

MATH-JEUNES

Périodique trimestriel - 14^e année
Juin - Juillet 1992 - n°56

Bureau de dépôt: Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration: Place Matteotti 29 Bte 5, 7100 LA LOUVIERE.

Comité de Rédaction: M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, J.HUMIER, N.JOELANTS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, P.VAN ELSUWE, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS

Illustrations: R.A.CATTAUX

Conception de la couverture: K.MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

Belgique:

Etranger :

- | | |
|---|--|
| • Groupés (5 exemplaires au moins) : 100 FB | • Par paquet de 5 abonnements: 1000 FB |
| • Isolés: 140 FB | • Isolés: 280 FB |

Anciens numéros encore disponibles:

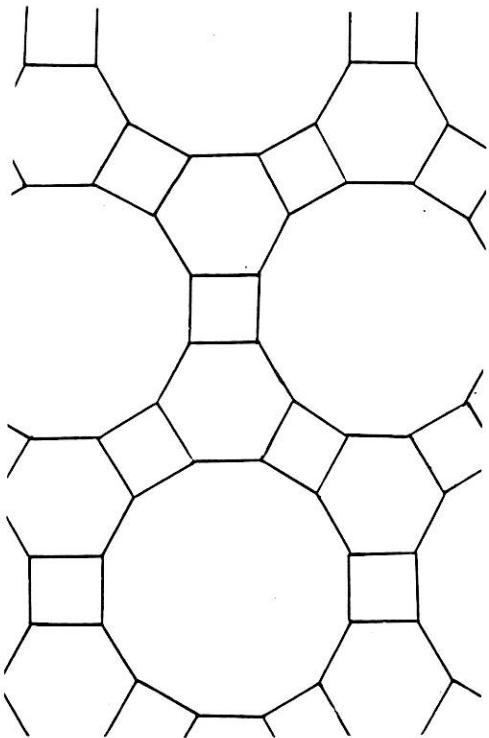
- | | |
|-----------------------|-------------------------------------|
| • Avant 1987 | Par numéro: 10 FB (Etranger: 20 FB) |
| • Années 88/89, 89/90 | Par année: 50 FB (Etranger: 100 FB) |
| • Année 90/91 | 80 FB (Etranger: 160 FB) |

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez Nadine DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

MATH-JEUNES



Simone Trompler Autour de 1492 : les grandes découvertes du Monde ... et des Mathématiques ?

62

66

Michel Ballieu. Une approche des objets fractals (suite)

Marc Lardinois. Rencontre d'un type de moyennes

69

72

Rallye problèmes

Jeux

77

78

Dix-septième Olympiade Mathématique Belge

En couverture : un quatrième pavage archimédien du plan, le type (4.6.12).

Tu trouveras en page 3 de couverture les onze types distincts de pavages archimédiens. Le type (3⁴.6) apparaît sous deux formes : l'une est la symétrie miroir de l'autre.

Autour de 1492 : les grandes découvertes du Monde ... et des Mathématiques ?

Simone Trompler

Eh bien, non, pas vraiment.

Vous connaissez les noms célèbres d'avant et d'après cette époque par *Math-Jeunes* et vous ne voyez personne à ce moment-là. Cela ne veut pas dire, pour autant, que les mathématiques stagnent. Une grande révolution se prépare; on pourrait parler d'une période de gestation. Le quinzième siècle est essentiellement un siècle de transition, riche de germes qui s'épanouiront surtout au siècle suivant.

Au milieu du quatorzième siècle, une grave crise démographique avait atteint l'Europe. La peste noire (1348) a probablement tué la moitié de la population. Et cela, au moment où des guerres (par exemple la guerre de Cent Ans) apportent partout la ruine.

Dès la deuxième moitié du quinzième siècle, le commerce se réorganise. Des compagnies à filiales voient le jour, surtout en Italie, sur une grande échelle. Les gros capitaux mis en jeu nécessitent des assurances, de la comptabilité, de la correspondance. Il faut, dès lors, apprendre le métier de marchand. En 1478 apparaît à Trevise le premier manuel d'arithmétique connu, bientôt suivi dans la décade de nombreux autres. Ils sont rédigés en langue vulgaire, toujours axés sur la pratique, dans le but d'aider les marchands dans leurs transactions, mais d'un niveau scientifique parfois fort élevé. Retenons parmi eux, celui de Nicolas CHUQUET, à Lyon en 1484 : "Le triparty en la science des nombres". Il est très influencé par l'Italie, ce qui n'est pas étonnant car Lyon était le siège d'une florissante colonie italienne. On y trouve la première apparition d'exposants, même négatifs, et l'auteur se montre confiant de voir résoudre dans un avenir plus ou moins lointain des équations d'un degré supérieur à deux.

En 1494 paraît la monumentale encyclopédie mathématique de Luca PACIOLI, la "Summa de arithmeticā, geometriā, proportioni et proportionalitā". Lui aussi a abandonné le latin pour assurer à son œuvre la plus grande diffusion dans toutes les classes sociales, mais il aboutit à un mélange hétéroclite de divers dialectes et de mots latins et grecs.

En même temps que se développe l'aspect pratique des mathématiques, l'intérêt se porte sur les traductions de textes classiques scientifiques, faites à partir des originaux directement et non plus à travers des traductions successives, de plus en plus déformantes, avec aussi un scrupule philosophique absent jusqu'alors.

Cette découverte ou redécouverte exercera une action dominante sur le développement de la science pure et appliquée pendant toute la Renaissance. Le plus célèbre de ces traducteurs est Johannes MÜLLER (1436-1476) dit REGIMONTANUS, du nom de sa ville natale Königsberg. Dès son enfance, il se passionne pour l'étude des classiques et des sciences mathématiques. Il vient en Italie et finit sa courte vie à Rome où le Pape l'a appelé pour préparer la réforme du calendrier. REGIMONTANUS personifie admirablement le goût humaniste pour l'érudition. Il connaît à fond EUCLIDE et PTOLÉMÉE et compose un traité de trigonométrie sur lequel se basera COPERNIC.

On ne peut pas parler du quinzième siècle sans évoquer le contact art-science-technique qui s'y est réalisé dans la peinture et l'architecture. Son importance est fondamentale dans le développement de la géométrie. Rappelons Filippo BRUNELLESCHI, l'architecte (1377-1446), Léon Battista ALBERTI, architecte, peintre, sculpteur, mathématicien (1406-1472), Piero DELLA FRANCESCA (1406-1492) le peintre qui peut être considéré comme le vrai théoricien de la nouvelle perspective et n'oublions pas le peintre Albrecht DÜRER (1471-1528) qui écrivit une œuvre de géométrie dans le but d'enseigner cette discipline aux artistes. Enfin, attardons-nous un petit peu sur Leonardo DA VINCI (1452-1519) et son œuvre immense. Sa conception du savoir scientifique est particulièrement importante. Il peut être vu comme le précurseur de GALILÉE par le poids qu'il apporte tant à l'expérience qu'à la mathématique. Chez lui, chacune des deux aide l'autre, lui fournit de nouvelles solutions, puis de nouveaux problèmes. Il ne se contente pas d'observer la Nature, mais essaie de la reproduire, d'imaginer le mécanisme de ses procédés. Il utilise sa fantaisie dans

la science comme dans l'art mais dans la recherche scientifique, il la précise et la rationalise à l'aide de la mathématique.

Nous arrêterons ici ce bref aperçu, scandaleusement simplifié, sec, lacunaire de cette période qui ouvre tant de voies nouvelles dans le monde entier et va transformer la vie de ses habitants.

Les grandes découvertes inaugurent une ère de voyages sans précédents, par leur éloignement, leur longueur, leur diversité. Les marins sillonnent les océans, abordent les terres connues et en recherchent de nouvelles. Des fortunes colossales se font et se défont. Les dangers de la navigation, l'importance du temps passé en mer nécessitent des cartes de plus en plus précises et le seizième siècle va connaître un développement considérable de la cartographie.

Permettons-nous, pour une fois, d'être chauvins et offrons-nous le plaisir d'évoquer ici notre célèbre flamand Geert DE CREMER, connu sous son nom latinisé Gerardus MERCATOR.

Il est né à Rupelmonde en 1512. Son père était cordonnier. Il fait des études brillantes, d'abord à Rupelmonde puis à 's Hertogenbosch et entre à l'Université de Louvain en 1530, à la Faculté de Philosophie. En deux ans, il est licencié !

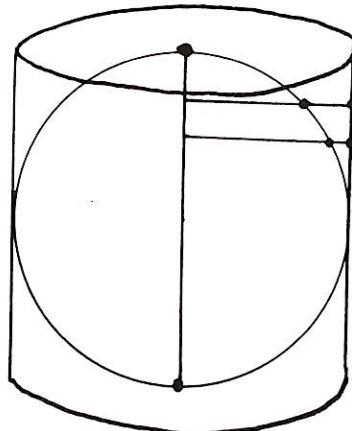
Bientôt il gagne sa vie en fabriquant des instruments de mesure. Il ouvre un magasin où on voit des globes terrestres et célestes, des anneaux astronomiques qui attirent l'admiration des savants. Sa renommée parvient jusqu'à Charles-Quint qui lui commande des globes, des anneaux, etc qu'il emmène à la bataille.

MERCATOR est autorisé aussi à donner des leçons de mathématiques, tellement il y est compétent. Il cherche à améliorer les cartes de l'époque. Il les dessine sur papier puis les grave dans le cuivre. La première carte qu'il fait lui-même est celle de la Terre Sainte. Il s'appuie sur des études, sur les récits des pèlerins et sur les Saintes Ecritures dont il confronte diverses versions. Mais cela lui vaut une certaine méfiance de la part de l'Eglise et il préfère s'installer à Anvers où règne plus de tolérance. Il retourne cependant à Louvain en 1536 et s'y marie. Il exerce le métier d'arpenteur, très lucratif à cette époque. Sa carte de Palestine est publiée en 1537 : "Amplissima Terrae Sanctae descriptio". En 1540 paraît sa grande "Carte des Flandres", pour laquelle il a parcouru tout le terrain, fait de multiples vérifications en suivant les méthodes de triangulation apprises de son maître Gemma FRISIUS.

Mais en 1544 il est arrêté avec quarante-deux autres bourgeois de Louvain, soupçonnés d'hérésie. Une fois dans les griffes de l'Inquisition, il n'est pas facile d'en sortir. Néanmoins, grâce à ses hautes relations (certains pensent à Charles-Quint lui-même), il est relâché au bout de quelques mois. Cette fois-ci, il quitte le pays avec sa famille et s'installe à Duisburg où l'appelle Guillaume IV, duc de Clèves. Il est attaché à sa cour avec le titre de cosmographe officiel, en 1552. C'est à lui qu'il dédie en 1569 l'œuvre considérable qui assure sa gloire. Il s'agit de la "Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendata accomodata" où il emploie sa projection, sur laquelle nous allons revenir. Dans les années qui suivent, il revoit et améliore des cartes et publie un recueil de dix cartes d'Europe, quatre d'Afrique et douze d'Asie. Il paraît que c'est à MERCATOR que nous devons le nom **atlas** pour désigner un recueil de cartes. "Mon travail ressemble, au sens figuré, à la tâche gigantesque d'Atlas", dit-il et il nomma son recueil "Atlas". Il meurt en 1594.

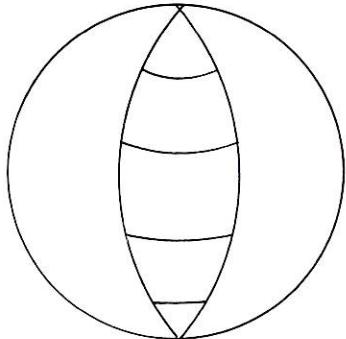
L'œuvre de MERCATOR représente une synthèse de l'esprit de la Renaissance : il a rassemblé, ordonné le copieux matériel existant dans une tentative d'interprétation et de conciliation de l'Antique et du Moderne, et il applique à la cartographie un procédé mathématique nouveau qui lui confère une précision scientifique aussi grande que les moyens de l'époque le permettent.

Pour ce faire, il part d'une projection axiale du globe terrestre sur le cylindre tangent à l'équateur :

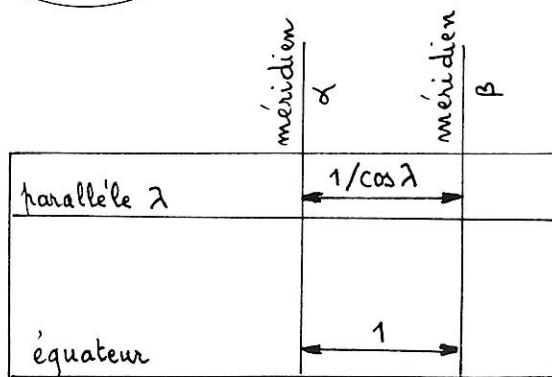
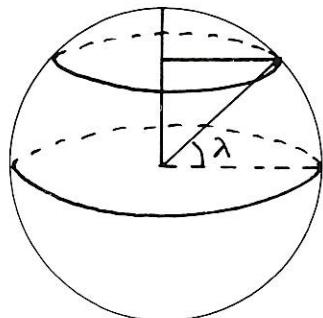


chaque point de la Terre est projeté perpendiculairement à l'axe sur ce cylindre. Lorsqu'on le déroule, les méridiens sont des segments de droite orthogonaux aux parallèles, également des segments de droite. Mais les méridiens sont équidistants et les parallèles ne le sont pas. Sur la Terre, les arcs entre

deux méridiens diffèrent selon la latitude, dans le rapport des rayons des parallèles correspondants.



Le rayon d'un parallèle de latitude λ est $R \cos \lambda$, si R est le rayon de l'équateur.



L'échelle de la distance entre les méridiens, sur la carte varie donc d'une latitude λ à l'équateur dans le rapport $\frac{1}{\cos \lambda}$.

Dans le but de conserver sur la carte la similitude de forme, localement, et l'amplitude des angles, MERCATOR corrige l'échelle le long des méridiens et la fait varier dans le même rapport que le long des parallèles, de sorte que, si nous appelons y la distance à l'équateur sur un mérIDIEN à la latitude λ ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\cos \lambda}$$

Plus les points de repère sont choisis près l'un de l'autre, plus l'échelle est précise. Nous écrivons actuellement :

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{\cos \lambda}$$

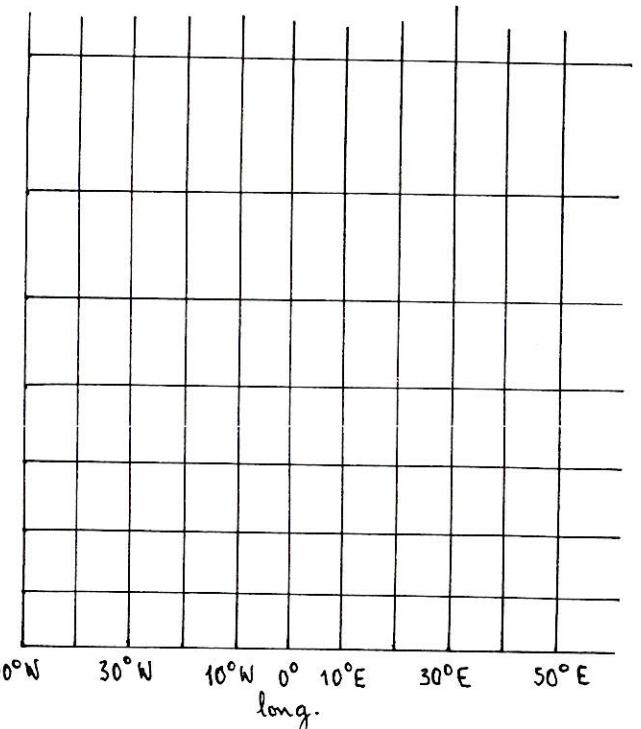
et nous intégrons :

$$y = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\cos \lambda}$$

Par des transformations trigonométriques :

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sin(90^\circ + \lambda)} \\ &= \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{2 \sin(45^\circ + \frac{\lambda}{2}) \cos(45^\circ + \frac{\lambda}{2})} \\ &= \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{2 \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\lambda}{2}) \cdot \cos^2(45^\circ + \frac{\lambda}{2})} \\ y &= \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\lambda}{2}) \end{aligned}$$

Ainsi MERCATOR a-t-il trouvé sans le savoir, une loi logarithmique alors que les logarithmes n'ont été inventés que 20 ans après sa mort (1614) et que la démonstration de l'intégrale a été faite par GREGORY en 1668.



Distance des méridiens au méridien 0° (unité le radian)

Distance des parallèles à l'équateur
 $y = \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\lambda}{2})$

| | |
|-------------------------|----------|
| $10^\circ = 0,1745$ rad | 0,1745 |
| $20^\circ = 0,3491$ | 0,3564 |
| $30^\circ = 0,5236$ | 0,5493 |
| $40^\circ = 0,6981$ | 0,7629 |
| $50^\circ = 0,8727$ | 1,0107 |
| $60^\circ = 1,0472$ | 1,3169 |
| $70^\circ = 1,2217$ | 1,7354 |
| $80^\circ = 1,3963$ | 2,4362 |
| $90^\circ = 1,5708$ | ∞ |

Cette projection est de très grande valeur pour les navigateurs, car les cartes dessinées donnent les angles justes. Elles ont la propriété que toute ligne droite sur elles représente une ligne d'orientation constante sur la Terre (qui coupe les méridiens sous un angle constant, ce que l'on appelle une **loxodromie**). Donc, si un marin veut naviguer d'un point à un autre, il mesure le cap sur une carte de MERCATOR. Le chemin suivi ne sera pas le plus court, il ne s'agit pas d'une **géodésique**, mais il est correct et, pour le marin, c'est le plus important. MERCATOR disait lui-même : "si vous souhaitez naviguer d'un point à un autre, voici une carte et une ligne droite sur elle, et si vous la suivez soigneusement, vous arriverez certainement à destination. Vous pouvez arriver plus tôt ou plus tard que prévu, mais vous y arriverez certainement".

En effet, si les angles sont conservés par ce système de cartes, les distances ne le sont pas puisque l'échelle varie constamment. De chaque côté de l'équateur, jusqu'à 15° de latitude, elles sont raisonnablement correctes. Si l'on veut s'écartez davantage, il faut employer, par exemple, une **projection transverse de Mercator**, qui choisit un cylindre de même direction, mais qui coupe le globe selon deux parallèles dont l'un est plus proche de la région choisie. On peut aussi utiliser un cylindre tangent selon un méridien. Les calculs diffèrent évidemment mais le principe reste le même.

Depuis MERCATOR, de nombreux perfectionnements ont été apportés, notamment en tenant compte de l'aplatissement de la Terre, mais le travail qu'il a effectué a marqué une étape décisive dans la cartographie et a rendu des services inappréciables à la Marine.

Bibliographie

- [1] Ludovico GEYMONAT. *Storia del pensiero filosofico e scientifico*.
- [2] Gino LORIA. *Storia delle matematiche*.
- [3] George SARTON. *The Study of the History of Mathematics*.
- [4] *Eléments d'histoire des Sciences*, sous la direction de Michel SERRES.
- [5] Pierre DEDRON – Jean ITARD. *Mathématiques et Mathématiciens*.
- [6] Lodewijk SCHELTJENS. *Gerard Mercator : zijn leven en werken*
- [7] A. HODGKISS. *Understanding maps*.
- [8] R.K. MELLINSH. *An introduction to the Mathematics of Map projections*.
- [9] André LIBAULT. *Histoire de la Cartographie*.
- [10] *Le visage nouveau du Monde au XX^e siècle*, in *La Nature*, n° 187 nov. 1950.
- [11] *Encyclopédia Universalis*
- [12] *Encyclopédia Britannica*
- [13] *Encyclopédia Italiana*



Une approche des objets fractals (suite)

Michel Ballieu, Athénée de Binche

1. Introduction

A la fin de la première partie de cet article (voir *Math-Jeunes* numéro 55), nous t'avons proposé une petite application graphique sur papier ou computer. Si tu as obtenu un *triangle de Sierpinski*, bravo ! La figure 1 te présente différents stades de sa réalisation (tu comprendras plus loin ce que représentent les rectangles "intérieurs"). Il a également été question d'**affinités**. Ici, nous parlerons plutôt de **transformations affines**... Mais, quel est le lien entre ces différentes choses ? Dans ce qui va suivre, notre but sera de te faire entrer "un tout petit peu" dans le monde merveilleux des **fractals**.

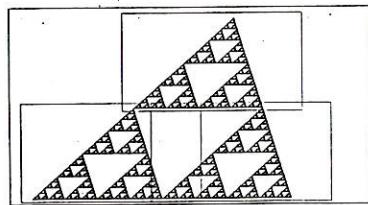


Figure 1

2. Transformations affines

Considérons l'ensemble \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels (x, y) et définissons-y les transformations suivantes : à tout (x, y) , on fait correspondre (x', y') donné par

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

3. Iterated Function System et algorithme du Jeu du Chaos

Nous allons considérer des **contractions affines** c'est-à-dire des transformations telles que si on considère deux points quelconques de \mathbb{R}^2 et leurs images respectives, alors les images sont "*plus proches*" l'une de l'autre (*closer together*, disent les anglo-saxons) que les points de départ; c'est volontairement que nous ne voulons pas être plus précis. On peut montrer que toute contraction affine possède **exactement un point fixe** dans \mathbb{R}^2 et que si (x_A, y_A) est le point fixe de la contraction A , alors quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= A(x, y) \\ (x_2, y_2) &= A(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ (x_n, y_n) &= A(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

alors lorsque n devient grand, le couple (x_n, y_n) se rapproche de (x_A, y_A) .

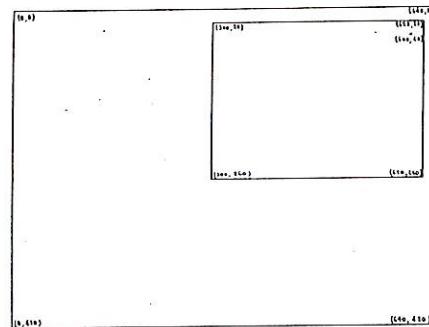


Figure 2

Exemple : dans la figure 2, le petit rectangle représente l'image du grand par la contraction affine :

$$\begin{aligned} x' &= 0,5x + 0y + 300 \\ y' &= 0x + 0,5y + 20 \end{aligned}$$

Le point $(600,40)$ est le point fixe de cette contraction.

Ne te laisse pas trop troubler par le système d'axes

qui est celui généralement utilisé sur les écrans d'ordinateurs, c'est-à-dire le point $(0, 0)$ dans le coin supérieur gauche, l'axe ox orienté de gauche à droite et oy de haut en bas.

Tout en continuant volontairement à rester très vagues, nous dirons qu'un "*iterated function system*" (*IFS*) est une "formule" permettant d'obtenir une image fractale; c'est un ensemble fini de contractions affines, donc un **petit** fichier de nombres réels (ces nombres réels étant les coefficients qui définissent les contractions). Quant à l'*algorithme du Jeu du Chaos*, il s'utilise comme un des moyens de base qui permet de passer d'un *IFS* à une image fractale appelée l'**attracteur** de l'*IFS*. Nous n'allons de nouveau qu'"effleurer" le problème — le but étant que cet article soit lisible par le plus grand nombre — et donc présenter l'algorithme dans un cas particulier qui te rappellera quelque chose.

Considérons l'*IFS* suivant :

$$\text{contraction n}^{\circ} 1 : \begin{cases} x' = 0,5x + 0y + 200 \\ y' = 0x + 0,5y + 10 \end{cases}$$

$$\text{contraction n}^{\circ} 2 : \begin{cases} x' = 0,5x + 0y + 20 \\ y' = 0x + 0,5y + 170 \end{cases}$$

$$\text{contraction n}^{\circ} 3 : \begin{cases} x' = 0,5x + 0y + 250 \\ y' = 0x + 0,5y + 170 \end{cases}$$

qu'il est plus simple (moyennant quelques conventions) de noter :

$$\left(\begin{array}{ccc} 0,5 & 0 & 200 \\ 0 & 0,5 & 10 \\ 0,5 & 0 & 20 \\ 0 & 0,5 & 170 \\ 0,5 & 0 & 250 \\ 0 & 0,5 & 170 \end{array} \right)$$

Tu vois bien qu'il s'agit d'un petit fichier de nombres réels !

Tu montreras assez aisément que les points fixes de chacune de ces trois contractions affines sont $(400, 20)$, $(40, 340)$ et $(500, 340)$.

Tu vérifieras également très facilement que, dans ce cas particulier, appliquer l'une quelconque de ces transformations à un point (x, y) de \mathbb{R}^2 revient à marquer le point milieu du segment qui relie (x, y) au point fixe de la transformation ! Cela te rappelle-t-il quelque chose ?

Maintenant, suppose que tu possèdes un dé ayant les caractéristiques décrites dans ton précédent

Math-Jeunes. Eh bien en gros, c'est cela le *Jeu du Chaos* : selon la marque du dé, on fait agir telle ou telle transformation ...

Tu peux maintenant écrire facilement ton propre programme informatique qui va dessiner des fractals; la fonction *random* va te servir de dé et il te suffira de faire rechercher par la machine l'image d'un point p_0 par une contraction choisie au hasard et d'afficher cette image p_1 , puis de recommencer : choisir une transformation au hasard, afficher l'image p_2 de p_1 par cette transformation, choisir une transformation au hasard, afficher l'image p_3 de p_2 , etc. La figure qui apparaît est la suivante :

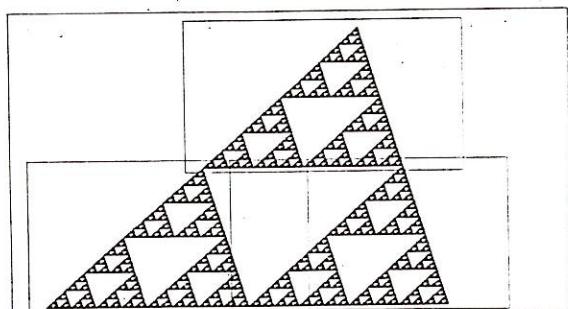


Figure 3

Nous dirons que la figure construite est l'**attracteur** de l'*IFS* ci-dessus. Evidemment, les petits rectangles intérieurs sont les images du grand par chacune des transformations précitées; tu dois savoir qu'avec la résolution d'écran utilisée ici, le coin supérieur gauche du grand rectangle a pour coordonnée $(0, 0)$ et son coin inférieur droit, $(640, 350)$. Il t'est dès lors facile de voir que chacun des sommets du grand triangle est le point fixe d'une des trois transformations de l'*IFS*.

4. Une nouvelle surprise fractale : la fougère

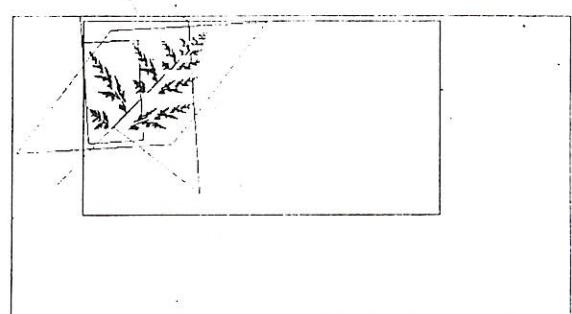


Figure 4

La figure 4 te présente l'attracteur de l'*IFS* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lll} 0 & -0,28 & 151 \\ 0 & 0,29 & 92 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} 0,64 & 0 & 82 \\ 0 & 0,64 & 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} -0,02 & 0,37 & 85 \\ -0,31 & 0,29 & 103 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} 0,17 & -0,51 & 183 \\ -0,22 & 0,03 & 148 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} -0,01 & 0,18 & 88 \\ -0,18 & -0,01 & 147 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Tu peux maintenant laisser libre cours à ton imagination et **créer** de nouveaux fractals; bon amusement !

5. Un dernier mot pour les “mathéux”

Considérons la *fonction de Weierstrass*

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^n x)$$

Cette fonction possède la propriété d'être partout continue mais nulle part dérivable !!!

En voici le graphe :

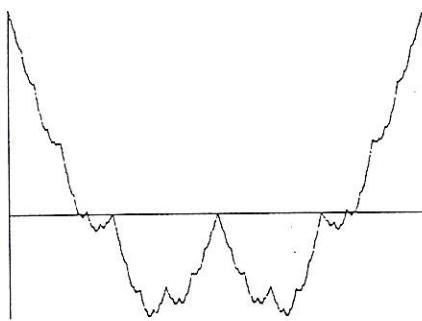


Figure 5

Nous allons essayer de l'obtenir par un procédé analogue à l'algorithme du jeu du chaos.

Remarquons que

$$\begin{aligned} w(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^n \cdot 2x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^{n+1}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cos(2^{n+1}x) \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cos(2^{n+1}x) \\ &= 2[w(x) - \cos x] \end{aligned}$$

Inversons cette relation; on a donc

$$w(x) = \frac{1}{2}w(2x) + \cos x$$

Changeons de notation, remplaçons x par x' :

$$w(x') = \frac{1}{2}w(2x') + \cos x'$$

Et posons $x = 2x'$: $w(x') = \frac{1}{2}w(x) + \cos \frac{x}{2}$ et $x' = \frac{x}{2}$

Enfin posons $y = w(x)$ et $y' = w(x')$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y + \cos \frac{x}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ainsi si le couple (x, y) appartient au graphique de w , alors le couple $(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}y + \cos \frac{x}{2})$ appartient aussi à ce graphique. La transformation (1) applique le graphique de w sur la moitié gauche de ce graphique. De la même manière, le lecteur verra que la transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x}{2} + \pi \\ y' = \frac{1}{2}y + \cos(\frac{x}{2} + \pi) \end{array} \right. \quad (2)$$

applique le graphique de w sur la moitié droite de ce graphique.

Ces transformations sont des contractions mais ne sont pas affines.

Le graphique de w est la réunion de deux parties qui lui ressemblent. Et chacune de ces deux parties est la réunion de deux parties qui ...

Nous avons là un nouvel exemple de fractal qui peut être construit de la même manière que la fougère.

Bibliographie

- [1] Michael BARNESLEY. *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] Michael BARNESLEY. *The Desktop Fractal Design Handbook*, Academic Press, 1989.
- [3] H.O. PEITGEN, H. JÜRGENS, D. SAUPE. *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag, 1992.
- [4] H.O. PEITGEN, H. JÜRGENS, D. SAUPE. *Fractals for the classroom : Strategic Activities Volume One*, Springer-Verlag, 1991.

Rencontre d'un type de moyennes

Marc Lardinois, Université de Mons

1. Introduction

Dans la vie quotidienne, nous entendons souvent l'expression "prendre LA moyenne" de a_1, \dots, a_n . Mais, ... de quelle moyenne s'agit-il ?

Quadratique $\left(\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}\right)$, arithmétique $\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$, géométrique $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$, harmonique $\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}\right)$, ... ?

Il n'est pas très difficile de trouver des exemples où toutes ces moyennes sont différentes : $n = 4, a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 12$ donne $\frac{5}{2} \cdot \sqrt{10} \simeq 8$ pour moyenne quadratique, 7 pour moyenne arithmétique, 6 pour moyenne géométrique et $\frac{36}{7} \simeq 5$ pour moyenne harmonique.

Nous allons montrer que, même si nous nous limitons au seul **type de moyennes** de réels strictement positifs a_1, \dots, a_n défini par $\left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ où x est un réel non nul (définition que l'on prolonge pour $x = 0$ et $x = \pm\infty$), nous pouvons atteindre pour "la" moyenne n'importe quelle valeur comprise entre $\min_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$ et $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$.

2. Théorème

Si n est un naturel non nul et a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs

Alors la fonction définie sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ à valeurs dans $[\min_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i, \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i]$:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} & \text{si } x = 0 \\ \min_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i & \text{si } x = -\infty \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i & \text{si } x = +\infty \end{cases}$$

est une bijection continue et strictement croissante dès que $\min_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i < \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$.

Evidemment, si $\min_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$,

alors $a_1 = \dots = a_n = f$ qui est alors constante.

Nous allons présenter ci-dessous une preuve en onze points (dont les démonstrations sont indépen-

dantes) en laissant au lecteur le soin de vérifier que la juxtaposition de ces onze démonstrations fournit une preuve correcte et complète du résultat; les points 2 à 7 livrent la croissance stricte et les quatre derniers garantissent la continuité en "bouchant les trous éventuels". Quant à la bijectivité (dans le cas général), elle résulte directement de la croissance stricte et de la continuité.

3. Preuve

Point n° 1 : montrons que $f(0) \leq f(1)$ (l'égalité survient si $a_1 = \dots = a_n$).

Montrons d'abord par récurrence que ceci est vrai si n est une puissance de 2 ($n = 2^k$). Le principe de la démonstration par récurrence, rappelons-le, est le suivant :

- on constate **par calcul** que le théorème est vrai pour une petite valeur de n
- on montre alors que, en supposant le théorème vrai pour une certaine valeur de n , cela implique qu'il est également vrai pour la valeur suivante de n

ceci suffit évidemment à rendre le théorème vrai pour toutes les valeurs de n supérieures à la "petite valeur" de départ (mais oui, réfléchis bien ... C'est facile à comprendre !)

Soit donc $n = 2^k$.

- vérification pour une petite valeur de n ($n = 2^0 = 1$) :

on a $f(0) = a_1 = f(1)$, ce qui donne bien $f(0) \leq f(1)$.

Nous aurons besoin du fait que l'assertion est vraie pour $n = 2$: montrons-le donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_1 - a_2)^2 \\ 0 &\leq a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \\ 4a_1 \cdot a_2 &\leq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2 \\ 4a_1 \cdot a_2 &\leq (a_1 + a_2)^2 \\ 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} &\leq a_1 + a_2 \\ \sqrt{a_1 \cdot a_2} &\leq \frac{a_1 + a_2}{2} \end{aligned}$$

et on a bien l'égalité lorsque $a_1 = a_2$

- supposons maintenant l'affirmation vraie pour $n = 2^k$ et montrons que cela implique qu'elle l'est aussi pour $n = 2^{k+1}$.

L'hypothèse est donc

$$\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}$$

il en vient :

$$\begin{aligned} & \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} \\ &= \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\ &\leq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \end{aligned}$$

(car nous venons de voir que le résultat était vrai pour $n = 2$)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\ &\quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\ &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Le lecteur verra aisément que l'égalité n'a lieu que si $a_1 = \cdots = a_{2^{k+1}}$

Courage ..., car il reste à envisager le cas général où n n'est pas une puissance de 2.

Quel que soit n naturel non nul, on peut très facilement trouver k naturel tel que $n \leq 2^k$. En appliquant ce qui précède aux 2^k réels po-

$\underbrace{(2^{k-n}) \text{ fois}}$

sitifs $a_1, \dots, a_n, \overbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \dots, \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}$, il vient :

$$\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{2^{k-n}}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + (2^{k-n}) \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{2^k}$$

(l'égalité n'a lieu que dans le cas déjà signalé et cela restera vrai dans tout ce qui suivra; nous nous permettrons donc de ne plus évoquer cette éventualité !)

On voit facilement que ce qui précède équivaut à :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{2^{k-n}}} \leq \left(\frac{(n+2^{k-n}) \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{2^k}\right)^{\frac{2^k}{n}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{2^k-n}{n}} &\leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{2^k}{n}} \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} &\leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{2^k}{n} - \frac{2^k-n}{n}} \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} &\leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

On a donc bien, quel que soit le naturel non nul n , $f(0) \leq f(1)$.

Point n° 2 : f est croissante sur $]0, +\infty[$

Nous aurons besoin de la formule de dérivation de u^v lorsque u et v sont des fonctions de la variable indépendante x :

$$(u^v)' = u^{v-1} \cdot (uv' \ln u + vu')$$

(on obtient facilement cette formule en remplaçant u^v par $e^{v \ln u}$)

Si $0 < x < +\infty$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \right]' = \\ &= \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}-1} \left[\left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)' \right] = \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}-1} \left[x \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

(en effet, si $1 \leq i \leq n$, $(a_i^x)' = a_i^x \ln a_i$)

Comme $\frac{1}{x^2} > 0$ et $\left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}-1} > 0$, il reste à prouver que :

$$\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \leq x \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \leq \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{n}.$$

En posant $A_i = a_i^x$ ($1 \leq i \leq n$), prouver ce qui précède revient à montrer que quels que soient A_1, \dots, A_n réels strictement positifs alors $\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \ln \left(\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \right) \leq \frac{A_1 \ln A_1 + \cdots + A_n \ln A_n}{n}$.

Pour cela, nous avons besoin du théorème de JENSEN dont voici un énoncé :

Si g est une fonction d'une variable réelle deux fois continûment dérivable⁽¹⁾ sur un intervalle ouvert I et si $g'' > 0$ sur I , alors quels que soient n naturel non nul et A_1, \dots, A_n dans I , $g \left(\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \right) \leq \frac{g(A_1) + \cdots + g(A_n)}{n}$ (l'égalité survient ssi $A_1 = \cdots = A_n$).

⁽¹⁾ Une fonction continûment dérivable est une fonction dérivable dont la dérivée est continue

AVERTISSEMENT

Il est bien évident qu'il est encore moins possible de faire un inventaire exhaustif des mathématiciens "modernes" que de leurs prédecesseurs.

Quant à ce qu'ils ont fait ... dis-toi bien ami lecteur, que la recherche actuelle fait appel à un nombre considérable de structures et d'objets mathématiques dont un étudiant "normal" de l'enseignement secondaire n'a pas idée. Nous nous sommes donc bornés à ne citer que ce qui est capable d'évoquer vaguement quelque chose à de tels étudiants.

1800 : pile électrique (VOLTA)

1827 : loi d'OHM

1876 : téléphone de BELL

1820 : électromagnétisme (CERSTED)

1843 : télégraphe électrique de MORSE

1824 : thermodynamique (CARNOR)

1832 : machine analytique de BABBAGE

1859 : DARWIN : origine des espèces

1865 : mort de HUGO

1826 : électrodynamique (AMPÈRE)

1842 : loi de JOULE

1843 : théorie ondulatoire de la lumière (FRESNEL)

Nicolai Ivanovitch LOBATCHEVSKI(1793,1856)

Professeur à l'Université de Kazan, il développa en 1829 dans une revue confidentielle, le *Messager de Kazan*, les principaux résultats d'une géométrie non euclidienne dans laquelle, par un point extérieur à une droite passent plusieurs parallèles à cette droite. Avec J. BOLYAI, il est considéré comme le fondateur de cette géométrie dite *hyperbolique*.

Evariste GALOIS(1811,1832)

Ses travaux mathématiques étaient largement en avance sur son temps. Sautant à pieds joints au-dessus des calculs, il établit l'impossibilité d'établir une formule exprimant à l'aide de radicaux la solution de l'équation générale de degré supérieur à 4. Ce faisant, il est l'un des créateurs de la théorie des groupes.

Charles HERMITE(1822,1901)

En 1873, il établit la transcendance du nombre e , c'est-à-dire le fait que ce nombre n'est zéro d'aucun polynôme à coefficients entiers. Il prépare ainsi la voie à LINDEMANN (1852,1939) qui en fait autant pour le nombre π en 1882.

Niels Henrik ABEL(1802,1829)

Avant GALOIS, il établit que l'équation générale du 5^e degré n'est pas résoluble par radicaux. Mais il obtient également de nouveaux types d'équations dont certaines sont dites "abéliennes" et qui sont résolubles par radicaux. Il définit également la notion de polynôme irréductible par radicaux.

Karl WEIERSTRASS(1815,1897)

Spécialiste des développements en série, WEIERSTRASS s'intéresse particulièrement aux fonctions d'une variable complexe. Il donne aussi un exemple de fonction continue en tout point d'un intervalle et qui n'est dérivable en aucun point de cet intervalle.

Bernhard RIEMANN(1826,1866)

Ses contributions à l'analyse et à la géométrie sont considérables. En analyse, il construit une intégrale qui porte toujours son nom. Il formule aussi une conjecture toujours non démontrée dont les conséquences notamment pour la théorie des nombres premiers seraient importantes. En géométrie, il crée une géométrie non euclidienne dont un modèle est la sphère. Sur celle-ci, les droites sont les grands cercles et les parallèles n'existent pas.

Sophus LIE(1842,1899)

Dès 1871, il étudie les groupes de transformations et pose explicitement le problème de la détermination de tous les sous-groupes du groupe des matrices inversibles. Il crée la théorie des groupes continus qui portent aujourd'hui son nom. Un exemple de groupe de LIE est le groupe des rotations planes ou dans l'espace.

Arthur CAYLEY(1821,1895)

Après que SYLVESTER (1814,1897) ait défini la notion de matrice, CAYLEY contribue de façon essentielle à en développer le calcul. Il participe à l'éaboration de l'algèbre linéaire dans des espaces de dimension quelconque. Il s'intéresse également, entre autres choses, à la représentation des groupes abs-trait par des groupes de permutation.

Janos BOLYAI(1802,1860)

Dès 1825, il avait établi les principes de la géométrie hyperbolique mais ce n'est qu'en 1832 qu'il les publia. En fait, il avait été devancé par le russe LOBATCHEVSKI qui avait, indépendamment, élaboré la même théorie. Les travaux de BOLYAI et LOBATCHEVSKI amènent les mathématiciens à repenser la notion de vérité en mathématique et à préciser le rôle de l'axiomatique.

Peter Gustav LEJEUNE DIRICHLET(1805,1859)

Il définit la notion moderne de fonction d'une variable réelle et s'intéresse à de nombreux domaines d'analyse ou de théorie des nombres dont la convergence de séries de fonctions.

1887 : ondes hertziennes

1896 : radioactivité (BECQUEREL)

1903 : premier aéroplane

1918 : RUTHERFORD désintègre l'atome

1941 : Pearl Harbor

1888 : fondation de l'Institut PASTEUR

1900 : dirigéable de ZEPPLIN

1909 : BLÉRIOT traverse la Manche

1927 : LINDBERGH traverse l'Atlantique

1895 : rayons X (RÖNTGEN)

1898 : radium (Marie CURIE)

1937 : lancement de Spoutnik I

1850

1900

David HILBERT(1862,1943)

En 1899, après plusieurs tentatives notamment de PEANO(1858,1932) et PASCH (1843,1930), il est le premier à élaborer une axiomatique cohérente et complète de la géométrie euclidienne. Ses travaux portent sur de nombreux domaines des mathématiques : théorie des nombres algébriques, analyse, logique mathématique. En 1900, il énumère vingt-trois problèmes ouverts dont la solution nécessiterait de nouvelles méthodes susceptibles d'être "importantes" en mathématique. Certains de ces problèmes ne sont toujours pas résolus.

John VON NEUMANN(1903,1957)

Un des derniers mathématiciens à avoir apporté des contributions décisives à plusieurs domaines fondamentaux des mathématiques. En théorie des ensembles, il construit une théorie axiomatique dans laquelle il distingue deux types d'objets : les ensembles et les classes, ce qui permet d'éviter les paradoxes. En analyse fonctionnelle, il étudie notamment certains types particuliers d'opérateurs. Ses contributions sont également notables en physique mathématique ainsi qu'en informatique : les ordinateurs fonctionnent encore sur la base d'une architecture classique conçue par VON NEUMANN.

Felix CANTOR(1845,1918)

CANTOR est surtout connu pour avoir créé la théorie des ensembles. Il n'est pas inutile d'ajouter qu'il n'a été amené à cette théorie que pour résoudre des problèmes liés à la convergence de séries de fonctions. Le théorème de CANTOR affirme que tout ensemble a moins d'éléments que son ensemble de parties, ce qui montre l'existence d'une infinité d'infinis.

Kurt GöDEL(1906,1978)

Le théorème de GöDEL est considéré comme le résultat le plus important de la logique mathématique. De façon quelque peu approximative, nous pouvons dire qu'il affirme que tout système axiomatique suffisamment développé contient au moins un énoncé qui ne peut être démontré et dont la négation ne peut non plus être démontrée.

Felix HAUSDORFF(1868,1942)

Les voisinages sont introduits par HAUSDORFF pour étudier les concepts de limite, continuité, convergence. Il contribue ainsi à la fondation de la branche des mathématiques connue sous le nom de topologie. Il définit aussi la dimension de HAUSDORFF d'un ensemble, dimension qui peut ne pas être un entier et sert actuellement à caractériser les ensembles fractionnels.

Felix KLEIN(1849,1925)

Dans le célèbre *Programme d'Erlangen* (1872), il conçoit une géométrie comme étant l'étude des invariants d'un groupe de permutations. Il permet ainsi la distinction entre propriétés affines (parallelisme, . . .), propriétés euclidiennes (perpendicularité, . . .), etc. La bouteille de KLEIN est un exemple célèbre de surface fermée non orientable.

Henri POINCARÉ(1854,1912)

Il contribue à développer la théorie des fonctions en définissant et étudiant notamment la classe des fonctions automorphes. Ses travaux sur l'équation des ondes contribuent à mettre en évidence les notions de vecteur propre et valeur propre d'une application linéaire. Il prend également part aux discussions concernant les fondements des mathématiques.

Henri-Léon LEBESGUE(1875,1941)

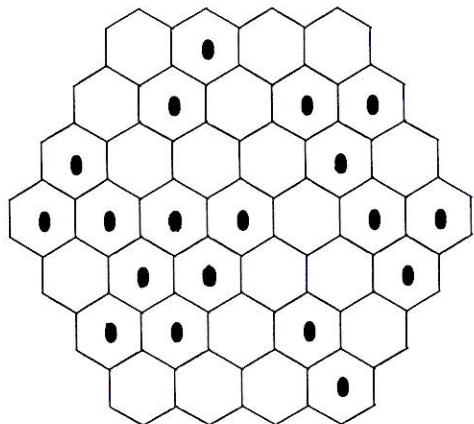
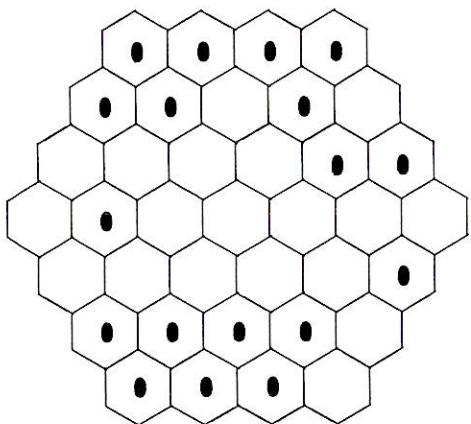
La mesure de LEBESGUE généralise la notion d'aire dans le plan ou de volume dans l'espace. LEBESGUE étend la notion d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle introduite par RIEMANN, permettant ainsi la définition des espaces de fonctions qui servent de cadre à l'étude des opérateurs différentiels.

Nicolas BOURBAKI(1934,?)

BOURBAKI est le seul personnage de notre liste qui n'existe pas. Sous ce pseudonyme se cache une équipe de mathématiciens dont la composition varie avec le temps. Les fondateurs étaient H. CARTAN, C. CHEVALLEY, J. DIEUDONNÉ, J. DESARTE et A. WEIL. BOURBAKI a entrepris la publication des *Éléments de mathématique*, ouvrage encore inachevé ayant l'ambition d'exposer l'ensemble des mathématiques contemporaines. Ce travail a exercé une influence considérable sur le développement des mathématiques en France.

Solution des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Grille des moyennes (par C. Parent)

| | | | |
|----|---|---|---|
| | 2 | 3 | |
| 11 | 6 | 4 | 2 |
| 5 | 7 | 5 | 6 |
| 12 | 3 | | |

| | | | |
|----|----|----|----|
| | 12 | 23 | |
| 11 | 19 | 21 | 15 |
| 51 | 32 | 27 | 12 |
| 31 | 43 | | |

| | | | |
|----|----|---|----|
| | 4 | 9 | |
| 3 | 7 | 9 | 12 |
| 17 | 12 | 8 | 5 |
| 16 | 6 | | |

Nombres croisés

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 9 | | 1 | 6 |
| 2 | | 2 | 1 | 3 | |
| 3 | | 6 | 7 | 5 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | | 7 | 0 |
| 5 | 4 | | 2 | 9 | 7 |

Il y a diverses façons d'énoncer et de démontrer ce théorème. Pour s'en convaincre, il suffit d'interpréter géométriquement la concavité de la courbe d'équation $y = g(x)$.

Pour les puristes, signalons qu'une manière élégante de démontrer ce théorème est de le faire d'abord pour $n = 1$ (c'est trivial !), $n = 2$ (formaliser l'interprétation géométrique) puis de généraliser à n naturel non nul via les puissances de 2 comme au point n° 1.

Dans le cas particulier où $I =]0, +\infty[$, $g(x) = x \ln x$, on a $g'(x) = \ln x + 1$ et $g''(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Il est donc permis d'appliquer le théorème de JENSEN à la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \ln x$, ce qui termine la démonstration du point n° 2.

Point n° 3 : f est croissante sur $]-\infty, 0[$

La preuve du point n° 2 reste valable.

Point n° 4 : Si $x > 0$ alors $f(0) \leq f(x)$

Appliquons le résultat du point n° 1 à a_1^x, \dots, a_n^x . Il vient $\sqrt[n]{a_1^x \cdots a_n^x} \leq \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}$. En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{x} > 0$, on obtient $f(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = f(x)$.

Point n° 5 : Si $x < 0$ alors $f(x) \leq f(0)$

La démonstration est analogue à celle du point n° 4, le sens de l'inégalité finale étant inversé parce qu'on élève les deux membres à la puissance $\frac{1}{x} < 0$.

Point n° 6 : Si $x > 0$ alors $f(x) \leq f(+\infty)$

Quel que soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i = f(+\infty)$ et, par conséquent, $a_i^x \leq [f(+\infty)]^x$ car $x > 0$. En additionnant ces n inégalités membres à membres, il vient $a_1^x + \cdots + a_n^x \leq n[f(+\infty)]^x$ et $f(x) = \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \leq f(+\infty)$.

Point n° 7 : Si $x < 0$ alors $f(-\infty) \leq f(x)$

On procède comme au point n° 6.

Point n° 8 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = [f(0)]^+$

(la notation signifie que lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $f(x)$ tend vers $f(0)$ par valeurs supérieures à $f(0)$)

Par le point n° 4,

$$f(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = f(x).$$

Prenant le \ln des deux membres (\ln est strictement croissante), on a $\frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n) \leq \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)$.

D'autre part, on sait que $\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \leq \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{n}$.

On en tire

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \leq \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{a_1^x + \cdots + a_n^x}$$

car $x > 0$.

Rapprochant ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n) &\leq \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \\ &\leq \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{a_1^x + \cdots + a_n^x}. \end{aligned}$$

Faisons tendre x vers 0 :

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n) = \frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n)$$

car l'expression considérée ne dépend pas de x

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{a_1^x + \cdots + a_n^x} = \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n}$$

Par suite ("théorème du sandwich"),

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) = \frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n).$$

Et en prenant les exponentielles des deux membres (l'exponentielle est une fonction continue), on a finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= (\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n})^+ = [f(0)]^+. \end{aligned}$$

Point n° 9 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = [f(0)]^-$

Il suffit de procéder comme au point n° 8 en partant de 5 au lieu de 4 pour l'inégalité de gauche et en notant l'inversion de l'inégalité de droite dû à la multiplication par $\frac{1}{x} < 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots + \ln a_n) &\geq \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \\ &\geq \frac{a_1^x \ln a_1^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{a_1^x + \cdots + a_n^x} \end{aligned}$$

et le reste suit comme au point n° 8.

Point n° 10 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [f(+\infty)]^-$

On sait, par le point n° 6, que

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i = f(+\infty).$$

D'autre part, il est évident que

$$[f(+\infty)]^x = \left[\max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i\right]^x \leq a_1^x + \cdots + a_n^x \text{ car l'un}$$

des a_i vaut déjà $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$.

Ainsi $\frac{[f(+\infty)]^x}{n} \leq \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}$ et donc

$$\frac{f(+\infty)}{n^{\frac{1}{x}}} \leq \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = f(x) \text{ car } \frac{1}{x} > 0.$$

Rapprochant ces deux inégalités, on obtient

$$\frac{f(+\infty)}{n^{\frac{1}{x}}} \leq f(x) \leq f(+\infty)$$

Faisons tendre x vers $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(+\infty)}{n^{\frac{1}{x}}} = \frac{f(+\infty)}{n^0} = f(+\infty)$

$(f(+\infty)) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$ ne dépend pas de x)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ (pour la même raison)

Finalement, à nouveau par le "théorème du sandwich", nous pouvons conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [f(+\infty)]^-$$

Point n° 11 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} = [f(-\infty)]^+$

Il suffit de procéder comme au point 10 :

Le point n° 7 nous dit que $f(-\infty) \leq f(x)$, de plus il est clair que $[f(-\infty)]^x \leq a_1^x + \dots + a_n^x$.

Il en découle $\frac{[f(-\infty)]^x}{n} \leq \frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}$ et, puisque $\frac{1}{x} < 0$, $f(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \leq \frac{f(-\infty)}{n^{\frac{1}{x}}}$.

On obtient finalement l'encadrement

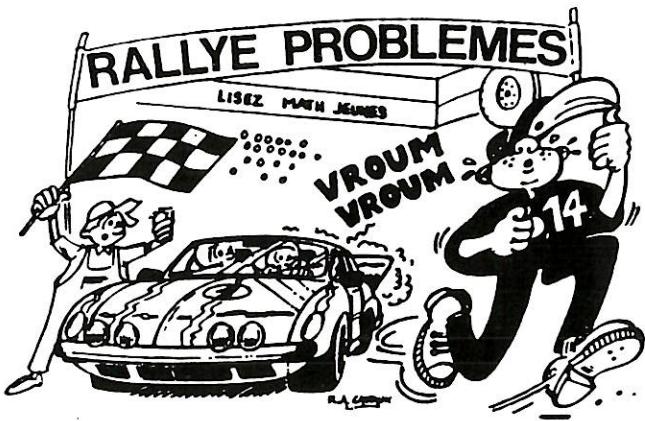
$$f(-\infty) \leq f(x) \leq \frac{f(-\infty)}{n^{\frac{1}{x}}}$$

que l'on traite comme au point précédent.

Signalons, pour terminer, que le classique théorème des *quatre moyennes* n'est rien d'autre que l'inégalité

$$f(-\infty) \leq f(-1) \leq f(0) \leq f(2) \leq f(+\infty)$$

l'égalité étant atteinte ssi $a_1 = \dots = a_n$; l'ordre des moyennes dans l'exemple de départ n'était donc pas dû au hasard !



C. Festraets

Voici la liste des lauréats de ce rallye. À tous mes vives félicitations.

CLAUDE DESSET (Séminaire St-Joseph, Bastogne)

FRÉDÉRIC BOURGEOIS (Coll. St-Michel, Bruxelles)

PHILIPPE NIEDERKORN (Inst. Ste-Marie, Arlon)

SÉBASTIEN LEROY (Inst. St Boniface-Parnasse, Bruxelles)

CAROLINE RODEGHIERO (Inst. Ste-Marie, La Louvière)

SAMUEL DELCOURT (Inst. St-Joseph, Carlsbourg)

En outre, un prix spécial est attribué à la classe de troisième C de l'Athénée Royal de Mons (qui a réussi à m'envoyer les trois dernières solutions en un temps record) de manière à récompenser son excellent travail.

Solutions des problèmes des numéros 54 et 55

m4 Solution de SAMUEL DELCOURT (15 ans)

Les années sur Xin, Aurore et Zwicky durent respectivement

$$416 \times 30 = 12480 \text{ heures terrestres}$$

$$200 \times 36 = 7200 \text{ heures terrestres}$$

$$945 \times 20,8 = 19656 \text{ heures terrestres}$$

ou encore

$$\frac{12480}{24} = 520 \text{ jours terrestres}$$

$$\frac{7200}{24} = 300 \text{ jours terrestres}$$

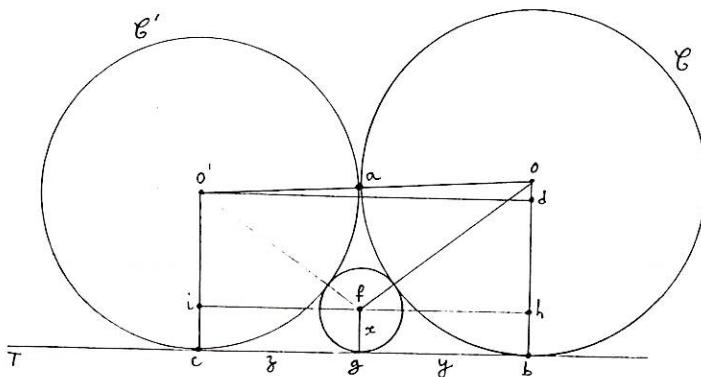
$$\frac{19656}{24} = 819 \text{ jours terrestres}$$

Recherchons le ppcm de 520, 300, 819 :

$520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$, le ppcm est donc $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 = 163800$. Les mamans se rencontreront dans 163800 jours terrestres, soit 448 ans et 280 jours. Leurs enfants seront âgés de

$$\frac{163800}{520} = 315 \text{ ans}; \frac{163800}{300} = 546 \text{ ans}; \frac{163800}{819} = 200 \text{ ans respectivement.}$$

m5 Solution des élèves de la classe de troisième C de l'Athénée Royal de Mons



Les deux cercles C (de rayon R) et C' (de rayon r) sont tangents en a ; o, a, o' sont alignés.

Soit T une tangente commune extérieure.
 $ob \perp T$ et $|ob| = R$, $o'c \perp T$ et $|o'c| = r$.

Soit f le centre du cercle inscrit dans le triangle curviligne bac ; menons $fg \perp T$ et posons $|fg| = x$, $|bg| = y$, $|cg| = z$. Menons $o'd \parallel T$.

Dans le triangle rectangle odo' :

$$\begin{aligned} |oo'|^2 &= |od|^2 + |o'd|^2 \\ (R+r)^2 &= (y+z)^2 + (R-r)^2 \\ \text{d'où } (y+z)^2 &= 4Rr \end{aligned} \quad (1)$$

Menons, par f , $hi \parallel T$

Dans le triangle rectangle ohf :

$$(R+x)^2 = y^2 + (R-x)^2$$

$$\text{d'où } y^2 = 4Rx \quad (2)$$

Dans le triangle rectangle $o'if$:

$$(r+x)^2 = z^2 + (r-x)^2$$

$$\text{d'où } z^2 = 4rx \quad (3)$$

Des égalités (1), (2) et (3), on tire

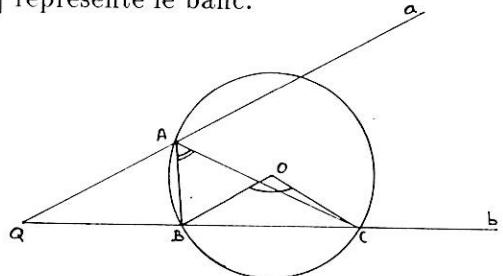
$$\begin{aligned} y+z &= 2\sqrt{Rr} \\ y &= 2\sqrt{Rx} \\ z &= 2\sqrt{rx} \end{aligned}$$

il faut donc

$$\begin{aligned} \sqrt{Rx} + \sqrt{rx} &= \sqrt{Rr} \\ \sqrt{x} \cdot (\sqrt{R} + \sqrt{r}) &= \sqrt{Rr} \\ \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \end{aligned}$$

$$\text{Elevons au carré : } x = \frac{Rr}{R+r+2\sqrt{Rr}}$$

m6 Soient Qa et Qb les deux allées. Le segment $[BC]$ représente le banc.



Il s'agit de trouver le point A sur Qa tel que l'angle \widehat{BAC} soit maximum.

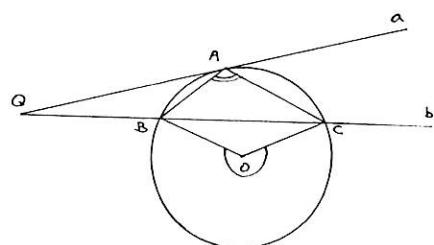
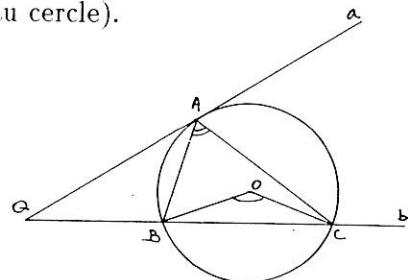
Considérons un cercle variable comprenant B et C (son centre O est sur la médiatrice de $[BC]$).

Supposons que ce cercle rencontre Qa et soit A un point d'intersection.

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

donc \widehat{BAC} est maximum lorsque \widehat{BOC} est maximum (le cercle ayant une intersection non vide avec Qa).

Cette condition est remplie lorsque le cercle est tangent à Qa . L'observateur se placera alors au point de tangence A déterminé par $|QA|^2 = |QB| \cdot |QC|$ (puissance de Q par rapport au cercle).



M4 Solution de CAROLINE RODEGHIERO (16 ans)

Le nombre de façons de joindre 30 points deux à deux est

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$$

(chacun des 30 points est joint aux 29 autres, mais de cette façon, chaque segment obtenu est

compté deux fois).

Le nombre total d'arêtes des 5 quadrilatères, des 6 pentagones et des 7 hexagones est

$$5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 92.$$

Ce nombre doit être divisé par deux, car dans le diamant, chaque arête est commune à deux faces.

Il y a donc $\frac{92}{2} = 46$ arêtes.

Cherchons le nombre total de diagonales des faces :

- dans un quadrilatère, il y a 2 diagonales
 - dans un pentagone, il y a 5 diagonales
 - dans un hexagone, il y a 9 diagonales,
- d'où au total $5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 9 = 103$

Le nombre de diagonales intérieures du diamant vaut donc $435 - 46 - 103 = 286$.

M5 Solution de CLAUDE DESSET (18 ans)

On partage l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles disjoints

$$I_1 = [0, \frac{1}{n}], I_2 = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, I_n = [\frac{n-1}{n}, 1].$$

On considère les réels $a, 2a, \dots, (n-1)a$ modulo 1 (c'est-à-dire leurs parties décimales) ; chacun des nombres $a, 2a, \dots, (n-1)a$ est alors congru à un nombre noté a_1, a_2, \dots, a_{n-1} situé dans l'un de ces intervalles.

- 1) Si l'un des nombres a_i appartient à I_1 ou à I_n , il est à une distance inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$ de 0 ou de 1 et donc le nombre $i \cdot a$ est à une distance inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$ d'un entier.
- 2) Si aucun des a_i n'appartient ni à I_1 , ni à I_n , les $n-1$ nombres a_1, a_2, \dots, a_{n-1} sont répartis dans les $n-2$ intervalles I_2, I_3, \dots, I_{n-1} . En vertu du principe des tiroirs, il y en aura au moins 2 dans le même intervalle. Soient a_i et a_j ces deux nombres (avec $i < j$). Comme la largeur de chaque intervalle est $\frac{1}{n}$, on a $|a_j - a_i| < \frac{1}{n}$. Posons $i \cdot a = p + a_i$ et $j \cdot a = q + a_j$ ($p, q \in \mathbb{Z}$).

$$j \cdot a - i \cdot a = (q - p) + (a_j - a_i)$$

$$(j-i) \cdot a = \begin{cases} (q-p) + |a_j - a_i| & \text{si } a_j \geq a_i \\ (q-p) - |a_j - a_i| & \text{si } a_j \leq a_i \end{cases}$$

$1 \leq i < j < n$, donc $1 \leq j-i < n$; le nombre $(j-i) \cdot a$ appartient bien à l'ensemble $\{a, 2a, \dots, (n-1)a\}$ et est à une distance $|a_j - a_i| < \frac{1}{n}$ de l'entier $q-p$.

M6 Solution de PHILIPPE NIEDERKORN (16 ans)

Appelons u_n le nombre de façons de vider un tonneau de n litres avec une bouteille de 1 litre et une bouteille de 2 litres.

Le nombre demandé est donc u_{1992} .

Il est évident que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

Pour $n \geq 3$, cherchons à établir une formule récurrente. Pour obtenir u_{n+1} , la dernière opération s'effectue

- soit avec une bouteille d'un litre, et on avait auparavant déjà vidé n litres;
- soit avec une bouteille de 2 litres, et on avait auparavant déjà vidé $n-1$ litres.

Il en résulte que $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ et donc $u_n = f_{n+1}$ où f_i est le i^{e} terme de la suite de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{1992} &= f_{1993} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{1993} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{1993} \\ &\approx 1,455 \cdot 10^{416} \end{aligned}$$

m7 Solution de SÉBASTIEN LEROY (14 ans)

Désignons par x, y, z le nombre de timbres à 1fr, 2fr et 5fr respectivement et par a le nombre de billets de 1000fr.

On obtient ainsi l'équation :

$$x + 2y + 5z + 5 \cdot 8 = 1000a$$

Remplaçons y et z en fonction de x :

$$y = \frac{3}{4}x \text{ et } z = \frac{3}{4}y = \frac{9}{16}x$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}x + \frac{45}{16}x + 40 &= 1000a \\ 16x + 24x + 45x + 640 &= 16000a \\ 85x + 640 &= 16000a \\ 85x &= 3200a - 128 \\ 17x &= 3200a - 128 \\ 17x &= 128 \cdot (25a - 1) \end{aligned}$$

Le pgcd de 17 et 128 étant 1, x doit être un multiple de 128. Posons $x = 128x'$. On obtient

$$17x' = 25a - 1$$

$25a - 1$ est un entier se terminant par 4 ou 9, d'où x' se termine par 2 ou 7.

1° Si x' se termine par 2, posons $x' = 10b + 2$

$$170b + 34 = 25a - 1$$

$$170b = 25a - 35$$

$$34b = 5a - 7$$

$5a - 7$ se termine par 3 ou 8; 3 ne convient pas car $34b$ est pair, d'où b se termine par 2; posons $b = 10c + 2$

$$340c + 68 = 5a - 7$$

$$340c + 75 = 5a$$

La plus petite valeur de a est 15 et est obtenue pour $c = 0$; dès lors, $b = 2$, $x' = 22$, $x = 2816$, $y = 2112$ et $z = 1584$.

2° Si x' se termine par 7, posons $x' = 10b + 7$

$$170b + 119 = 25a - 1$$

$$170b = 25a - 120$$

$$34b = 5a - 24$$

$5a - 24$ se termine par 1 ou 6; 1 ne convient pas car $34b$ est pair, d'où b se termine par 4 ou 9.

Pour $b = 4$, $x' = 47$ et pour $b = 9$, $x' = 97$. Ces deux valeurs de x' sont plus grandes que celles trouvées au (1°). La plus petite solution est donc celle du (1°).

m8 Solution de FRÉDÉRIC BOURGEOIS (16 ans)

Soit P l'ensemble des personnes qui ont serré la main à un nombre pair de personnes.

Soit I l'ensemble des personnes qui ont serré la main à un nombre impair de personnes.

Soit N l'ensemble des personnes qui n'ont serré la main à personne (N est évidemment inclus dans P).

Prenons une situation de départ :

I est vide, $P \setminus N$ est vide, N contient tout le monde.

Dans ce cas, I contient un nombre pair (zéro) de personnes. La propriété est donc vérifiée dans cette situation de départ.

Si deux personnes de N se serrent la main, elles passent toutes deux dans I et la parité de I reste inchangée.

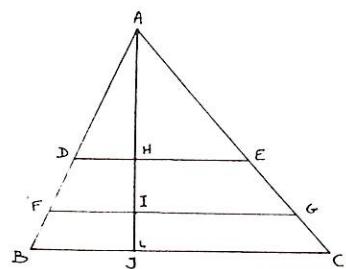
Si deux personnes de I se serrent la main, elles passent toutes deux dans P et la parité de I reste inchangée.

Si deux personnes de P se serrent la main, elles passent toutes deux dans I et la parité de I reste inchangée.

Si une personne de P et une personne de I se serrent la main, la personne de P va dans I et celle de I va dans P et la parité de I reste inchangée.

Ainsi, I comprend un nombre pair de personnes au départ et cela ne changera pas quelles que soient les poignées de main qui seront échangées.

m9 Solution de SÉBASTIEN LEROY (14 ans)



Nous devons déterminer deux triangles ADE et AFG semblables au triangle ABC et ayant respectivement une superficie égale au $\frac{1}{3}$ et aux $\frac{2}{3}$ de celle du triangle ABC .

$$\begin{aligned} 1) \text{ aire } ADE &= \frac{1}{2} \cdot |AH| \cdot |DE| = \frac{1}{3} \cdot \text{aire } ABC \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AJ| \cdot |BC| \text{ et } \frac{|AH|}{|DE|} = \frac{|AJ|}{|BC|} \\ \text{d'où } |AH|^2 &= \frac{1}{3} \cdot |AJ|^2 \text{ et } |AH| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AJ| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ aire } AFG &= \frac{1}{2} \cdot |AI| \cdot |FG| = \frac{2}{3} \cdot \text{aire } ABC \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AJ| \cdot |BC| \text{ et } \frac{|AI|}{|FG|} = \frac{|AJ|}{|BC|} \\ \text{d'où } |AI|^2 &= \frac{2}{3} \cdot |AJ|^2 \text{ et } |AI| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |AJ| \end{aligned}$$

On tracera les routes à des distances de A respectivement égales à $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57$ et $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82$ de la hauteur du triangle ABC .

M7 Soit n le nombre moyen de jets cherché.

Nous avons les trois cas suivants qui couvrent toutes les possibilités :

- 1) avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, le premier jet donne "pile"; après ce premier jet, le nombre moyen cherché reste n .
- 2) avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, les deux premiers jets donnent "face"; après ces deux jets, le nombre moyen cherché reste n .
- 3) avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, les deux premiers jets donnent "face" puis "pile". On a alors ob-

tenu le résultat cherché.

On a donc

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2}(1+n) + \frac{1}{4}(2+n) + \frac{1}{4} \cdot 2 \\ 4n &= 2 + 2n + 2 + n + 2 \end{aligned}$$

et $n = 6$

M8 Solution de CLAUDE DESSET (18 ans)

Posons $\frac{ia}{b} = m_i + \frac{p_i}{b}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, avec $m_i, p_i \in \mathbb{N}$ et $p_i < b$

On a alors $\left[\frac{ia}{b}\right] = m_i = \frac{ia}{b} - \frac{p_i}{b}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{b-1} \left[\frac{ia}{b} \right] &= \sum_{i=0}^{b-1} \left[\frac{ia}{b} \right] = \sum_{i=0}^{b-1} \frac{ia}{b} - \sum_{i=0}^{b-1} \frac{p_i}{b} \\ &= \frac{a}{b} \sum_{i=0}^{b-1} i - \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{b-1} p_i \\ &= \frac{a(b-1)b}{b \cdot 2} - \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{b-1} p_i \end{aligned}$$

a et b sont premiers entre eux et les p_i sont les restes de la division par b de b multiples consécutifs de a ; ainsi donc, les p_i forment un système complet de restes et prennent (abstraction faite de l'ordre) les valeurs $0, 1, 2, \dots, b-1$. Leur somme vaut donc $\frac{b(b-1)}{2}$.

D'où

$$\sum_{i=1}^{b-1} \left[\frac{ia}{b} \right] = \frac{a(b-1)}{2} - \frac{b-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

On démontre de la même façon que

$$\sum_{i=1}^{b-1} \left[\frac{ib}{a} \right] = \frac{(b-1)(a-1)}{2}$$

M9 Solution de FRÉDÉRIC BOURGEOIS (16 ans)

Calculons d'abord le nombre de façons de placer n tours sur l'échiquier de manière qu'aucune tour ne puisse en prendre une autre.

Dans chaque colonne du tableau, on choisit une case située sur une ligne différente de celles des cases déjà choisies. On a ainsi n choix pour la première tour dans la première colonne, $(n-1)$ choix pour la deuxième tour dans la deuxième colonne, $(n-2)$ choix pour la troisième tour dans la troisième colonne, ... et un choix pour la n ième tour dans la n ième colonne; ce qui

au total donne

$$n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$$
 possibilités

Parmi ces possibilités, celles qui ne conviennent pas sont celles où au moins deux tours occupent des cases de même couleur.

Considérons un coloriage déterminé et plaçons deux tours sur deux cases d'une des $\frac{n^2}{2}$ couleurs. Il reste $(n-2)$ tours à placer sur les $(n-2)$ lignes et les $(n-2)$ colonnes restantes de manière à ce qu'elles ne se prennent pas mutuellement; on sait qu'il y a $(n-2)!$ façons de placer ces tours (même raisonnement que plus haut).

Pour chaque paire de cases de même couleur, il y a donc au plus $(n-2)!$ "mauvaises" façons de placer les tours. Donc, au total, au plus $\frac{n^2}{2}(n-2)!$

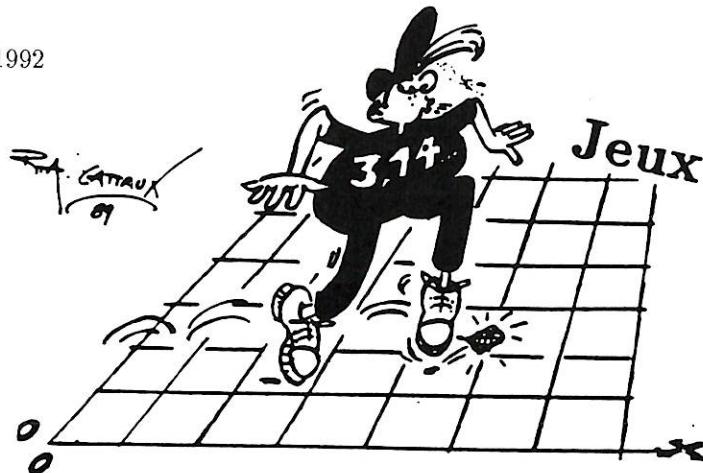
Démontrons que $n! > \frac{n^2}{2}(n-2)!$

$$\begin{aligned} \text{En effet } n(n-1) &> \frac{n^2}{2} \iff n-1 > \frac{n}{2} \\ &\iff n > 2 \end{aligned}$$

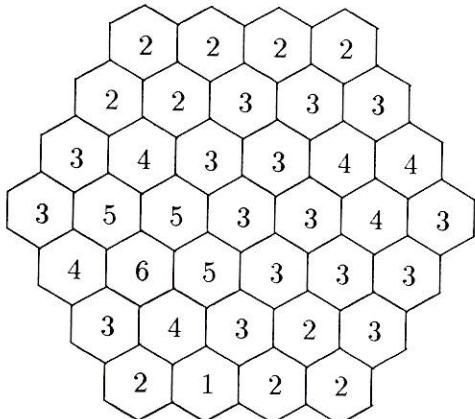
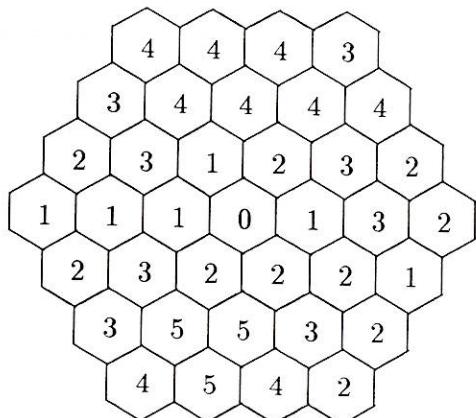
ce qui est vrai par hypothèse.

Le nombre de positions possibles pour les tours étant supérieur au nombre de "mauvaises" positions, il y a au moins une position où les n tours occupent n cases de couleurs différentes, quel que soit le coloriage de l'échiquier choisi.





Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Nombres croisés (par C. Parent)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |

Horizontalement

1. Multiple de 11 augmenté de 7 - Quatrième puissance
2. Permutation de 123
3. Multiple de 9
4. Palindrome - Carré augmenté de 6
5. Multiple de 9

Verticalement

1. Multiple de 7
2. Puissance de 21
3. Nombre premier
4. Progression arithmétique
5. Agent secret

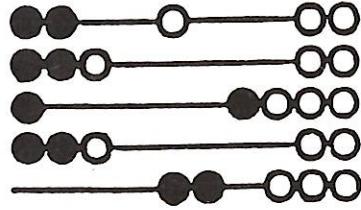
Grilles des moyennes (par C. Parent)

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

| | | | |
|----|---|---|---|
| | 2 | 3 | |
| 11 | | | 2 |
| 5 | | | 6 |
| 12 | 3 | | |

| | | | |
|----|----|----|----|
| | 12 | 23 | |
| 11 | | | 15 |
| 51 | | | 12 |
| 31 | 43 | | |

| | | | |
|----|---|---|----|
| | 4 | 9 | |
| 3 | | | 12 |
| 17 | | | 5 |
| 16 | 6 | | |



Questions de la finale Mini

1. Considérons le parallélogramme de sommets consécutifs a, b, c et d . Si m désigne le milieu du côté $[ab]$ et p le milieu du côté $[bc]$, que vaut le rapport de l'aire du triangle de sommets d, m, p à l'aire du parallélogramme considéré ?

2. Le lièvre a juré qu'on ne l'y prendrait plus. Cette fois, il part comme un trait, en même temps que la tortue qui va de son train de sénateur. Arrivé au but, il rebrousse aussitôt chemin et, quand il rencontre la tortue, celle-ci est encore à sept cent soixante mètres du but. Et lui de dire : "Ma pauvre amie, vois-tu bien que je vais vingt fois plus vite que toi !". Lecteurs, c'est à vous que je demande : quelle distance sépare le point de départ du but ?

3. Un point étant donné dans le plan d'un cercle, prenons toutes les cordes du cercle déterminées par les droites passant par ce point. Quel est l'ensemble des milieux de ces cordes ? Discuter selon la position du point par rapport au cercle.

4. Albert et Bertrand s'affrontent dans un jeu dont voici les trois règles :

(R₁) chaque joueur dépose à son tour un nouveau jeton circulaire de diamètre D cm sur une surface carrée de côté C cm, sans déplacer les jetons déjà posés et sans que la nouvelle pièce touche ceux-ci;

(R₂) les joueurs disposent d'une réserve illimitée de jetons, tous de diamètre D cm; au premier tour, Albert doit déposer un jeton, ensuite Bertrand et Albert jouent alternativement;

(R₃) le perdant est celui qui n'arrive plus à poser de jeton en accord avec la règle (R₁)

Selon les valeurs de C et D , un des deux joueurs peut adopter une stratégie qui le fera gagner à coup sûr. Quels sont ce joueur et cette stratégie gagnante ?

P. Van Elsuwe
Questions de la finale Maxi

1. En base 10, un certain nombre s'écrit à l'aide de cinq chiffres différents, avec 9 pour chiffre des centaines. Les mêmes cinq chiffres écrits dans l'ordre inverse forment un autre nombre qui vaut quatre fois le nombre initial. Déterminez toutes les valeurs du nombre initial qui satisfont ces conditions.

2. Dans le plan sont donnés deux segments de longueurs respectives ℓ et m satisfaisant $\ell < m$, de même qu'un cercle C avec un de ses diamètres $[ab]$. A chaque point t du cercle, distinct de a , associons les éventuels points p de la perpendiculaire à la droite ab par t , tels que

$$\frac{|ap|}{|at|} = \frac{\ell}{m}.$$

Construisez géométriquement l'ensemble de ces points p ; vous disposez à cette fin d'une règle non graduée, ainsi que d'un compas qui vous permet de reporter des longueurs et de tracer des cercles.

3. Une séquence est formée de 996 symboles α et de 996 symboles ω , dans un ordre quelconque mais tel qu'au-delà de chaque position le nombre de α n'excède pas le nombre de ω . Existe-t-il, pour chaque nombre naturel n avec $0 < n < 996$, une sous-séquence de symboles consécutifs formée de n symboles α et de n symboles ω ?

4. Un prisonnier doit répartir 17 boules blanches et 17 boules noires dans deux urnes, en plaçant au moins une boule noire dans chaque urne. Le gardien choisira une urne au hasard, puis dans cette urne, une boule au hasard. Si cette boule est blanche, le prisonnier sera libéré, sinon, il passera sa vie en geôle. De quelle manière le prisonnier doit-il répartir les boules pour avoir le maximum de chances d'être libéré ? Si vous étiez à la place du prisonnier, préféreriez-vous devoir répartir 16 boules blanches et 16 boules noires, plutôt que 17 boules blanches et 17 boules noires ?

Lauréats de la Mini-Olympiade

Premier prix

- SEBBE Raphaël, (3è), Inst. des Ursulines, Mons

Deuxièmes prix

- WEINACHTER M., (3è), Lyc. garçons, Esch/Alzette
- VAN HOOF Bernard, (3è), Coll. St Pierre, Bxl
- GATTI Frédéric, (2è), Ath. F. Blum, Bxl
- THEYS Jacques, (3è), A.R. J. Bara, Tournai
- LEROUX S., (3è), Inst. St Boniface-Parnasse, Bxl
- PEREIRA Olivier, (3è), Inst. N-D des Champs, Bxl

Troisièmes prix

- HUPPERTS Yves, (3è), Coll. Roy. M.-Thérèse, Herve
- GOFFIN Valérie, (3è), A.R. d'Arlon
- DEMARTEAU Evelyne, (3è), Inst. St Louis, Namur
- DESSAUVAGES C., (2è), Inst. N-D Bon.Esp., Br.-le-C.
- BROWAEYS Patrick, (3è), A.R. de Mons I
- VANHOUCHE Axelle, (3è), Lyc. E. Jacqmain, Bxl
- DEVOS Jean-Philippe, (3è), Coll. St Michel, Bxl
- LEMAUR Ghislain, (2è), Coll. SteMarie, St Ghislain
- AUBRY J.-Philippe, (3è), Sém. StJoseph, Bastogne
- HAUSMAN J.-Marc, (2è), Coll. St Joseph, Chimay
- S HEEREN Emm., (3è), Coll. Ste Croix, Hannut
- BALLIEU Nicolas, (2è), A.R. de Charleroi I

Quatrièmes prix

- MAURER Yves, (3è), Ath. de Luxembourg
- HANET Laurent, (3è), Inst. St Joseph, Charleroi
- PLOUMHANS Luc, (3è), A.R. P. Delvaux, Ottignies
- LIEMANS B., (3è), Inst. N-D Bon. Esp., Br.-le-C.
- NGUYEN Xuan Hien, (2è), A.R. de Spa
- MACQ J.-François, (2è), Coll. St Joseph, Chimay
- DENOËL Vincent, Inst. N-D, Liège
- DEHOUCK Yves, (3è), Coll. St Michel, Bxl
- MASSCHELEIN Bernard, (3è), Coll. Don Bosco, Bxl
- PLUVINAGE Th., (3è), Coll. Ste Marie, St Ghislain
- LEBEDELLE L., (3è), Inst. St Julien Parnasse, Bxl
- PERLITSCHKE Cyril, Coll. Jean XXIII, Rochefort
- DELVENNE J.-Charles, (1è), Inst. Ste Marie, Arlon
- CORNETTE Emm., Ctre scol. Sacré Cœur, Bxl

Prix spéciaux

GATTI Frédéric, (2è), Ath. F. Blum, Bxl – DESSAUVAGES C., (2è), Inst. N-D de Bonne Espérance, Braine-le-C. – LEMAUR Ghislain, (2è), Coll. Ste Marie, St Ghislain – HAUSMAN J.-Marc, (2è), Coll. St Joseph, Chimay – BALLIEU Nicolas, (2è), A.R. de Charleroi I – NGUYEN Xuan Hien, (2è), A.R. de Spa – MACQ J.-François, (2è), Coll. St Joseph, Chimay – DENOËL Vincent, Inst. N-D, Liège – PERLITSCHKE Cyril, Coll. Jean

XXIII, Rochefort – DELVENNE J.-Charles, (1è), Inst. Ste Marie, Arlon – HEYMANS Maureen, (2è), Lyc. du Berlaymont, Waterloo – BECCO Christophe, (2è), Coll. St Louis, Liège – DEVUYST Michaël, (2è), Inst. Ste Thérèse, Florennes – NOIRHOMME Christophe, (2è), Petit Sémin. de St Roch, Ferrières – DACHELET Caroline, (1è), Inst. St Joseph, Ciney – BAES Michel, (1è), Petit Sémin. de Floreffe – DESIR Antoine, (1è), Lyc. E. Jacqmain, Bxl

Ont également participé à cette finale

DUPONT Véronique, (3è), Inst. de la Providence, Wavre – CABY Philippe, (3è), Coll. N-D, Wavre – ROSEN Christophe, (3è), Coll. N-D, Wavre – GILLMAN Sabine, (3è), Coll. St Louis, Liège – HASHEMI-AFRAPOLI Alireza, (3è), Lyc. E. Jacqmain, Bxl – RULOT Géraldine, (2è), Inst. N-D, Marche – KUMMERT Nicolas, (2è), A.R. de St Servais – DE LAUW Erwan, (3è), Coll. Don Bosco, Bxl – DEMANET Laurent, (2è), Inst. St Joseph, Carlsbourg – HOOFMAN Frédéric, (3è), Coll. St Michel, Bxl – CARDOL Pierre, (2è), A.R. T. Lorrain, Verviers – DUPREZ Cédric, (2è), Lyc. Martin V, LLN – RADOUX Julien, (2è), Coll. St Louis, Liège – HORNEBECK Alexandre, (3è), Inst. St Charles, Péruwelz – SIMAL David, (3è), Inst. des Sœurs de N-D, Namur – VREULS Christelle, (3è), Coll. Royal Marie-Thérèse, Herve – GOFFINET Stéphan, (3è), Coll. St Michel, Bxl – VAN OVERMEIRE Katlyn, (2è), Inst. N-D, Marches – AVRAM Mircea, (1è), Inst. Mater Dëi, Bxl – BRIGGS Murat, (3è), A.R. M. Carême, Wavre

Lauréats de la Maxi-Olympiade

Premiers prix

- GLINEUR François, (6è), A.R. de Quiévrain
- DESSET Claude, (6è), Sém. St Joseph, Bastogne

Deuxièmes prix

- HOROWITZ Joël, (6è), Lyc. d'Anvers
- HRUSCHKA Daniel, (6è), Ath. prov., Morlanwelz

Troisièmes prix

- JORIS Georges, (6è), Inst. St Joseph, Carlsbourg
- VANHUFFEL Denis, (5è), Ath. A. Max, Bxl
- SERGENT Fr., (6è), Inst. St Joseph, Charleroi
- SERVAIS Laurent, (6è), Inst. St Aubain, Namur
- SULEAU Stéphane, (6è), A.R. de Virton
- JUROWICZ Michel, (6è), Ath. R. Catteau, Bxl
- NIEDERKORN Ph., (6è), Inst. Ste Marie, Arlon

Quatrièmes prix

12. PIRET Gilles, (6è), Lyc. Martin V, LLN
 SMETS Didier, (5è), Inst. St Joseph, Châtelet
 14. MONBAILLU Olivier, (6è), Ath. F. Blum, Bxl
 15. VAN TUYKOM Alex, (5è), Coll. St Pierre, Bxl
 LIMPACH Christian, (6è), Lyc. M. Rodange, Lux.
 SHIMIZU Inori, (5è), A.R. de Thuin
 BAJARD Antoine, (5è), IPEP, Mons
 19. SEVE Philippe, (6è), Ecole Européenne, Kirchberg
 SHIN Jonathan, (5è), Ath. R. Catteau, Bxl

nis, (5è), Coll. N-D, Tournai – LIBOTTE Hugues, (5è),
 A.R. de Hannut – VANDIEST Renaud, (4è), A.R. Riva
 Bella, Braine l'Alleud

Prix spéciaux

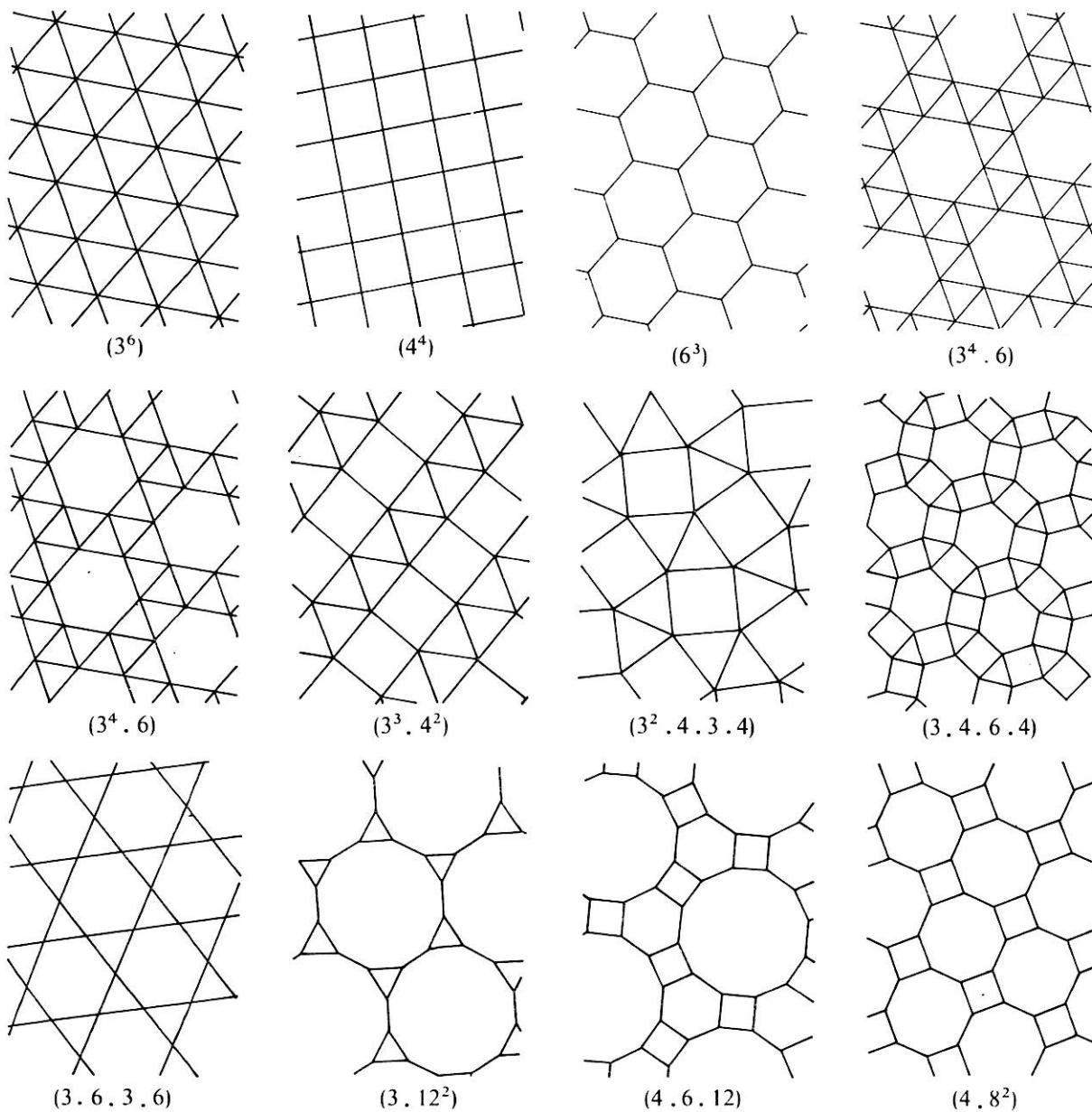
VANHUFFEL Denis, (5è), Ath. A. Max, Bxl – SMETS Didier, (5è), Inst. St Joseph, Châtelet – VAN TUYKOM Alex, (5è), Coll. St Pierre, Bxl – SHIMIZU Inori, (5è), A.R. de Thuin – BAJARD Antoine, (5è), IPEP, Mons – SHIN Jonathan, (5è), Ath. R. Catteau, Bxl – NORQUET Jean-Pierre, (5è), Ath. R. Catteau, Bxl – BEMELMANS Xavier, (4è), Inst. St François Xavier, Verviers – MONDEREN Dominique, (5è), Coll. St Pierre, Bxl – MOURUE Geoffrey, (5è), Coll. du Sacré Cœur, Charleroi – DEVILLELERS Alice, (4è), A.R. de Waterloo

Ont également participé à cette finale

SMETS Didier, (6è), Coll. Royal Marie Thérèse, Herve – LEGROS Bertrand, (6è), A.R. de Tamines – SARTENAER Thierry, (6è), Coll. N-D de la Paix, Erpent – BOURGEOIS Frédéric, (5è), Coll. St Michel, Bxl – DAMBREMONTE Régis, (6è), A.R. de Rösrath (FBA) – DONCKELS Frédéric, (6è), Lyc. Martin V, Louvain-la-Neuve – HUBERTY Marc, (5è), Ath. de Luxembourg – JEHU Guy, (5è), A.R. de Nivelles – GERAETS David, (6è), Coll. St Pierre, Bxl – THAYSE Michel, (5è), Coll. Don Bosco, Bxl – HAINAUT Xavier, (4è), Inst. N-D, Arlon – PENALOZA-ROMAN Andrès, (6è), A.R. de Woluwé St Pierre – BUYSSE Martin, (6è), Inst. de l'Enfant Jésus, Nivelles – BERGER Laurent, (5è), Ecole Européenne, Kirchberg (Gdl) – LOUVEAUX Quentin, (4è), Coll. N-D, Wavre – LUXEN François, (5è), Inst. St François Xavier, Verviers – ROMAIN Patrick, (6è), Coll. St Pierre, Bxl – DALOZE-TILMAN Vincent, (6è), A.R. de Hannut – DAVIDTS Frédéric, (6è), Coll. Jean XXIII, Bxl – DEHERDER Valérie, (5è), Ath. A. Max, Bxl – VAN ELSUWÉ Cédric, (5è), Coll. Don Bosco, Bxl – DE KNIBBER Serge, (6è), Ath. A. Max, Bxl – VAN DEN BERGHE Nicolas, (5è), Coll. St Pierre, Bxl – FRANKENNE Dominique, (5è), Coll. St Joseph, Chénée – ABSIL Pierre-Antoine, (5è), A.R. T. Lorrain, Verviers – ABSIL Christine, (6è), Coll. Don Bosco, Bxl – CREPIN Jean-Philippe, (5è), A.R. d'Ath – MOHY Stéphane, (4è), Inst. St Joseph, Carlsbourg – POTIER De-



Ainsi se termine la treizième année de publication de ta revue préférée (*Math-Jeunes!!*)
 MATHieu et la rédaction de *Math-Jeunes* te souhaitent de bons résultats scolaires et d'excellentes vacances, ils te fixent rendez-vous l'an prochain pour de nouvelles aventures mathématiques.



ESCHER, vous connaissez ? M.C. ESCHER pas S. Escher !

Mais si, la couverture de *Math-Jeunes* ...

Si vous voulez découvrir un peu plus cet artiste hollandais et en même temps vous amuser, courrez vite acheter le très beau (et bon marché) livre de Doris SCHATTSCHEIDER et Wallace WALKER aux Editions TACO à Berlin, intitulé "M.C. Escher — Kaleidocycles".

Kaleidocycle ? *kalos* (beau) + *eidos* (aspect) + *kuklos* (cercle), anneau à 3 dimensions composé de tétraèdres. Vous aurez l'occasion d'en construire au départ de planches pré découpées et coloriées pour ensuite pouvoir jouer avec vos figures modèles.

Les quarante pages du livre vous aideront à vous rappeler les *solides platoniciens* (cube, ...), transformations du plan, vous expliqueront les principes de décoration des corps géométriques et détailleront la construction de ces très beaux solides.

Bon amusement !

Rita Lesplingart-Midavaine

