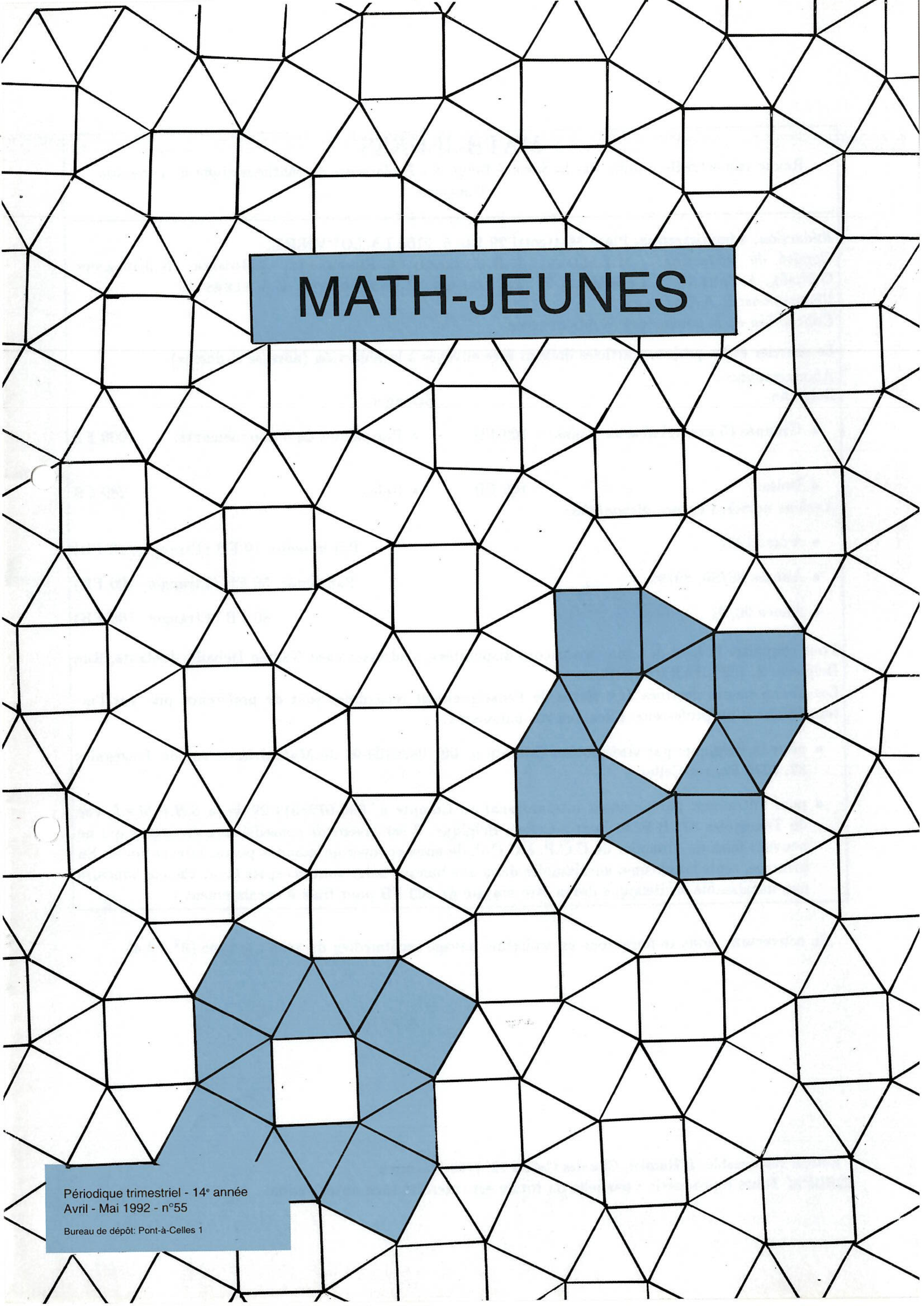
MATH-JEUNES



Périodique trimestriel - 14e année
Avril - Mai 1992 - n°55
Bureau de dépôt: Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: Place Matteotti 29 Bte 5, 7100 LA LOUVIERE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

- Groupés (5 exemplaires au moins) : 100 FB
- Isolés: 140 FB

Etranger :

- Par paquet de 5 abonnements: 1000 FB
- Isolés: 280 FB

Anciens numéros encore disponibles:

- Avant 1987 — Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB)
- Années 88/89, 89/90 — Par année: 50 FB (Etranger: 100 FB)
- Année 90/91 — 80 FB (Etranger: 160 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez Nadine Debaille Joelants, Rue Delpierre 2, 7022 HARMIGNIES.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

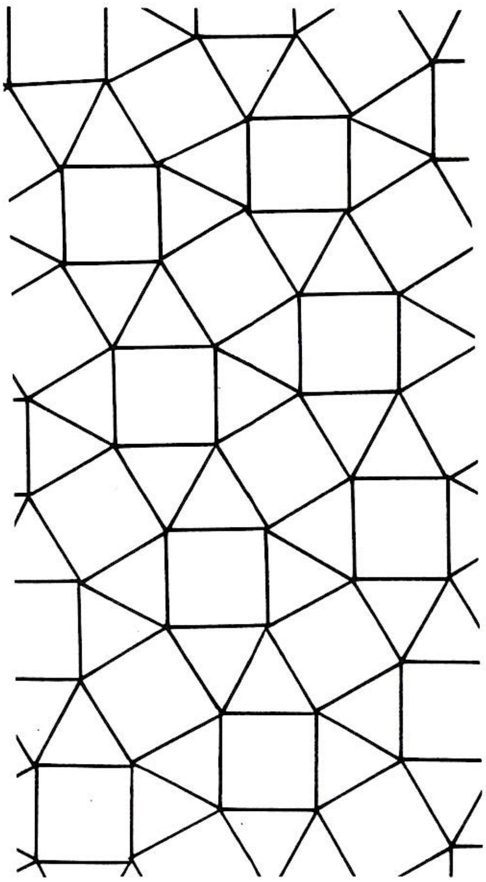
- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

En couverture, nous te proposons un troisième pavage archimédien du plan : le type ($3^2.4.3.4$).

Editeur responsable: J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 55 Treizième année 1992

MATH-JEUNES



Marc Lardinois, **Ne cherchez pas trop loin le PGCD de deux éléments de la suite de Fibonacci: il se trouve dedans...** **42**

45 *Maurice Famelart,* **Une promenade parmi les inverses des diviseurs d'un nombre**

Y. et G. Noël, **Math et poésie indiennes** **47**

49 *Michel Ballieu,* **Une approche des objets fractals**

Claudine Festraets **Solutions du rallye problèmes (n° 53)** **52**

55 *Rallye Problèmes*

André Parent, **Solutions des jeux-problèmes du n° 54** **56**

58 *Jeux*

Dix-septième Olympiade Mathématique Belge **59**

Math-Jeunes n ° 55, 42–44, 1992

Ne cherchez pas trop loin le PGCD de deux éléments de la suite de Fibonacci: il se trouve dedans...

Marc Lardinois, *Université de Mons*

Le *plus grand commun diviseur* de deux entiers non nuls a et b, qu'on note pgcd(a,b), est le plus grand naturel qui divise à la fois a et b. Par exemple, pgcd(60,24)=12, pgcd(34,21)=1, pgcd(34,8)=2 et si $a \neq 0$, alors pgcd(a,0)=$|a|$.

On définit la *suite de Fibonacci* par:

$$\begin{cases} u_0 = 0; & u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} & \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$,$u_7 = 13$, $u_8 = 21$, $u_9 = 34, \ldots$

Dans cet article, je vous propose la démonstration du théorème suivant:

> *Quels que soient m et n naturels non tous deux nuls, il existe c naturel tel que* pgcd$(u_m,u_n)=u_c$ *et* c=pgcd(m,n).

Nous devrons faire appel à l'*algorithme d'Euclide*; le voici pour ceux qui le découvrent! Mais rappelons d'abord ce qu'on entend par *division euclidienne*.

Soient a et b deux naturels non nuls avec $b \leqslant a$. Il existe un seul q naturel non nul et un seul $r \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ tels que $a = b \cdot q + r$.
q est le quotient entier *et r le* reste *de la division euclidienne de a par b.*

Nous pouvons même montrer que, dans ce cas,

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$$

En effet, si d=pgcd(a,b), il existe a', b' naturels non nuls tels que $a = da'$ et $b = db'$ avec pgcd(a',b') =1. On peut donc écrire $da' = db'q + r$, c'est-à-dire que $r = d(a' - b'q)$ est divisible par d. Soit donc r' tel que $r = dr'$. On a alors $da' = db'q + dr'$ ou encore $a' = b'q + r'$ puisque $d \geqslant 1$. Si p est un facteur premier de b', comme pgcd(a',b')=1, p ne divise pas a'. Par conséquent, p ne peut diviser r' sinon, divisant b' et r', il diviserait $a' = b'q + r'$ ce qui amènerait une contradiction. Ainsi, le cas $b' = 1$ étant évident, nous avons pgcd(b',r')=1 et donc pgcd(b,r)=pgcd(db',dr')= d·pgcd(b',r')=d.

Remarque(†): l'égalité pgcd(a,b)=pgcd(b,r) reste valable quel que soit q entier, du moment que $r = a - bq$. Cette remarque revêtira toute son importance dans la suite de l'article.

L'algorithme dit d'EUCLIDE repose sur l'itération de cette propriété: soient a et b deux naturels non nuls avec $r_0 = b \leqslant a$

- il existe un seul q_0 naturel non nul et un seul $r_1 \in \{0,1,\ldots,r_0-1\}$ tels que $a = q_0r_0 + r_1$ et pgcd(a,b)=pgcd(a,r_0) =pgcd(r_0,r_1)
- il existe un seul q_1 naturel non nul et un seul $r_2 \in \{0,1,\ldots,r_1-1\}$ tels que $r_0 = q_1r_1 + r_2$ et pgcd(r_0,r_1) =pgcd(r_1,r_2)
- ...
- en général, il existe un seul q_{k+1} naturel non nul et un seul $r_{k+2} \in \{0,1,\ldots,r_{k+1}-1\}$ tels que $r_k = q_{k+1}r_{k+1} + r_{k+2}$ et pgcd(r_k,r_{k+1})= pgcd(r_{k+1},r_{k+2})

Comme la suite des naturels $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, il existe un entier l tel que $r_l > 0$ et $r_{l+1} = 0$. Mais alors, pgcd(a,b) = pgcd(r_0,r_1) = ... = pgcd(r_{l-1},r_l) = pgcd(r_l,0) = r_l. Par exemple, $60 = 2 \times 24 + 12$, $24 = 2 \times 12$ et, par conséquent, pgcd(60,24)=pgcd(24,12)=pgcd(12,0)=12.

Cet algorithme nous permet de traiter d'emblée un cas particulier: $m = n + 1$. Recherchons pgcd(u_{n+1},u_n) où n est un naturel.

1. Il est évident que pgcd(u_3,u_2)=pgcd(u_2,u_1)= pgcd(u_1,u_0)=1.
2. Si $n \geqslant 3$, la *division euclidienne* de u_{n+1} par u_n donne
   - 1 comme quotient puisque, de $u_{n-1} < u_n$, on tire:
   $$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} < u_n + u_n$$
   $$u_{n+1} < 2u_n$$
   - et u_{n-1} comme reste.

   Ainsi, si $n \geqslant 3$, pgcd(u_{n+1},u_n) = pgcd(u_n,u_{n-1})

Donc pgcd(u_{n+1},u_n) = pgcd(u_n,u_{n-1}) = ... = pgcd(u_3,u_2) = pgcd(u_2,u_1) = pgcd(u_1,u_0) = 1. En conclusion, deux nombres de Fibonacci d'indices consécutifs sont toujours premiers entre eux.

A présent, observons la suite d'un peu plus près... On remarque, par exemple, que:

$$\begin{aligned} u_8 &= 21 = 5\times 3+3\times 2 = u_5\cdot u_4+u_4\cdot u_3 \\ u_9 &= 34 = 5\times 5+3\times 3 = u_5\cdot u_5+u_4\cdot u_4 \\ u_9 &= 34 = 8\times 3+5\times 2 = u_6\cdot u_4+u_5\cdot u_3 \\ u_{11} &= 89 = 13\times 5+8\times 3 = u_7\cdot u_5+u_6\cdot u_4 \end{aligned}$$

D'une manière générale, nous allons montrer que:
Quels que soient m et n naturels,

$$u_{m+n+1} = u_{m+1}\cdot u_{n+1}+u_m\cdot u_n$$

La démonstration de cette dernière thèse nécessite les notions de matrice 2×2 et de multiplication de ces matrices 2×2.
Une matrice 2×2 *est un tableau de nombres, tableau comportant deux lignes et deux colonnes.*
Exemple de matrice 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$
On définit la multiplication des matrices 2×2 de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$$

Tu peux t'amuser à démontrer que cette opération est associative mais qu'elle n'est pas commutative. Peux-tu illustrer cette dernière affirmation par un exemple?

Considérons la matrice 2×2 suivante:
$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0\end{pmatrix}$ et calculons ses puissances successives.

$$\begin{aligned} F^2 &= F\times F=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_3 & u_2 \\ u_2 & u_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par associativité du produit matriciel:

$$\begin{aligned} F^3 &= F^2\times F=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_4 & u_3 \\ u_3 & u_2\end{pmatrix} \\ F^4 &= F^3\times F=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_5 & u_4 \\ u_4 & u_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

...

Démontrons **par récurrence** que, quel que soit v naturel non nul, $F^v=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^v=\begin{pmatrix} u_{v+1} & u_v \\ u_v & u_{v-1}\end{pmatrix}$

- nous avons constaté que cette égalité était vraie pour les premières valeurs de v
- supposons qu'elle est vraie pour $v=k$ et montrons, à partir de là, qu'elle est encore vraie pour $v=k+1$, ce qui suffit à achever la démonstration (mais oui, réfléchis bien!)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{k}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &\quad\text{(par hypothèse)} \\ &= \begin{pmatrix} u_{k+1}+u_k & u_{k+1} \\ u_k+u_{k-1} & u_k\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(par définition de la suite de Fibonacci)
Finalement, nous avons prouvé que si v est naturel non nul, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{v}=\begin{pmatrix} u_{v+1} & u_v \\ u_v & u_{v-1}\end{pmatrix}$$

En utilisant cette égalité matricielle dans le cas particulier suivant:
$\begin{pmatrix} u_{m+n+3} & u_{m+n+2} \\ u_{m+n+2} & u_{m+n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{m+n+2}=$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{m+1}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1}$, c'est-à-dire
$\begin{pmatrix} u_{m+n+3} & u_{m+n+2} \\ u_{m+n+2} & u_{m+n+1}\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} u_{m+2} & u_{m+1} \\ u_{m+1} & u_m\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} u_{m+2}u_{n+2}+u_{m+1}u_{n+1} & u_{m+2}u_{n+1}+u_{m+1}u_n \\ u_{m+1}u_{n+2}+u_m u_{n+1} & u_{m+1}u_{n+1}+u_m u_n\end{pmatrix}$.

L'identification des éléments situés en seconde ligne, seconde colonne, donne bien:

$$u_{m+n+1}=u_{m+1}\cdot u_{n+1}+u_m\cdot u_n$$

Servons-nous de cette nouvelle relation pour traiter un second cas particulier: $m=tn$ où t est un naturel et n un naturel non nul.

- si $t=0$, pgcd(u_0,u_n)=pgcd$(0,u_n)=u_n$
- si t est non nul, démontrons par récurrence (encore) sur t, que u_{tn} est multiple de u_n

  ♠ si $t=1$, on a trivialement $u_{1\cdot n}=u_n$

♠ supposons l'assertion vraie pour $t = k$, c'est-à-dire que u_{kn} est multiple de u_n ou encore $u_{kn} = \alpha u_n$, où α est un naturel; nous allons montrer que $u_{(k+1)n}$ est multiple de u_n:

$$\begin{aligned} u_{(k+1)n} &= u_{kn+n} = u_{kn-1+n+1} \\ &= u_{kn-1+1}u_{n+1} + u_{kn-1}u_n \\ &= u_{kn}u_{n+1} + u_{kn-1}u_n \\ &= \alpha u_n u_{n+1} + u_{kn-1}u_n \\ &= u_n \cdot (\alpha u_{n+1} + u_{kn-1}) \end{aligned}$$

et ainsi, $u_{(k+1)n}$ est bien multiple de u_n.

Nous avons donc montré que u_{tn} est multiple de u_n, quels que soient t naturel et n naturel non nul; cela revient à dire que pgcd$(u_{tn},u_n) = u_n$.

Nous allons à présent calculer en toute généralité pgcd(u_m,u_n). Pour fixer les idées, supposons que $n \leqslant m = qn + r$ avec m, n et q naturels non nuls et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Nous avons:

$$u_m = u_{qn+r} = u_{qn} \cdot u_{r+1} + u_{qn-1} \cdot u_r$$

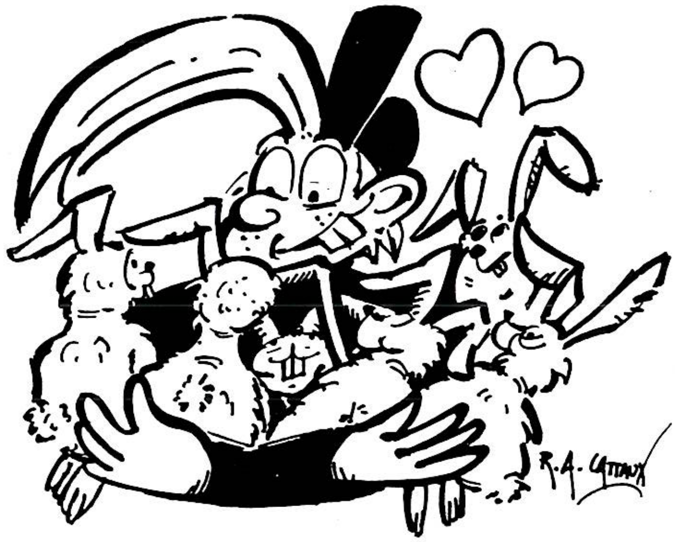
Comme u_{qn} est multiple de u_n, il est permis d'utiliser la remarque (†), en divisant u_m par u_n et en prenant $\frac{u_{qn} \cdot u_{r+1}}{u_n}$ comme "quotient". Le "reste" étant $u_{qn-1} \cdot u_r$, on peut écrire pgcd$(u_m,u_n) =$ pgcd$(u_n,u_{qn-1} \cdot u_r)$.
Soit p un facteur premier de u_{qn-1}. Puisque pgcd$(u_{qn},u_{qn-1})= 1$ (ils sont d'indices consécutifs), p ne divise pas u_{qn}. A fortiori p ne peut diviser u_n qui est un diviseur de u_{qn}. Ainsi, pgcd$(u_n, u_{qn-1} \cdot u_r) =$ pgcd(u_n,u_r).
Nous avons donc pgcd$(u_m,u_n) =$ pgcd(u_n,u_r) où $r = r_1$ est le reste de la division euclidienne de m par $n = r_o$. En appliquant l'algorithme d'EUCLIDE à m et n, on obtient successivement, en utilisant la notation vue plus haut:

$$m \geqslant n = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_{l-1} > r_l > r_{l+1} = 0$$

En itérant ce raisonnement, il vient:

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(u_m, u_n) &= \text{pgcd}(u_{r_0}, u_{r_1}) = \ldots \\ &= \text{pgcd}(u_{r_{l-1}}, u_{r_l}) = \text{pgcd}(u_{r_l}, 0) \\ &= u_{r_l} \end{aligned}$$

où r_l=pgcd(m,n), évidemment.



Math-Jeunes n° 55, 45–47, 1992

Une promenade parmi les inverses des diviseurs d'un nombre

Maurice Famelart, *Institut Sainte-Claire, Soignies*

L'écriture des nombres dans le système décimal nous est familière. Cependant, dans pas mal de problèmes d'*arithmétique* ou, à un niveau plus élevé, de *théorie des nombres*, il est souvent utile de décomposer les nombres en leurs facteurs premiers. Avant de présenter un résultat qui concerne les inverses des diviseurs d'un nombre, il est bon de rappeler les quelques notions qui suivent.

Préambule

- Nous travaillons dans l'ensemble $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$; **dans cet article**, dans le but d'alléger le texte, nous appellerons *entier* tout élément de cet ensemble.

- Un entier a est divisible par un entier b s'il existe un troisième entier c tel que $a = bc$. On dit que b est un *diviseur* de a. Remarquons que c est également un *diviseur* de a. Nous traduisons cette situation en disant que b et c sont des *diviseurs associés* de a.

- Un entier p est *premier* s'il possède exactement **deux** diviseurs: 1 et p.
  Tout entier supérieur à 1 et non premier est appelé *composé*. 1 n'est ni *premier* ni *composé*.

- Deux entiers a et b sont dits *premiers entre eux*, ce qu'on note $(a, b) = 1$, si leur seul diviseur commun est 1.

- **Théorème fondamental de l'arithmétique**
  Tout entier n différent de 1 s'écrit de manière unique
  $$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$$
  où $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ sont des premiers, $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$; $r \geqslant 1$
  Cette écriture s'appelle *forme standard* de n.

En fouillant bien au tréfond de sa mémoire, chacun se rappellera sans doute le schéma:

$$\begin{array}{r|l} 453600 & 2 \\ 226800 & 2 \\ 113400 & 2 \\ 56700 & 2 \\ 28350 & 2 \\ 14175 & 3 \\ 4725 & 3 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

qui permet d'écrire:

$$453600 = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

La fonction "nombre des diviseurs de n"

Soit n un entier; désignons par $\nu(n)$ le nombre de ses diviseurs (y compris 1 et n). Essayons d'évaluer cette fonction $\nu(n)$.

- si $n = p^a$, où p est premier, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur nombre
  $$\nu(n) = a + 1$$

- si $n = a \cdot b$ avec $(a, b) = 1$, tout diviseur d de n sera de la forme $d = \alpha \cdot \beta$ où α est un diviseur de a et β un diviseur de b. On obtiendra donc tous les diviseurs de n en multipliant chaque diviseur de a par chaque diviseur de b, ce qui conduit au résultat
  $$\nu(a \cdot b) = \nu(a) \times \nu(b) \text{ si } (a, b) = 1$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer:

Si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ (forme standard)
alors
$$\nu(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_r + 1)$$

Exercice: Utilise cette formule pour différentes valeurs de n et vérifie qu'elle donne bien le bon résultat.

La fonction "somme des diviseurs de n"

Désignons-la par $\sigma(n)$ et tentons également de l'évaluer.

- si $n = p^a$, où p est premier, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur somme

$$\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a$$

Certains parmi vous ont peut-être reconnu dans cette expression la somme des termes d'une progression géométrique de raison p, somme pour laquelle il existe une "formule". Vous pouvez toujours en parler à votre professeur de mathématique, mais, de toute façon, nous pouvons aussi nous en tirer ainsi:

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^a \\ p \times \sigma(n) &= p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{a+1} \\ p \times \sigma(n) - \sigma(n) &= p^{a+1} - 1 \\ (p-1) \times \sigma(n) &= p^{a+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\sigma(n) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

- si $n = a \cdot b$ avec $(a, b) = 1$, notons les diviseurs de a et b respectivement par

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s = a \text{ où } s = \nu(a) \\ \beta_1 &= 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_t = b \text{ où } t = \nu(b) \end{aligned}$$

Puisque $(a, b) = 1$, tout diviseur d de n est le produit d'un diviseur α_i de a par un diviseur β_j de b: $d = \alpha_i \times \beta_j$
Considérons tous les diviseurs de n obtenus avec le même α_i; leur somme vaut

$$\begin{aligned} S &= \alpha_i \times 1 + \alpha_i \times \beta_2 + \alpha_i \times \beta_3 + \cdots + \alpha_i \times b \\ &= \alpha_i \times (1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + b) \\ &= \alpha_i \times \sigma(b) \end{aligned}$$

Opérons maintenant la somme sur tous les α_i possibles; nous aurons ainsi la somme de tous les diviseurs de n qui vaut

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(a \cdot b) \\ &= 1 \times \sigma(b) + \alpha_2 \times \sigma(b) + \cdots + \alpha_s \times \sigma(b) \\ &= (1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s) \times \sigma(b) \\ &= \sigma(a) \times \sigma(b) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \times \sigma(b) \text{ si } (a, b) = 1$$

Il vient donc:

Si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ (forme standard)
alors

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_r^{a_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Exercice: Applique cette formule à quelques entiers.

Un résultat concernant les inverses des diviseurs d'un nombre

On appelle *moyenne arithmétique* de deux nombres x_1 et x_2 le nombre A tel que

$$A = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

On appelle *moyenne harmonique* de deux nombres x_1 et x_2 le nombre H tel que

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

c'est-à-dire

$$H = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{A}$$

Ces définitions se généralisent à n nombres:

$$A = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

Examinons la moyenne harmonique des diviseurs d'un nombre n. Pour tout diviseur d_i de n, on a $n = d_i \times d_j$ où d_j est le diviseur associé à d_i c'est-à-dire

$$\frac{1}{d_i} = \frac{d_j}{n}$$

La somme des inverses $\frac{1}{d_i}$ de tous les diviseurs d_i de n est donc égale à

$$\sum_{i=1}^{\nu(n)} \frac{1}{d_i} = \sum_{j=1}^{\nu(n)} \frac{d_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu(n)} d_j = \frac{1}{n}\sigma(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$$

La moyenne harmonique $H(n)$ de tous les diviseurs de n est telle que

$$\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{\nu(n)} \sum_{i=1}^{\nu(n)} \frac{1}{d_i} = \frac{1}{\nu(n)} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} \frac{\sigma(n)}{\nu(n)}$$

Mais $\frac{\sigma(n)}{\nu(n)}$ est la moyenne arithmétique des diviseurs de n, que nous noterons $A(n)$. Il vient donc

$$\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{n} A(n)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{n = A(n) \times H(n)}$$

Exemple:
Soit $n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$$\nu(60) = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

$$\sigma(60) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \times \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 7 \times 4 \times 6 = 168$$

$$A(60) = \frac{\sigma(60)}{\nu(60)} = \frac{168}{12} = 14$$

$$H(60) = \frac{60}{A(60)} = \frac{60}{14} = 4,285714286\ldots$$

Référence

OYSTEIN ORE, *Number Theory and Its History*, Dover Publ. Inc., New York, 1988.

Math et poésie indiennes

Y. et G. Noël,
E.N.S. Mons, Université de Mons

Il était une fois un mathématicien et astronome qui vivait en Inde vers l'an 1150 de notre ère. Son nom était difficile à prononcer pour nous, pauvres occidentaux : il s'appelait BHASKARACARYA, mais on l'appelait plus souvent BHASKARA LE SAVANT. Or, voici que BHASKARA avait une fille, nommée Leelavati. En ces temps-là, la distinction entre l'astronomie et l'astrologie n'était pas bien établie et même des savants éminents n'hésitaient pas à consulter les astres pour décider de la date des événements importants. Lorsque Leelavati envisagea d'épouser celui que son coeur avait choisi, BHASKARA établit donc l'horoscope de sa fille et y découvrit avec effroi que le mariage de celle-ci serait dramatiquement écourté. Le mauvais sort ne pouvait être conjuré que si le mariage avait lieu à un moment très précis d'un jour bien déterminé.

Alors, BHASKARA reprit confiance. Ses capacités scientifiques lui permettaient de construire un instrument de mesure du temps ayant toute la précision nécessaire. Il construisit ainsi un grand sablier. Le sable s'écoulant très régulièrement et très lentement du récipient supérieur dans le récipient inférieur marquait de façon sûre l'écoulement du temps. Au moment précis où plus aucun grain de sable ne traverserait le minuscule canal reliant les deux récipients, le mariage devrait être célébré.

Mais voici Leelavati qui s'approche, vient admirer l'outil réalisé par son père. Elle se penche, une petite perle se détache de la parure qui orne son nez, tombe dans le récipient supérieur et se perd dans le sable. Celui-ci s'écoule plus lentement, le mariage a lieu en retard... quelque temps après, son jeune époux meurt tragiquement ! Pour consoler Leelavati, son père lui apprend l'arithmétique et écrit un livre en son honneur.

Nous ne savons si cette histoire n'est qu'une légende ou si elle est vraie. Au moins deux versions en existent puisque dans l'*Histoire des Mathématiques* de SMITH, ce n'est pas un sablier qui sert à mesurer le temps, mais une tasse percée d'un petit orifice qui flotte sur de l'eau et s'y enfonce lentement. Dans les deux versions, c'est une perle perdue par Leelavati qui obstrue partiellement l'orifice et entraîne le retard fatal.

Mais même si notre histoire n'est qu'une légende, BHASKARA a bien existé et écrit un ouvrage nommé Leelavati. Le livre commence par une adresse aux dieux :

> *Salut à toi, être à tête d'éléphant, qui insuffles la joie dans l'esprit de tes adorateurs, qui aplanis les difficultés de ceux qui font appel à toi, toi dont les pieds sont révérés par les dieux !*

L'ouvrage traite du calcul avec des entiers, des fractions, de la règle de trois, des règles commerciales, des intérêts, des séries, des permutations, des mesures, de l'algèbre élémentaire. On y constate que l'emploi du 0 n'est guère maîtrisé. On y trouve aussi de beaux problèmes récréatifs, présentés sous forme poétique. Nous en avons sélectionné quelques-uns : [1]

1. O jeune fille, voici un groupe de cygnes ! $\frac{7}{2}$ fois la racine carrée de leur nombre jouent au bord d'un étang. Les deux derniers se livrent dans l'eau à une parade amoureuse. Quel est le nombre total de cygnes ?

2. O tendre jeune fille, sur un lac se trouvent un certain nombre de cygnes ! 10 fois la racine carrée de ce nombre sont partis à Manasa Sarovar à l'arrivée des pluies. $\frac{1}{8}$ du nombre se sont envolés vers la forêt de Shtala Padmini. Trois couples de cygnes sont restés près du lac. Combien y avait-il de cygnes ?

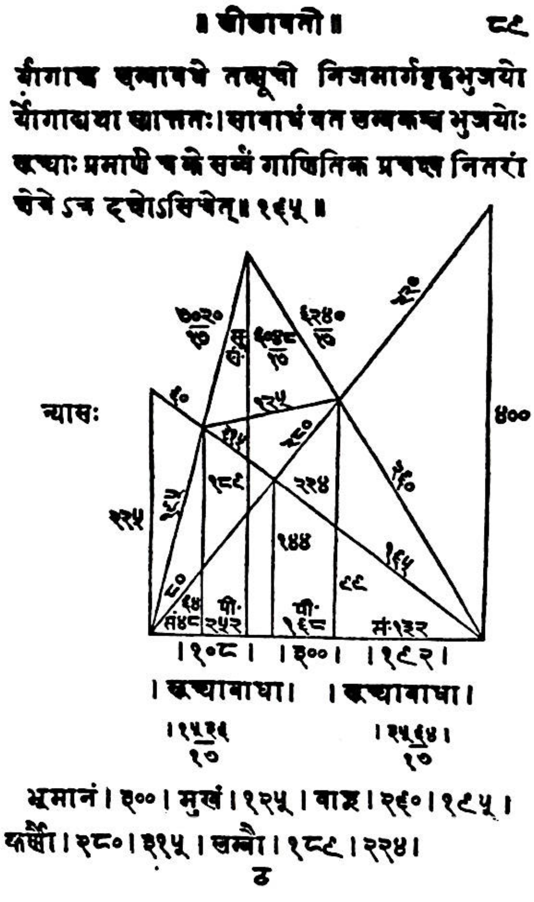
3. A l'intérieur d'une forêt vit une bande de singes. Le carré du huitième de leur nombre total jouent avec enthousiasme. Les 12 singes restant sont sur une colline. Combien y a-t-il de singes ?

4. O Mathématicien, une perche de bambou haute de 32 cubits se dresse sur un sol horizontal. Une tempête secoue la perche, la brise. Les deux parties de la perche ne se séparent pas, mais le sommet vient exactement toucher le sol à 16 cubits de la base. A quelle hauteur la perche s'est-elle brisée ?

5. Sur un pilier de 9 cubits de haut est perché un paon. Il aperçoit un serpent se dirigeant vers son trou situé à la base du pilier. Au moment où le serpent est à 27 cubits de son trou, le paon fonce dessus. Si les deux animaux se déplacent à la même vitesse, à quelle distance du trou le serpent sera-t-il attrapé ?

6. Dans une mare peuplée d'oiseaux, le sommet d'une tige de lotus est situé à un demi cubit au dessus du niveau de l'eau. Poussée par le vent, la tige s'incline. Le sommet disparaît totalement dans l'eau, à une distance de 2 cubits. Quelle est la profondeur de la mare ?

Ces problèmes sont reproduits d'après un article de SAHIB RAM MANADAN, publié en 1978 dans la revue *Mathematics Teacher (India)*, Vol. N° 14, pages 138–139. Peux-tu les résoudre ? Et qu'est-ce qu'un cubit ?



Page extraite de la première édition imprimée en sanskrit du Leelavati

[1] Mais la traduction n'est plus très poétique !

Math-Jeunes n ° 55, 49–52, 1992

Une approche des objets fractals

Michel Ballieu, *Athénée de Binche*

Introduction

Figure 1

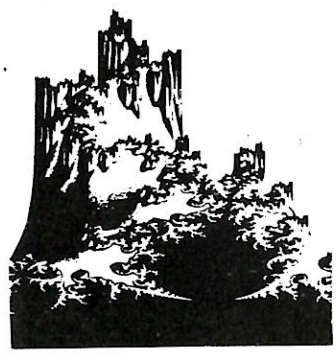


Figure 2

Si nous regardons des objets fractals, comme ceux des figures 1 ou 2, nous n'en avons qu'une perception *statique* qui nous fournit peu de renseignements sur la naissance et l'évolution de la structure. Or il arrive fréquemment, en botanique par exemple, que l'on s'intéresse à autre chose qu'à la complexité de la plante : à son mode de croissance, entre autres... Il en est de même pour une montagne dont la géométrie est le résultat d'une activité tectonique ancienne n odulée par une lente érosion. Discuter d'objets fractals tout en ignorant le processus dynamique qui a créé l'objet n'est pas très intéressant ! On peut évidemment craindre de plonger dans une horrible complexité mathématique liée à la complexité de l'objet lui-même... L'une des nombreuses surprises que réservent la *géométrie fractale* et la *théorie du chaos* est que, souvent, un processus très simple est à l'origine d'un "motif" complexe, ce qui peut également s'exprimer ainsi : la simplicité d'un processus ne doit pas laisser croire qu'il est toujours aisé d'en interpréter les conséquences.

Le principe du "feedback"

Ce principe est fondamental dans toutes les sciences exactes; introduit notamment il y a quelque trois cents ans par Sir Isaac NEWTON et par Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, sous la forme de lois dynamiques, il permet par exemple de déterminer la position et la vitesse d'une particule à un instant donné, à partir de leurs valeurs respectives à l'instant précédent. Le processus peut être *discret* (évolution de jour en jour, d'année en année,... comme en botanique ou en géologie) ou *continu* (intervalles de temps infinitésimaux, par exemple, lors de l'étude du mouvement en dynamique). Le *feedback* ou *itérateur* peut se schématiser ainsi :

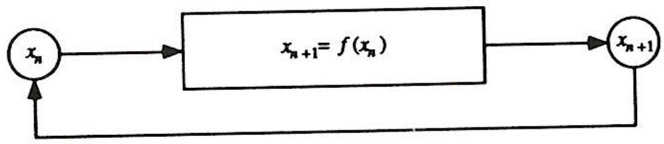


Figure 3

Quelques exemples :

- si $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, en initialisant x_0 à 1, pour $a = 2$ le processus engendre la suite

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = \frac{3}{2} = 1,5 \\
x_2 &= \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = 1,41666\ldots \\
x_3 &= \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}) = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = 1,41421\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

qui tend vers $\sqrt{2}$.
Certains, peut-être à tort, désignent ce processus sous le nom d'*algorithme de Babylone* pour

la recherche de la racine carré de a (en fait, on n'est pas certain qu'il était connu des babyloniens).

- si la fonction f est une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application de
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x_n, y_n) \longmapsto f(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1})$
où

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

alors, en initialisant x_0 à 0 et y_0 à 1, on obtient la suite des couples:
(0,1), (1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,8), (8,13), ...
La suite des y_i: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... est célèbre et connue depuis près de huit siècles, on l'appelle suite de FIBONACCI : $F_1, F_2, F_3, \ldots$ (une histoire de lapins... tu te rappelles ?) KEPLER (1571-1630) a remarqué que le quotient $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tendait vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots$ souvent désigné sous le vocable de *nombre d'or* ou de *proportion divine*; c'est un rapport qui a pas mal obsédé les "Anciens" et, par suite les humanistes de la Renaissance. Nous ajouterons encore qu'on retrouve cette proportion dans le pentagone.

- itération par photocopie (réduction simple);

Figure 4

- itération par photocopie (réduction multiple) c'est-à-dire au moyen d'une photocopieuse munie de plusieurs lentilles (trois, dans le cas de la figure 5).

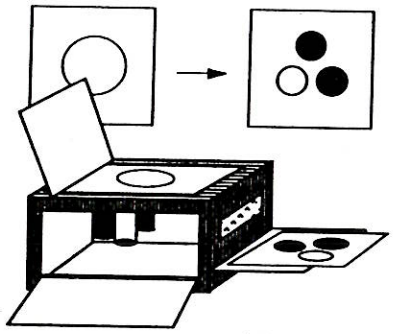


Figure 5

Le triangle de Sierpinski

Il s'agit d'un exemple qui illustre un aspect important de la géométrie fractale. Considérons un rectangle et soumettons-le à l'action d'une photocopieuse (réduction multiple) munie de trois lentilles.

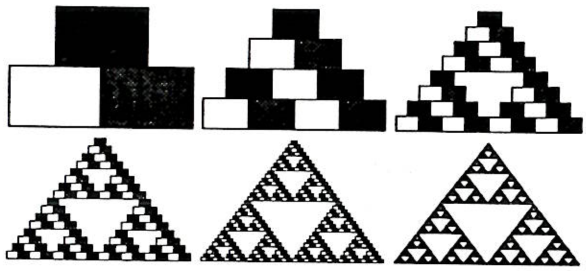


Figure 6

Recommençons le même type d'itération avec une autre forme

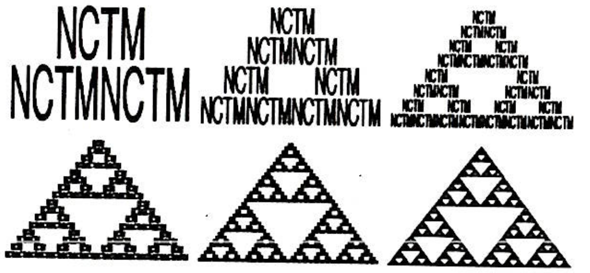


Figure 7

Nous avons ici un processus qui produit un ensemble de résultats tendant vers un objet final indépendant de la manière dont démarre le processus; cette propriété s'appelle la *stabilité*.

1654: conversion de PASCAL au jansénisme

1665: baromètre à cadran (HOOKE)

1675: marmite de Papin

1685: révocation de l'édit de Nantes

1699: mort de RACINE

1655: anneau de Saturne (HUYGENS)

1669: décomposition de la lumière (NEWTON)

1684: mort de CORNEILLE

1705: première machine à vapeur industrielle (NEWCOMEN)

1660: mariage de LOUIS XIV et de MARIE-THÉRÈSE

1673: mort de MOLIÈRE

fin XVIIè: théorie ondulatoire de la lumière (HUYGENS)

~1715: thermomètre de Fahrenheit

1700 — **1725**

Jacques BERNOULLI(1654,1705)
BERNOULLI est le premier d'une lignée de savants suisses. Il a très rapidement maîtrisé et développé le calcul différentiel et intégral de LEIBNIZ rivalisant avec son frère Jean (1667,1748).
Jacques BERNOULLI est l'auteur d'une loi de *probabilités* que l'on appelle aujourd'hui *loi des grands nombres* (plus on fait d'expériences, plus la fréquence se rapproche de la probabilité théorique).

Brook TAYLOR(1685,1731)
La proposition 7 de sa *Methodus Incrementorum directa et inversa* (Londres, 1715) s'énonce:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}\cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(x) + \frac{h^3}{3!}\cdot f'''(x) + \cdots$$

lorsque f satisfait certaines propriétés.
($f^{(i)}(x)$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de $f(x)$)

Leonhard EULER(1707,1783)
L'œuvre immense de ce savant génial touche à toutes les branches de la mathématique.
Il a, à peu de choses près, donné à l'analyse la forme que nous lui connaissons aujourd'hui en la basant sur le concept de fonction; il a écrit un des premiers ouvrages d'application de l'analyse à la mécanique, il a défini les fonctions logarithmiques comme réciproques des fonctions exponentielles,...
On lui doit des travaux en théorie des nombres, en topologie combinatoire (le célèbre problème des ponts de Königsberg l'amène à donner les premiers théorèmes de la théorie des graphes), on lui doit aussi la formule $e^{i\pi} = -1$ ainsi que celle qui lie le nombre de sommets (s), de faces (f) et d'arêtes (a) d'un polyèdre : $s - a + f = 2$.
De nombreux objets et propriétés mathématiques portent son nom : citons la *droite d'Euler*, le *cercle d'Euler*, e (la base du logarithme népérien) est l'initiale de EULER,...

Guillaume François Antoine de L'HOSPITAL(1661,1704)
Elève de Jean BERNOULLI et disciple de LEIBNIZ. Son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes et des courbes* a largement contribué à la diffusion du calcul différentiel et intégral de LEIBNIZ.
Il a laissé son nom à une célèbre règle (due à BERNOULLI):

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

prend la forme $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *alors* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

à condition que cette dernière limite existe.

Colin MACLAURIN(1698,1746)
Cet éminent disciple de NEWTON s'est intéressé à l'étude des coniques, des cubiques et des quadriques ainsi qu'au calcul infinitésimal et à l'algèbre.
Dans son *Complete System of Fluxions*, on trouve la fameuse formule de développement en série de fonctions qui porte son nom. Cette formule est le cas particulier de la formule de Taylor où $x = 0$.

Jean le Rond D'ALEMBERT(1717,1783)
Ce philosophe et mathématicien collabora, avec DIDEROT, à la rédaction de l'*Encyclopédie*.
Ses apports principaux en mathématique concernent les équations aux dérivées partielles, les nombres complexes,...
On lui doit une démonstration presque complète du *théorème fondamental de l'algèbre*:
Dans $\mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes), tout polynôme de degré n possède n racines.

Abraham DE MOIVRE(1667,1754)
Il a étudié le calcul des probabilités, on lui doit une formule célèbre à laquelle il a laissé son nom:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Gabriel CRAMER(1704,1752)
Son *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* est un traité de géométrie analytique.
Son nom reste attaché à une méthode mécanique de résolution des systèmes de n équations linéaires à n inconnues.

1745: métier à tisser automatique (VAUCANSON)

1783: -ascencions en ballon (MONTGOLFIER) -traité d ersailles

1789: révolution nçaise

1791: mort de MOZART

1797: parachute (GARNERIN)

1752: paratonnerre (FRANKLIN)

1778: mort de VOLTAIRE

1785: loi des forces électrostatiques (COULOMB)

1790: métier à tisser de JACQUARD

1796: machine à vapeur: WATT

1776: déclaration de l'indépendance américaine

1784: mort de DIDEROT

1787: usage de la pomme de terre (PARMENTIER)

~1795: système métrique

1789 **1800**

Jean Henri LAMBERT(1728,1777)
On lui doit plusieurs innovations en géométrie projective, en géométrie descriptive et en trigonométrie sphérique.
Ses travaux sur le postulat des parallèles (*le* postulat d'Euclide) font de lui un précurseur des géométries non euclidiennes. LAMBERT a également donné une démonstration rigoureuse de l'irrationnalité de π.

Adrien Marie LEGENDRE(1752,1833)
LEGENDRE s'est intéressé à quelques problèmes mathématiques clefs de son époque se laissant dépasser par des esprits plus novateurs tels LAPLACE, GAUSS,... Son œuvre est surtout basée sur l'analyse et la théorie des nombres. Ses *Eléments de géométrie* montrent qu'il était très bon pédagogue.

Jean Victor PONCELET(1788,1867)
Elève de MONGE, il est l'un des fondateurs de la géométrie projective qu'il a exposée dans son *Traité des propriétés projectives des figures.*

Joseph Louis de LAGRANGE(1736,1813)
Principalement connu pour ses travaux en mécanique, LAGRANGE a largement contribué au développement de la théorie des nombres et a posé les bases du calcul des variations. Son étude des équations algébriques a ouvert la voie à la théorie des groupes de GALOIS.
Dans les *Mémoires de Berlin*, il démontre, le premier, que tout entier naturel est la somme de quatre carrés parfaits au plus.
Son nom est lié à un théorème aussi appelé *théorème des accroissements finis* qui s'énonce :
Si f est une fonction continue dans $[ab]$ et dérivable dans $]ab[$ alors $\exists c \in]ab[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Jean-Baptiste Joseph FOURIER(1768,1830)
Un des initiateurs de la *physique mathématique*. Les méthodes qu'il a mises au point (développement des fonctions en séries trigonométriques et intégrale de Fourier) sont restées un des outils essentiels de l'analyse et de la physique.

Bernhart BOLZANO(1781,1848)
Tout comme CAUCHY, BOLZANO se soucia de fondements rigoureux pour l'analyse. Il a également tenté de définir la notion de continuité en vue d'obtenir une démonstration du théorème que l'on appelle aujourd'hui *théorème des valeurs intermédiaires* et que l'on énonce:
Toute fonction f continue sur $[ab]$, négative en a et positive en b s'annule au moins une fois entre a et b.

Karl Friedrich GAUSS(1777,1855)
GAUSS se distingua par la précocité de ses talents.
Il est l'auteur de très nombreux résultats en théorie des nombres et dans tous les domaines des mathématiques (il démontra rigoureusement le *théorème fondamental de l'algèbre*, il détermina quels polygones sont constructibles à la règle et au compas, il est un des pères des géométries non-euclidiennes,...), ses travaux ne furent cependant pas toujours immédiatement répercutés dans des publications car GAUSS n'eut guère de collaborateurs.
Bien des mathématiciens du XIXè siècle ont redécouvert des résultats qu'il avait partiellement élaborés dans ses carnets personnels.

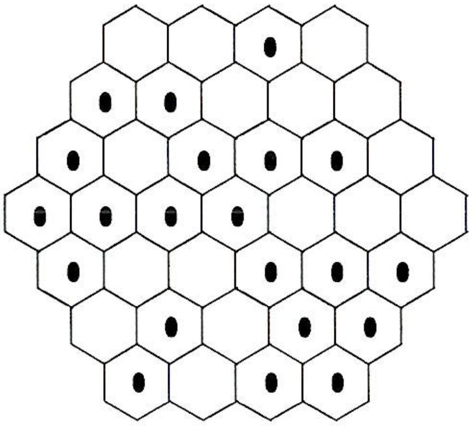
Gaspard MONGE(1746,1818)
Il est surtout connu pour avoir mis au point les méthodes de la géométrie descriptive.

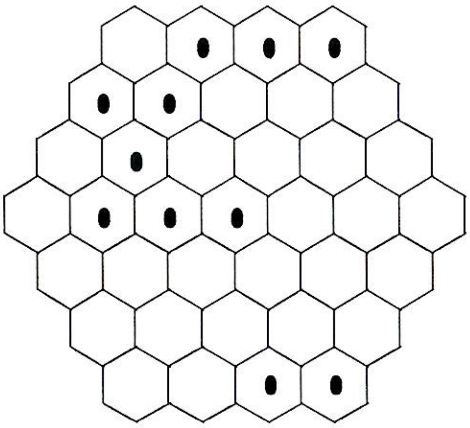
Augustin-Louis CAUCHY(1789,1857)
Ses cours à l'*Ecole Polytechnique* ont contribué à construire l'analyse sur des bases conceptuelles nouvelles par leur rigueur (il tente ainsi de définir la continuité d'une fonction, les infiniment petits et infiniment grands,...).
Son œuvre touche à de nombreux domaines des mathématiques, il est le père de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Pierre Simon de LAPLACE(1749,1827)
LAPLACE a appliqué, en les affinant, l'analyse mathématique et le calcul des probabilités à la mécanique céleste.

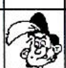
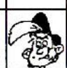
Solution des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	4	6	6	5	6
2	4	4	9	4	4
3	4		6		5
4		1	9	9	2
5	1	4	6	4	1

Grille des moyennes (par C. Parent)

	2	8	
3	4	6	8
5	5	4	1
	7	4	

	6	2	
7	5	3	3
5	4	2	1
	4	0	

A part des monstres tels que le triangle de Sierpinski, quels sont les types d'images que l'on peut obtenir grâce à un tel procédé ? La réponse est étonnante... Il y a énormément d'images "naturelles" qui sont engendrées au moyen d'une photocopieuse du type décrit ci-dessus!

Une généralisation

Dans les deux exemples qui précèdent, chaque lentille de la machine agit comme une **similitude**, ce qui signifie que l'image d'un carré est un carré, celle d'un triangle avec trois angles donnés est un triangle *semblable* c'est-à-dire avec les trois mêmes angles,... seule change l'**échelle** de l'image. Si on considère deux points de l'objet et leurs images respectives, le facteur de réduction est constant quels que soient les deux points choisis. On peut généraliser ceci en utilisant des lentilles opérant des réductions de facteurs distincts dans les différentes directions du plan, par exemple une réduction de $\frac{1}{3}$ dans la direction horizontale et de $\frac{1}{4}$ dans la direction verticale. Les figures ne sont alors plus semblables : on a introduit ce que l'on appelle des **étirements**. L'image d'un carré est un rectangle, celle d'un triangle avec trois angles donnés est un triangle avec des angles qui peuvent être différents,... Ces transformations géométriques portent le nom d'**affinités**. Notons qu'une affinité transforme une droite en une droite. On peut montrer que, dans le plan muni d'un repère oxy, toute application

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto (x',y')$$

où

$$\begin{cases} x' &= ax+by+e \\ y' &= cx+dy+f \end{cases}$$

avec $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ et $ad-bc \neq 0$ est une **affinité**.

Cette notion d'affinité sera précisée plus tard.

Et si nous laissions faire le hasard...

Les exemples qui précèdent sont très déterministes car la fonction f est choisie une fois pour toutes; on peut être tenté de combiner "déterminisme" et "hasard"... Supposons que dans l'unité "processeur", nous disposions d'un "réservoir de formules" et d'une "roue de la fortune" ou plus simplement d'un "dé" qui va sélectionner une formule au hasard.

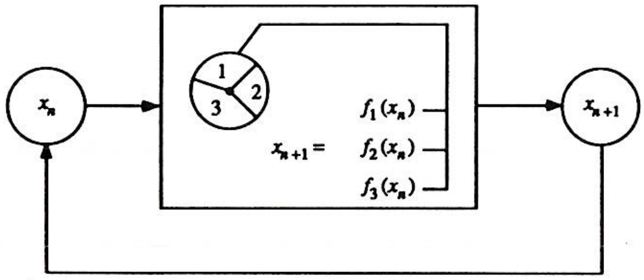


Figure 8

Alors là, bonjour les dégâts, me diras-tu ! C'est d'ailleurs ce que Michael F. BARNSLEY a appelé le **jeu du chaos...**

Eh bien, non... Pas de panique ! C'est une autre des surprises que nous réserve la géométrie fractale... En guise d'introduction, nous te proposons ce qui suit :

Prends une feuille de papier et un crayon. Marque trois points sur la feuille, appelons-les 1, 2 et 3 : ce sont les points que nous qualifierons de *base*. Munis-toi d'un dé et associe les faces 1-6, 2-5 et 3-4 et commence alors le jeu. Marque un point au hasard sur la feuille puis jette le dé, s'il affiche par exemple 2 ou 5, considère le segment joignant ce point au point de base numéro 2 et marque le milieu de ce segment. Jette à nouveau le dé, s'il affiche par exemple 3 ou 6, considère le segment joignant le dernier point marqué au point de base numéro 3 et marque le milieu de ce segment. Continue le jeu en procédant toujours de la même manière...

Bon courage ! Ou alors, essaie de faire réaliser cela par ton ordinateur préféré... Qu'obtiens-tu?

Si tu as eu beaucoup de patience ou que tu as bien programmé, le résultat doit te rappeler quelque chose et si tu en es arrivé là, pose-toi donc la question suivante : quel rapport tout ceci a-t-il avec les similitudes et affinités dont nous avons parlé plus haut ? Nous laissons cela à ta réflexion et, si tu ne vois vraiment pas, nous te donnons rendez-vous dans le prochain *Math-Jeunes* qui te réserve de nouvelles surprises fractales.

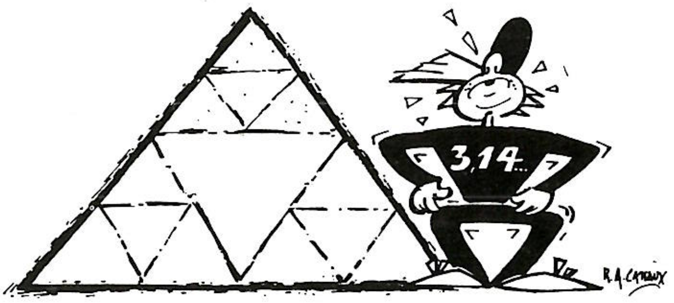
Math-Jeunes n ° 55, 52–55, 1992

Références:

M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press

H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Fractals for the Classroom*, Springer–Verlag

...



Solutions du rallye problèmes (n° 53)

Claudine Festraets

Je remercie tous les lecteurs qui m'ont fait parvenir leurs solutions et en particulier, je félicite les élèves de la classe de troisième C de l'Athénée Royal de Mons pour la qualité de leur travail.

Le problème **m1** a donné lieu à de mauvaises interprétations: certains ont cru qu'il fallait additionner les nombres de un à un milliard, d'autres qu'il fallait compter leurs chiffres. Les problèmes **m2** et **m3** ont été fort bien résolus par la plupart. Les élèves de sixième qui ont résolu le problème **M1** ont utilisé la grosse artillerie (dérivées, ...), les plus jeunes s'en sont fort bien passé et la solution est alors plus claire et plus directe. Le problème **M2** n'a pas inspiré beaucoup de lecteurs; deux solutions seulement sont complètes et correctes, mais l'une, fort longue, utilise des coordonnées et des dérivées partielles et l'autre fait usage de l'inversion. Par contre, j'ai reçu beaucoup de bonnes solutions au problème de construction **M3**; toutes sont astucieuses, mais faute de place, je ne publierai ci-après que la plus simple.

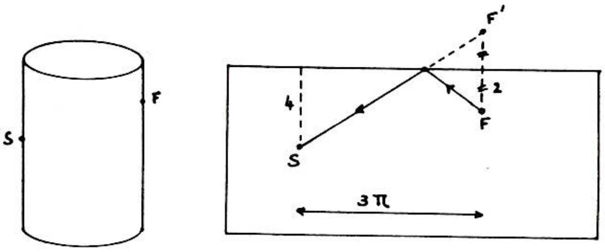
m1 Solution des élèves de 3ème C, Athénée Royal de Mons.

de 00 à 99, il y a 100 nombres de 2 chiffres, donc 200 chiffres;
de 000 à 999, il y a 1000 nombres de 3 chiffres, donc 3000 chiffres;
suivant ce même raisonnement, nous avons:
de 000 000 000 à 999 999 999, il y a 1 000 000 000 nombres de 9 chiffres, donc 9 000 000 000 chiffres et les chiffres $0, 1, 2, \ldots, 9$ sont également répartis. Chaque chiffre apparaît donc 900 000 000 fois. D'où la somme des chiffres vaut

$$\begin{aligned}900\,000\,000 \times (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) &= \\ 900\,000\,000 \times 45 &= 40\,500\,000\,000\end{aligned}$$

à quoi il faut encore ajouter la somme des chiffres de 1 000 000 000, soit 1.
La somme totale de tous les chiffres utilisés pour écrire tous les nombres de un à un milliard (inclus) vaut donc 40 500 000 001.

m2 Solutions de VIEIRA RAMOS MIGUEL (13 ans), Collège Notre-Dame à Tournai et FRÉDÉRIC BOURGEOIS (16 ans), Collège Saint Michel à Bruxelles.
Deux cas sont possibles:
1. La fourmi et le grain de sucre sont situés d'un même côté de l'axe de symétrie du verre. Dans ce cas, il suffit d'additionner la distance de la fourmi au bord supérieur du verre et celle du bord supérieur au grain de sucre. La longueur du chemin le plus court est 2 cm + 4 cm = 6 cm.
2. La fourmi (F) et le grain de sucre (S) sont de part et d'autre de l'axe de symétrie du verre.



Déroulons la surface latérale du verre cylindrique pour obtenir son développement (voir ci-dessus).
Le plus court chemin de F à S est le plus court chemin de F' à S; c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 cm + 4 cm = 6 cm et 3π cm (le cercle complet mesure 6π cm puisque son diamètre vaut 6 cm).
Le plus court chemin est donc $\sqrt{6^2+(3\pi)^2}$ cm $= 11,1725\ldots$ cm, soit 11,1 cm ou 11,2 cm à 1 mm près par défaut ou par excès.
Dans les deux cas, l'épaisseur du verre est considérée comme négligeable.

m3 Solution de SHIN JONATHAN OSWALD (16 ans), Athénée Robert Catteau à Bruxelles.
Désignons par

- A la petite poulie,
- B la grande poulie,
- v_A, v_B leurs vitesses respectives (en tours/s)
- t_A, t_B les temps (en secondes) mis respectivement pour faire 5 tours.

$$400 \text{ tours/min} = \frac{400}{60} \text{ tours/s} = \frac{20}{3} \text{ tours/s}$$

On a donc

$$\begin{cases} v_A &= v_B + \frac{20}{3} \\ t_B &= t_A + 1 \\ v_A &= \frac{5}{t_A} \\ v_B &= \frac{5}{t_B} \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{5}{t_A} = \frac{5}{t_A+1} + \frac{20}{3}$
c'est-à-dire $4t_A^2 + 4t_A - 3 = 0$. Ainsi $t_A = \frac{1}{2}$
d'où

$$v_A = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ et } v_B = \frac{5}{\frac{1}{2}+1} = \frac{10}{3}$$

Les vitesses respectives des deux poulies, en tours/min, sont donc

$$10 \times 60 \text{ tours/min} = 600 \text{ tours/min}$$
$$\text{et } \frac{10}{3} \times 60 \text{ tours/min} = 200 \text{ tours/min}$$

M1 Solution de SÉBASTIAN LEROY (14 ans), Institut Saint Boniface-Parnasse à Bruxelles.
Soient x et y les dimensions de la base du building et z sa hauteur (mesurées en mètres).
Si on perd une unité de chaleur par mètre carré par le sol, on perd 5 unités de chaleur par mètre carré par les murs et le toit.
Par le sol, on perd $1 \cdot x \cdot y$ unités de chaleur, par le toit, on perd $5 \cdot x \cdot y$ unités de chaleur, et par les murs, on perd $2(5xz + 5yz)$ unités de chaleur.
La perte totale est

$$P_t = 6xy + 10xz + 10yz$$

P_t doit être le plus petit possible et pour cela, il faut que les trois termes aient la même valeur. En effet, leur produit vaut

$$\begin{aligned} 6xy \cdot 10xz \cdot 10yz &= 600x^2y^2z^2 \\ &= 600 \cdot (75000)^2 \\ &= 3,375 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

car le volume du building est égal à $xyz = 75000$.
D'autre part, la moyenne arithmétique de deux

ou plusieurs nombres est supérieure ou égale à la moyenne géométrique de ces nombres:

$$\begin{aligned} \frac{6xy+10xz+10yz}{3} &\geqslant \sqrt[3]{6xy \cdot 10xz \cdot 10yz} \\ &\geqslant \sqrt[3]{3,375 \cdot 10^{12}} \\ &\geqslant 15000 \end{aligned}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si ces nombres sont égaux.
Donc P_t est minimum lorsque

$$6xy = 10xz = 10yz$$

et

$$\frac{6xy+10xz+10yz}{3} = 15000$$

De là, on tire $y = x$, $z = \frac{3}{5}x$ et

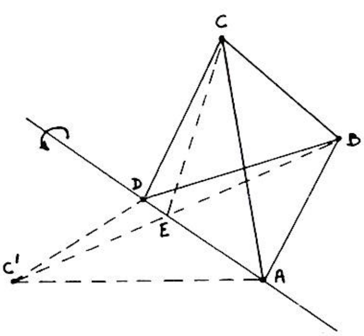
$$6x^2 + 10 \cdot \frac{3}{5}x^2 + 10 \cdot \frac{3}{5}x^2 = 45000$$

$$18x^2 = 45000$$

$$x^2 = 2500$$

et $x = 50$, $y = 50$, $z = \frac{3}{5} \cdot 50 = 30$
Les dimensions du building sont donc: 50 m de long, 50 m de large et 30 m de haut.

M2 Considérons la rotation d'axe AD qui applique C sur C' telle que C' appartient au plan ABD et est situé dans le demi-plan de bord AD et ne comprenant pas B.



Appliquons le théorème de PTOLÉMÉE au quadrilatère $ABDC'$: la somme des produits des côtés opposés est supérieure ou égale au produit des diagonales.

$$|AB| \cdot |C'D| + |AC'| \cdot |BD| \geqslant |AD| \cdot |BC'|$$

Or la rotation conserve les longueurs, donc

$$|C'D| = |CD| \qquad |AC'| = |AC|$$

et $|C'B| = |C'E| + |EB| = |CE| + |EB| > |CB|$
(inégalité triangulaire)

D'où, on a bien

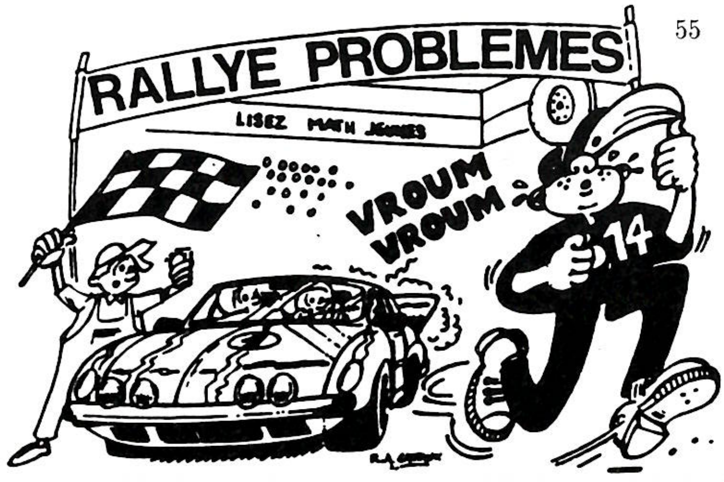
$$|AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |BD| \geqslant |AD| \cdot |BC|$$

(remarquons que l'égalité ne peut avoir lieu que si le tétraèdre est dégénéré: les quatre points A, B, D, C sont dans un même plan et forment un quadrilatère inscriptible).

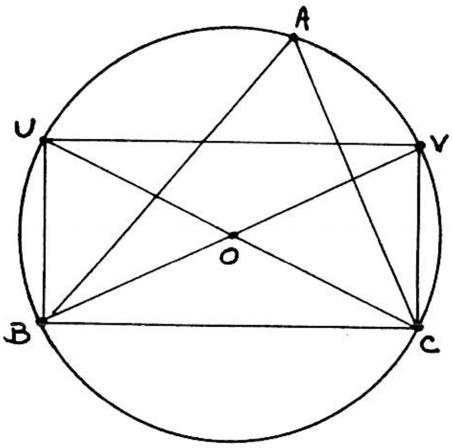
M3 Solution de CAROLINE RODEGHIERO (15 ans), Institut Sainte Marie à La Louvière.
Traçons les droites BO et CO; elles coupent le cercle respectivement en V et U.

Le quadrilatère $BCVU$ est un rectangle, car les triangles BCV, CVU, VUB, UBC, inscrits dans un demi-cercle, sont rectangles.
Il reste à construire la droite parallèle à BU et à CV passant par A pour trouver la hauteur AA' issue de A.

La droite AB coupe CV en D, la droite AC coupe BU en E. Joignons D et E; cette droite coupe BC en M.
Par M, menons une droite quelconque qui coupe BU et CV respectivement en F et G. Joignons BG et CF; ces deux droites se coupent en K. La droite AK est parallèle aux droites BU et CV (je laisse au lecteur le soin de le démontrer, ce qui ne présente aucune difficulté lorsque l'on remarque les nombreuses paires de triangles semblables de la figure).
On a ainsi tracé la hauteur AA' issue de A; le même procédé permet de tracer la hauteur BB' issue de B et le point d'intersection de AA' et BB' est l'orthocentre H demandé.



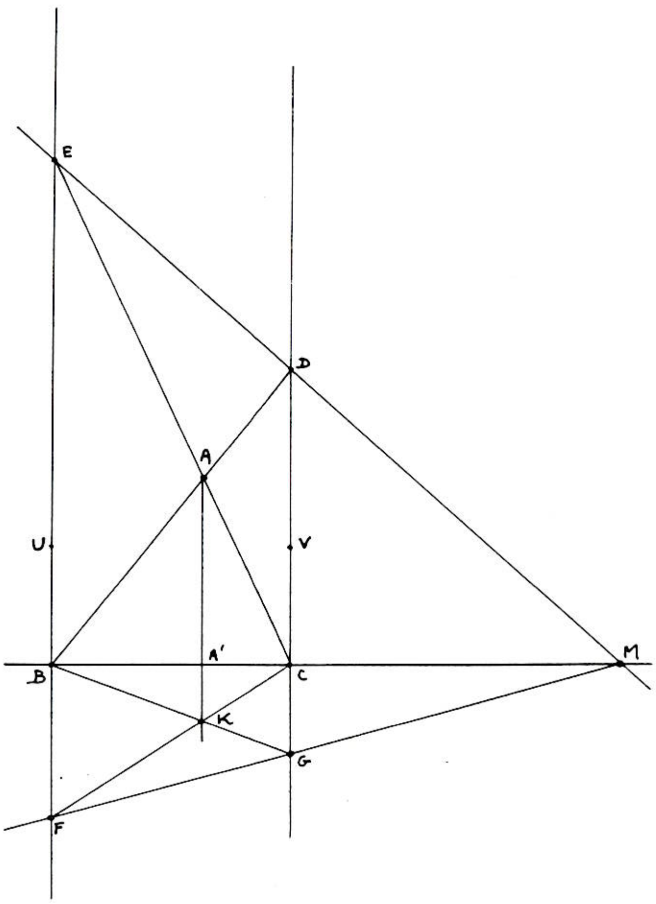
C. Festraets



Voici les six derniers problèmes de ce rallye. Envoyez vos solutions à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles avant le 24 avril. Cette date limite est impérative!

m7 Au bureau de poste, un homme achète des timbres à 1fr, à 2fr, à 5fr et à 8fr. Le nombre de timbres à 2fr est les $\frac{3}{4}$ du nombre de timbres à 1fr et le nombre de timbres à 5fr est les $\frac{3}{4}$ du nombre de timbres à 2fr. Combien de timbres de chaque espèce a-t-il acheté au minimum sachant qu'il a payé avec des billets de 1000fr, qu'on ne lui a pas remis de monnaie et qu'il a acheté 5 timbres à 8fr ?

m8 Toute personne a, dans son existence, serré la main à bon nombre d'autres personnes. Prouver que, sur la terre entière, le nombre de personnes qui ont serré la main à un nombre impair d'autres personnes est pair.



m9 Un champ triangulaire ABC est bordé le long du côté AB par une plaine de jeux et le long du côté AC par un bois. On désire tracer deux routes parallèles au côté BC pour relier la plaine de jeux au bois et le propriétaire du champ voudrait que celui-ci soit partagé en trois parties de même superficie. Où faut-il tracer les routes (on suppose la superficie des routes négligeable par rapport à celle du champ) ?

M7 On dispose d'une pièce de monnaie bien équilibrée qui, lorsqu'on la lance, ne retombe jamais sur la tranche. On la lance jusqu'au moment où on a obtenu un nombre impair de "faces" consécutifs suivis immédiatement d'un "pile". Quel est le nombre moyen de jets nécessaires pour obtenir ce résultat ?

M8 Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux. Prouver que $[\frac{a}{b}] + [\frac{2a}{b}] + [\frac{3a}{b}] + \cdots + [\frac{(b-1)a}{b}] = [\frac{b}{a}] + [\frac{2b}{a}] + [\frac{3b}{a}] + \cdots + [\frac{(a-1)b}{a}] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$ ([x] désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x).

M9 Soit $n > 2$ un nombre pair. On colorie les cases d'un échiquier $n \times n$ avec $\frac{n^2}{2}$ couleurs de manière telle que chaque couleur est utilisée pour colorier exactement 2 cases. Démontrer que l'on peut placer n tours sur n cases de couleurs différentes de sorte qu'aucune tour ne puisse en prendre une autre.

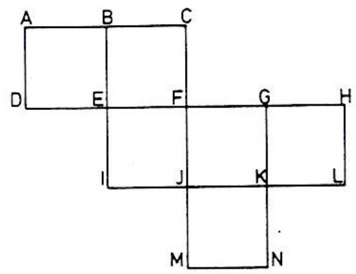
Solutions des jeux-problèmes du n° 54

André Parent,
Lycée de Mouscron

Première situation

Le tracé se termine au point m

Deuxième situation

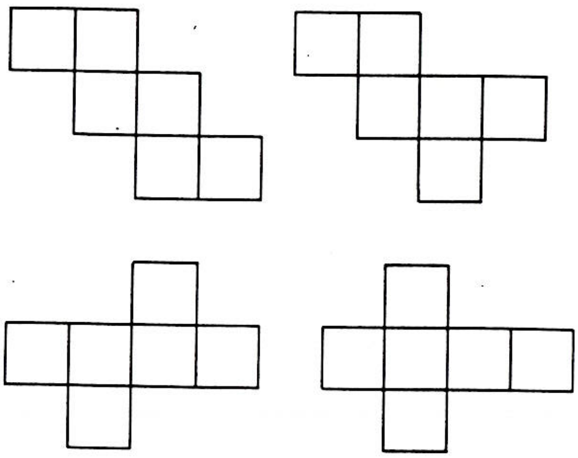


Sommet	Degré	
A	2	
B	3	Départ ou arrivée
C	2	
D	2	
E	4	
F	4	
G	3	Arrivée ou départ
H	2	
I	2	
J	4	
K	4	
L	2	
M	2	
N	2	

Une solution:
B A D E B C F E I J F G K J M N K L H G

Troisième situation

Les quatre patrons suivants sont solutions:

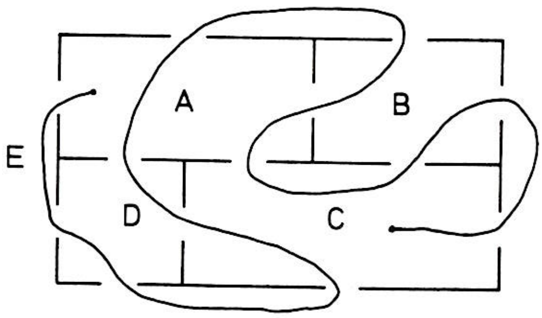


Quatrième situation

Salle	Degré
A	5
B	4
C	5
D	4
E	8

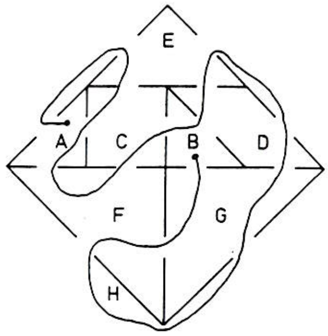
Le problème est possible voici une solution :

A E D E C D A E B A C B E C

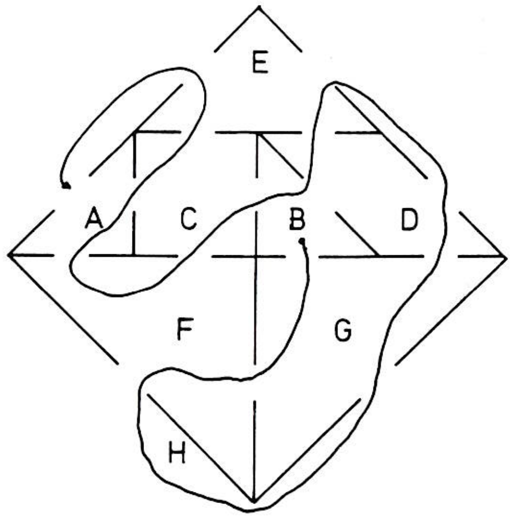


Cinquième situation

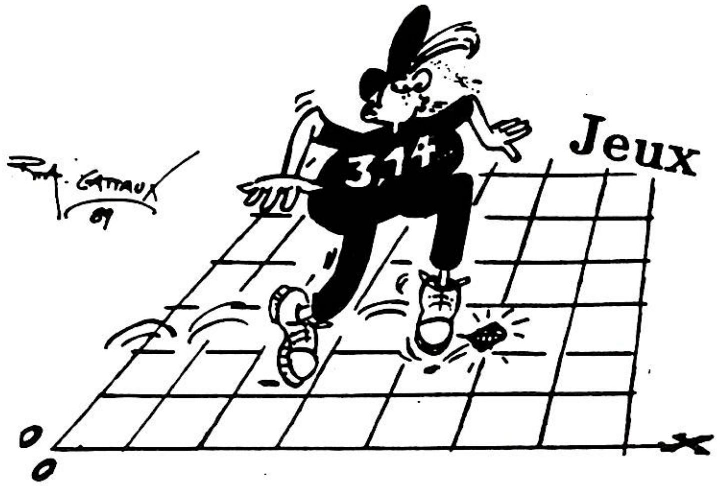
Salle	Degré
A	3
B	3
C	4
D	4
E	4
F	4
G	4
H	6



La figure ci-dessus illustre un trajet possible partant indifféremment de A ou de B pour arriver en B ou en A.
En tenant compte de la dernière information, nous savons que le domicile du gardien est à l'extérieur du musée.
Le point de départ est donc la salle B, celui d'arrivée la salle A.
Notons aussi qu'il ferme la porte de l'extérieur sans la franchir.

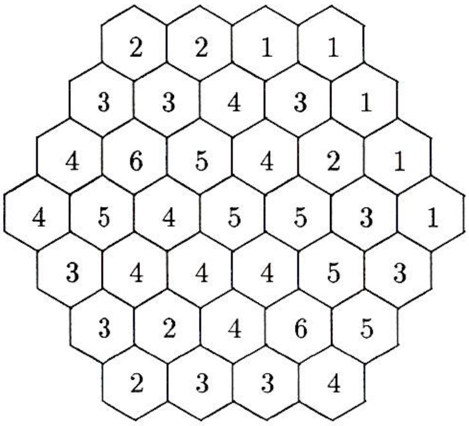


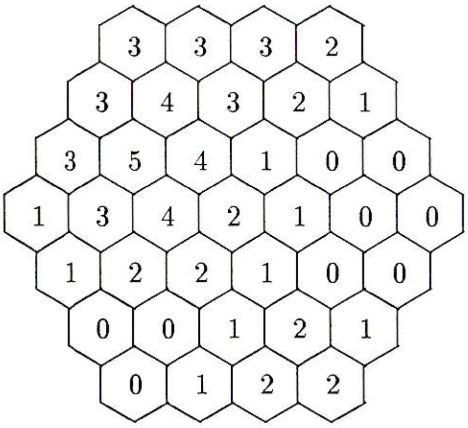
Math-Jeunes n° 55, 58-58, 1992



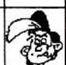
A.Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement
1. n^n
2. Palindrome carré d'un palindrome
4. Multiple de 83 très actuel
5. Palindrome puissance d'un palindrome

Verticalement
1. Multiple de 37
2. Carré parfait–Multiple de 7
3. Carré parfait palindrome
4. Multiple de 9 – Chacun de ses chiffres est carré parfait
5. Multiple de 107

Grilles des moyennes (par C. Parent)

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	2	8	
3			8
5			1
	7	4	

	6	2	
7			3
5			1
	4	0	

Eliminatoire 1992

P. Van Elsuwé

Le mercredi 22 janvier dernier, arrivant par grappes et le front soucieux, des jeunes, munis de stylos et d'enthousiasme, gagnaient des salles de classe hospitalières, où ils allaient se livrer à un exercice ardu mais fort enrichissant : l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique.

On dénombra ce jour-là, recensant les divers lieux où l'épreuve se déroula, 9967 élèves (2727 en 1ère, 3175 en 2ème, 4065 en 3ème) répartis dans 266 écoles pour l'épreuve MINI et 6715 élèves (2290 en 4ème, 2200 en 5ème, 2225 en 6ème) répartis dans 275 écoles pour l'épreuve MAXI.

Tu en étais, bien sûr, et pour te permettre de situer ta performance, je te propose ci-dessous les histogrammes nationaux, accompagnés de la solution à quelques problèmes qui semblent avoir farouchement résisté à certains concurrents.

Question 14 Maxi

Remarquons que 22 est un multiple de $7+1$ ce que nous noterons :

$$22 = \mathcal{M}7 + 1$$

De même, 55 est un multiple de $7+6$ ou encore un multiple de $7-1$. Nous noterons :

$$55 = \mathcal{M}7 - 1$$

Remarquons encore que $\forall n \in \mathbb{N}_o : (\mathcal{M}7+1)^n = \mathcal{M}7+1$ et $(\mathcal{M}7-1)^n = \mathcal{M}7+(-1)^n$

Dès lors,

$$\begin{aligned} 22^{55}\cdot 55^{22} - 1 &= (\mathcal{M}7+1)^{55}(\mathcal{M}7-1)^{22} - 1 \\ &= (\mathcal{M}7+1)(\mathcal{M}7+1) - 1 \\ &= \mathcal{M}7 + 1 - 1 = \mathcal{M}7 \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc ⓐ

Question 18 Maxi

Si l'on note x le nombre de cochons achetés par le marchand, alors le prix d'achat par cochon est $\frac{6250}{x}$F et, avant la Saint-Nicolas, le prix de vente par cochon est $(\frac{6250}{x}+5)$F.

Le marchand en a vendu $(x-20)$ à ce prix et les 20 derniers à $0,9\cdot\frac{6250}{x}$F chacun. La mise en équation du problème est :

$(x-20)(\frac{6250}{x}+5) + 20\cdot 0,9\cdot\frac{6250}{x} = 6250 + 1100$

Cette équation, après simplification, est équivalente à l'équation $x^2 - 240x - 2500 = 0$ dont les solutions sont $x = 250$ ou $x = -10$.

Seule la solution 250 est acceptable. Il a donc acheté 250 cochons en massepain.

Question 19 Maxi

Appelons $L = |mn| = |lu| = |um| = 2|mv| = 2|vn|$

L'aire du triangle lmv vaut $\frac{2L\cdot\frac{L}{2}}{2} = \frac{L^2}{2}$

L'aire du triangle umv vaut $\frac{L\cdot L}{2} = \frac{L^2}{2}$

Comme ces deux aires sont égales, nous en déduisons (en soustrayant l'aire du quadrilatère $umvs$) que les aires des triangles lus et nvs sont égales.

Les triangles smv et snv ont même aire (bases de longueur égale $|mv| = |vn|$ et hauteur commune).

De même, les triangles lus et ums ont même aire (bases de longueur égale $|lu| = |um|$ et hauteur commune).

Dès lors, les quatre triangles lus, ums, mvs et vns ont même aire.

Cette aire vaut le tiers de l'aire du triangle lmv c'est-à-dire $\frac{L^2}{6}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{aire}(lsnp) &= \text{aire}(lmnp) - \text{aire}(lmv) - aire(svn) \\ &= 2L^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{6} = \frac{4L^2}{3} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\frac{\text{aire}(lpns)}{\text{aire}(lmv)} = \frac{\frac{4L^2}{3}}{\frac{L^2}{2}} = \frac{8}{3}$$

Question 27 Maxi

Notons pr $(\{a\})$ la probabilité d'obtenir la face a. On a pr $(\{1\}) = k\cdot 1$, pr $(\{2\}) = k\cdot 2$, pr $(\{3\}) =$

$k \cdot 3$, pr $(\{4\}) = k \cdot 4$, pr $(\{5\}) = k \cdot 5$, pr $(\{6\}) = k \cdot 6$ $(k \in \mathbb{R}^+)$
Comme la somme de ces probabilités doit valoir 1, on en déduit que $21k = 1$ et dès lors $k = \frac{1}{21}$.
Par conséquent, pr (obtenir un nombre premier) = pr $(\{2;3;5\})$ = pr $(\{2\})$ + pr $(\{3\})$ + pr $(\{5\})$ = $\frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$

Question 18 Mini

On a : aire(triangle psr) $= \frac{6 \cdot 10}{2}\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$
Comme les aires des trois triangles psu, suv et svr sont égales (leurs bases respectives $[pu]$, $[uv]$ et $[vr]$ ont même longueur et leur hauteur est commune), chacune de ces aires vaut le tiers de l'aire du triangle psr.
Par conséquent, l'aire du triangle suv vaut 10 cm^2.

Question 22 Mini

Le 1^{er} ensemble contient 1^2 points, le $2^{ème}$ ensemble contient 2^2 points,..., le $n^{ème}$ ensemble contient n^2 points, le $(n+1)^{ème}$ ensemble contient $(n+1)^2$ points.
Dès lors, pour passer d'un tableau de n rangées à n points chacune à un tableau de $(n+1)$ rangées à $(n+1)$ points chacune, il faut ajouter

$$(n+1)^2 - n^2 \text{ points} = (2n+1) \text{ points}$$

Par conséquent, pour former le $218^{ème}$ ensemble à partir du $217^{ème}$, il faut ajouter $(2 \times 217 + 1)$ points = 435 points.

Question 28 Mini

Les bornes rouges sont mises tous les 120m et les bornes vertes tous les 300m.
La plus petite distance entre deux points du chemin marqués tous les deux d'une borne rouge et d'une borne verte est donc de 600m (le P.P.C.M. de 120 et 300 est 600).

Question 30 Mini

A 8h, le grand angle entre la grande et la petite aiguille est de 240°. En 20 minutes, la grande aiguille aura effectué une rotation de $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ et la petite aiguille une rotation de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360° = 10°$.
Le plus petit angle formé par les deux aiguilles est donc de $(240° - 120°) + 10° = 130°$.

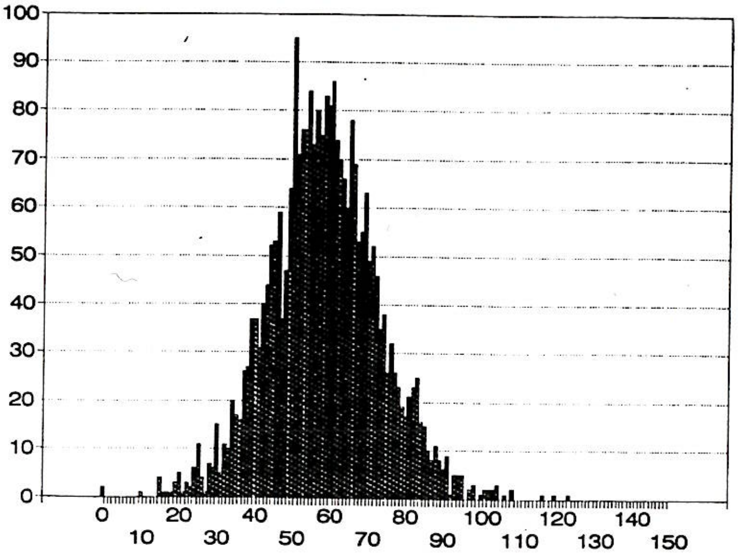
Demi-finale 1992

Un grand bravo aux 1266 élèves en MINI et 984 élèves en MAXI qui ont réussi à se placer pour la demi-finale du 11 mars.

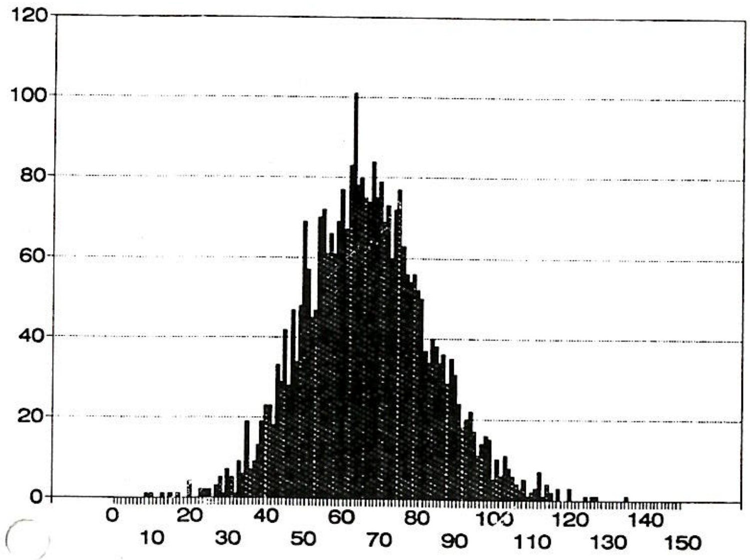
Si tu veux te divertir, réponds donc aux questionnaires des demi-finales que tu as reçus avec ton *Math-Jeunes*. Tu pourras contrôler tes réponses grâce à la grille des solutions ci-dessous. Quelques solutions détaillées te seront proposées dans le prochain numéro.

Qu.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Min	D	A	C	E	B	A	C	B	C	B	143	D	C	E	E
Max	B	B	B	C	A	D	B	E	E	D	B	C	C	E	B
Qu.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Min	E	D	D	D	D	C	6	216	A	C	E	D	38	E	D
Max	E	B	D	D	D	A	B	E	C	E	B	D	B	D	B

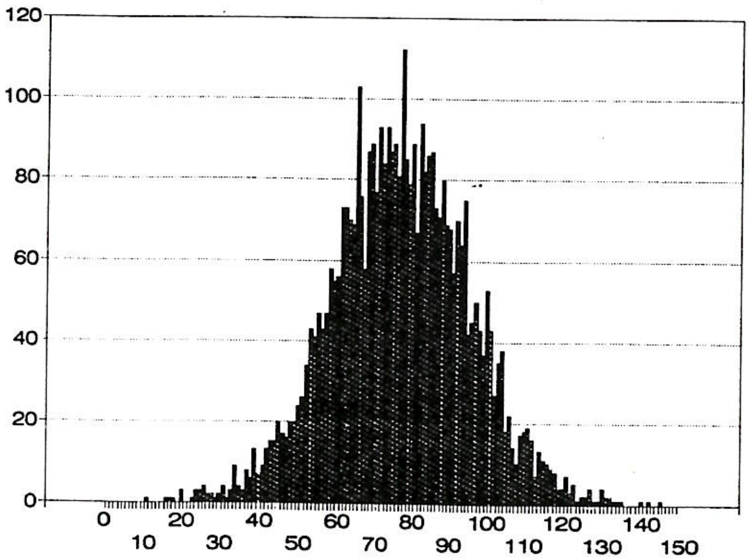
1 ère ELIMINATOIRE 1992



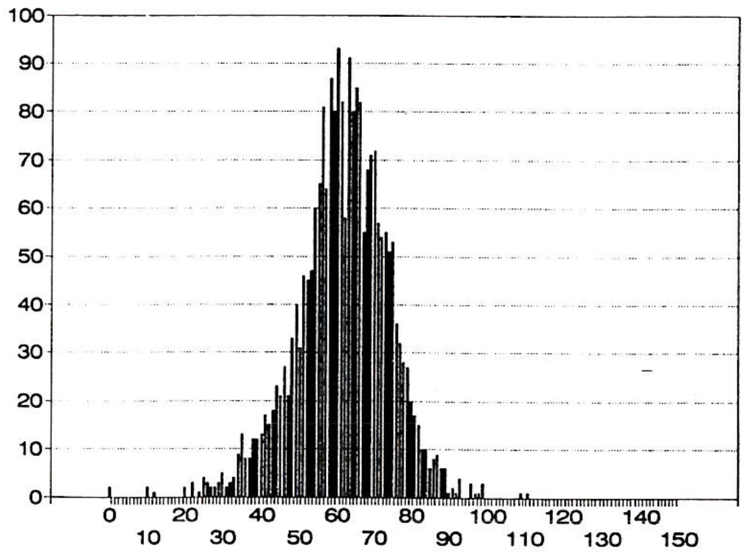
2 ième ELIMINATOIRE 1992



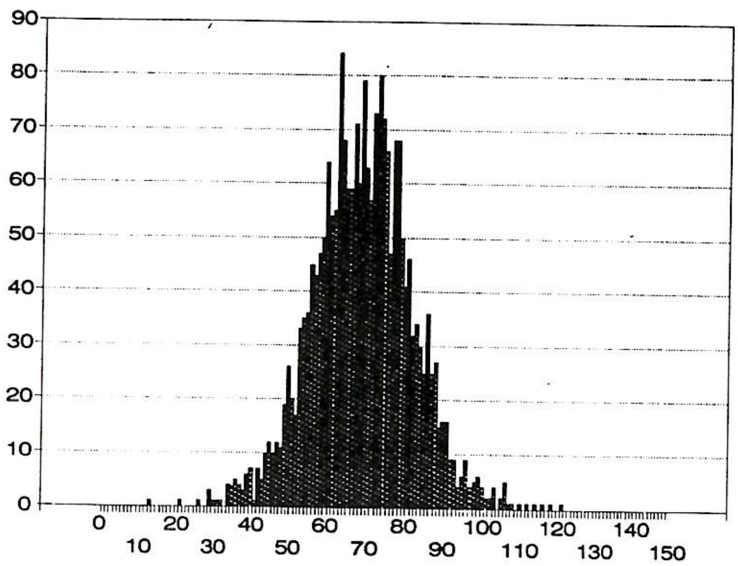
3 ième ELIMINATOIRE 1992



4 ième ELIMINATOIRE 1992



5 ième ELIMINATOIRE 1992



6 ième ELIMINATOIRE 1992