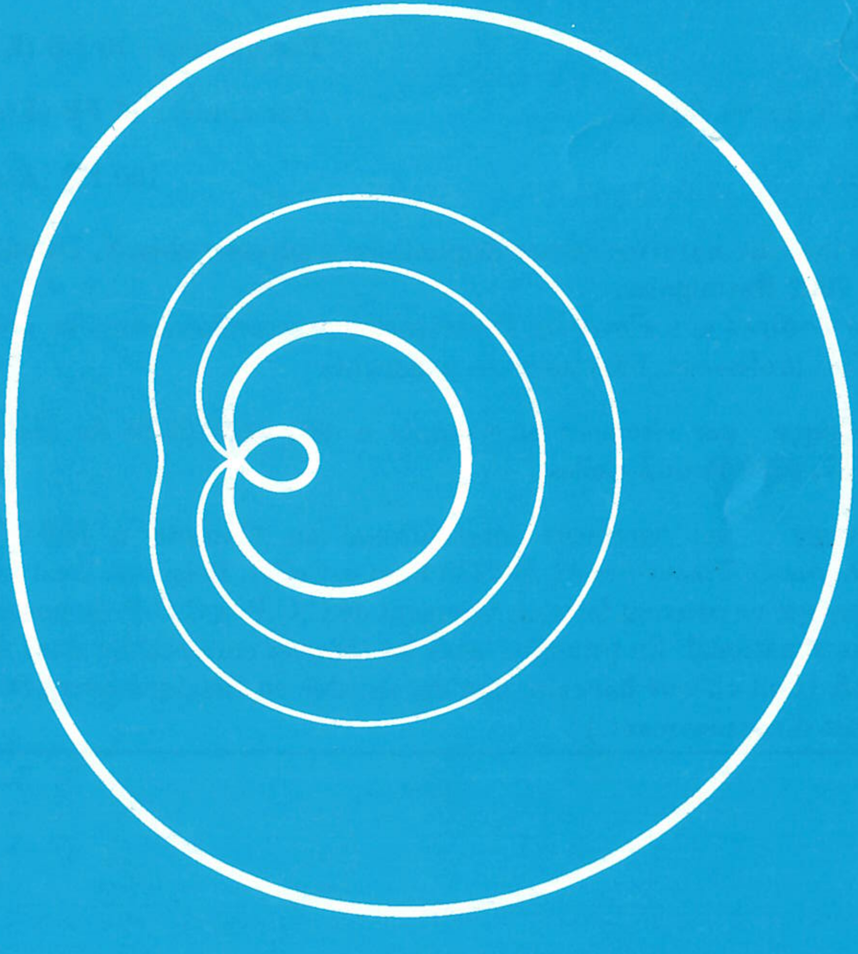
MATH - JEUNES



14e année
Octobre 1992 - n°57

Bureau de dépôt Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Place Matteotti 29 Bte 5, 7100 LA LOUVIERE ([1]).

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 exempl. au moins) : 100 FB
- Isolés : 140 FB

Etranger :

- Pour 5 abonnements : 1000 FB
- Isolés : 280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1988 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 88/89, 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Année 91/92 — 100 FB (Etranger : 200 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

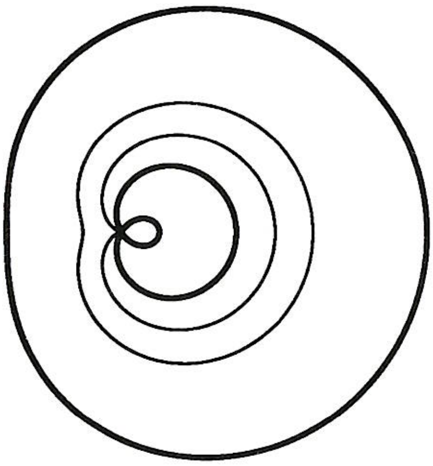
Editeur responsable : J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

---

([1]) Jusqu'au 28 février 1993

N° 57 Quatorzième année 1992

MATH-JEUNES



Jeux et Passe–temps (1)

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

Les jeux et passe-temps ont toujours existé ! De très nombreux textes anciens dans différents domaines et parfois même des découvertes résultant de recherches sur le passé de notre monde, nous en donnent régulièrement la preuve écrite et le témoignage matériel.
Il n'est d'ailleurs pas étonnant de constater que leur existence se perpétue de nos jours, que des nouveautés ne manquent pas d'apparaître régulièrement et que les jeux et passe-temps font aussi l'objet d'une activité économique non négligeable.
Cependant, la conception des jeux actuels utilise de plus en plus souvent des technologies récentes. Combien de ces jeux ne sont-ils pas basés sur des développements de l'électronique ? Les puces informatiques y sont d'ailleurs de plus en plus présentes.
Trop souvent ces jeux ne font plus appel au raisonnement du ou des joueurs. Seuls la virtuosité, les réflexes ou le hasard y sont mis en œuvre.
Nous allons traiter, dans cette suite d'articles, de quelques jeux connus de longue date, très simples dans leur conception mais qui offrent l'occasion d'une réflexion préalable à la fois sur les conditions initiales et sur la possibilité de découvrir une stratégie éventuellement gagnante.
Dans cette rubrique, nous vous présenterons donc quelques exemples de jeux assez anciens mais surtout nous vous inviterons à vous y essayer (chez vous bien entendu), à y réfléchir de manière à découvrir par vous-mêmes des notions mathématiques qui y seraient cachées.

Le jeu de « Saute boutons »

Il porte ce nom, probablement parce qu'il se jouait à l'aide de boutons en guise de matériel. Remarquez qu'il peut aussi être mis en œuvre avec des jetons, des pions, des pièces de monnaie, ...
C'est un jeu auquel on joue seul.
Un nombre quelconque de pions sont alignés et l'objectif est de réussir à les disposer en piles de deux en respectant les règles que voici :

- On ne déplace qu'une pile de un seul pion à la fois.
- Tout pion ne peut être déplacé qu'en passant par dessus deux piles (de un ou deux pions).

Il y a échec lorsqu'on n'arrive pas à empiler tous les pions.
C'est maintenant le moment de vous confronter à ce jeu.
Essayez de découvrir d'éventuelles conditions initiales ainsi qu'une stratégie vous permettant d'atteindre le but du jeu.
Vous trouverez ci-après, un exemple de raisonnement mais ne lisez pas trop vite le texte qui suit.

*

*

*

Vous vous êtes essayés à ce jeu. C'est très bien. Vous avez certainement constaté qu'il était assez simple.
Voici quelques idées ! Ce sont peut-être, en tout ou en partie, les mêmes que les vôtres.
a) Une condition nécessaire (Rem. 1) pour réussir est que le nombre de pions soit un nombre pair puisque tous les pions doivent se retrouver réunis dans des piles entières de deux pions.
b) Quelques essais avec peu de pions et ... quelques conclusions.

2 pions ○ ○

Il est impossible de passer par dessus deux piles, dès lors, c'est une situation d'échec.

4 pions ○ ○ ○ ○

On ne peut déplacer qu'un des pions situés aux extrémités car les pions moyens ne peuvent pas passer par dessus deux piles. On obtient la situation que voici :

– ○ ○ ◎

ou sa symétrique :

◎ ○ ○ –

et puis c'est l'échec.

Remarquons au passage que la représentation des pions est ici peu heureuse.

En mathématique (et dans d'autres domaines aussi d'ailleurs), il est bon de convenir et d'utiliser des modes de représentation des situations qui soient à la fois pratiques et efficaces. C'est un domaine ou votre imagination et votre réalisme peuvent se manifester comme vous le souhaitez. Ici, nous allons utiliser la représentation plus explicite que voici :

1 1 1 1
devient 1 1 2
ou 2 1 1

« 1 » et « 2 » expriment sans ambiguïté combien de pions figurent dans chaque pile.

6 pions 1 1 1 1 1 1

Cette configuration est intéressante car elle est la première qui accepte une stratégie gagnante. La voici ...

1 1 1 1 1 1
devient 1 1 2 1 1
puis 1 2 2 1
et enfin 2 2 2

Dès lors nous avons découvert une deuxième condition nécessaire (Rem. 1) à la réussite. C'est que le nombre de pions de l'alignement initial soit au moins 6.

c) Recherche d'une stratégie gagnante

Supposez maintenant que vous vous trouvez devant un très grand nombre (pair, bien entendu) de pions (10 000 par exemple).

1 1 1 1 1 1 ... 1 1 1

A nouveau, vous êtes invités à manipuler des pions et à réfléchir avant de lire la suite.

*
*
*

Voilà ! Avez-vous trouvé ?

Vous pouvez, cela va de soi, construire les piles de 2 pions en vous laissant guider par le hasard ! Mais quel danger ... !

Exemple 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ... 1 1
devient 1 1 2 1 1 1 1 1 ... 1 1
et aussi 1 2 2 1 1 1 1 ... 1 1
et encore 1 2 2 2 1 1 ... 1 1

et c'est l'échec car le premier pion ne peut plus être déplacé.

Cependant 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
donne aussi 2 1 1 1 1 1 1 1 ...

qui est une configuration fort intéressante.

En effet, la première pile comporte deux pions. Elle ne peut plus être déplacée car elle est complète et elle ne peut pas être surpassée puisqu'elle n'est précédée d'aucun pion.

Elle peut donc être considérée comme inexistante ce qui fait diminuer le nombre total de pions de 2 unités.

Il suffit donc de créer des empilements de 2 pions en veillant à ce qu'ils soient le plus à gauche (ou à droite) possible jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 6 pions à empiler (Rem. 2).

On achève alors comme décrit au point (b).

Exemple : 10 pions

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
devient 2 1 1 1 1 1 1 1 1
puis 2 2 1 1 1 1 1 1

Les 6 derniers pions sont traités comme indiqué au (b) :

on a 2 2 1 1 2 1 1
puis 2 2 1 2 2 1
et 2 2 2 2 2

Proposez ce jeu à vos amis, parents, ... et bon amusement.

Remarques :

(1) Une condition nécessaire doit être remplie pour que la réussite soit possible. Mais encore faut-il bien organiser la marche des pions. Elle n'est donc pas suffisante.

Une condition suffisante donne la certitude de la réussite mais elle n'est pas pour autant nécessaire. C'est un peu comme si vous disposiez de mille francs pour acheter un crayon. C'est certainement suffisant mais il n'est pas nécessaire de disposer d'une telle somme.

Il existe aussi, en mathématique, des conditions nécessaires mais pas suffisantes ; des conditions suffisantes mais pas nécessaires et encore des conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

Math-Jeunes n° 57, 4–6, 1992

Votre Professeur de mathématique peut vous donner des exemples de tout cela.

(2) Vous avez vu que pour traiter plus de 6 pions, on s'est ramené à ce nombre 6 pour lequel on connaît une solution.

C'est un comportement classique en mathématique que de traiter une situation un peu compliquée en se ramenant à une situation plus simple pour laquelle on dispose d'une solution.

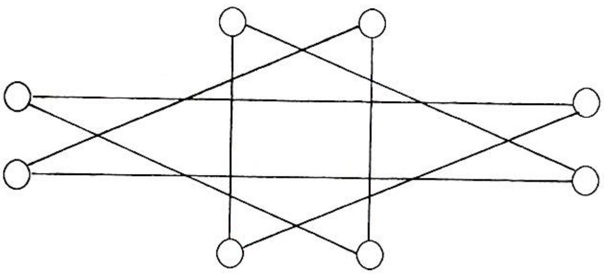
* *
*

Et maintenant, je vous propose d'étudier, sur le plan mathématique, le jeu que voici.

Il s'agit d'un jeu imaginé par un certain KNOWLTON (USA) [1]. Ce jeu est connu sous le nom de *Jeu Américain des sept et huit*. De quoi s'agit-il ?

C'est un jeu auquel on joue seul.

Huit cases sont dessinées sur un support quelconque et sont reliées entre elles selon le schéma suivant :



Il faut alors placer 7 pions sur 7 cases en respectant le processus que voici :

Placer un pion (à la fois) sur une case vide et le faire glisser en parcourant une seule ligne vers une case inoccupée où il restera en place.

Je vous invite à vous essayer à ce jeu et surtout à m'envoyer vos remarques, solutions, stratégies, découvertes, ... au plus tôt. Vous pouvez travailler collectivement ou à titre individuel.

N'hésitez pas à m'écrire à l'adresse suivante :

Claude VILLERS
Rue Piérard, 29
7022 Hyon

[1] D'après *Récréations mathématiques* par Edouard LUCAS chez Albert Blanchard – Editeur.

Devine le nombre que j'ai choisi ...

Michel Ballieu,

Athénée Royal de Binche

Claude Gaspar BACHET, sieur de Méziriac (1581–1638), membre d'un groupe d'humanistes scientifiques à Paris, est à l'origine d'une nouvelle édition (datée de 1621) des « *Arithmétiques* » de DIOPHANTE(*), édition qu'utilisait entre autres Pierre de FERMAT(**).

BACHET s'était déjà fait connaître dès 1612 par ses « *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* ». Une seconde édition parut en 1624. Parmi les récréations mathématiques qu'il propose, certaines s'articulent autour du jeu suivant :

X choisit un nombre
Y tente de le deviner

La rédaction de *Math-Jeunes* a rencontré MATHieu Troisquatorze et Jean (M et J) qui ont accepté de prêter leur concours aux petits jeux de BACHET :

Bachet, problème I

MATHieu dit à Jean :

– Choisis un nombre ; multiplie-le par 3 et dis-moi si le résultat est pair ou impair.

Et Jean de répondre :

– Le résultat est pair (impair).

Si le résultat est pair, MATHieu demande à Jean de le diviser par 2 sinon, de lui ajouter 1 et de diviser le tout par 2.

MATHieu poursuit :

– Multiplie maintenant le nombre obtenu par 3 et donne-moi le quotient entier de la division de ce dernier résultat par 9.

Cette information suffit alors à MATHieu pour deviner le nombre que Jean avait choisi au départ.

Bachet, problème IV

MATHieu dit à Jean :
– Choisis un nombre ; multiplie-le par 5 ; ajoute 6 à ce produit ; ensuite, multiplie ce que tu as obtenu par 4 et ajoute 9. Multiplie enfin le tout par 5 et donne-moi le résultat auquel tu es arrivé.
Et MATHieu connaît le nombre choisi par Jean.

Bachet, problème V

MATHieu dit à Jean :
– Choisis un nombre ; multiplie-le par un nombre que tu prends à ta guise mais que tu me dévoiles.
Jean répond :
– Je le multiplie par a.
MATHieu poursuit :
– Divise ce produit par n'importe quel autre nombre que tu me confies.
Jean dit :
– Je le divise par b.
M. – Multiplie le quotient par un troisième nombre que tu me communiques.
J. – Je multiplie par c.
M. – Divise le résultat par un nombre que tu me donnes.
J. – Je divise par d.
M. – Divise encore par le nombre que tu avais d'abord choisi et ajoute ce dernier nombre au quotient. Donne-moi maintenant le résultat final.

Après avoir entendu la réponse de Jean, MATHieu connaît le nombre que ce dernier avait initialement choisi.

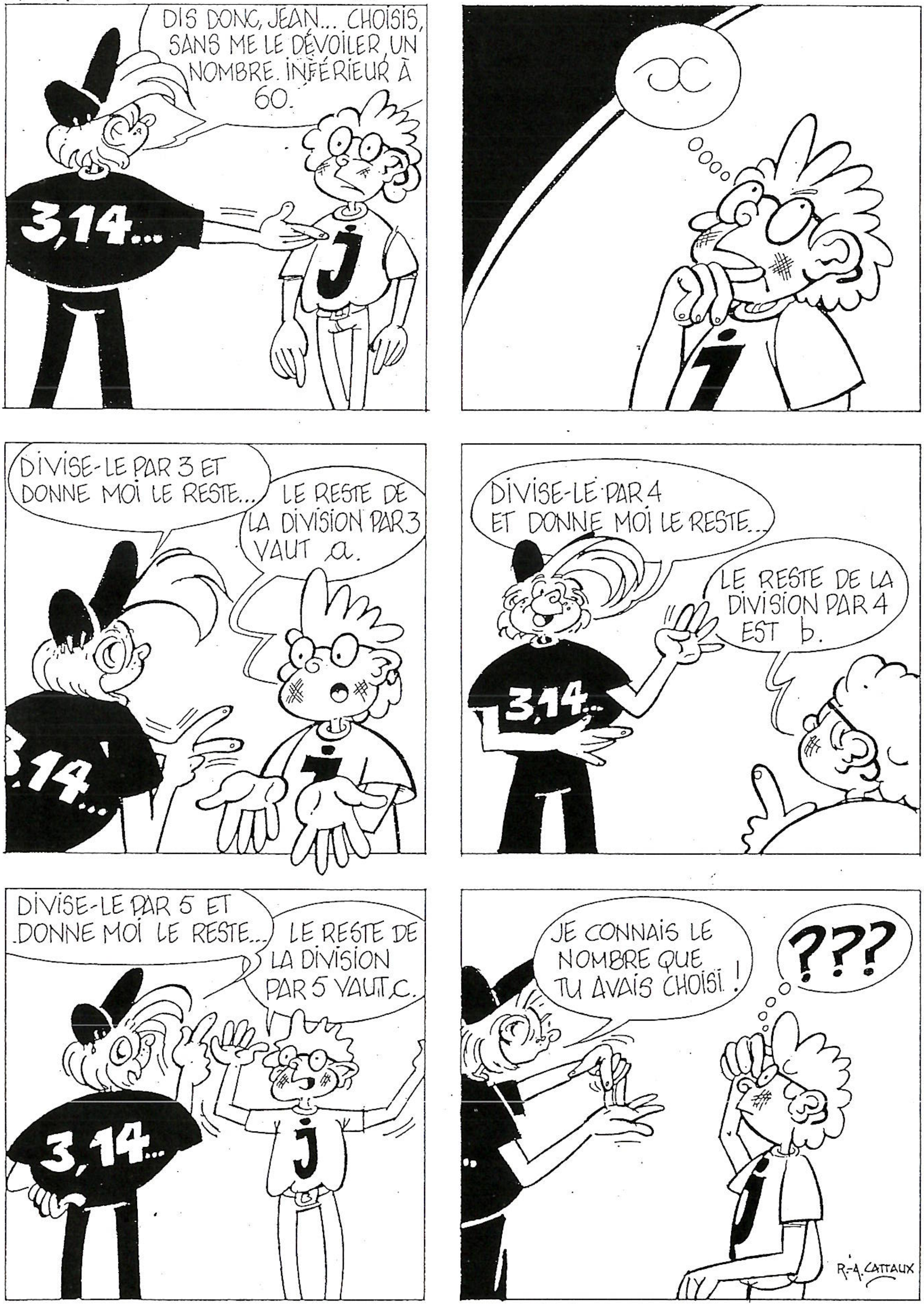
Le problème VI de BACHET t'est présenté sous forme de bande dessinée. Si tu as une idée de la démonstration de l'une ou l'autre méthode utilisée par MATHieu pour deviner le nombre choisi par Jean, envoie ta solution à la rédaction. Nous t'aiderons à composer la mise en page, de manière à publier ton résultat dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*. N'oublie pas d'indiquer tes nom, prénom, âge, école et classe ! La priorité sera donnée aux élèves du cycle inférieur des humanités puisque ces démonstrations ne font appel qu'à de l'arithmétique élémentaire. Amuse-toi bien ! Nous attendons ton courrier.

Référence : W.W. Rouse BALL & H.S.M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, Thirteenth Edition, Dover Publ. Inc., 1987.

(*) DIOPHANTE d'Alexandrie : auteur grec d'avant le cinquième siècle de notre ère ; la datation « vague » provient du fait que les historiens des sciences sont loin d'être d'accord sur l'époque où il a vécu. DIOPHANTE a eu une influence non négligeable sur des mathématiciens tels que FERMAT, ... ce qui permet d'associer son nom à ce qu'on appelle la « théorie des nombres », partie des mathématiques qu'on pourrait grossièrement qualifier d' « arithmétique *évoluée* ».

(**) Pierre de FERMAT (1601–1665) : mathématicien français ; dans la marge de son exemplaire des *Arithmétiques* de DIOPHANTE, il affirme qu'il n'existe pas x, y et z tous trois différents de 0, tels que $x^n+y^n = z^n$ lorsque $n \geqslant 3$. Il note encore : « J'en ai une preuve vraiment merveilleuse, mais la marge de cet ouvrage est trop étroite pour la contenir ». Cela fait maintenant plus de trois cents ans que d'éminents mathématiciens se cassent les dents en essayant de démontrer ce qu'on nomme « le **grand** théorème de FERMAT » qui en fait, n'est toujours qu'une conjecture ; cependant, la recherche pure et des ordinateurs récents et « très sophistiqués » ont permis de « régler » le cas d'un certain nombre de valeurs de n.

BACHET PROBLÈME N° VI



Le placement sur un court de tennis et la notion de bissectrice

Jacques Bair, *Université de Liège*

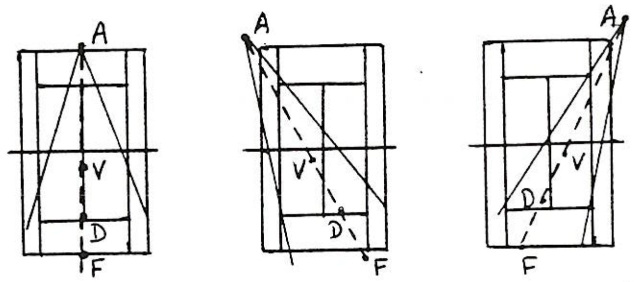
La S.B.P.M. vient de publier un ouvrage intitulé **Mathématiques et sports**. *Son auteur, Jacques* BAIR, *vous propose un chapitre de ce livre concernant le tennis. Nous sommes persuadés que vous en tirerez un enseignement utile sur le plan « tactique ».*

Les champions de tennis donnent souvent l'impression d'atteindre la balle avec une facilité étonnante ... et sans beaucoup courir. Ils se déplacent en effet (relativement) peu, car ils ont toujours l'intuition du meilleur endroit pour se placer sur le court.

Cette notion de replacement, dont l'importance ne peut échapper à aucun tennisman, découle d'un principe élémentaire fort simple : il convient de toujours se replacer à l'endroit le plus susceptible de voir revenir la balle et non systématiquement au centre du terrain.

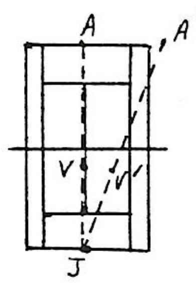
Nous allons traduire mathématiquement cette règle fondamentale, puis en donner quelques applications particulières.

L'adversaire, noté A, essaie d'envoyer une balle qui va passer au-dessus du filet et retomber dans les limites du camp adverse. La zone qu'il pourra atteindre dépendra de sa position sur le court : les trajectoires possibles de ses frappes sont en réalité situées dans un *cône* de sommet A. Il convient dès lors de se placer à un endroit également distant des côtés extérieurs du cône, c'est-à-dire sur la bissectrice de l'angle dont dispose l'adversaire pour jouer son coup. Le placement doit tenir compte de la position du joueur par rapport à sa ligne de fond, mais aussi de l'endroit d'où A frappe son coup. Ainsi, sur les croquis ci-dessous, le joueur se placera idéalement en F (respectivement en D ; en V) s'il joue dans le fond du court (respectivement à la demi-volée ; à la volée).



Ainsi, lorsqu'un tennisman joue au centre du court (voir la première figure ci-dessus), il aura intérêt à se replacer au centre de son terrain, qu'il reste dans le fond ou qu'il monte au filet. Par contre, s'il joue très croisé (voir les deux figures de droite ci-dessus), il devra se décaler par rapport au centre du terrain : dans la direction opposée à celle de l'adversaire s'il reste dans le fond, mais dans la direction même de l'adversaire s'il monte au filet.

Comme conséquence immédiate de ce principe, voici une règle bien connue des bons joueurs. Un joueur J souhaitant monter au filet à partir du centre de son terrain (voir croquis ci-contre) aura intérêt à jouer non croisé en A, plutôt que de croiser en A'.

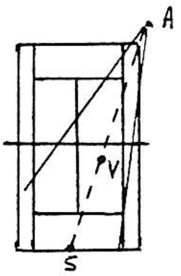


En effet, le placement idéal à la volée sera donné par le point V (respectivement V') dans le premier (respectivement second) cas et le déplacement (nécessaire pour arriver au filet) $\overline{JV}$ est évidemment plus court que $\overline{JV'}$. Cela confirme bien le conseil souvent donné par les entraîneurs : *quand vous montez au filet, n'ouvrez pas l'angle !*

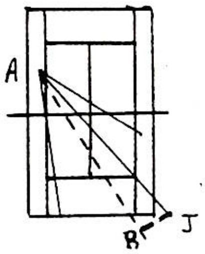
Donnons d'autres applications du principe de la bissectrice.

Quel est le meilleur placement par rapport à la ligne de fond ? Il faut de préférence revenir en position fort avancée dans le court, car ainsi les distances à parcourir pour atteindre la balle seront plus courtes puisque la distance d'un point de la bissectrice aux côtés de l'angle diminue au fur et à mesure que le point en question se rapproche du sommet du cône. En plus de cet avantage relatif aux distances minimales à parcourir pour frapper la balle, signalons qu'une position à l'intérieur du court favorise la vitesse du jeu (et notamment la montée au filet).

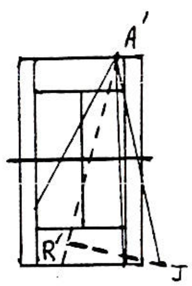
Un serveur S exécute, à gauche, un service très croisé suivi d'une montée au filet (voir la figure ci-contre). Se conformant à la règle de base, il avancera vers la droite par rapport au centre (c'est-à-dire vers le point V) : il pourra ainsi profiter aisément du « trou » laissé par l'adversaire A déporté vers l'extérieur droit du terrain.



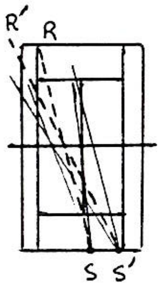
Soit un joueur J, en difficulté au fond du terrain suite à un coup de l'adversaire l'ayant déporté hors du court.



Il aura intérêt à rejouer fort croisé (en A) et non parallèle (en A'). Outre le fait que la première solution est plus sécurisante puisque le filet est légèrement plus bas au centre du terrain qu'en ses extrémités, le trajet de replacement, à savoir $\overline{JR}$ dans le premier cas et $\overline{JR'}$ dans le second, sera plus court lorsque J optera pour la première solution.



La position du serveur doit influencer celle du relanceur. Par exemple, si le serveur occupe une position centrale S, ce qui est fréquent, le relanceur se placera près de la ligne des couloirs, soit en R (cf le croquis ci-dessous).

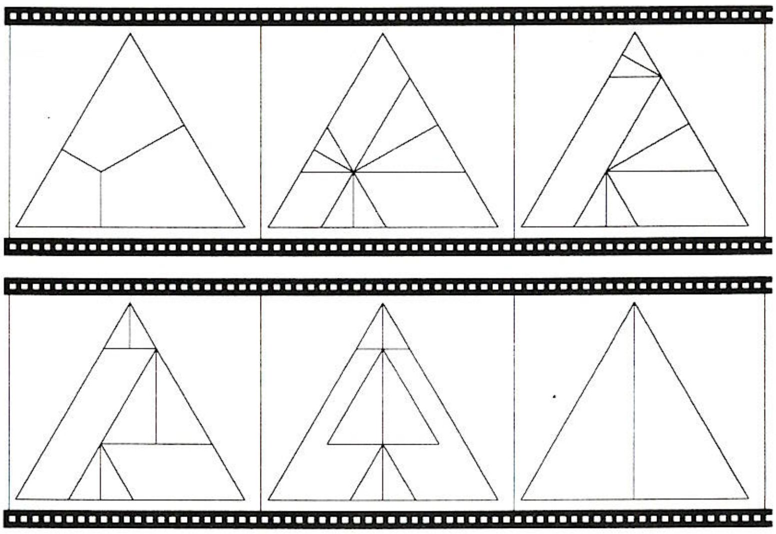


Par contre, si le serveur se décale par rapport au centre du terrain pour se positionner près de la ligne du couloir (par exemple en S'), le relanceur devra se déporter vers l'extérieur du court (en R').

De curieux polygones

Guy Noël, *Université de Mons–Hainaut*

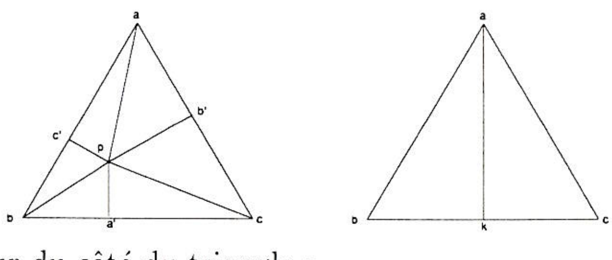
1. Examine le film ci-dessous. De quel théorème de géométrie illustre-t-il la démonstration ?



As-tu trouvé ?

> *Si le point p est intérieur au triangle équilatéral abc, la somme des distances de p aux côtés $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$ est constante.*

2. La démonstration illustrée ci-dessus est très parlante. Elle n'est pas nécessairement la plus courte. En voici une autre :



Si ℓ est la longueur du côté du triangle :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(abc) &= \text{Aire}(apb) + \text{Aire}(bpc) + \text{Aire}(cpa) \\
&= \frac{1}{2}|bc|.|pa'| + \frac{1}{2}|ca|.|pb'| + \frac{1}{2}|ab|.|pc'| \\
&= \frac{1}{2}\ell.(|pa'| + |pb'| + |pc'|)
\end{aligned}$$

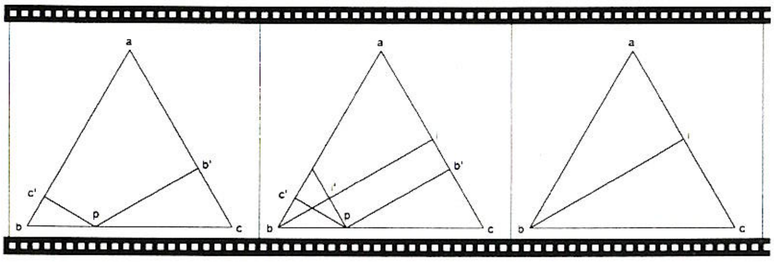
D'autre part

$$\text{Aire}(abc) = \frac{1}{2}\ell.|ak|$$

Donc la somme $|pa'| + |pb'| + |pc'|$ vaut $|ak|$ quelle que soit la position du point p.

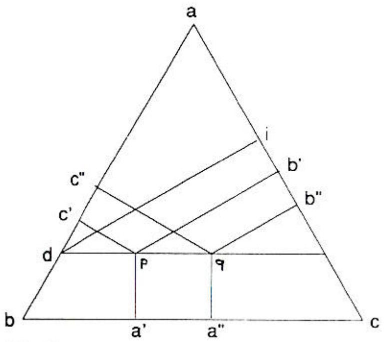
3. Et voici une troisième démonstration. Elle est peut-être un peu plus compliquée, lis-la attentivement, sans te presser.

1ere étape. Commençons par placer le point p sur le côté $[b, c]$:



$$|pc'| + |pb'| = |bi'| + |pb'| = |bi'| + |i'i| = |bi|$$

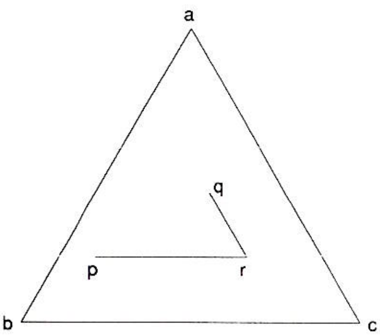
2eétape. Considérons ensuite deux points p et q situés sur une parallèle à un des côtés :



$$|pa'|+|pb'|+|pc'| = |pa'|+|di| = |qa''|+|di| = |qa''|+|qb''|+|qc''|$$

Et la somme des distances aux trois côtés est donc la même pour p et q.

3e étape. Supposons enfin p et q quelconques à l'intérieur du triangle. Choisissons un point intermédiaire r tel que pr soit parallèle à un côté et rq à un autre.



Puisque pr est parallèle à un côté, la somme correspondant à p est égale à celle qui correspond à r. Pour la même raison, la somme qui correspond à q est égale à celle qui correspond à r.

Donc la somme des distances est la même pour p et q.

4. Il existe sûrement encore beaucoup d'autres démonstrations de cette propriété. Tu peux essayer d'en rechercher et nous les envoyer, nous publierons les plus élégantes. Mais tu peux aussi te demander si cette propriété

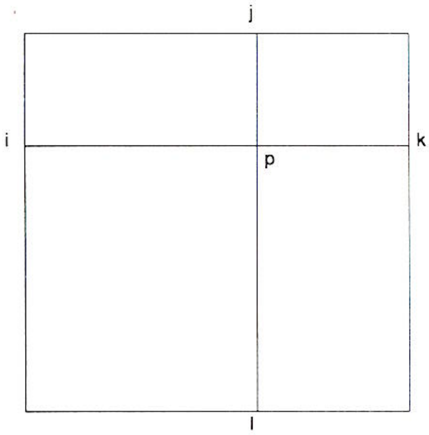
$$\text{La somme } |pa'| + |pb'| + |pc'| \text{ est constante}$$

est valable pour d'autres triangles que les triangles équilatéraux. Et pour d'autres polygones ?

5. Examinons d'abord le cas des triangles quelconques. Supposons que la somme $|pa'|+|pb'|+|pc'|$ ait toujours la même valeur S, quelle que soit la position du point p dans le triangle abc.
Choisissons des positions particulières. Par exemple plaçons p en a. Alors b' et c' coïncident avec a et $|pb'| = |pc'| = 0$. Donc $S = |aa'|$ est la longueur de la hauteur issue de a.
En plaçant p en b, puis en c, nous voyons que les trois hauteurs ont la même longueur.
Mais un triangle dont les trois hauteurs ont la même longueur est toujours équilatéral. Peux-tu le démontrer ? Pense à l'aire du triangle !
As-tu trouvé ? Alors nous pouvons énoncer ensemble

> *Si pour le triangle abc, la somme*
>
> $$S = |pa'| + |pb'| + |pc'|$$
>
> *ne dépend pas de la position de p*
>
> *Alors le triangle abc est équilatéral.*

6. Examinons à présent d'autres polygones. Que penses-tu du carré ?



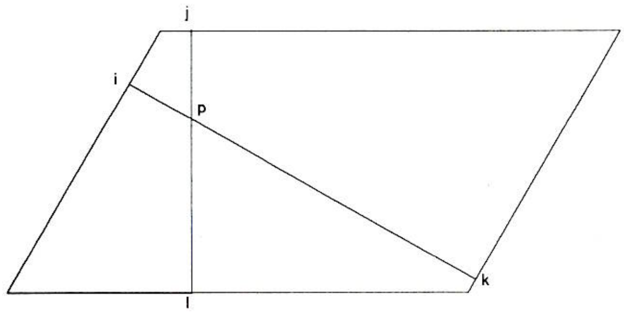
Si c désigne la longueur du côté du carré :

$$|pi| + |pj| + |pk| + |pl| = 2c$$

Et pour un rectangle ? Trace la figure, et vérifie que si ℓ et L désignent les deux dimensions du rectangle :

$$|pi| + |pj| + |pk| + |pl| = \ell + L$$

Et pourquoi pas un parallélogramme ?



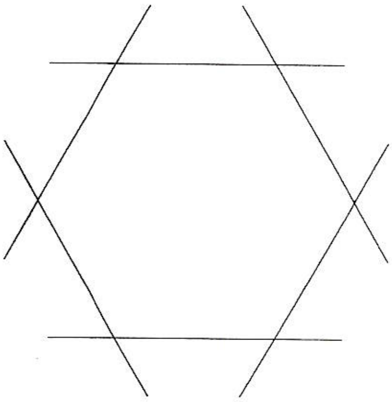
Si ℓ et L désignent les mesures des deux hauteurs du parallélogramme :

$$|pi| + |pj| + |pk| + |pl| = \ell + L$$

Analysons de plus près cet exemple. Chacune des deux sommes $|pi| + |pk|$ et $|pj| + |pl|$ est constante : la première vaut ℓ, la seconde L. Bien sûr, si deux droites A et B sont parallèles, et si le point p appartient à la *bande* déterminée par A et B, la somme des distances de p à A et B vaut la largeur de la bande, et cela quelle que soit la position de p. Un point p intérieur au parallélogramme appartient aux deux bandes. Donc la somme des distances de p aux quatre côtés du parallélogramme est constante. Remarque que quand nous disons « distance de p à un côté », il faut comprendre « distance de p à la droite qui contient le côté ».

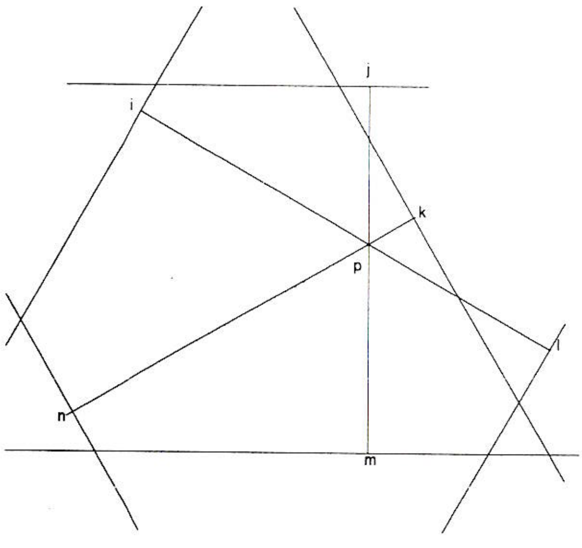
7. Ne pouvons-nous faire le même raisonnement pour d'autres polygones ? Nous nous limiterons à des polygones convexes.

Considérons un hexagone régulier :



Un point intérieur à l'hexagone appartient simultanément à trois bandes. La somme de ses distances aux 6 côtés de l'hexagone est donc constante.

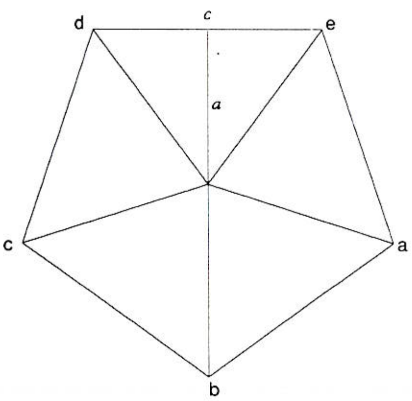
Et si l'hexagone n'était pas régulier, il suffit que ses côtés soient deux à deux parallèles :

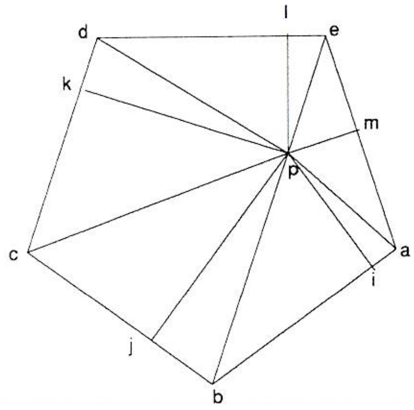


Si ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont les largeurs des trois bandes :

$$|pi| + |pj| + |pk| + |pl| + |pm| + |pn| = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$$

8. Si les côtés d'un polygone sont deux à deux parallèles, nécessairement ce polygone possède un nombre pair de côtés. Pourtant certains polygones ayant un nombre impair de côtés possèdent la propriété de « somme constante » : n'avons-nous pas commencé par considérer un triangle ? Examinons à présent un pentagone régulier :





Pouvons-nous reprendre la démonstration vue au point n° 2 ?
Si c désigne la longueur du côté d'un pentagone régulier et a son apothème ([1]),

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(abcde) &= 5(\frac{1}{2}c.a) \\
&= \frac{1}{2}|ab| \cdot |pi| + \cdots + \frac{1}{2}|ea| \cdot |pm| \\
&= \frac{1}{2}c(|pi| + \cdots + |pm|)
\end{aligned}$$

Donc, quelle que soit la position du point p :

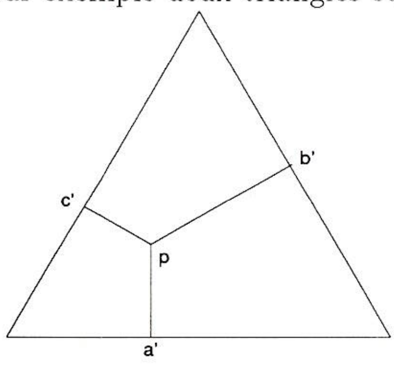
$$|pi| + \cdots + |pm| = 5a$$

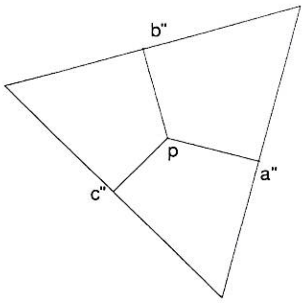
Il n'est pas bien difficile de voir que la démonstration que nous venons de faire est valable quel que soit le nombre de côtés de notre polygone régulier, qu'il soit pair ou impair. Ainsi,

> *Tout polygone régulier possède la propriété de somme constante.*

Peux-tu trouver une démonstration du type de celle que nous avons rencontrée au point n° 3 ?

9. Pouvons-nous encore trouver d'autres polygones ayant cette propriété de somme constante ? Rappelons-nous le cas du parallélogramme. Dans ce cas la somme est constante parce qu'un point intérieur au parallélogramme appartient simultanément à deux bandes.
Imaginons par exemple deux triangles équilatéraux.

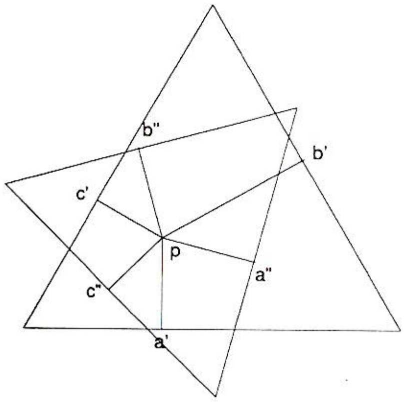




([1]) L'apothème d'un polygone régulier est la distance du centre à un quelconque côté.

$$|pa'| + |pb'| + |pc'| = L_1 \qquad\qquad |pa''| + |pb''| + |pc''| = L_2$$

Superposons les deux triangles de façon que leur intersection soit un hexagone.

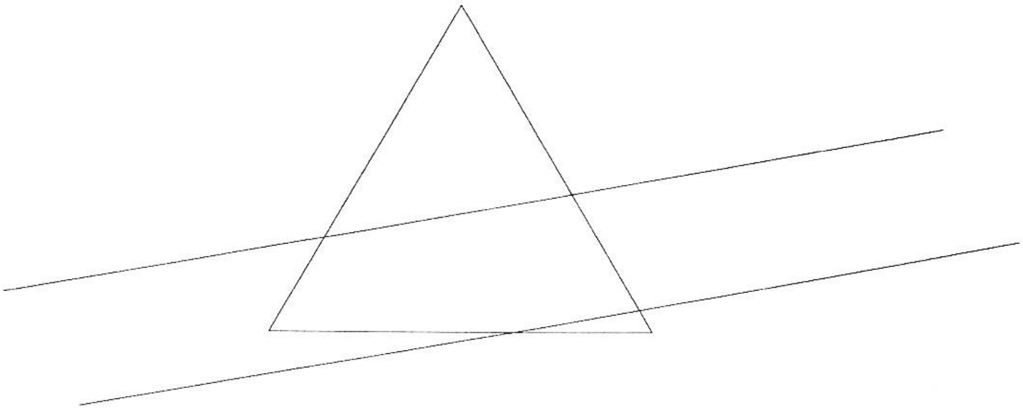


Si le point p appartient à cet hexagone,

$$|pa'| + |pb'| + |pc'| + |pa''| + |pb''| + |pc''| = L_1 + L_2$$

L'hexagone $abcdef$ possède la propriété de somme constante ! Nous possédons à présent un procédé puissant pour construire beaucoup de polygones ayant la propriété de somme constante : il suffit de superposer deux (ou plusieurs) polygones ayant déjà la propriété, en veillant à ce que le polygone intersection ait autant de côtés que les deux polygones ensemble. Vois-tu pourquoi j'introduis cette dernière condition ?

On peut aussi utiliser des bandes. Voici par exemple un pentagone obtenu en superposant un triangle équilatéral et une bande.



Essaie de superposer un carré et un triangle équilatéral de façon que le polygone intersection ait 7 côtés. Essaie ensuite avec d'autres polygones.

Nous sommes partis d'une propriété qui semblait très particulière au triangle équilatéral. Et pourtant, nous voyons que nombreux sont les polygones qui la possèdent. Mais rassure-toi : encore plus nombreux sont ceux qui ne la possèdent pas !

Septième Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

1/4 de finales Individuels
Fédération Française des Jeux Mathématiques

1) Nestor le Chanceux (coeff. 1)

Nestor est né le samedi 13 septembre 1980 ; il aura 13 ans le lundi 13 septembre 1993.
Combien Nestor aura-t-il alors connu de « vendredis 13 » (comme par exemple le vendredi 13 mars 1987) ?

2) Que de neuf ! (coeff. 2)

On multiplie par 7 un nombre gigantesque de 1993 chiffres. Oh surprise ! Le résultat ne comporte que des 9 à l'exception du dernier chiffre.
Quel est ce dernier chiffre ?

3) Autoréférence littérale mutuelle (coeff. 3)

A	B
La phrase B contient ...... voyelles.	La phrase A contient ...... consonnes.

Complétez chacune des deux phrases A et B à l'aide d'un nombre écrit en toutes lettres, de manière que ces deux phrases soient simultanément vraies.

Attention, sur le bulletin réponse, vous donnerez la réponse en chiffres.

4) Les calissons d'X (coeff. 4)

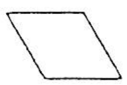


fig. 1

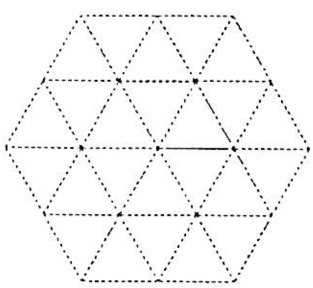


fig. 2

Un calisson (spécialité d'Aix-en-Provence), est une confiserie, ayant la forme de deux triangles équilatéraux accolés (fig. 1). Monsieur X, confiseur à Aix, aimerait savoir de combien de façons il peut ranger douze calissons dans la boîte hexagonale représentée ci-contre (fig. 2).

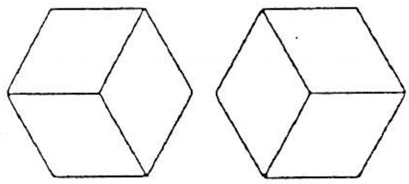
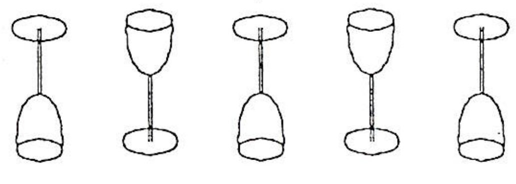


fig. 3

On ne tiendra pas compte des rotations possibles de la boîte. Ainsi, il n'existe qu'un seul rangement possible dans la mini-boîte échantillon, les deux dessins de la figure 3 pouvant représenter deux positions possibles d'une même boîte.
Pouvez-vous aider Monsieur X, en lui indiquant le nombre de dispositions possibles ?

5) Le jeu du retourne-verre (coeff. 5)

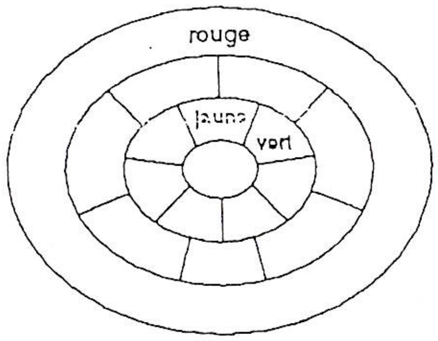
Le jeu du retourne-verre se joue à deux. Cinq verres à pied alignés sont numérotés de 1 à 5 de gauche à droite, et disposés à l'envers ou à l'endroit.
Position de départ :


1 2 3 4 5

A tour de rôle, chaque joueur inverse un verre ou deux verres, en respectant les conditions suivantes :
• s'il inverse un seul verre, c'est obligatoirement de l'envers à l'endroit ;
• s'il inverse deux verres, celui dont le numéro est plus élevé, c'est-à-dire celui situé le plus à droite, doit obligatoirement être inversé de l'envers à l'endroit.
Le joueur gagnant est le premier qui, à son tour, arrive à la situation où tous les verres sont à l'endroit.
C'est à vous de jouer. Que jouez-vous pour être sûr de gagner, quelle que soit la stratégie de votre adversaire ?
Répondez 00 si vous pensez qu'il n'existe pas de stratégie gagnante. Dans le cas contraire, si vous

n'inversez qu'un verre, répondez 0, puis le numéro du verre que vous inversez ; si vous inversez deux verres, donnez leurs numéros dans l'ordre croissant.

6) Les couleurs de la discorde (coeff.6)



Seize pays, jadis fédérés, décident de reprendre leur indépendance. C'est un casse-tête pour les géographes car chaque pays veut disposer sur la carte d'une couleur différente de celles de ses voisins immédiats, et les géographes ne disposent que de quatre couleurs (rouge, jaune, vert et bleu) !
Trois pays ont déjà choisi leur couleur. Complétez le coloriage de la carte selon une solution acceptable. On indiquera le nombre de solutions possibles.

7) Echange : le bon procédé (coeff. 7)

Sur une bande de 11 cases juxtaposées, on a disposé 10 pions numérotés de 1 à 10, la case située la plus à gauche étant laissée libre (voir dessin : position initiale). A partir de cette situation, on veut renverser l'ordre des pions, la case située la plus à gauche étant à nouveau libre en position finale, en utilisant les seuls mouvements suivants :

- glissement d'un pion d'une case à une case adjacente libre (vers la droite ou vers la gauche) ;
- saut d'un pion par dessus UN autre pion, si la case située immédiatement après le pion sauté est libre (vers la droite ou vers la gauche).

position initiale :

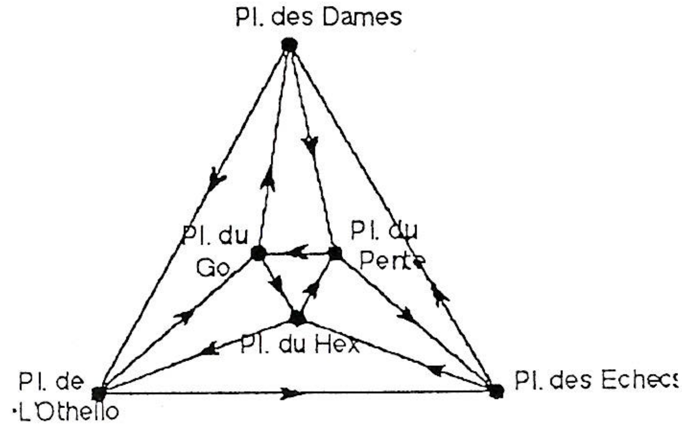
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

position finale :

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Quel est le nombre minimum de mouvements (glissements et sauts) qui permettent de passer de la situation initiale à la situation finale ?

8) Sens uniques généralisés (coeff. 8)



La ville de STRATEGY-CITY possède six places, reliées par des boulevards comme l'indique le plan ci-dessus. Afin de faciliter la circulation devenue apoplectique, le conseil municipal décide de mettre toutes les rues en sens unique, de telle sorte qu'on puisse arriver à chaque place par deux boulevards, et en repartir par deux autres. Le schéma indique l'un des projets. Le maire souhaite faire réaliser tous les schémas possibles.
Mais combien en existe-t-il ?

9) I.N.S.E.E. ou I.N.S.E.E. pas (coeff. 9)

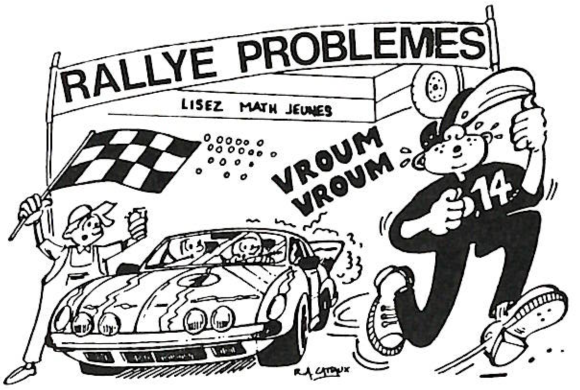
Josiane, une quadragénaire, refuse par coquetterie de dire son âge. A qui insiste pour le savoir, elle répond que si elle additionne le nombre correspondant à son numéro I.N.S.E.E. et celui de son père, né en octobre 1913 dans le même département qu'elle, elle obtient un nombre égal au carré de la somme des N premiers entiers naturels non nuls, N étant son année de naissance.
En quelle année et à quel mois est-elle née ?

Note : un numéro I.N.S.E.E. est formé de treize chiffres :

.	. .	. .	. .	. . .	. . .
sexe H : 1 F : 2	année de naissance (d et u)	mois de naissance	départ. de naiss.	code de la commune	n° d'ordre dans la commune

Catégories :

1 à 5	= C1
1 à 7	= C2
1 à 9	= L1



C. Festraets

Le rallye-problèmes 1992–1993 comportera trois étapes publiées dans les numéros 57, 58 et 59 de *Math-Jeunes*. Dans chaque numéro, vous trouverez des problèmes plus spécialement destinés aux élèves des trois classes inférieures, ils sont numérotés m1, m2, ..., m9 ; tandis que les problèmes destinés aux élèves des classes supérieures sont numérotés M1, M2, ..., M9. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer sa solution de n'importe quel problème.

Les solutions des différents problèmes seront rédigées sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final.

Veillez à ce que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées et à ce que figures et démonstrations soient sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 5 décembre 1992 à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles. Il ne sera pas tenu compte des envois tardifs.

m_1 A cette soirée, il y avait 42 invités, filles et garçons. Très observateur, vous avez remarqué que tout le monde a dansé au moins une fois et que chacune des filles a dansé avec un nombre différent de garçons différents. Ainsi, Anne, qui a le moins dansé, a dansé avec 7 garçons différents et par contre Julie a dansé avec tous les garçons.
Combien y avait-il de garçons et de filles à cette soirée ?

m_2 On donne un cercle et deux points A et B (non nécessairement situés sur le cercle). Construire un triangle rectangle inscrit dans le cercle et dont un côté de l'angle droit passe par A et l'autre côté de l'angle droit passe par B.
Dans quels cas le problème est-il impossible ?

m_3 Il y a une fausse pièce parmi 12 pièces de monnaie. La fausse pièce a un poids différent de celui des autres (toutes de même poids), mais on ne sait pas si elle est plus lourde ou plus légère. On dispose d'une balance à deux plateaux, mais d'aucun poids.
On demande comment on peut, en trois pesées au maximum, déterminer quelle est la pièce fausse et si elle est plus lourde ou plus légère que les autres.

M_1 On divise un carré de côté 1 en neuf carrés égaux en menant des parallèles aux côtés. On enlève le carré central. Restent huit carrés ; on divise de la même manière chacun d'eux en neuf carrés et on enlève les carrés centraux.
Après avoir répété ce processus n fois :
• Combien de carrés de côté $\frac{1}{3^n}$ reste-t-il ?
• Quand n tend vers l'infini, quelle est la somme totale des aires des carrés enlevés ?

M_2 r étant un réel, on désigne par (r) l'entier le plus « proche » de r, et dans le cas où il y a deux tels entiers, (r) est égal au plus grand des deux. Ainsi,

$$\begin{aligned}(2,35) &= 2\ ;\\ (-7,6) &= -8\ ;\\ (3,5) &= 4\ ;\\ (-2,5) &= -2.\end{aligned}$$

Démontrer que l'égalité

$$N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \cdots + \frac{N}{2^n} + \cdots$$

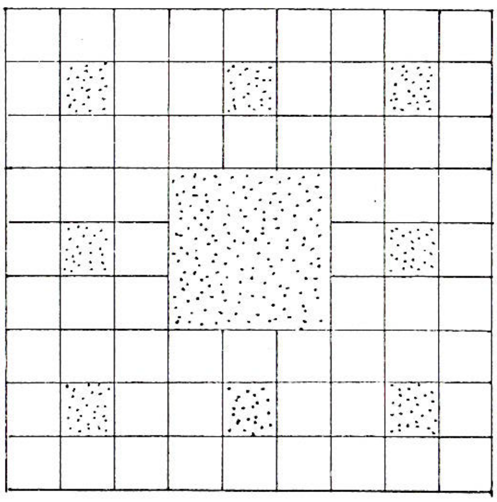
où N est un entier positif, peut aussi s'écrire

$$N = \left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{N}{2^n}\right) + \cdots$$

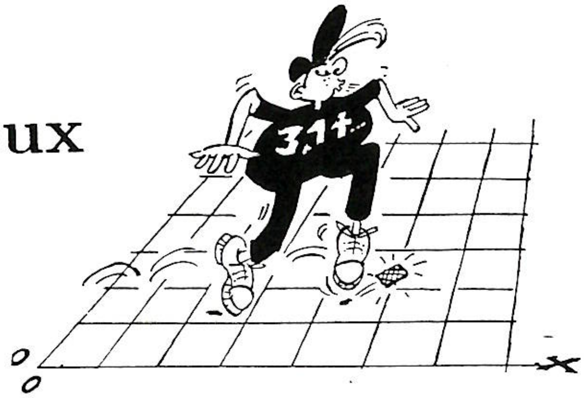
M_3 Un champ carré a une superficie de 1,6 ha. On y plante un arbre à chaque coin, sept arbres à l'intérieur et des haies joignant un arbre à un autre arbre de manière à déterminer un maximum de parcelles triangulaires ayant un arbre à chacun de leurs sommets.

1) Démontrer qu'au moins une de ces parcelles a une superficie d'au moins 10 ares.

2) Existe-t-il une disposition des arbres et des haies telle que toutes les parcelles aient la même aire ?



Jeux

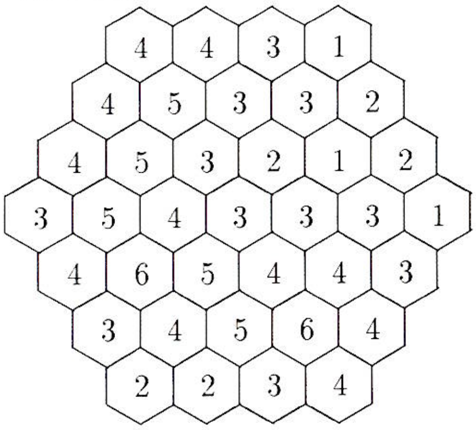


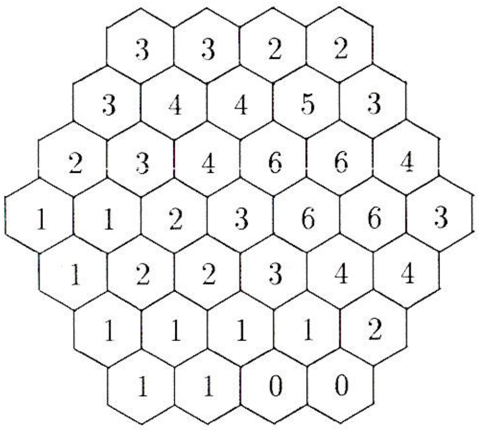
A.Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

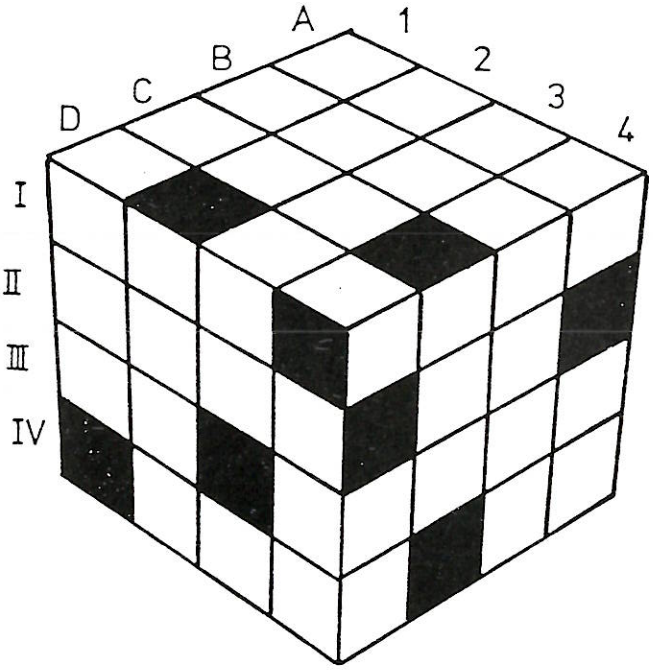
Rappelons brièvement la règle de ce jeu de décodage :

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, à partir de la grille codée, de retrouver la grille coloriée.





Cubanagram' (par G. Malisse)



A : DEISS – AS
B : EEILORTT
C : NOT – ILT
D : INU – OR

I : ETU–EILS
II : EESS–IL
III : AS–CEOST
IV : ORTU–AT

1 : DEIORST
2 : INO–ASTU
3 : EISSTU
4 : ET–CEU

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

		212		
55		45		
17			10	7

Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	12	7	
14			4
1			18
	2	12	

	18	5	
20			4
11			16
	14	10	

Produits croisés

A chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres-définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

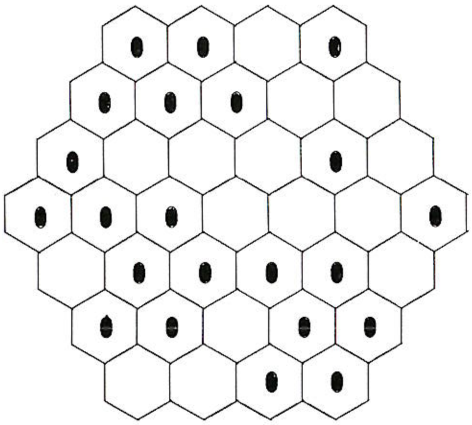
	1	2	3	4	5	6
1					R	
2						T
3				O		
4						
5						
6						

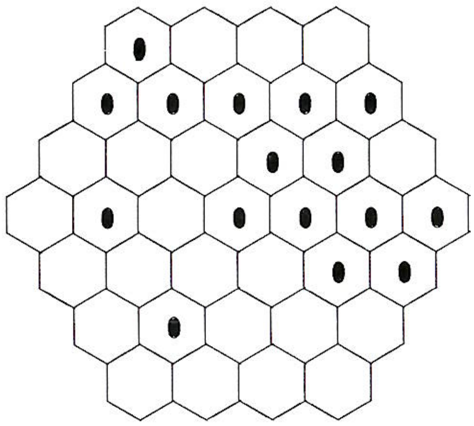
Horizontalement
1. 491400
2. 810000
3. 510300
4. 13
5. 70
6. 211185

Verticalement
1. 1228500
2. 59850
3. 195 — 19
4. 1080
5. 2430 — 144
6. 1400

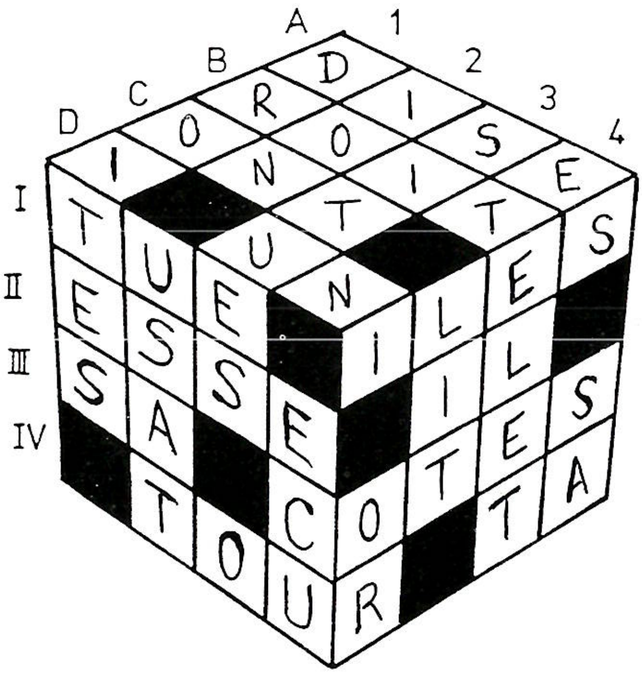
Solutions

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Cubanagram'



Le mur des nombres

				212				
			111		101			
		55		56		45		
	27		28		28		17	
17		10		18		10		7

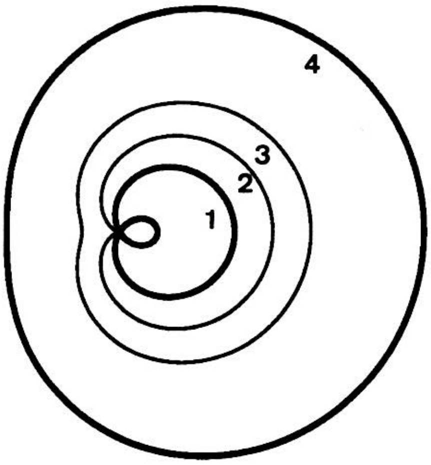
Grilles des moyennes

	12	7	
14	10	8	4
1	6	11	18
	2	12	

	18	5	
20	15	9	4
11	13	12	16
	14	10	

Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	N	O	M	B	R	E
2	O	C	E	L	O	T
3	R	E	C	O	I	N
4	M	A		C		A
5	E	N	A		P	
6	E	S	S	A	I	M



Cette année, la couverture de *Math-Jeunes* te présentera de « jolies » courbes. Si tu es élève dans le cycle inférieur des humanités, nous te proposons d'essayer de les dessiner à partir de leur définition ; nous publierons les plus beaux dessins (n'oublie pas de laisser tes constructions en pointillés ...). Si par contre, tu es dans le cycle supérieur, nous t'invitons à tenter de trouver les équations de ces courbes en coordonnées cartésiennes ou polaires ou encore leurs équations paramétriques ; nous publierons également les meilleures démonstrations.

La première couverture te propose des « LIMAÇONS DE PASCAL ». C'est le mathématicien et physicien français Gilles Personne de ROBERVAL (1602–1675), par ailleurs inventeur d'une célèbre balance à plateaux (parles-en à tes grands-parents ...), qui nomma ainsi ces courbes en l'honneur de celui qui les avait découvertes : Etienne PASCAL, père de l'illustre Blaise PASCAL (1623–1662).

Qu'est-ce qu'un « LIMAÇON DE PASCAL » ?

Soient Γ un cercle dont le diamètre mesure a, un point O de ce cercle qu'on appelle généralement *pôle* et une longueur donnée ℓ. Menons par O une droite variable qui recoupe le cercle en un point P. Sur la droite OP, on marque deux points M_1 et M_2 tels que

$$|PM_1| = |PM_2| = \ell$$

Le lieu géométrique de ces points M_1 et M_2, c'est-à-dire l'ensemble de ces points M_1 et M_2 (lorsque la droite OP tourne autour de O) est un « LIMAÇON DE PASCAL ». Sa forme dépend du rapport des longueurs a et ℓ.

- si $\ell/a < 1$, la courbe est du type 1
- si $\ell/a = 1$, la courbe est du type 2
- si $1 < \ell/a < 2$, la courbe est du type 3
- si $\ell/a \geqslant 2$, la courbe est du type 4 (forme ovale)

Le type 2, qui rappelle la forme d'un **cœur**, a été baptisé « CARDIOÏDE » ; il semble que ce terme ait été introduit en 1741 par le mathématicien italien J. CASTILLON (1709–1791), de son vrai nom Gian Francesco SALVEMINI.
Bon amusement !

La Rédaction