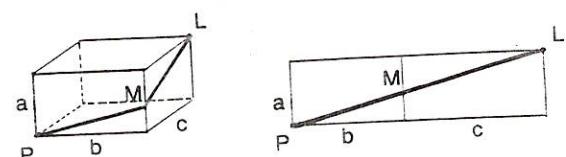
### 3. La fourmi a déménagé.

- Elle habite désormais dans une pièce ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.



Le principe est identique: il y a 6 chemins possibles (qui peuvent finalement être ramenés à 3 – si, si, réfléchissez). Sont-ils tous équivalents? (Voir 2 exemples de trajet sur la représentation).

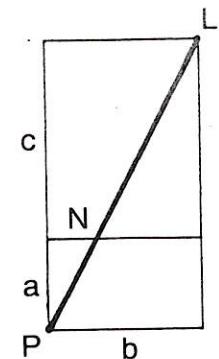
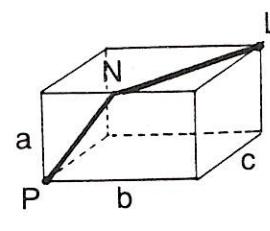
Si les dimensions de la pièce sont  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec  $a < b < c$ :



Chemin 1

Le trajet de  $P$  à  $L$  peut se calculer en utilisant le théorème de PYTHAGORE (Si tu ne le connais pas encore, demande à ton professeur de mathématique).

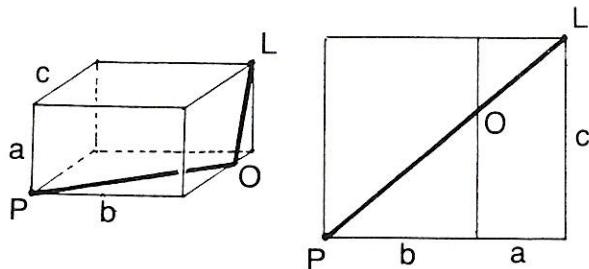
$$\begin{aligned}
 (\text{chemin 1})^2 &= (b+c)^2 + a^2 \\
 &= b^2 + 2bc + c^2 + a^2 \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2bc. \quad (1)
 \end{aligned}$$



Chemin 2

De la même manière:

$$\begin{aligned}
 (\text{chemin 2})^2 &= (a+c)^2 + b^2 \\
 &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \quad (2)
 \end{aligned}$$



Chemin 3

$$\begin{aligned}
 (\text{chemin 3})^2 &= (a+b)^2 + c^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 + c^2 \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \quad (3)
 \end{aligned}$$

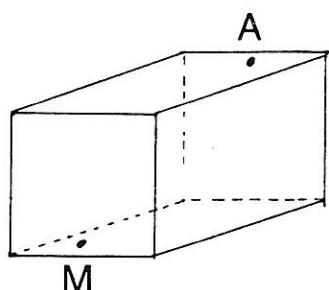
- Il nous reste à comparer ces 3 distances:

$$\begin{aligned}
 (1) &: a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \\
 (2) &: a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \\
 (3) &: a^2 + b^2 + c^2 + 2ab
 \end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de comparer  $bc$ ,  $ac$ ,  $ab$ . Puisque  $a < b < c$ , le produit  $ab$  est le plus petit et le chemin 3 le plus court!

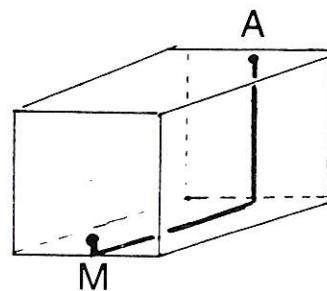
#### 4. Un drame!

Dans cette pièce ( $9,6\text{m} \times 3,6\text{m} \times 3,6\text{m}$ ): une araignée et une mouche.



L'araignée sur la face "arrière" (à 30 cm du plafond), la mouche sur la face "avant" (à 30 cm du sol), chacune au "milieu" de la largeur. La mouche, prise dans la toile de son ennemie, ne peut bouger. L'araignée fonce sur sa proie. Quel est le chemin le plus court? Combien mesure-t-il?

(a) Avant d'avoir lu le début de cet article, il est probable que vous auriez dessiné ceci:

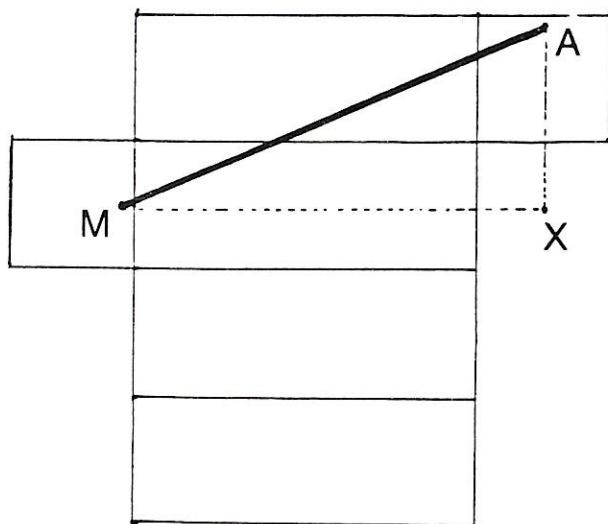


$$\text{Chemin 1 : } 0,3 + 9,6 + 3,3 = 13,2\text{m}$$

(Remarquons que nous avons emprunté 3 faces).

Mais vous êtes beaucoup plus futés maintenant!

(b) Développons donc. Mais attention aux positions de  $A$  et  $M$ .



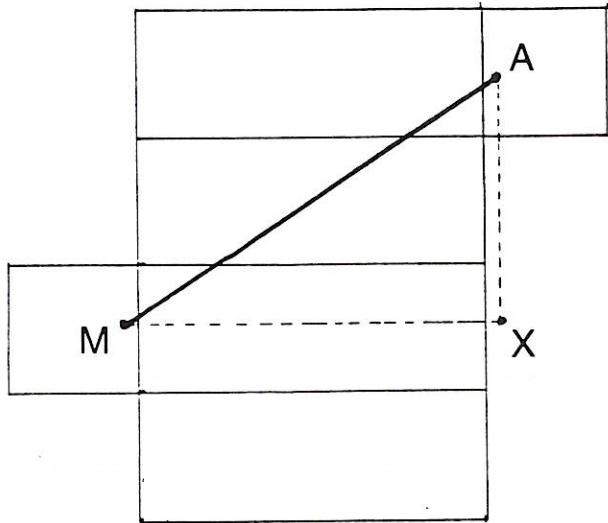
PYTHAGORE nous aide encore:

$$\begin{aligned}
 |MX| &= 0,3 + 9,6 + 1,8 = 11,7\text{(m)} \\
 |XA| &= 3,3 + 1,8 = 5,1\text{(m)}
 \end{aligned}$$

Puisque  $(\text{chemin 2})^2 = |MX|^2 + |XA|^2$ , chemin 2  $\simeq 12,8\text{(m)}$ .

C'est mieux! (En passant par 4 faces).

(c) Mais le génial mathématicien DUDENEY (qui a posé ce problème) a trouvé ceci:



$$|MX| = 0,3 + 9,6 + 0,3 = 10,2(\text{m})$$

$$|XA| = 1,8 + 3,6 + 1,8 = 7,2(\text{m})$$

Chemin 3  $\simeq 12,5(\text{m})$

De mieux en mieux!

Et en empruntant 5 faces!!

(d) Peut-être pensez-vous que d'autres développements sont plus intéressants. Essayez et faites-nous part de vos conclusions.

## 5. Epilogue

Voici enfin la moralité de la fable:

“Le chemin le plus court n'est pas celui qu'on pense!”

## Jeux-problèmes

André Parent,  
Lycée de Mouscron

Dans l'article “Jouons avec les figures”, page 5 du numéro 53 de ta revue préférée, Ann Billiau, Aude De Ridder et Marie-Paule Peiffer t'expliquaient notamment comment déterminer, parmi des figures données, celles qu'il était possible de dessiner d'un seul trait de crayon.

Nous te proposons d'utiliser tes nouvelles connaissances dans les situations suivantes.

- La première est extraite de ton concours préféré, l'Olympiade mathématique belge, la douzième du nom lors de la demi-finale mini:

On veut tracer la figure ci-dessous d'un trait continu (sans lever le crayon), et sans suivre deux fois le même segment. Si on part de 1, le tracé se terminera nécessairement en:

Ⓐ l Ⓑ m Ⓒ n Ⓓ o Ⓔ p

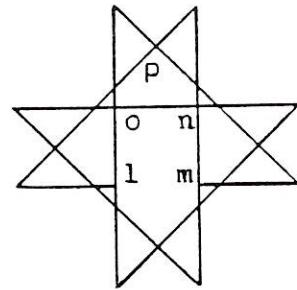


Figure 1

- La figure suivante est un des onze patrons du cube; tu constateras aisément qu'il est possible de le dessiner d'un seul trait de crayon.

Il est certainement commode de marquer les degrés des sommets.

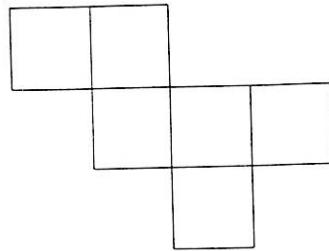


Figure 2

- Je m'adresse au spécialiste que tu es devenu et te propose de rechercher parmi les développements du cube, ceux qui possèdent la même particularité. Tu trouveras les onze patrons du cube à la page 10 de *Math-Jeunes* n° 53.
- D'autres jeux se ramènent à une démarche du même genre. La figure 3 représente des salles rectangulaires qui communiquent avec leurs voisines et l'extérieur par une ouverture.

Est-il possible de trouver un chemin permettant de passer une seule fois par chaque ouverture?

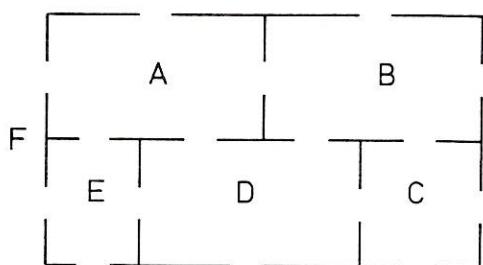


Figure 3

- Tu sais que la grandeur des pièces ne joue aucun rôle et par conséquent, la représentation du problème peut se faire sous la forme d'un graphe où chaque salle est représentée par un point (n'oublie pas l'extérieur des locaux) et chaque ouverture permettant l'accès d'un local au voisin à l'aide d'un arc (figure 4)

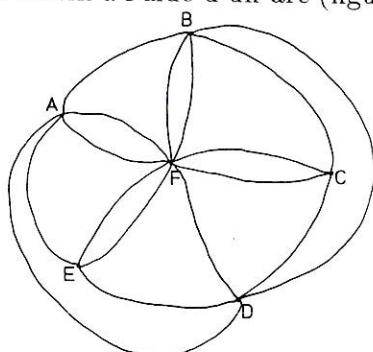


Figure 4

Le tableau suivant te permet alors de repérer le degré de ces sommets

Salle	Degré	Salle	Degré
A	5	D	5
B	5	E	4
C	4	F	9

Maintenant tu sais pourquoi ce problème est impossible. Qu'en est-il de la situation suivante?

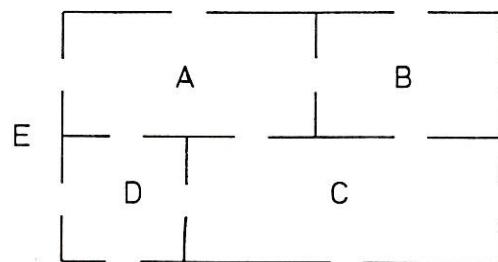


Figure 5

- Pour terminer voici un problème inspiré d'un puzzle célèbre, le *Tan-gram*, qui serait d'origine chinoise:

Un musée d'art chinois comporte sept salles abritées dans un bâtiment de forme carrée. Chaque pièce communique avec la salle voisine ou avec l'extérieur par une porte (ici symbolisée par une ouverture).

Imagine le trajet du gardien, devant fermer ces portes le soir, qui ne franchirait chacune d'elles qu'une et une seule fois.

Sachant qu'il se rend chez le rédacteur en chef de *Math-Jeunes* afin d'y faire une partie au jeu de Nim avant de rentrer chez lui, quelle porte ferme-t-il en dernier lieu?

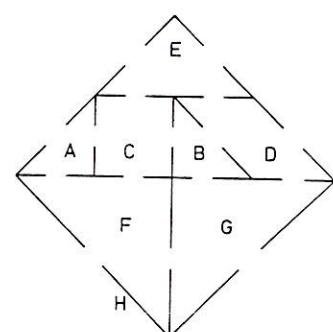


Figure 6

Tu trouveras les solutions dans le prochain *Math-Jeunes*; en attendant, nous te souhaitons une bonne récréation mathématique.



476: chute de Rome

1066: bataille de Hastings

1453: chute de Constantinople

1492: Colomb découvre l'Amérique

622: l'église de Malonnet

732: bataille de Poitiers

1096: première croisade

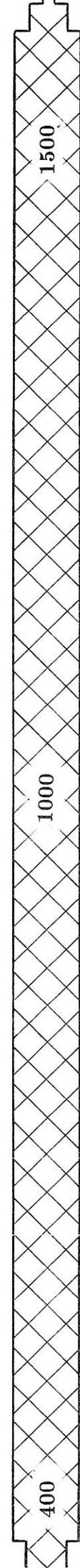
1140: invention de l'imprimerie

1204: prise de Constantinople

1431: Jeanne d'Arc au bûcher

1440: invention de l'imprimerie

1453: chute de Marco Polo



ARYABHATA(476,?)

Il a composé en vers l'*Aryabhatiya* qui traite d'astronomie et de mathématique notamment de règles sur les progressions arithmétiques.

BRAHMAGUPTA(598, après 665)

Il a écrit le *Brahmasphuta Siddhānta* dont un des plus beaux résultats est une généralisation aux quadrilatères de la formule de HÉRON pour calculer l'aire:  $S = \sqrt{(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)(p - \delta)}$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont les longueurs des côtés, et  $p = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$ . Le résultat n'est cependant pas aussi brillant qu'il y paraît car on sait maintenant que cette formule n'est vraie que si le quadrilatère est inscriptible.

La formule correcte est

$$S = \sqrt{(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)(p - \delta) - \alpha\beta\gamma\delta \cos^2 \theta}$$
 où  $\theta$  est la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

AL KHUWARIZMI (IX<sup>e</sup> s.)

On lui doit notamment un traité d'arithmétique dans lequel il expose le système indien de numération ainsi qu'un autre sur l'*al-jabr*. *Al-jabr* est devenu, en français, *algèbre*. Chez AL KHUWARIZMI, ce vocable évoque l'idée de terme passant d'un membre à l'autre dans une équation. Son nom a donné naissance au mot *algorithme*.

BHASKARA(1114, ~1185)

Il a notamment composé la *Lilavati* qui couvre l'algèbre et l'arithmétique.

Leonardo FIBONACCI (dit Léonard de Pise) (~1175, ~1240)

Son *Liber abbaci* ("Livre de l'abbaye") (~1202) a contribué à répandre en Occident le nouveau système indo-arabe de numération. Il a laissé son nom à la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...,  $u_n$ , ... où  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . KEPLER(1571,1630) a observé que lorsque  $n$  devient grand, le rapport  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$  tend vers le *nombre d'or*:  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (= 1,618 ...).

Jérôme CARDAN(1501,1576)

Un des grands algébristes d'Europe de son époque. Son *Ars magna* ("le Grand Art") jette les bases de l'algèbre du XVI<sup>e</sup> siècle, il y publie la méthode de résolution de l'équation du troisième degré (s'attirant ainsi les foudres de TARTAGLIA(1499,1557) — auteur de cette méthode avec DAL FERRO(1465,1526) — qui lui avait transmis ces résultats sous le sceau du secret) et du quatrième degré dont il attribue la paternité à FERRARI (1522,1565).

François VIETE(1540,1603)  
Son principal mérite mathématique est d'avoir donné une importante assise à l'algèbre symbolique (il introduit l'emploi systématique des lettres pour représenter les valeurs numériques). VIETE a présenté la première expression analytique de  $\pi$ , ses travaux en géométrie retinrent l'attention de DESCARTES; on lui doit d'importants travaux en trigonométrie qu'il applique à la résolution algébrique des équations du troisième degré.

John NEPER(dit aussi NAPIER)(1550,1617)

Il a inventé la méthode de calcul logarithmique. Avec l'aide de BRIGGS(1561,1639), il établit des tables de logarithmes décimaux. Le logarithme de base  $e$  est dit *népérien* en son honneur.

Galileo GALILEI (dit GALILEE)(1564,1642)  
Un des principaux fondateurs de la Science Moderne, il pratique l'expérimentation en physique et organise les lois sous forme mathématique (notamment en dynamique).

1517: Réforme protestante

1582: Grégoire XIII impose le calendrier grégorien

1609: lunette de Galilée

1616: morts de Shakespeare et Cervantès

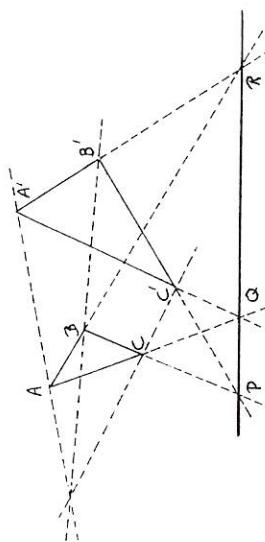
1538: première carte du monde par Mercator

1598: l'Edit de Nantes

1600

Gérard DESARGUES(1593,1661)

Son *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* est le premier grand traité de géométrie projective.  
Il a démontré le théorème qui porte son nom, que lui attribue un de ses amis et disciples, et qui s'énonce : "Etant donnés deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes si et seulement si les points  $P$  (intersection de  $BC$  et  $B'C'$ ),  $Q$  (intersection de  $CA$  et  $C'A'$ ) et  $R$  (intersection de  $AB$  et  $A'B'$ ) sont alignés.



1643: baromètre de Torricelli

1650

Pierre-Simon DE FERMAT(1601,1665)

Une originalité de ce mathématicien est de n'avoir pratiquement rien publié de son vivant. Il eut une abondante correspondance avec les mathématiciens de son temps (DESCARTES, PASCAL, ...).  
FERMAT est à l'origine d'un véritable renouveau en théorie des nombres, il contribua à la naissance du calcul différentiel avec NEWTON; avec DESCARTES, il est à l'origine de la géométrie analytique; il travailla, en même temps que PASCAL, le calcul des probabilités, ...

Il est l'auteur d'une célèbre conjecture, souvent appelée *grand théorème de Fermat*, gribouillée en marge de son exemplaire de DIOPHANTE. Il prétend l'avoir démontrée mais la preuve ne nous est pas parvenue. La conjecture affirme que l'équation diophantienne  $x^n + y^n = z^n$  n'a d'autre solution que  $(0, 0, 0)$  si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ . La démonstration reste à faire; sa recherche est à l'origine de beaucoup de travaux en théorie des nombres, travaux qui ont tout de même abouti à des résultats partiels.

Blaise PASCAL(1623,1662)

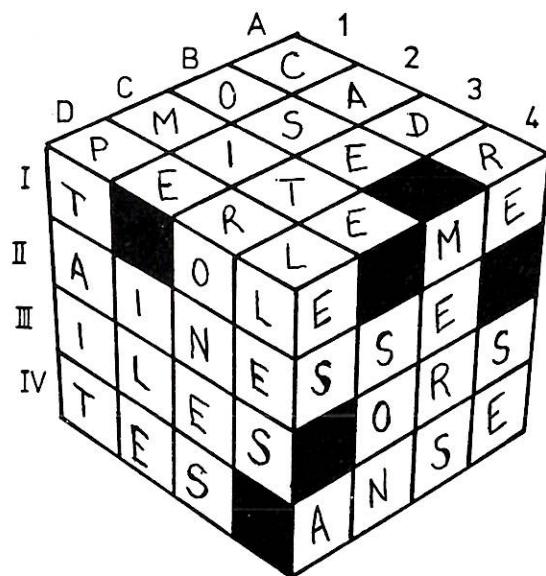
A l'âge de seize ans, il écrivit un *Essai sur les coniques*, trois ans plus tard, il crée une des premières machines à calculer (*la Pascaline*), dans le but de faciliter le travail de son père. Comme mathématicien, on lui doit le développement du calcul des probabilités et de l'analyse combinatoire. Il a découvert de nouvelles propriétés au triangle qui porte son nom mais pourtant connu depuis près de 600 ans. Ce triangle permet un calcul rapide des coefficients binomiaux  $\binom{m}{n}$ .  
Il s'est également intéressé à l'analyse et à la géométrie analytique (le "théorème de Pascal" s'énonce, en géométrie projective: *Si un hexagone est inscrit dans une conique, alors ses côtés opposés se coupent en trois points alignés*). Il a, le premier, énoncé clairement le principe de la démonstration par récurrence.

Isaac NEWTON(1642,1727)  
Ce très brillant physicien est notamment l'auteur de la loi de la gravitation universelle.  
Parallèlement à LEIBNIZ, il découvrit le calcul différentiel et intégral.  
Il a généralisé à des exposants fractionnaires la célèbre *formule du binôme* qui porte son nom:  
$$(a + b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^p a^p b^{n-p} + \dots + C_n^n a^n b^0$$

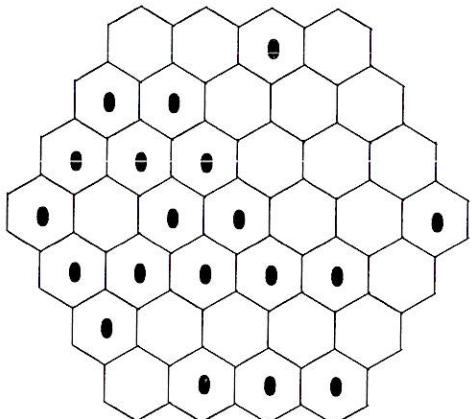
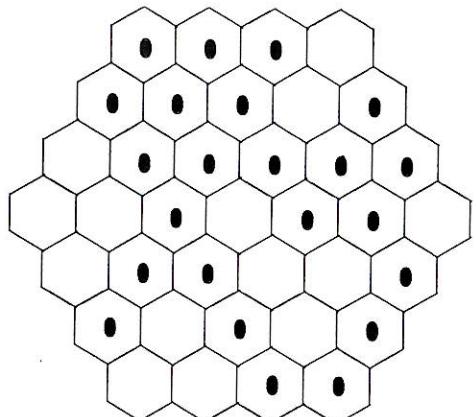
Gottfried Wilhelm LEIBNIZ(1646,1716)  
Il élabora une théorie du calcul différentiel et intégral proche de celle de NEWTON; c'est à lui que nous devons le symbole  $\int$ .  
LEIBNIZ est l'auteur d'une machine à calculer capable d'effectuer les quatre opérations.

Michel ROLLE(1652,1719)  
Le théorème qui porte son nom s'énonce:  
*Si  $f$  est une fonction réelle continue sur  $[ab]$ , dérivable sur  $]ab[$  et telle que  $f(a) = f(b)$  alors  $\exists c \in ]ab[ : f'(c) = 0$ .*

## Solution des jeux



## Jeu de l'hexagone et de la marguerite



## Grille des moyennes (par C. Parent)

	11	3	
13	10	9	15
6	7	8	11
	4	5	

	10	6	
24	16	12	10
16	18	16	16
	24	18	

## Nombres croisés (par C. Parent)

	1	2	3	4	5
1	4	2	8	7	5
2	6	1	2		9
3	2	9	6		3
4		5		4	1
5	3	2		9	9

# A la recherche du barycentre du triangle “fil de fer”

Christian Van Hooste, Athénée Royal Vauban

Imaginons un triangle dont l'entièreté du poids serait répartie de façon égale entre ses trois sommets. L'intérieur, ainsi que les côtés de ce triangle, auraient donc un poids nul (concrètement, négligeable). Son barycentre coïncide alors avec son centre de gravité géométrique. Vous savez cela parfaitement grâce à votre cours de quatrième !

Imaginons un autre triangle dont toute la surface serait faite de matière homogène et d'épaisseur constante. Son barycentre coïncide encore avec son centre de gravité géométrique.

Vous doutez ?

- Prenez du carton et des ciseaux.
- Découpez un triangle quelconque et tracez ses médianes.
- Déposez ce triangle sur le bout de votre crayon.
- Essayez de trouver la position d'équilibre du triangle.

Que constatez-vous ? L'équilibre est atteint lorsque votre crayon est placé sur le point commun aux médianes (cf. Fig. 1); autrement dit, au centre de gravité géométrique du triangle.

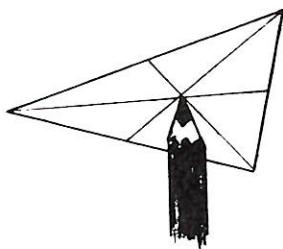


Figure 1: Position d'équilibre d'un triangle plein

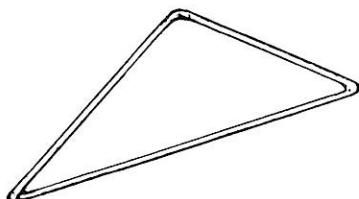


Figure 2: Le triangle “fil de fer”

Imaginons un nouveau triangle dont tout le poids serait concentré uniquement le long de son péri-

mètre (cf. Fig. 2). L'intérieur serait donc de poids nul. Ce triangle pourrait être construit en fil de fer homogène de section constante. Son barycentre n'est plus situé au centre de gravité géométrique.

Vous doutez ? Alors, lisez ce qui suit.

Mais, à chaque question, à chaque sollicitation, interrompez votre lecture pour essayer d'y répondre.

1. Où se trouve le barycentre d'un morceau de fil de fer rectiligne ?

Si ce fil de fer est homogène et si sa section reste constante, il est évident que son barycentre est situé en son point milieu.

2. A quoi pouvez-vous réduire la recherche du barycentre du triangle “fil de fer” décrit plus haut ?

Comme le barycentre de chaque côté est situé en son milieu, cette recherche se limite à déterminer le barycentre de trois points pondérés.

Ces trois points sont les milieux des côtés du triangle. Mais quels poids faut-il leur attribuer ?

Le fil de fer utilisé étant homogène et sa section restant constante, la masse d'un côté est proportionnelle à sa longueur. Par conséquent, son poids aussi. Nous pouvons donc donner à chacun de ces points, un poids égal à la mesure de la longueur du côté dont il est le milieu.

Adoptons les notations suivantes et résumons-nous.

Désignons par

- $ABC$  le triangle “fil de fer”,
- $a, b, c$  les mesures respectives des côtés  $[BC], [AC], [AB]$ ,
- $A', B', C'$  les milieux de ses côtés.

Le barycentre du triangle  $ABC$  coïncide avec le barycentre des points  $A', B'$  et  $C'$  respectivement pourvus des poids  $a, b$  et  $c$  (cf. Fig. 3).

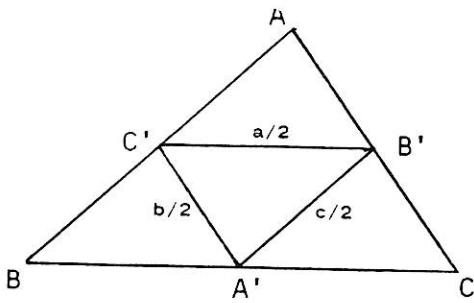


Figure 3: A la recherche du barycentre de  $A'(a)$ ,  $B'(b)$  et  $C'(c)$ .

3. Oublions momentanément notre problème et considérons un triangle  $MPQ$  quelconque (cf. Fig. 4). Traçons-y la bissectrice intérieure  $MD$ .

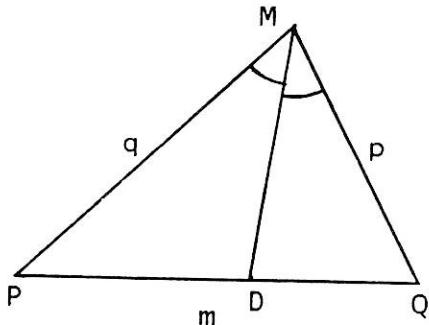


Figure 4:  $MD$  bissectrice intérieure

Rappelez-vous une proposition concernant les bissectrices intérieures.

*Dans tout triangle, une bissectrice intérieure partage le côté opposé en deux segments dont les mesures sont proportionnelles à celles des côtés adjacents.* Autrement dit,  $D$  partage le côté  $PQ$  en deux segments  $[DP]$  et  $[DQ]$  tels que

$$\frac{|DP|}{|DQ|} = \frac{|MP|}{|MQ|}$$

Pouvez-vous donner une forme vectorielle à cette relation ?

$$|MQ| \cdot |DP| = |MP| \cdot |DQ|$$

$$|MQ| \cdot \overrightarrow{DP} = |MP| \cdot \overrightarrow{QD}$$

$$|MQ| \cdot \overrightarrow{DP} + |MP| \cdot \overrightarrow{QD} = \overrightarrow{0}$$

Qu'est-ce que cela exprime ?

Replacez-la dans le contexte des barycentres. Oui, cette égalité vectorielle montre que  $D$  est le barycentre des sommets  $P$  et  $Q$  pourvus de poids égaux aux mesures des côtés qui leur sont opposés.

Si  $m$ ,  $p$  et  $q$  sont les mesures des côtés du triangle  $MPQ$ , quel est donc le barycentre des points  $M$ ,  $P$  et  $Q$  munis respectivement des poids  $m$ ,  $p$  et  $q$  ?

Vous savez certainement que le barycentre de trois points pondérés est le point commun aux droites comprenant un de ces points et le barycentre des deux autres. Concluez !

Le barycentre des points pondérés  $M(m)$ ,  $P(p)$  et  $Q(q)$  est le point commun aux bissectrices intérieures du triangle  $MPQ$ ; c'est-à-dire, le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Ainsi, *le centre du cercle inscrit à un triangle est le barycentre de ses sommets pourvus de poids égaux aux mesures des côtés qui leur sont opposés.*

4. Revenons maintenant à notre triangle "fil de fer"  $ABC$  et à son "triangle des milieux"  $A'B'C'$ .

Quel rapport y a-t-il entre notre problème qui consiste à rechercher le barycentre du triangle fil de fer et ce que nous venons de découvrir dans le paragraphe 3 ?

Le barycentre du triangle "fil de fer"  $ABC$  est le barycentre des points pondérés  $A'(a)$ ,  $B'(b)$  et  $C'(c)$ , donc le barycentre des points pondérés  $A'(a/2)$ ,  $B'(b/2)$  et  $C'(c/2)$ . Comme  $a/2$ ,  $b/2$  et  $c/2$  sont précisément les mesures des côtés du "triangle des milieux"  $A'B'C'$  opposés respectivement aux sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$ , ce barycentre est le centre  $I'$  du cercle inscrit dans ce triangle.

*Le barycentre du triangle "fil de fer"  $ABC$  est le centre  $I'$  du cercle inscrit dans le "triangle des milieux"  $A'B'C'$ .*

5. Essayons de donner une autre interprétation à ce résultat. Parlons "homothéties".

Considérons le barycentre  $G$  de trois points pondérés  $M(m)$ ,  $P(p)$  et  $Q(q)$  et une homothétie  $h$  de rapport  $r$ . Appelons respectivement

$G'$ ,  $M'$ ,  $P'$  et  $Q'$  les images de ces points par l'homothétie  $h$  (cf. Fig. 5).

A quoi pensez-vous ?

Mais bien sûr,  $G'$  est le barycentre des points pondérés  $M'(m)$ ,  $P'(p)$  et  $Q'(q)$  puisque nous pouvons successivement écrire

$$\begin{aligned} m \cdot \overrightarrow{G'M'} + p \cdot \overrightarrow{G'P'} + q \cdot \overrightarrow{G'Q'} \\ = mr \cdot \overrightarrow{GM} + pr \cdot \overrightarrow{GP} + qr \cdot \overrightarrow{GQ} \\ = r(m \cdot \overrightarrow{GM} + p \cdot \overrightarrow{GP} + q \cdot \overrightarrow{GQ}) \\ = r \cdot \overrightarrow{0} \\ = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Quelle est l'homothétie qui applique le triangle "fil de fer"  $ABC$  sur le "triangle des milieux"  $A'B'C'$  ?

L'homothétie de rapport  $-\frac{1}{2}$  dont le centre est le centre de gravité géométrique du triangle  $ABC$  applique respectivement les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur les milieux  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  des côtés.

Dès lors, le barycentre  $I'$  des points pondérés  $A'(a)$ ,  $B'(b)$  et  $C'(c)$  est l'image par l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$  du barycentre  $I$  des points pondérés  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$ . Mais,  $I$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $ABC$  (voyez le paragraphe 3).

Par conséquent, *le barycentre du triangle "fil de fer" est l'image par l'homothétie de centre  $G$  (centre de gravité géométrique) et de rapport  $-\frac{1}{2}$  du centre du cercle inscrit dans ce triangle*.

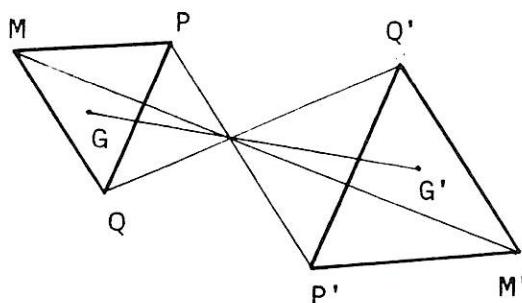


Figure 5: Toute homothétie conserve le barycentre d'un ensemble de points pondérés

6. Vous souhaitez peut-être vérifier expérimentalement ce résultat.

- Bricolez d'abord un triangle  $T$  en fil de fer.
- Découpez ensuite dans du papier un triangle  $T'$  ayant les mêmes dimensions que le triangle  $T$ . Sur ce triangle  $T'$ , marquez les milieux des côtés et tracez les bissectrices du "triangle des milieux". Leur point commun  $I'$  est le barycentre du triangle  $T$ . Assemblez les triangles  $T$  et  $T'$ . Déposez le tout sur la pointe de votre crayon et cherchez la position d'équilibre. Cette position est atteinte lorsque la pointe de votre crayon se trouve sur le point  $I'$ .

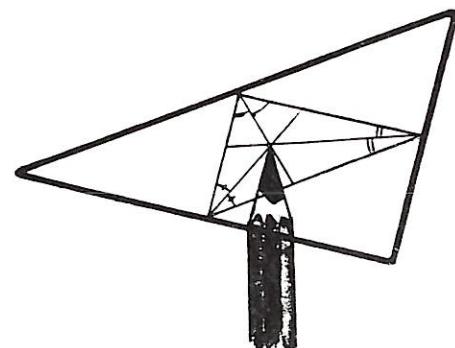
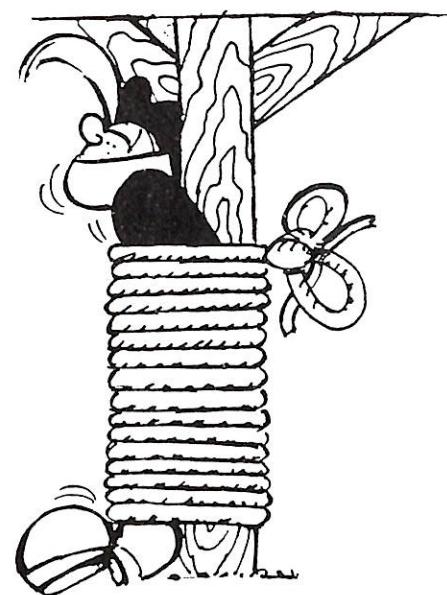


Figure 6: Position d'équilibre du triangle "fil de fer".



# Structure et isomorphisme. Compositions géométriques attrayantes: Une ronde de ronds

M.O. Vanderschueren-Louppe

## Idée originelle

Sais-tu qu'il est possible "d'additionner" des cercles d'un même plan et que tu es capable de reconnaître bien des propriétés de cette loi d'addition?

Voici deux cercles du plan passant par un point fixe  $O$  et traversés par une sécante quelconque issue de ce point. Je te propose tout simplement, comme le suggère la figure 1, d'*additionner vectoriellement* les cordes interceptées: tu obtiens dans ce cas le point  $P$ .

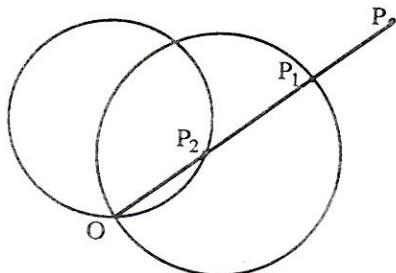


Figure 1:  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$

Imagine que tu recommences cette opération pour toutes les sécantes issues de  $O$ . Que crois-tu que le point  $P$  engendrera comme figure?

## Recherche graphique

Voici une première construction réalisée point par point (fig. 2).

Le résultat semble bien être un nouveau cercle passant lui aussi par  $O$ .

Postulons provisoirement qu'il en est bien ainsi et demandons-nous comment on pourrait le construire le plus rapidement possible.

Remarque tout d'abord qu'il est a priori évident que le lieu cherché passe de toute façon par l'origine  $O$ . En effet, tu peux toujours trouver une sécante qui détermine deux cordes  $[OU]$  et  $[OV]$  (fig. 3) telles que  $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{0}$ .

Tu vois d'autre part directement sur la figure 2 que si tu choisis deux sécantes orthogonales, les extrémités ( $P$  et  $Q$ ) des cordes *sommes* déterminent alors un diamètre du lieu.

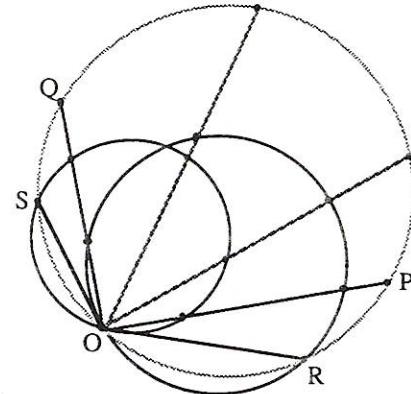


Figure 2

Tu peux facilement imaginer une variante à cette construction en remarquant que si tu choisis les deux sécantes particulières tangentes à l'un des cercles de départ ( $OR$  et  $OS$  sur la figure 2), les extrémités des cordes qu'elles déterminent sont des points du lieu et le centre de celui-ci se trouve donc à l'intersection des médiatrices de ces deux cordes  $[OR]$  et  $[OS]$ .

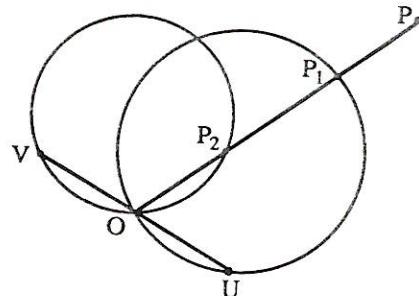


Figure 3

## Définition de $\mathcal{C}_o$ et $\#$

Appelons  $\mathcal{C}_o$  l'ensemble des cercles coplanaires, notés  $C_i$ , passant par le point fixé  $O$  et  $\#$  la loi d'addition sur  $\mathcal{C}_o$  définie comme dans la figure 1.

## Coordonnées polaires

Considérons le système d'axes orthonormés  $Oxy$  (fig. 4). Tout point  $P$  du plan est univoquement déterminé par sa coordonnée cartésienne  $(x, y)$ . Tu peux facilement imaginer que ce même point  $P$  est

également univoquement déterminé par la donnée du nombre positif  $\rho = |OP|$  et de l'angle orienté  $\alpha$  que fait la droite  $OP$  avec l'axe  $x$  (fig. 4).  $(\rho, \alpha)$  s'appelle  **coordonnée polaire** du point  $P$ . On établit facilement que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} \\ x = \rho \cdot \cos \alpha \quad y = \rho \cdot \sin \alpha$$

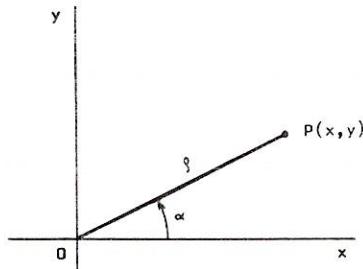


Figure 4

Recherchons l'équation d'un cercle passant par  $O$  dans ce système de coordonnées polaires.

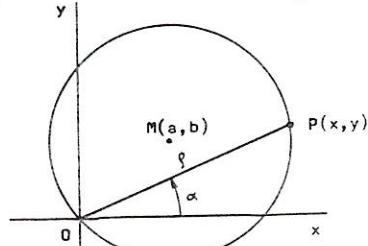


Figure 5

Soit  $C$  un cercle de centre  $M$  dont la coordonnée cartésienne est  $(a, b)$ . L'équation cartésienne de ce cercle est:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$$

En substituant  $x = \rho \cdot \cos \alpha$ ,  $y = \rho \cdot \sin \alpha$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , il vient:

$$(\rho \cos \alpha - a)^2 + (\rho \sin \alpha - b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho^2 \cos^2 \alpha - 2a\rho \cos \alpha + a^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha - 2b\rho \sin \alpha + b^2 = 0$$

$$\rho^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2\rho(a \cos \alpha + b \sin \alpha) + a^2 + b^2 = 0$$

$$\rho^2 - 2\rho(a \cos \alpha + b \sin \alpha) + a^2 + b^2 = 0$$

ce qui donne  $\rho = 0$  ou

$$\rho = 2(a \cos \alpha + b \sin \alpha)$$

qui est l'équation de tout cercle du plan passant par  $O$  en coordonnées polaires. Gardons bien en mémoire le fait que  $(a, b)$  représente la coordonnée cartésienne de son centre.

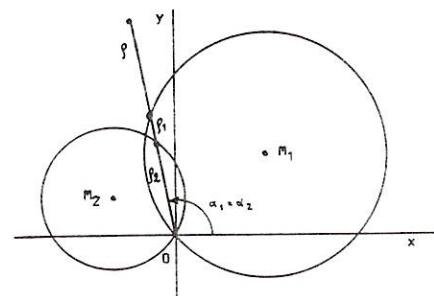
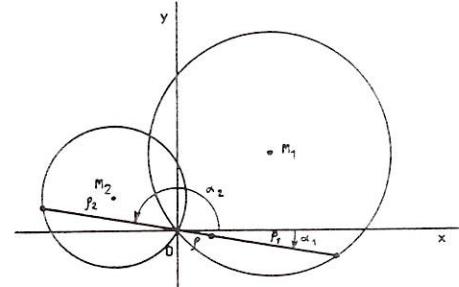
## Démonstration

Nous allons maintenant montrer que le point  $P$  de la figure 1 engendre un cercle de  $\mathcal{C}_o$  autrement dit que, si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_o$  alors  $C_1 \# C_2 \in \mathcal{C}_o$ .

Faisons subir l'opération  $\#$  à deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  passant par  $O$ . Soient  $M_1$  de coordonnée cartésienne  $(a_1, b_1)$  et  $M_2$  de coordonnée cartésienne  $(a_2, b_2)$  leurs centres respectifs. Désignons par  $C$  le résultat de l'opération

$$C_1 \equiv \rho_1 = 2(a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_1) \\ C_2 \equiv \rho_2 = 2(a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \alpha_2)$$

Lors de cette composition, deux cas peuvent se présenter:

Figure 6:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ Figure 7:  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ ,  $\alpha_2 = \pi + \alpha_1$ 

Un rapide calcul te fera voir que, de toute façon,  $C_1 \# C_2 = C$

et  $C \equiv \rho = 2((a_1 + a_2) \cos \alpha + (b_1 + b_2) \sin \alpha)$  où  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha_2$ .

Ceci montre bien que la composée est un cercle passant par  $O$  dont le centre a pour coordonnée cartésienne  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ . Vectoriellement, cela signifie que le centre  $M$  du cercle résultat  $C$  est tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ . Nous appellerons **vecteurs centraux** les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{OM}_1$  et  $\overrightarrow{OM}_2$

## Propriétés

1. En faisant appel aux propriétés du corps des réels, il est aisément d'établir que  $(\mathcal{C}_o, \#)$  possède une structure de **groupe commutatif**.

En effet, de ce qui précède, tu déduis facilement les propriétés d'un groupe abélien à savoir:

$$\text{la loi } \# : \mathcal{C}_o \times \mathcal{C}_o \rightarrow \mathcal{C}_o$$

- est interne, partout définie, associative, commutative
- il existe un élément neutre: le cercle de rayon nul
- tout élément est symétrisable: l'image  $\bar{C}$ , symétrique de  $C$  pour la loi  $\#$ , est l'image de  $C$  obtenue par symétrie centrale de centre  $O$  (fig. 8).

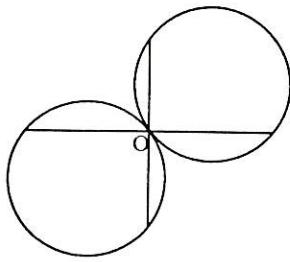


Figure 8

2. Introduisons la multiplication par un scalaire comme loi externe de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_o$ .

$$\forall C \in \mathcal{C}_o, \forall r \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{aligned} r \cdot C &\equiv r \cdot \rho = 2r(a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha) \\ &= 2((ra) \cos \alpha + (rb) \sin \alpha) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que cette multiplication par un scalaire

- est telle que le produit d'un réel par un élément de  $\mathcal{C}_o$  est un élément de  $\mathcal{C}_o$
- vérifie l'associativité mixte
- distribue l'addition des réels
- distribue la loi  $\#$  des éléments de  $\mathcal{C}_o$
- admet 1 comme neutre.

Ces propriétés nous amènent à conclure que  $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_o, \#)$  possède une structure d'**espace vectoriel réel**.

3. L'espace vectoriel réel  $(\mathbb{R}, \Pi_o, +)$  des vecteurs du plan  $\Pi_o$  nous est familier. Les cercles de  $\mathcal{C}_o$  sont complètement déterminés par le point  $O$  et leur centre. Il va de soi d'associer à chaque cercle  $C$  son vecteur central  $\bar{c}$ . Nous imaginons assez naturellement qu'il existe une correspondance bijective entre les éléments de  $\mathcal{C}_o$  et de  $\Pi_o$ . De plus, étant données les structures d'espaces vectoriels, cette bijection engendre un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_o, \#)$  sur  $(\mathbb{R}, \Pi_o, +)$ .

Cette correspondance bijective, tu peux à titre d'exercice la démontrer sans difficultés en passant aux composantes cartésiennes des vecteurs.

4. Parmi les éléments de  $\mathcal{C}_o$ , extrayons tous les éléments dont les centres appartiennent à une droite  $D_o$  passant par  $O$ , notons les  $\mathcal{C}_o^{D_o}$ , nous constatons facilement que  $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_o^{D_o}, \#)$  constitue un sous-vectoriel de  $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_o, \#)$  (fig. 9).

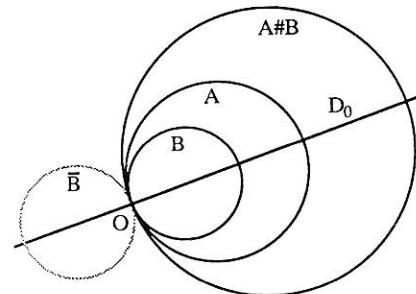


Figure 9

### Simulation d'une rotation

Si tu souhaites exercer ton imagination, voici une application mathématique qui pourrait par exemple déboucher sur une animation graphique sur ordinateur, à savoir la simulation d'une rotation de cercle.

En d'autres mots: on te donne 2 circonférences  $A$  et  $B$  de même rayon, comment passer de l'une à l'autre en utilisant la loi  $\#$ ?

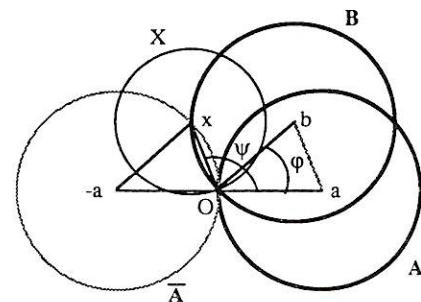


Figure 10:  $A \# X = B$

Grâce à l'isomorphisme, le problème revient à déterminer un cercle par son vecteur central  $\bar{x}$  tel que  $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$ , c'est-à-dire  $\bar{x} = -\bar{a} + \bar{b}$ .

Ceci exprime que le vecteur  $\bar{x}$  d'origine  $O$  a son extrémité qui décrit  $\bar{A}$ , le symétrique de  $A$ .

### Conclusion

Une rotation de  $A$  peut être obtenue en composant  $A$  avec un élément de  $\mathcal{C}_o$  centré sur son symétrique  $\bar{A}$ .

La relation entre l'angle  $\varphi$  de rotation et l'angle d'inclinaison (ou "azimuth")  $\Psi$  du vecteur  $\vec{x}$  est:

$$\varphi = 2\Psi - \pi \text{ ou } \Psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$$

## Constructions

**1.** Cette simulation nous suggère une construction particulière: traçons tous les cercles de l'ensemble  $\mathcal{C}_o$  centrés sur un élément fixe  $A$  de  $\mathcal{C}_o$  (de rayon  $r$ ).

L'enveloppe de tous ces cercles (fig. 11) est la courbe d'équation très simple:

$$\rho = 2r(\cos \alpha \pm 1)$$

que l'on appelle la "cardioïde" (parce qu'elle rappelle la forme du cœur).

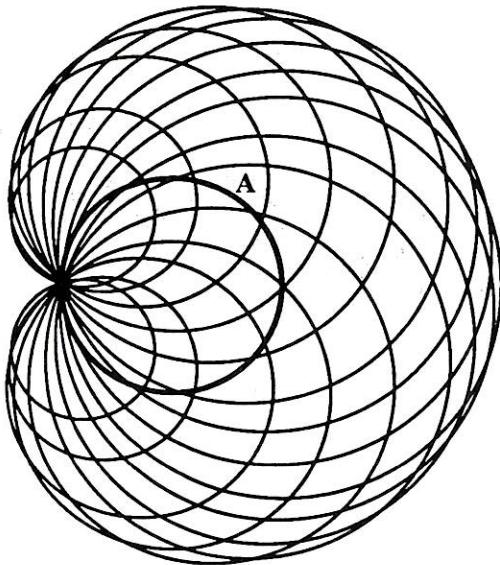


Figure 11

**2.** Dans la même voie, tu peux faire un pas supplémentaire. Compose un élément fixe  $A$  de  $\mathcal{C}_o$  avec tous les cercles de  $\mathcal{C}_o$  centrés sur  $A$ . Tu obtiens évidemment les éléments de  $\mathcal{C}_o$  centrés sur un translaté ( $B$ ) de  $A$ .

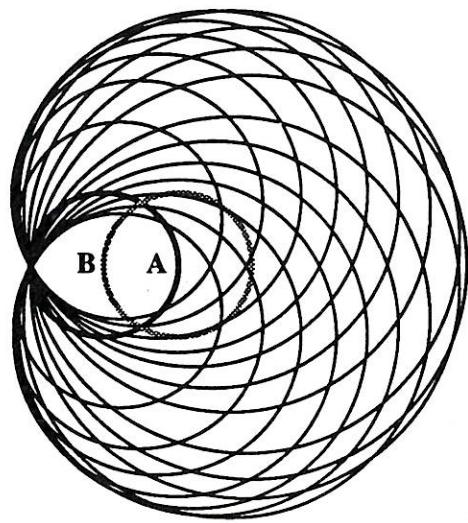


Figure 12

L'enveloppe de cet ensemble (fig. 12) rappelle une courbe jadis bien connue: la "conchoïde" (parce qu'elle rappelle une coquille) dont la cardioïde est d'ailleurs un cas particulier.

**3.** Une dernière construction qui t'est proposée est celle de la fig. 13. C'est le résultat du processus suivant:

Soient  $A_i$  tous les cercles de  $\mathcal{C}_l$  de vecteurs centraux  $\vec{a}_i$  tels que  $\forall i, \|\vec{a}_i\| = a$  où  $a$  est un réel fixé. Au départ, on choisit un cercle  $C_1$  parmi ces  $A_i$  et on construit successivement  $C_2, C_3, \dots$  de la manière suivante:

Si on désigne par  $\vec{c}_j$  le vecteur central de  $C_j$ ,

$$\forall n > 1, C_n = C_{n-1} \# A_{n-1} \text{ où } \vec{c}_{n-1} \perp \vec{a}_{n-1}.$$

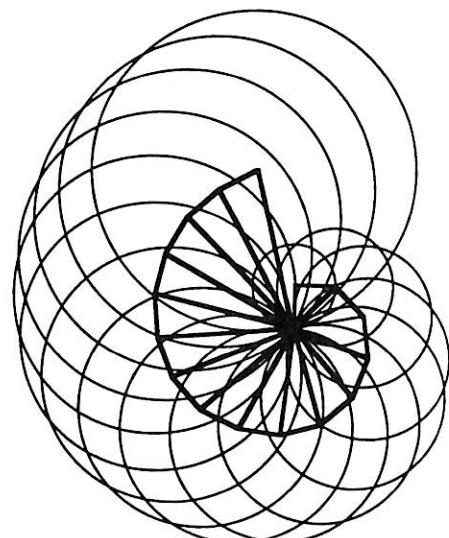
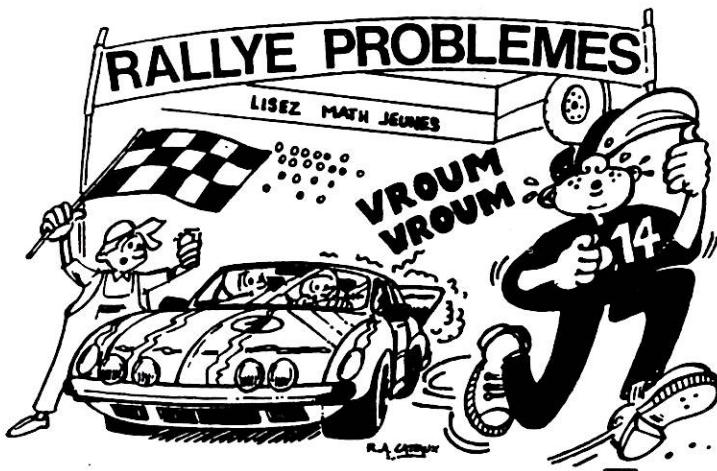


Figure 13



Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1991-1992. Rappelons que les trois premiers concernent (en principe) les élèves des trois classes inférieures et les trois derniers concernent les élèves des trois classes supérieures.

Présentez soigneusement vos solutions, chaque problème étant rédigé sur une (ou plusieurs) feuilles séparées et chaque feuille comportant vos nom, prénom, âge, adresse, classe et école.

Envoyez vos solutions à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 25 février 1992.

**m4** A la maternité galactique, trois mamans ont accouché le même jour. Elles ont rapidement sympathisé et à la fin de leur séjour à la maternité, elles décident de se retrouver pour fêter le premier anniversaire simultané de leurs enfants nouveaux-nés. Seulement voilà, les années sur Xin, Aurore et Zwiky d'où sont originaires nos trois mamans durent respectivement 416, 200 et 945 "jours" et ces "jours" ne sont bien entendu par les mêmes. Les jours de Xin, Aurore et Zwiky équivalent respectivement à 30, 36 et 20,8 de nos heures terrestres. Dans combien de temps (mesuré en années terrestres), les mamans se rencontreront-elles et quels seront alors les âges de leurs enfants?

**m5** Deux cercles de rayons  $R$  et  $r$  sont tangents extérieurement. On mène une tangente extérieure commune formant avec les deux cercles un triangle curviligne. Quel est le rayon du cercle inscrit à ce triangle?

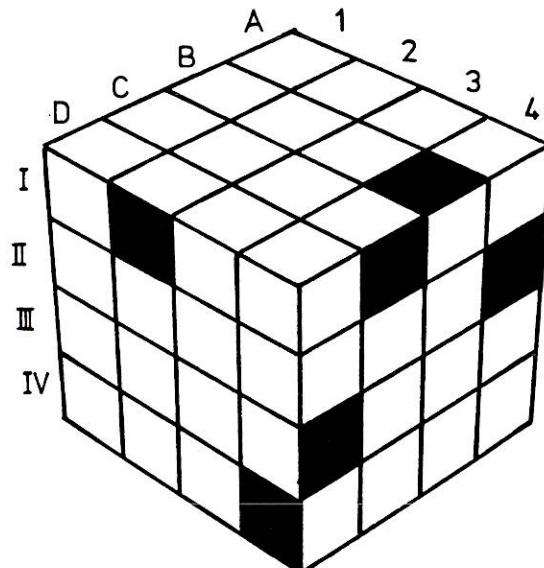
**m6** Dans un parc, deux allées rectilignes se coupent à angle aigu. Le long de l'une des allées se trouve un banc. En quel point de l'autre allée, un détective doit-il se placer pour surveiller le banc en le voyant sous le plus grand angle possible.

C. Festraets

**M4** Un diamantaire façonne un diamant polyédrique qui a 30 sommets et 18 faces qui sont 5 quadrilatères, 6 pentagones et 7 hexagones. Combien ce diamant a-t-il de diagonales intérieures?

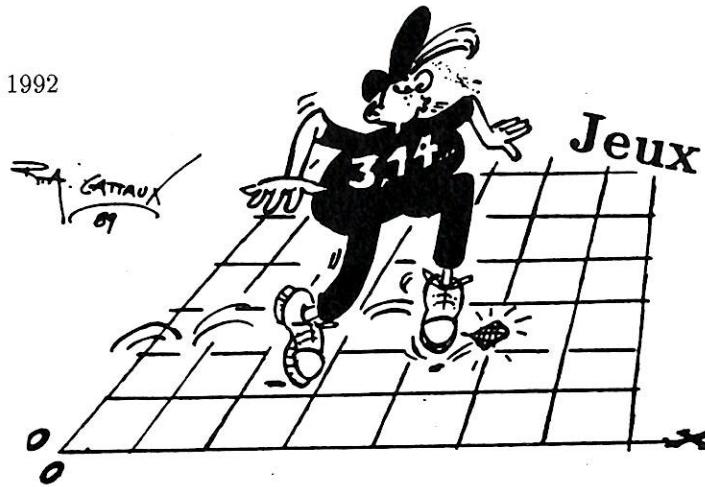
**M5** Soit  $a$  un réel et  $n$  un entier positif. Prouver que l'un des réels  $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$  est à une distance inférieure ou égale à  $\frac{1}{n}$  d'un entier.

**M6** De combien de manières peut-on vider un tonneau de 1992 litres au moyen d'une bouteille d'un litre et d'une bouteille de 2 litres (on tient compte de l'ordre).



Les mots à inscrire dans la grille sont formés des lettres données dans l'ordre alphabétique (par G. Malisse).

A: ACDER-ES	I: ELO-EM	1. ACIMOPTT
B: EOS-EMRS	II: AEEINSS	2. AEIS-EIL
C: EIMT-NOS	III: EILS-ORS	3. DEENORST
D: EELPRS	IV: EST-AENS	4. EELLS



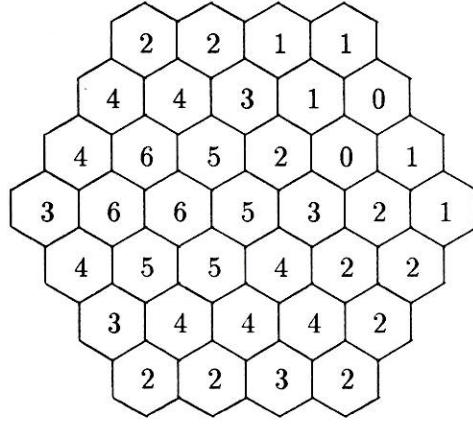
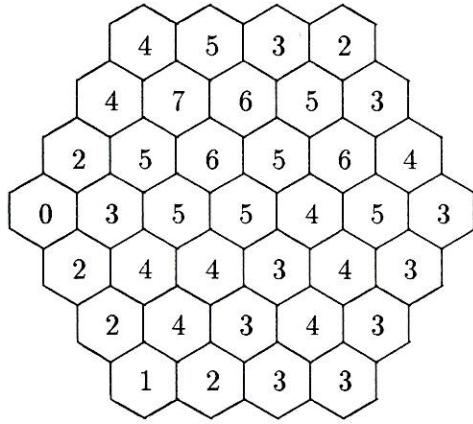
A. Parent

	11	3	
13			15
6			11
4	5		

	10	6	
24			10
16			16
24	18		

### Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Les règles de ce jeu sont exposées en page 3 de couverture. Voici quelques grilles de difficultés différentes à décoder.



### Nombres croisés (par C. Parent)

1	2	3	4	5

#### Horizontalement

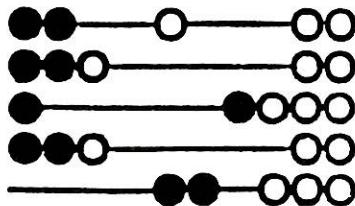
1. Puissance de 35
2. Produit d'un carré et d'un nombre premier
3. Multiple de 37
4. Différence d'un carré et d'un cube
5. Puissance de 2 – Palindrome

#### Verticalement

1. Produit de deux nombres consécutifs
2. Puissance de 28
3. Palindrome diminué de 2
4. Carré
5. Puissance de 39

### Grille des moyennes (par C. Parent)

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.



## XVIIème OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

Le 22 janvier s'est déroulée l'éliminatoire de la dix-septième Olympiade Mathématique Belge. Une fois de plus, elle a connu un franc succès. Il est encore trop tôt, au moment où j'écris ces lignes, pour connaître le nombre exact de participants. De plus amples renseignements te parviendront dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

En supplément de ton *Math-Jeunes*, tu as reçu les questionnaires des éliminatoires "Maxi" et "Mini" 1992. Essaie de résoudre ces problèmes et contrôle tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous.

Questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MINI	C	A	D	E	D	E	B	B	B	A	20	D	5	B	D	B	D	C	D	D	B	435	E	E	C	A	D	600	D	E
MAXI	D	D	C	D	C	C	B	20	A	A	C	20	A	B	C	A	250	E	B	B	B	A	E	C	C	C	36	E	D	

### Rappel des dates importantes:

- Mercredi 11 mars 1992: demi-finale
- Mercredi 29 avril 1992: finale
- Samedi 23 mai 1992: proclamation des résultats

## OLYMPIADES INTERNATIONALES

En 1991, la Belgique était représentée par 3 étudiants francophones [f] et 3 étudiants néerlandophones [n]. Trois d'entre eux ont obtenu une médaille de bronze (Etienne DE POORTERE [f], François GLINEUR [f], Mario PICKAVET [n]), les trois autres (Bert SEVENHANT [n], Jérôme LOUVEAUX [f], Stefan DELCROIX [n]), une mention honorable (mention accordée lorsque l'étudiant obtient le maximum à au moins une question).

Un des médaillés, François GLINEUR, a écrit pour *Math-Jeunes* ces quelques lignes:

*Depuis 1959, une compétition mathématique internationale réservée aux étudiants est organisée annuellement: il s'agit des O.M.I. en d'autres termes des Olympiades Mathématiques Internationales. L'an passé, celles-ci se sont déroulées en Suède, plus précisément à Sigtuna, au nord-ouest de Stockholm et, comme il se doit, la Belgique y a participé.*

*Tout d'abord, quelques chiffres: l'O.M.I. rassemble 312 participants, provenant de 54 pays différents, réunis pendant une semaine. L'épreuve en elle-même comporte deux séances, chacune d'elles est consacrée à résoudre 3 problèmes (difficiles) en 4h30. Chaque pays peut présenter 6 participants; notre petit pays envoie 3 francophones et 3 néerlandophones.*

*Mais ce formidable événement est bien plus qu'une simple compétition: c'est surtout la rencontre de 300 jeunes venant de pays aussi éloignés que la Chine, le Brésil, la Grande-Bretagne, l'Algérie ou la Nouvelle-Zélande, qui vont pouvoir discuter entre eux aussi bien de politique, de musique que de sport ou de mathématiques (bien sûr). De plus, les nombreuses excursions organisées ont également permis aux concurrents de découvrir les chemins de ce pays très accueillant qu'est la Suède.*

*Passons maintenant aux résultats: le trio de tête se compose, dans l'ordre, de l'URSS, de la Chine et de la Roumanie (en effet, bien que l'épreuve en elle-même soit individuelle, le classement s'effectue en fonction des résultats de l'équipe entière). Quant à la Belgique, elle a très méritoirement décroché une 22ème place (la meilleure jamais obtenue depuis qu'elle participe), tandis que 3 de ses membres (dont 2 francophones) recevaient une médaille de bronze. Alors, si l'aventure vous tente, sachez que les O.M.I. se dérouleront cette année à Moscou et en Turquie l'année suivante et qu'il faudra bien sûr réaliser un très bon résultat aux Olympiades (belges, cette fois), pour pouvoir être sélectionné.*

# Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Ce jeu de codage et décodage inventé par un belge, Jean-Pierre LABRIQUE, utilise une grille de cases hexagonales que nous limiterons à 37. Le codeur colorie alors un certain nombre de cases.

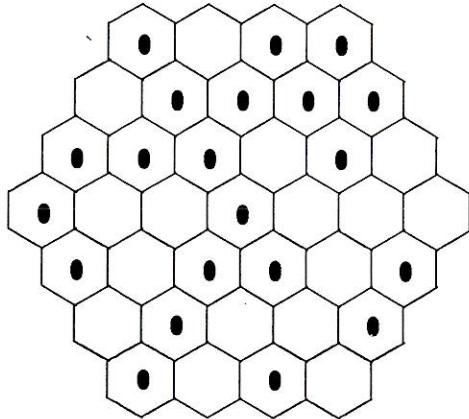


Figure 1

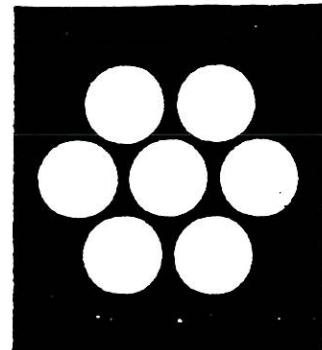


Figure 2

La marguerite (figure 2) comportant 7 trous est alors utilisée de la manière suivante: le trou central est appliqué successivement sur chacune des 37 cases de la grille; à chaque fois on compte le nombre de cases coloriées dans la marguerite et on reporte ce nombre dans la case centrale.

A partir de la grille de la figure 1, on obtient la grille codée de la figure 3.

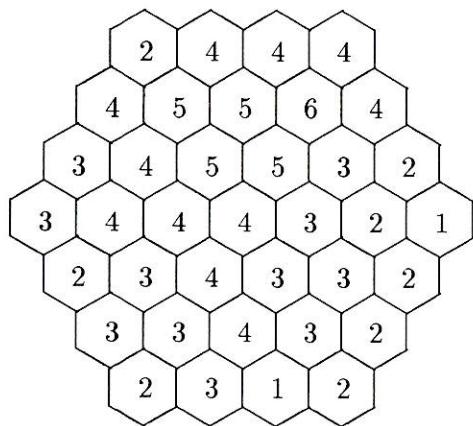


Figure 3

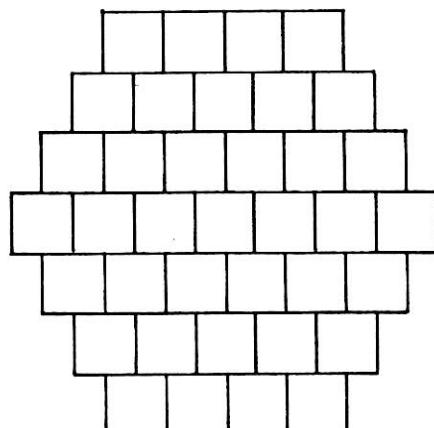


Figure 4

Le jeu consiste à retrouver, à partir de cette dernière grille, la configuration initiale.

Remarquons que chaque case intérieure possède 6 voisines, donc un support hexagonal comme celui de la figure 3 peut très bien convenir, mais n'est sans doute pas facile à reproduire. Comme tu disposes certainement de feuilles quadrillées, je te propose d'utiliser le dessin de la figure 4 où chaque carré est représenté à l'aide de 4 petits carrés de ta feuille, il suffit alors à chaque ligne de décaler d'un petit carré pour reproduire sans difficulté une telle grille et jouer avec un copain à ce jeu de codage et décodage.

**Référence:** *Pour la Science*, n° 44

