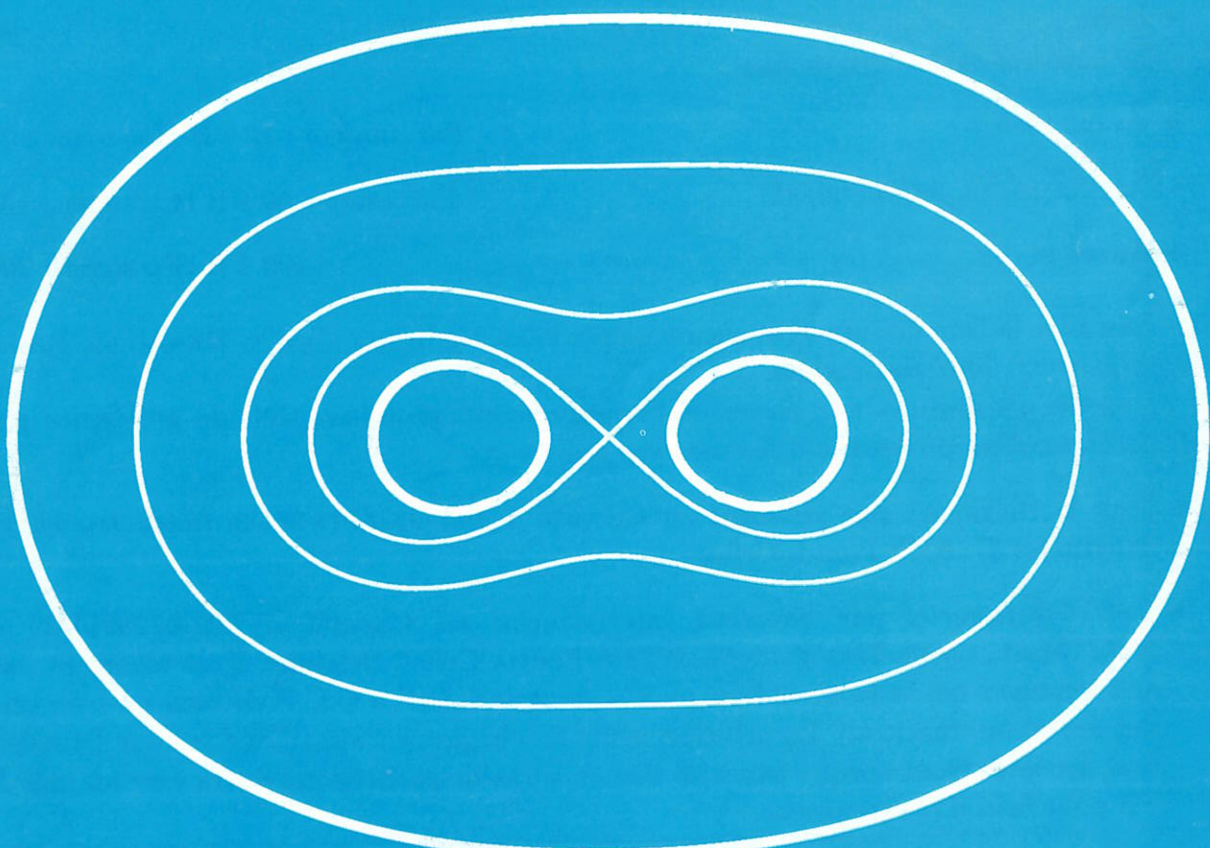
MATH - JEUNES



14e année
Décembre - n°58

Bureau de dépôt Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Place Matteotti 29 Bte 5, 7100 LA LOUVIERE (1).

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 exempl. au moins) : 100 FB
- Isolés : 140 FB

Etranger :

- Pour 5 abonnements : 1000 FB
- Isolés : 280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1988 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 88/89, 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Année 91/92 — 100 FB (Etranger : 200 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

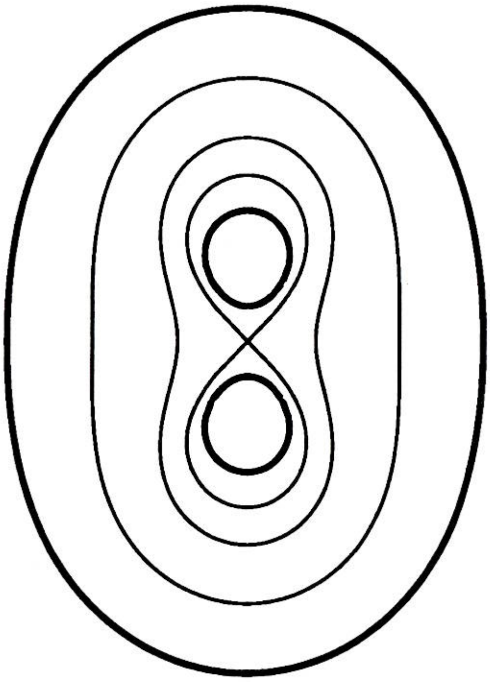
- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

(1) Jusqu'au 28 février 1993

N° 58 Quatorzième année 1992

MATH-JEUNES



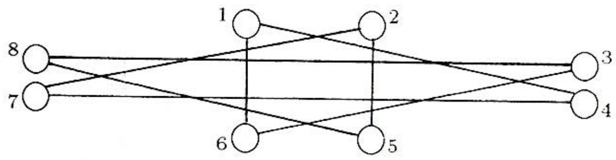
Math-Jeunes n° 58, 22–23, 1992

Jeux et Passe-temps (2)

Claude Villers, *Athénée royal de Mons*

Le « Jeu Américain des sept et huit »

Dans le dernier numéro de *Math-Jeunes*, nous vous avons présenté ce jeu.
Rappelons que c'est un jeu auquel on joue seul. Huit cases, dessinées sur un support quelconque, sont reliées entre elles selon le schéma suivant :



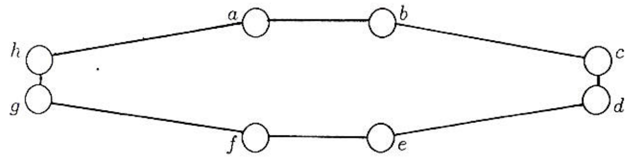
Le joueur doit placer sept pions sur sept cases en respectant le processus que voici :

• Placer un pion (à la fois) sur une case vide. • Le faire glisser en parcourant une seule ligne vers une case inoccupée où il reste en place.

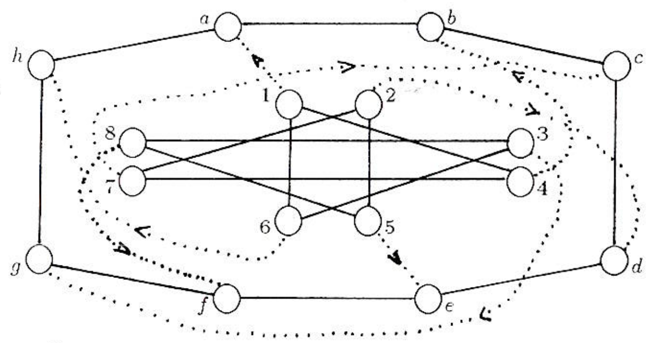
Je suis persuadé que vous avez trouvé la stratégie qui permet de placer sept pions et d'ainsi répondre au défi qui vous était lancé par le jeu. La plupart de ceux qui m'ont écrit ont d'ailleurs eu la même idée que voici :
Pour gagner, il suffit de **choisir comme case d'arrivée la case de départ du dernier déplacement.**
Ainsi, par exemple, si vous placez votre premier pion sur la case n° 4 et que vous le glissez le long du segment [4–1] alors vous utiliserez la case 4 comme case d'arrivée du prochain pion déplacé (en partant donc de la case 7), et ainsi de suite.
Vous obtenez ainsi une solution qui peut s'écrire :

4 – 1
7 – 4
2 – 7
5 – 2
8 – 5
3 – 8
6 – 3

Un article concernant ce jeu est paru dans le numéro 8 de la revue *Mathématique et Pédagogie* (septembre–octobre 1976) éditée par la Société belge des Professeurs de mathématique d'expression française (qui édite aussi *Math-Jeunes*).
Dans cet article, intitulé « *Gagner sans fatigue grâce à l'isomorphisme* », Monsieur Roger DEHERDER de l'Université Libre de Bruxelles montre que le jeu proposé est isomorphe (Rem. 1) au jeu basé sur les mêmes règles mais utilisant la structure suivante :



pour laquelle la stratégie est évidente.
Il suffit de déplier la structure croisée proposée de manière à la faire correspondre à la structure « convexe » donnée en dernier lieu en utilisant la bijection (Rem. 2) suivante :
$1 \leftrightarrow a$, $2 \leftrightarrow d$, $3 \leftrightarrow g$, $4 \leftrightarrow b$, $5 \leftrightarrow e$, $6 \leftrightarrow h$, $7 \leftrightarrow c$, $8 \leftrightarrow f$.



Si deux cases de la première structure sont reliées par un segment alors les images de ces cases sont aussi reliées par un segment.
Le dépliage qui illustre l'isomorphisme montre bien que le problème initial peut être ramené à un problème plus simple. C'est — nous l'avons déjà signalé — une démarche classique en mathématique.

Remarques :

(1) *isomorphe* = « même forme »
(2) *bijection* = « mise en correspondance de deux ensembles par laquelle tout élément de l'un correspond à un et un seul élément de l'autre »

* *
*

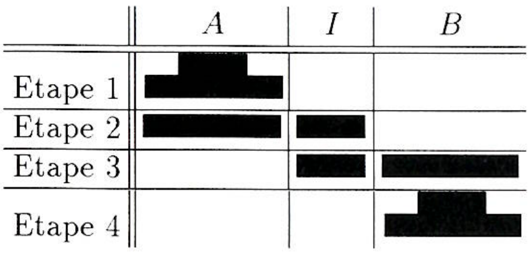
Voici maintenant le jeu sur lequel je vous invite à « plancher » de manière à déterminer une réflexion mathématique que je vous invite à me communiquer dès que possible.
Je vous rappelle l'adresse à laquelle vous pouvez envoyer vos résultats et commentaires :

Claude VILLERS
Rue Piérard, 29
7022 Hyon–Mons.

C'est le jeu (très) connu sous le nom de « **Tours de Hanoï** ». C'est encore un jeu qui se joue seul.

Une tour, composée d'un certain nombre d'étages de tailles décroissantes, doit être déplacée d'un endroit de départ A vers un endroit d'arrivée B via un endroit intermédiaire I si besoin est. Pour cela, il n'est permis que de déplacer un étage à la fois et il est interdit de déposer un étage sur un étage plus petit.

Exemple : Tour à deux étages

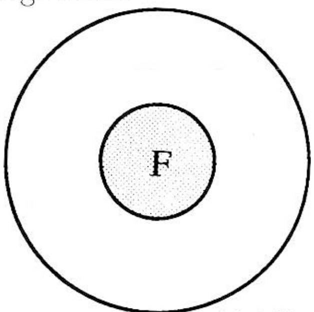


Dans le cas illustré, il a fallu effectuer trois mouvements (au minimum).

L'allée du parc

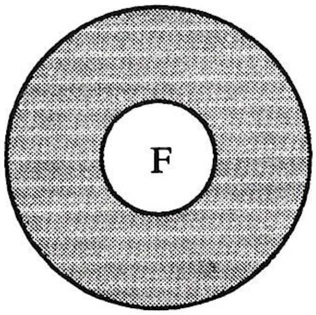
Patrick Tréfois,
Athénée Royal de Mons

Dans un des parcs de notre jolie ville, un étang circulaire, alimenté par une fontaine, est bordé d'une large allée.



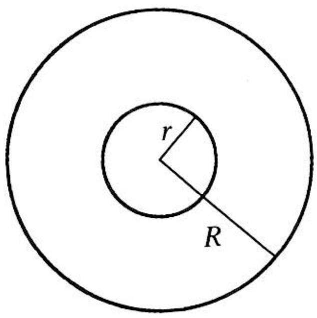
F : la fontaine !

Les édiles communaux décidèrent un jour d'empierrer cette allée (en forme de couronne circulaire).



On fit appel à trois sociétés qui dépêchèrent du personnel sur les lieux pour procéder à l'estimation de la surface à empierrer.

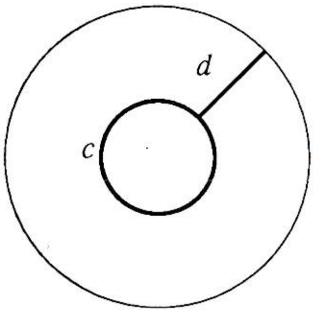
1. Le premier ouvrier n'était pas mathématicien. Il pensait que la connaissance de r et de R lui était nécessaire.



Armé de son courage et d'une corde, il plongea dans l'étang jusqu'en son centre (arrosé par la fontaine !).

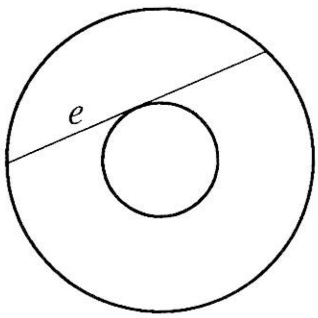
Il ne restait plus qu'à mesurer r et R, grâce à la corde tendue par une autre personne.

2. Le deuxième ouvrier n'était guère plus matheux, mais comme il ne voulait pas se mouiller, il se fit aider par son neveu (un fervent de *Math-Jeunes*) qui lui expliqua que la connaissance de c et de d était suffisante.



Mesures facilement effectuées à l'aide d'une chaîne d'arpenteur.

3. Le troisième personnage de notre histoire connaissait un peu la géométrie. Il lui suffit de mesurer e (une corde du grand cercle tangente au petit) pour calculer l'aire de l'allée.



Voici les valeurs trouvées par nos arpenteurs (en m) :

1.	2.	3.
$R = 7,6$	$c = 22,6$	$e = 13,4$
$r = 3,6$	$d = 4$	

On ne sait pas qui eut la charge de l'ouvrage (bien qu'une histoire « drôle » en donne une solution « politique » ...) mais pouvez-vous retrouver les méthodes de calcul de nos amis ?

Solutions

L'aire de l'allée est évidemment

$$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

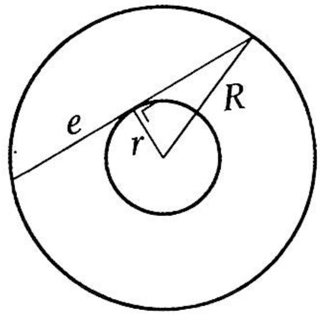
ou, plus simplement,

$$\pi \cdot (R^2 - r^2).$$

1. Aire $= \pi \cdot (7,6^2 - 3,6^2) \simeq 141$ (m^2).

2. $2 \cdot \pi \cdot r = c$ donc $r = \dfrac{c}{2 \cdot \pi} \simeq 3,6$ (m). Puisque $R = r + d$, $R \simeq 3,6 + 4 = 7,6$ (m). Et on retourne au 1.

3.



$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ ou
$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$ et $6,7^2 = R^2 - r^2$.
Mais Aire $= \pi \cdot (R^2 - r^2)$
donc Aire $= \pi \cdot 6,7^2 \simeq 141$ (m^2) !

Conclusion :

Les maths, ça peut servir, non ?

Un historique de π

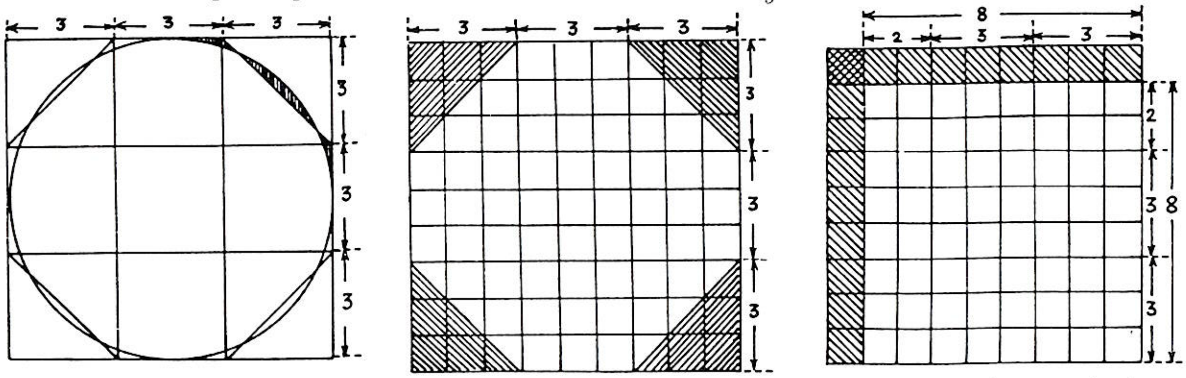
Simone Trompler

Personne ne peut savoir quand l'Homme a commencé à dessiner des ronds, ni quand il a cherché à mesurer leur contour ou l'aire qu'ils renferment. Les premiers vestiges qui nous restent sur la question datent d'environ 2000 avant Jésus-Christ.

En **Egypte**, le papyrus RHIND recopié par le scribe AHMÈS ($\sim$ -1800) est un écrit mathématique où sont exposés des problèmes. L'un d'entre eux, le cinquantième, donne la « méthode pour calculer une pièce de terre circulaire dont le diamètre vaut 9 verges. Quelle est sa surface de terre ? ». Et la consigne revient à ceci : tu dois soustraire $\frac{1}{9}$ au diamètre d, multiplier le résultat par d, et soustraire du produit son propre neuvième. Nous écririons :

$$(1-\frac{1}{9})d \times d - \frac{1}{9}(1-\frac{1}{9})d \times d \text{ ou } (\frac{8}{9}d)^2$$

Le cercle est donc remplacé par un carré dont le côté vaut les $\frac{8}{9}$ du diamètre.



La figure qui accompagne le problème montre que les Egyptiens sont arrivés au résultat par un procédé graphique : le cercle est inscrit dans un carré, et le scribe semble avoir calculé par approximation, à l'aide des quatre triangles déterminés par l'inscription du cercle.

Donc, pour nous, nous en déduisons

$$\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} \approx 3,16049\ldots$$

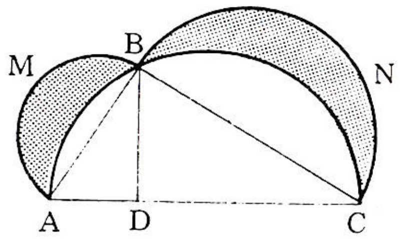
En **Mésopotamie**, à la même époque, d'après des tablettes retrouvées à Suse, on a pu conclure que l'approximation pour π était $3\,\frac{1}{8}$.

La **Bible** nous relate un travail pratique à ce sujet : le roi SALOMON fait venir HIRAM de Tyr lorsqu'il construit son palais. Entre autres, HIRAM bâtit un réservoir d'eau lustrale (1) pour les ablutions des prêtres ; ce réservoir s'appelle *la Mer* et nous lisons ceci : « ... Il fit la mer de fonte. Elle avait dix coudées d'un bord à l'autre, une forme entièrement ronde, cinq coudées de hauteur et une circonférence que mesurait un cordon de trente coudées. ... (2) » Nous sommes un peu déçus : $\pi = 3$! Mais nous aurions tort d'en conclure qu'une valeur plus précise était inconnue. Il ne s'agit pas ici d'un texte mathématique mais d'un récit historique. Nous nous voyons mal, à l'heure actuelle, présenter π avec son milliard de décimales au milieu d'un reportage, d'un roman ou d'un livre d'histoire. Et pourtant, nous les connaissons.

(1) eau lustrale : eau qui sert à purifier.

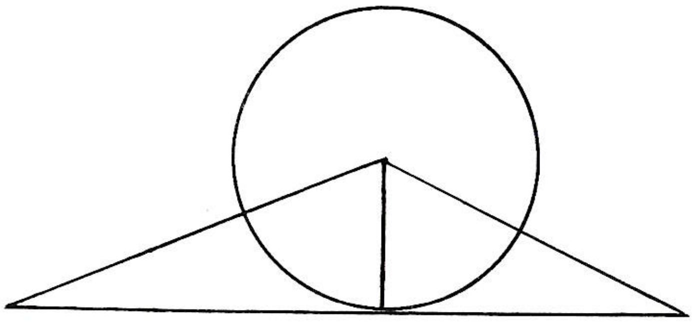
(2) Le Livre des Rois, I, 7, 23.

Tout ce que nous venons de dire concerne la recherche d'un procédé pour calculer l'aire et le périmètre d'un cercle et montre qu'il était admis implicitement qu'il était valable pour n'importe quel cercle. Pas question de le démontrer, il faudra attendre les Grecs pour cela.
De **Grèce**, aucun texte original ne nous est parvenu d'avant le cinquième siècle avant Jésus-Christ. Au milieu de ce siècle, HIPPOCRATE DE CHIO, dans un texte sur les lunules, parvient à trouver leur surface dans des cas particuliers.



ANTIPHON, contemporain de SOCRATE, a l'idée d'inscrire des polygones réguliers d'un nombre de plus en plus grand de côtés jusqu'à « remplir » le cercle. BRYSON, son contemporain, considère simultanément les polygones inscrits et circonscrits au cercle : ces travaux préfigurent ceux d'ARCHIMÈDE. Enfin, arrive ce Grand Homme (-287, -212) qui fait un immense pas en vant dans son *Traité sur la mesure du cercle* et nous donne un algorithme pour calculer π avec une précision croissante (et beaucoup de courage et de patience ...).
Il démontre trois propositions :

- *Tout cercle est équivalent à un triangle dont la hauteur et la base sont le rayon et la circonférence du cercle.*



- *Le rapport de l'aire du cercle à celle du carré circonscrit est proche de celui de 11 à 14.*

- *Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre augmenté d'un segment compris entre les $\frac{10}{71}$ et $\frac{1}{7}$ du diamètre (de là, cette habitude encore si tenace de prendre pour π, $\frac{22}{7}$).*

Pour établir cette dernière proposition, il compresse le cercle entre deux polygones dont le nombre de côtés peut être augmenté autant qu'il le faut pour obtenir la précision voulue. C'est cette technique qui sera utilisée encore au dix-septième siècle.
Nous ne pouvons pas énumérer tous les efforts faits pour calculer de mieux en mieux la circonférence ou l'aire du cercle. Ils sont nombreux et viennent des Chinois, des Indiens, des Arabes, des Hébreux.

Rappelons-nous bien cependant que, contrairement à notre conception moderne, π n'était pas un nombre, n'avait pas de nom, ni de symbole fixé ; c'était un **rapport**.

A travers le Moyen Âge et jusqu'au dix-septième siècle, les décimales s'alignent, de plus en plus nombreuses. C'est ainsi que Adrien ROMAIN (1561 – 1615) en trouve quinze exactes ; Ludolph VAN CEULEN (1539 – 1610) arrive à 35, ce qui lui vaut d'attacher son nom à π, encore appelé, en Allemagne, *nombre de Ludolph.*

Mais au dix-septième siècle, grâce à l'invention du calcul infinitésimal par LEIBNIZ et NEWTON, l'étude de π prend une autre forme. Elle s'exprime par une série. James GREGORY, en 1670, emploie

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

qui donne $\frac{\pi}{4}$ pour $x = 1$. LEIBNIZ l'utilise aussi, mais il faut beaucoup de termes pour peu de décimales exactes.

J. MACHIN (1650 – 1752) améliore de beaucoup la méthode en choisissant quatre fois $x = \frac{1}{5}$, puis $x = \frac{1}{239}$, arrivant à

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

à l'aide de la formule $\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$. Il obtient ainsi cent décimales exactes.

D'autres mathématiciens iront de plus en plus loin, grâce à de nouveaux algorithmes et aux ordinateurs. Citons SALAMIN, en 1976 (plusieurs millions) et enfin Gregory et David CHUDNOVSKY qui atteignent la milliardième, en 1989. D'autres recherches sont toujours en cours.

Depuis le début du dix-huitième siècle, π est reconnu comme nombre. Mais quel type de nombre ? Pas un rationnel, bien sûr. Mais est-il même algébrique, c'est-à-dire solution d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes, à coefficients entiers ? F. LINDEMANN prouvera, en 1882, qu'il ne l'est pas et qu'il prend place parmi les **nombres transcendants**, avec e et beaucoup beaucoup d'autres.

Pour nous faciliter l'écriture, nous avons parlé de π, depuis l'Antiquité. Mais c'est un anachronisme. Il semble que l'usage le plus précoce d'une seule lettre pour ce nombre apparaisse dans une œuvre de J. Chr. STURM, professeur en Bavière, qui l'appelle e en 1689. Mais il n'est pas suivi ; c'est seulement en 1706 que W. JONES introduit π et écrit $d = c \div \pi$ et $c = d \times \pi$ (c pour circonférence et d pour diamètre). L'habitude de ce symbole ne se prend que lentement. EULER, par exemple, ne l'emploie systématiquement que vers 1750 et le premier manuel français où on le trouve paraît être celui de A. M. LEGENDRE, en 1794.

Dans le numéro spécial π (supplément au PETIT ARCHIMÈDE), on trouve la chronologie suivante :

-2000	Babyloniens	$3\frac{1}{8}$
-2000	Egyptiens	$(\frac{16}{9})^2$
-1200	Chine	3
-500	Bible	3
-300	Archimède	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$
2e siècle	Ptolémée	$\frac{377}{120}$
3e siècle	Chung Hing	$\sqrt{10}$
	Wang Fau	$\frac{142}{45}$
263	Lui Hui	$\frac{157}{50}$
5e siècle	Tsu Chung Chi	$3,1415926 < \pi < 3,1415927$
	Aryabhata	$\frac{62832}{2000}$
1414	Al-Kashi	16 décimales
1596	L. Van Ceulen	35
1699	A. Sharp	72
1719	Fautet de Lagny	127
1794	Baron Georg Von Vega	136
1844	Zacharias Dahse	200
1847	Th. Clausen	248
1853	W. Lehmann	261
1873	W. Shanks	707 dont 528 exactes
1947	Ferguson et Wrench Jr	808 (machine de bureau)
1949	Smith et Wrench Jr	1120 (machine de bureau)
1949	Reitwiesner	2037 (ENIAC)
1954	Nicholson et Jeenel	3089 (NORC)
1958	F. Genuys	10000 (IBM 704 / Paris)
1958	G.E. Felton	10021 (Pegasus / Londres)
1961	Shanks et Wrench Jr	100265 (IBM 7090 / Washington)
1966	Guilloud et Filliatre	250000 (IBM 7030 / Paris)
1967	Guilloud et Dichampt	500000 (CDC 6600 / Paris)
1976	Guilloud et Bouyer	10^6 décimales
1989	G. et D Chudnovsky	10^9 décimales

Bibliographie

Numéro Spécial π : supplément au PETIT ARCHIMÈDE n° 64-65, mai 1980
R. TATON, *Histoire Générale des Sciences*
P. DEHON – J. ITARD, *Mathématiques et Mathématiciens*
M. SERRES, *Eléments d'Histoire des Sciences*

F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations*
F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*
C. RADOUX, *Les Nombres Transcendants*
Encyclopédie Universalis
Encyclopædia Britannica
Enciclopedia Italiana
La Bible, *Le Livre des Rois*

ADDENDUM
par Rita LESPLINGART–MIDAVAINE

Retrouver le nombre π en s'amusant ...
Il suffit de laisser tomber une baguette sur le sol. Le sol doit être recouvert d'un plancher dont toutes les lattes ont la même largeur. Prends un objet mince comme une aiguille, dont la longueur est égale à la largeur des lattes du plancher et laisse-le tomber de nombreuses fois. Note le nombre de fois où il y a intersection avec une rainure et divise-le par le nombre de lancers. Le double de l'inverse de ce rapport est une évaluation de π. BUFFON a étudié ce problème au dix-huitième siècle dans son *Essai d'arithmétique morale* publié en 1777. Qui peut expliquer la réponse obtenue ?

Encore une formule pour π ...
Nous avons vu que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ Ce même nombre peut encore s'écrire :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \cdots$$

Quelques formules dans lesquelles apparaît notre nombre :

aire du disque : $\pi \times r^2$

circonférence d'un cercle : $2 \times \pi \times r$

volume du cylindre : $\pi \times r^2 \times h$

aire latérale du cylindre : $2 \times \pi \times r \times h$

volume de la sphère : $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

surface de la sphère : $4 \times \pi \times r^2$

volume d'un cône : $\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

Quelques curiosités à propos de π ...
Voici les 30 premières décimales : 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 ...
On peut les retrouver à l'aide du nombre de lettres des mots de ce quatrain :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
Immortel Archimède, artiste, ingénieur.
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

En anglais, pour retenir 13 décimales :

How I wish I could recollect of circle round
The exact relation Archimede unwound.

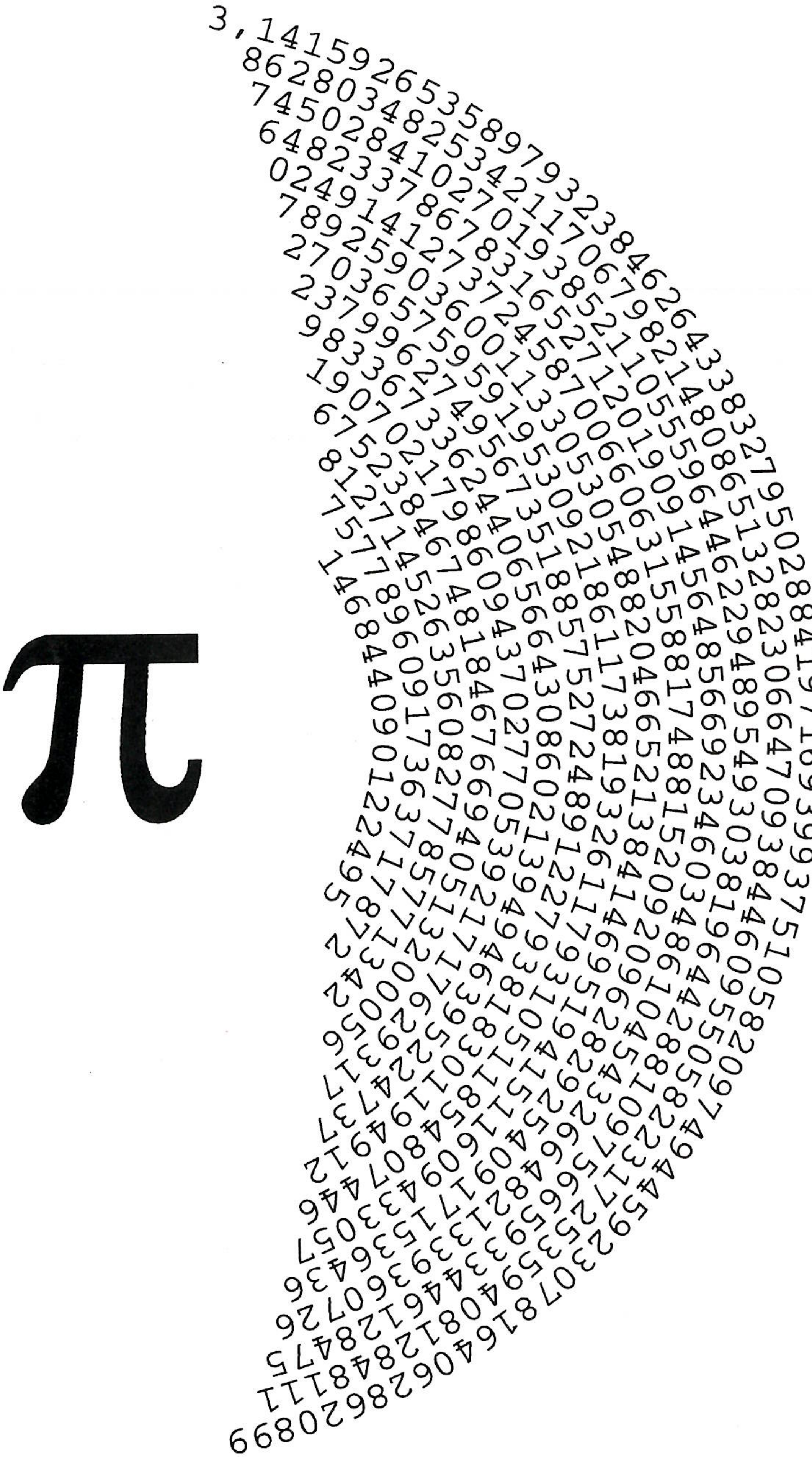
ou 30 :

Now, I show a spell unfailing
An artful charm, for tasks availing
Intricate results entailing
Not in too exacting mood
Poetry is pretty good
Try the talisman. Let be
Adverse ingenuity.

En allemand encore, à nouveau pour 30 décimales :

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie !
Wie viele Tausende bewundern Geister
Himmlisch wie du und göttlich !
Noch reiner in Aeonen
Wird das uns Strahlen,
Wir im lichten Morgenrot !

Si tu veux voir beaucoup de décimales de π, tu peux te rendre au Palais de la Découverte à Paris ; une salle entière est consacrée à ce merveilleux nombre.
La page suivante t'en présente les 665 premières décimales.


π
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111
7450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475
64823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726
024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436
7892590360011330530548820466521384146951941511609433057
27036575959195309218611738193261179310511854807446
237996274956735188575272489122793818301194912
9833673362440656643086021394946395224737
19070217986094370277053921717629317
675238467481846766940513200056
8127145263560827785771342
75778960917363717872
146844090122495

Math-Jeunes n° 58, 32–35, 1992

Pourquoi le service au tennis est-il si difficile ?

Monique Parker, *Université Libre de Bruxelles*

Ceci est une adaptation d'un chapitre de "Motivating A-level Mathematics", The Spode Group, Oxford University Press, 1986.

Es-tu joueur de tennis ? Ou seulement spectateur ? As-tu remarqué l'importance du service ? Le sort des championnats se joue souvent sur la proportion de premiers services que chaque joueur arrive à réussir.
Pourquoi donc est-il si difficile de placer correctement un service alors que le rectangle dans lequel la balle est autorisée à atterrir mesure 6,4 m de long et 4,115 m de large ?
Pourquoi un joueur qui rate un premier service a-t-il tendance à diminuer la vitesse lors du second essai ? Nous allons essayer de mieux cerner le problème en modélisant la situation.

Premier modèle

De nombreux facteurs peuvent influencer la trajectoire d'une balle de tennis : sa vitesse, sa surface, l'effet de spin (rotation de la balle sur elle-même), la résistance de l'air, la température, l'humidité, pour n'en nommer que quelques-uns. Nous allons, dans un premier temps, ignorer tous ces facteurs et supposer que la balle se déplace en ligne droite. Ceci peut sembler une approximation bien grossière, mais si la balle est frappée à grande vitesse (jusqu'à 200 km/h au plus haut niveau), certains de ces facteurs sont négligeables et le modèle simplifié est très bon. De plus, nous considérons que la balle est un point et que le haut du filet est une droite située à 0,9 m au-dessus du milieu du court. Si la balle est frappée au point D (fig. 1) situé à une hauteur h au-dessus du milieu A de la ligne de fond, où peut-elle atterrir ?

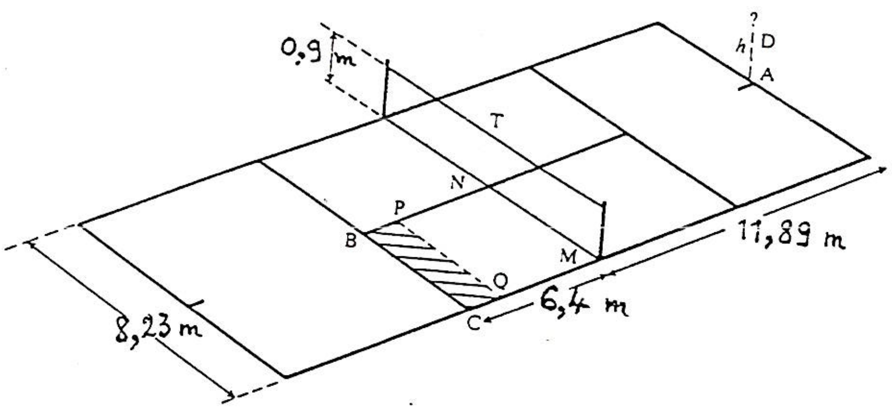


Figure 1

Voyons d'abord ce qui se passe si elle est envoyée perpendiculairement au filet, de façon à passer juste au-dessus du filet. Si x est la distance entre le point P où elle atterrit et le filet, on a (fig. 2)

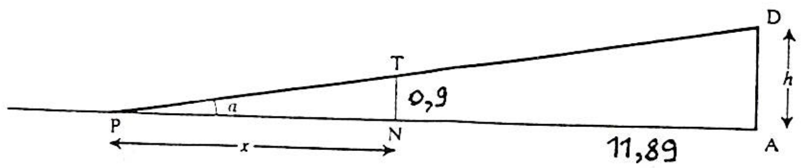


Figure 2

$$\frac{x}{0,9} = \frac{x + 11,89}{h} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{10,7}{h - 0,9}$$

L'endroit où la balle atterrit est donc fonction de la hauteur à laquelle elle est frappée.
En moyenne un joueur livre à une hauteur de 2,7 m ce qui donne x = 5,94 m.
Mais la ligne de service n'est qu'à 6,4 m du filet ! Ceci ne laisse pas une grande marge de manœuvre au serveur.
Servie dans le plan ADB (perpendiculaire au filet), la balle peut donc atterrir entre B et P et l'angle de la trajectoire avec le sol peut varier entre

$$\theta_1 = \text{arctg}\,\frac{2,7}{18,29} = 8,4^\circ \quad \text{et} \quad \theta_2 = \text{arctg}\,\frac{2,7}{17,83} = 8,61^\circ \quad \text{(fig. 3)}$$

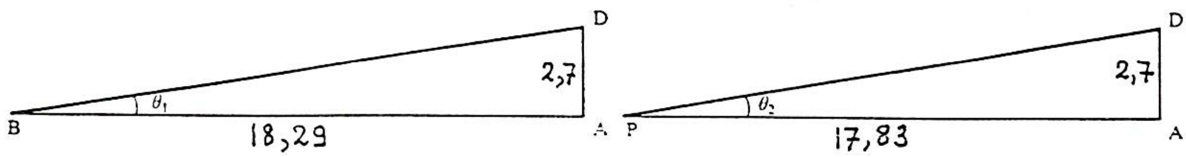


Figure 3

Une aussi petite marge d'erreur permet de comprendre pourquoi un service très rapide est souvent trop long ou dans le filet et pourquoi le service d'un champion peut se dérégler au cours d'une partie. Il est en effet tenu de contrôler un angle de 0,21°.
Voyons à présent ce qui se passe si le serveur frappe la balle de façon oblique par rapport au filet. Nous conservons l'hypothèse que la balle se déplace en ligne droite et passe juste au-dessus du filet. Les trajectoires de toutes les balles frappées au point D se trouvent alors dans le plan formé par D et le bord supérieur du filet. Ce plan coupe le sol suivant une droite PQ parallèle au filet. Si h = 2,7 m la droite PQ est à 5,94 m du filet. La région $BPQC$ dans laquelle la balle peut être envoyée a donc une largeur de 0,46 m et ne représente que 1/14 du rectangle de service. Un joueur plus grand a un avantage très net : si la balle est frappée à une hauteur de 3 m, on a x = 5,1 m et la largeur de la bande $BPQC$ devient égale à 1,3 m, elle a donc presque triplé !
Ce modèle très simplifié, valable pour un service ultra-rapide, montre aussi pourquoi un joueur de petite taille doit se résigner à un service plus lent.

Supposons en effet qu'un tel joueur frappe la balle à une hauteur $h = 2{,}4$ m. Le modèle que nous avons utilisé donne $x = 7,13 > 6,4$ et le service serait toujours trop long !
Le modèle permet de comprendre diverses observations que tu peux faire sur le service d'un champion. Pour servir, il se rapproche le plus possible de la ligne du fond car reculer réduirait encore l'aire de la cible. De plus, il cherche à frapper la balle le plus haut possible en étirant son corps (pointe des pieds, épaule de frappe surélevée, bras de frappe tendu).

Second modèle

Nous tenons compte de l'accélération due à la pesanteur mais nous continuons d'ignorer les effets aérodynamiques.
Choisissons le point D (où la balle est frappée) comme origine des axes. La balle est envoyée dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale, avec une vitesse v (fig. 4).

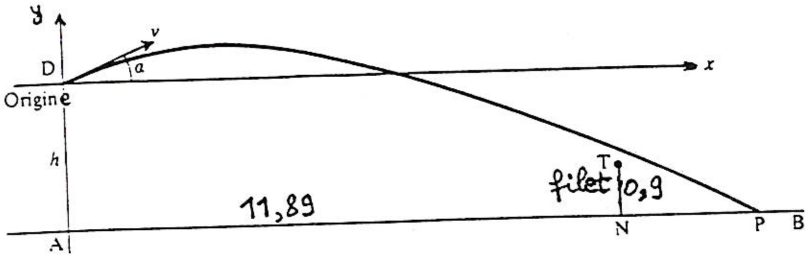


Figure 4

Après un temps t les composantes horizontale et verticale de la position de la balle sont données par :

$$x = vt\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

En éliminant t entre ces deux équations on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Voyons où la balle atterrit si elle passe à ras du filet. Ceci signifie que le point T de coordonnée $(11;89;-h+0,9)$ se trouve sur la trajectoire, ou encore que

$$0,9 - h = 11,89\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{(11,89)^2 g}{2v^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ceci est une relation entre trois variables sur lesquelles le serveur peut agir : la hauteur h, la vitesse v et l'angle α. En écrivant $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha$, on obtient une équation du second degré en $\mathrm{tg}\,\alpha$. Pour des valeurs fixées de h et de v, on a donc deux angles de départ qui donnent des trajectoires frôlant le filet (fig. 5). Dans la pratique, c'est toujours la trajectoire inférieure qui est utilisée.

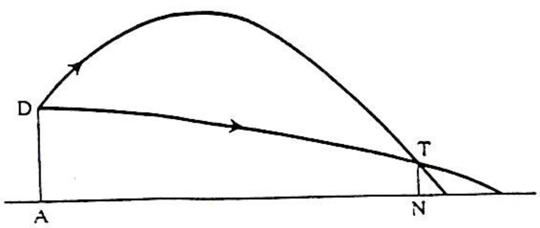


Figure 5

Lorsque h, v et α sont connus, le point où la balle atterrit s'obtient en remplaçant y par $-h$ dans l'équation de la trajectoire. Cette équation du second degré en x a deux racines réelles dont l'une est à rejeter (pourquoi ?).

Questions

1. Quelle est, d'après le premier modèle, la hauteur minimum à laquelle un service rapide peut être livré sans que la balle soit hors-jeu ?

2. Comment corriger le premier modèle afin de tenir compte du fait que la balle est une sphère et non un point ?

3. Dans l'hypothèse où la balle est frappée horizontalement à une hauteur de 2,7 m et en utilisant le second modèle, quelle est la vitesse initiale si la balle

   1°) frôle le filet ?   2°) atterrit en B ?

Réponses

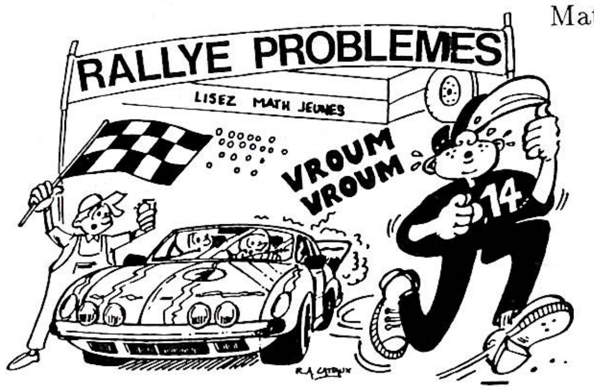
1. La hauteur minimum correspond à $x = 6.4$ m (fig. 2), d'où $h = 2{,}57$ m.

2. On pourrait améliorer le modèle en considérant que la trajectoire passe au-dessus du filet à une distance égale au rayon de la balle.

3. 1°) Pour $\alpha = 0$ et $h = 2{,}7$, le haut du filet est sur la trajectoire si $-1,8 = -\dfrac{g \times (11,89)^2}{2v^2}$ d'où $v = 19{,}63$ m/s (environ 71 km/h).

   2°) Pour $\alpha = 0$ et $h = 2{,}7$, la balle atterrit en B si $-2,7 = \dfrac{-g \times (18,29)^2}{2v^2}$ d'où $v = 24{,}65$ m/s (environ 89 km/h).

Math-Jeunes n° 58, 36–36, 1992



C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1992–1993. Rappelons que les trois premiers concernent (en principe) les élèves des trois classes inférieures et les trois derniers concernent les élèves des trois classes supérieures. Pour espérer figurer dans le classement final, il est nécessaire de répondre à au moins un problème de chacune des étapes (numéros 57, 58 et 59 de *Math-Jeunes*).

Présentez soigneusement vos solutions, chaque problème étant rédigé sur une ou plusieurs feuilles séparées et chaque feuille comportera vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Envoyez vos solutions à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 29 janvier 1993.

m_4 Arthur dit : « Clovis est un menteur ».
Bernard dit : « Clovis est un menteur **et** Arthur est un menteur ».
Clovis dit : « Arthur est un menteur **ou** Bernard est un menteur ».
Montrer, par un raisonnement clairement exprimé, qu'un seul des trois dit la vérité et citer le nom de celui qui dit la vérité.

m_5 1) Jean confie à Pierre : « Je viens d'acheter une petite maison ; le prix est un nombre de six chiffres dont la somme est 29 et ce nombre est multiple de 11 ».
Quel est le prix maximum payé par Jean ?
2) Si on ajoute la condition supplémentaire que tous les chiffres doivent être différents, quel est alors le prix maximum ?

m_6 Dans un triangle rectangle, les longueurs des côtés de l'angle droit sont a, b et la longueur de l'hypothénuse est c. Démontrer que, quel que soit ce triangle, on a toujours :

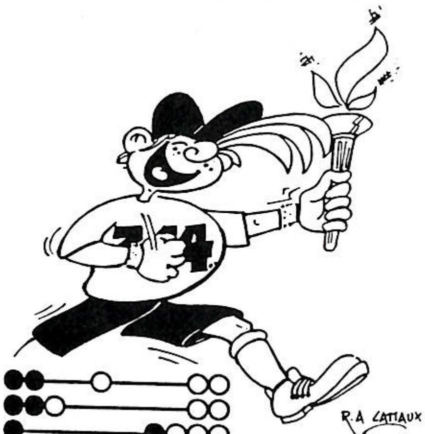
$$a^5 + b^5 < c^5.$$

M_4 Une baguette rectiligne est brisée en trois morceaux. Quelle est la probabilité pour que ces trois morceaux forment les côtés d'un triangle ?

M_5 On donne deux demi-droites de même origine O formant un angle aigu et un point P à l'intérieur de cet angle. Déterminer les points Q et R situés respectivement sur chacune des demi-droites et tels que le périmètre du triangle PQR soit minimum.

M_6 A l'intérieur d'un carré de côté 1 sont disposés 51 points. Démontrer que, quelle que soit la disposition des points, il existe un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ qui contient au moins trois des points.

Math-Jeunes n° 58, 37–42, 1992



OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

Participer, c'est mieux !

C. Van Hooste

Cher ami, te voilà donc abonné à *Math-Jeunes*. Je t'en félicite. En effet, par ce choix, tu as décidé d'adhérer à un grand groupe de matheux passionnés, d'appartenir au clan de ceux pour qui les math sont autre chose qu'une corvée. C'est bien ! Très bien ! Mais tu peux faire plus encore. Tu peux participer.

A quoi ? Au rallye-problèmes, par exemple. A chaque parution de *Math-Jeunes*, quelques problèmes te seront proposés. Tu renverras alors tes solutions au responsable de cette rubrique. Les meilleures solutions seront publiées. De plus, des prix seront distribués.

Tu peux aussi participer à l'Olympiade de math. Oui, bien sûr, à l'Olympiade Mathématique Belge ! Cette épreuve majeure du calendrier scolaire atteint sa 18^e édition cette année. Tous les ans, son succès grandit : 760 participants en 1976, 16682 l'an dernier. Alors, pourquoi pas toi ?

Où ? Quand ? Comment ?

L'OMB est un vaste concours ouvert à **tous** les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième année. En fait, il s'agit de deux concours qui se déroulent en parallèle : la « mini-olympiade » réservée aux élèves des trois premières années et la « maxi-olympiade » destinée à ceux des trois dernières années. L'un et l'autre comportent trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Voici le calendrier de cette 18^e Olympiade Mathématique Belge.

Mercredi 20 janvier 1993 : éliminatoire
Mercredi 3 mars 1993 : demi-finale
Mercredi 22 avril 1993 : finale
Samedi 8 mai 1993 : proclamation

Bien entendu, ton professeur reçoit toutes les informations voulues sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions qui te brûlent les lèvres. Il se fera un plaisir d'y répondre.

Plus loin, tu trouveras quelques problèmes posés antérieurement. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais aussi te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt pouvoir le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Sache qu'une seule d'entre elles est correcte. Néanmoins, certaines questions n'ont aucune réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [1,999].

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème n'hésite pas à le schématiser ; s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es absolument sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 point pour une mauvaise réponse. Jusque là, rien de plus normal. Mais, quand tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois alors deux points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut parfois mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il faut répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Assez parlé ! Voici les questions tant attendues.

Questions Mini-Olympiade

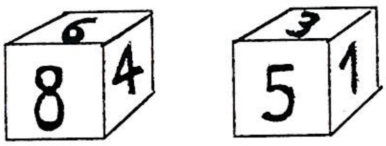
1. Un clochard ramasse 27 mégots. Avec 3 mégots, il peut confectionner une nouvelle cigarette. Le nombre maximum de cigarettes qu'il pourra fumer est

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

2. On jette à la poubelle un tube de dentifrice qui contient encore 10% de son contenu initial de 7,5 cl. Sachant que pour se laver les dents, on a utilisé à chaque fois environ 0,75 cm^3 de dentifrice, combien de fois s'est-on lavé les dents en se servant de ce tube ?
(A) 9 (B) 90 (C) 100 (D) 900 (E) 1000

3. La terre étant supposée parfaitement sphérique, on pose sur l'équateur une corde qui en fait le tour. Si on veut soulever la corde à 1 mètre de hauteur tout le long de l'équateur, il faudra allonger la corde de
(A) 1 mètre (B) 2 π mètres (C) 20 π kilomètres
(D) la longueur du rayon terrestre, plus 1 mètre
(E) la longueur de l'équateur, plus 1 mètre

4. Voici deux positions d'un cube dont les faces sont marquées par des nombres naturels. Les sommes des deux nombres inscrits sur deux faces opposées sont toutes égales. Quel nombre est opposé à 5 ?



(sans réponse préformulée)

5. Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une sœur et 9 sont des enfants uniques. Combien d'élèves ont un frère et une soeur ?
(A) 1 (B) 7 (C) 10 (D) 29 (E) un autre nombre

6. Dans une cerise, on peut estimer que la couche de chair a la même épaisseur que le noyau. On peut également admettre que le noyau et la cerise ont la forme d'une boule. Le rapport entre le volume de la chair et celui du noyau est égal à
(A) 1 (B) 7 (C) 8 (D) 26 (E) 27

Questions Maxi-Olympiade

1. En système décimal, les trois derniers chiffres de 5^{89} sont
(A) 005 (B) 025 (C) 125 (D) 375 (E) 625

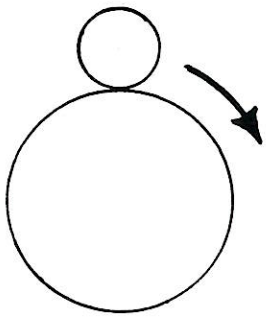
2. Un livre a moins de 1000 pages. Pour le numéroter (à partir de la page numéro 1), on a utilisé un nombre de chiffres double du nombre de pages. Combien ce livre a-t-il de pages ?
(A) 103 (B) 104 (C) 106 (D) 108 (E) 198

3. Dans la figure ci-dessous, U est un mur prolongeant de plus de 20 m un côté de longueur 4 m d'un bâtiment carré. Quelle plus grande surface au sol (en m^2) peut parcourir l'extrémité d'une corde de 14 m fixée à son autre extrémité, au sol, dans le recoin du mur et du bâtiment (le sol est plan ; la figure donne une vue de haut) ?

(A) $\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 14^2$ (B) $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 14^2 - 4^2$
(C) $2 \cdot \pi \cdot 14 - 4,4$ (D) $\pi \cdot 14^2 - 4^2$
(E) $\frac{\pi}{4} \cdot (14^2 + 10^2 + 6^2 + 2^2)$

4. Un quadrillage par des droites découpe le plan en carrés de 1 cm de côté. Combien de ces carrés sont entièrement couverts par un disque de rayon $\sqrt{21}$ cm centré en un sommet du quadrillage ?
(sans réponse préformulée)

5. Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur un cercle de rayon 4. Quand le petit cercle revient à sa position initiale, combien a-t-il fait de tours sur lui-même ?



(A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1 (E) un nombre non entier.

6. On donne une pyramide à base carrée *sabcd* dans laquelle le sommet s se projette orthogonalement sur le centre h de la base. Le côté $[ab]$ mesure 12 cm et la hauteur $[sh]$ mesure $6\sqrt{2}$ cm. Un insecte arpente la surface latérale de la pyramide en allant du sommet a au sommet c. Le plus court chemin mesurera (en cm) :
(A) $12\sqrt{3}$ (B) 18 (C) $8\sqrt{5}$ (D) $12\sqrt{2}$ (E) 24

Encore une question.
Celle-ci, je te demande, candidat à la mini ou à la maxi-Olympiade, d'y répondre bien sûr, mais aussi de t'en servir le cas échéant lors des éliminatoires. Dans un questionnaire à choix multiple, chaque question est proposée avec 5 réponses A, B, C, D, E dont une seule est correcte. Pour l'une des questions, un candidat a remarqué que C implique B (c'est-à-dire que si la réponse C est vraie, B l'est aussi). Il peut en déduire :
(A) que la réponse B est incorrecte
(B) que la réponse C est incorrecte
(C) que les réponses B et C sont incorrectes
(D) que la bonne réponse est soit B, soit C

(E) on ne peut déduire aucune des affirmations ci-dessus

Demi-finales 1992

En premier lieu, je te livre les statistiques concernant les élèves présents lors des demi-finales qui ont eu lieu le 11 mars.

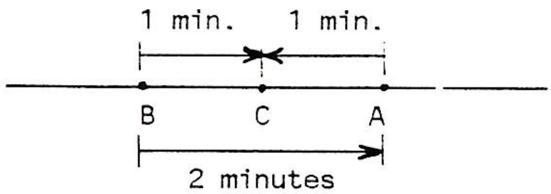
Mini		Maxi	
1^e	221	4^e	224
2^e	374	5^e	336
3^e	613	6^e	312
total	1208	total	872

Ensuite, je te propose les solutions de quelques-uns des problèmes posés lors de ces demi-finales.

Question 6 MINI : Chaque jour, je me rends à l'école à bicyclette, à la même vitesse constante V, partant à la même heure de chez moi ; en chemin, je croise un autre cycliste qui roule à la même vitesse que moi. Aujourd'hui, exceptionnellement, je pars avec deux minutes de retard tandis que l'autre cycliste respecte son horaire quotidien. Par rapport aux autres jours, je croiserai donc l'autre cycliste

(A) une minute plus tard ;
(B) à la même heure ;
(C) une minute plus tôt ;
(D) deux minutes plus tôt ;
(E) quatre minutes plus tôt.

A l'heure normale de la rencontre, l'autre cycliste se trouve en A, endroit habituel de la rencontre. Par contre, je dois encore pédaler pendant deux minutes pour atteindre cet endroit. Je suis en B.



Comme nous roulons l'un vers l'autre à la même vitesse, nous nous rencontrerons à mi-chemin entre A et B, donc en C. Nous devrons donc encore pédaler une minute supplémentaire pour atteindre C. Ainsi, la rencontre aura lieu **une minute plus tard** que les autres jours.

Question 16 MINI : Un verre conique se trouve sous un robinet dont l'eau tombe goutte à goutte de manière constante. Après une minute, le verre est rempli au quart de sa hauteur. Pour remplir entièrement le verre, il faudra

(A) moins de 5 minutes ;
(B) presque 10 minutes ;
(C) un peu plus d'un quart d'heure ;
(D) une bonne demi-heure ;
(E) plus d'une heure.

Le volume V du verre est au volume v rempli comme le cube de sa hauteur H est au cube de la hauteur h de la partie remplie. D'où

$$\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = 4^3 = 64$$

Il faudra donc 64 minutes pour que le verre soit rempli, c'est-à-dire **plus d'une heure.**

Remarque : Comme tu peux le voir, il n'est nullement besoin de connaître la formule du volume d'un cône pour résoudre cette question. L'utiliser ferait d'ailleurs perdre beaucoup de temps. Par contre, il faut savoir que si deux solides sont images l'un de l'autre par une homothétie, leurs volumes sont entre eux comme les cubes d'une quelconque de leurs dimensions (longueur, largeur, rayon, hauteur, génératrice, etc).

Question 22 MINI : Quel est le plus grand nombre naturel qui, pour chaque nombre naturel n, divise $n^3 - n$?
(sans réponse préformulée)

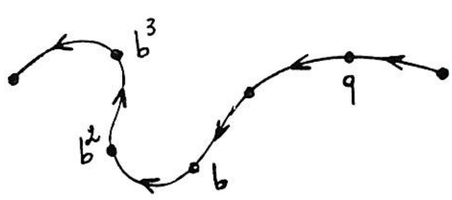
Factorisons !

$$n^3 - n = n \cdot (n - 1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$$

Ainsi, $n^3 - n$ est toujours le produit de trois nombres entiers consécutifs.
Or, parmi trois nombres entiers consécutifs, il y en a un et un seul qui est divisible par 3 et il y a un ou deux nombres pairs. Dès lors, leur produit est toujours divisible par 6.
Par conséquent, **le plus grand nombre naturel qui divise** $n^3 - n$ pour chaque nombre naturel n est nécessairement 6.

Question 27 MINI : Pour des nombres rationnels b et q non nuls, la figure donne quelques flèches de la relation R définie par

$$x \mathrel{R} y \Longleftrightarrow x \cdot b = y$$



Alors $q =$

(A) 0 (B) 1 (C) $-b$ (D) $\frac{1}{b}$ (E) $-\frac{1}{b}$

Appelons x l'élément « intercalé » entre q et b. Nous avons

$$q \mathrel{R} x \quad \text{et} \quad x \mathrel{R} b$$

D'après la définition de la relation R, nous avons alors

$$q \cdot b = x \quad \text{et} \quad x \cdot b = b$$

De là, nous déduisons successivement que $x = 1$ (en simplifiant par b non nul dans la deuxième égalité) et $q = \frac{1}{b}$.

Je retiens : étant donné une relation R, le fait d'écrire $x \mathrel{R} y$ signifie que le couple (x, y) appartient à cette relation. Ce couple se représente alors par une flèche allant de x vers y dans le *graphe* de la relation R.

Question 21 MAXI : Pour une suite finie $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de nombres, la somme de CESARO de A est par définition

$$S = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n},$$

où $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Si la somme de CESARO de la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_{99})$ de 99 termes vaut 1000, que vaut la somme de CESARO de la suite $(1, a_1, a_2, \ldots a_{99})$ de 100 termes ?
(A) 991 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1009

Appelons S la somme de CESARO de la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_{99})$ et S_k les « sommes partielles » de cette suite.
Désignons par S' la somme de CESARO de la suite $(1, a_1, a_2, \ldots a_{99})$ et par S'_k les « sommes partielles » de cette suite.
Pour $1 \leqslant k \leqslant 99$, nous avons

$$S'_{k+1} = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = S_k + 1$$

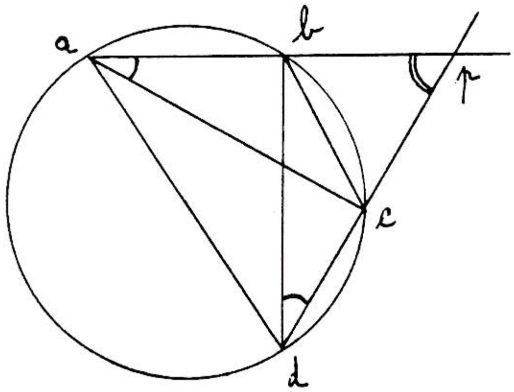
De plus, $S'_1 = 1$.
D'où, il vient

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1 + (S_1 + 1) + (S_2 + 1) + \cdots + (S_{99} + 1)}{100} \\ &= \frac{(S_1 + S_2 + \cdots + S_{99}) + 100}{100} \\ &= \frac{99S + 100}{100} \\ &= 991 \end{aligned}$$

Question 27 MAXI : Un cercle de rayon r possède des cordes $[ab]$ de longueur 10 et $[cd]$ de longueur 7. Quand $[ab]$ et $[cd]$ sont prolongées au-delà de b et c respectivement, elles se coupent en p, qui est à l'extérieur du cercle. Si $\widehat{apd} = 60^\circ$ et $|bp| = 8$, alors $r^2 =$
(A) 70 (B) 71 (C) 72 (D) 73 (E) 74

Les angles inscrits $\hat{a}$ et $\hat{d}$ interceptent le même arc $\widehat{bc}$. De ce fait, ils ont la même amplitude. Cela étant, les triangles pac et pdb sont semblables car ils ont deux angles 2 à 2 de même amplitude ($\hat{p}$ commun et $\hat{a} = \hat{d}$). D'où, il vient successivement

$$\frac{|pa|}{|pd|} = \frac{|pc|}{|pb|}$$
$$|pc| \cdot |pd| = 18 \cdot 8$$
$$|pc| \cdot (|pc| + 7) = 144$$
$$|pc|^2 + 7|pc| - 144 = 0$$
$$|pc| = 9$$



Par ailleurs, dans le triangle bdp, nous avons

$$\frac{\sin \hat{b}}{|dp|} = \frac{\sin \hat{d}}{|bp|}$$

D'où, il vient successivement

$$\begin{aligned} \sin \hat{b} &= 2 \sin \hat{d} \\ &= 2 \sin(120^\circ - \hat{b}) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \hat{b} + \frac{1}{2} \sin \hat{b} \right) \\ &= \sqrt{3} \cos \hat{b} + \sin \hat{b} \end{aligned}$$

De là, nous déduisons que $\cos \hat{b} = 0$; donc que $\hat{b} = 90^\circ$.
Le triangle bad étant rectangle, $[ad]$ est un diamètre. Dès lors, dans le triangle dap, nous avons

$$(2r)^2 = |ap|^2 + |dp|^2 - 2|ap| \cdot |dp| \cos \hat{p}$$
$$4r^2 = 18^2 + 16^2 - 18 \cdot 16$$
$$r^2 = 73$$

Question 29 MAXI : Une pièce faussée a une probabilité 2/3 de tomber face. Si cette pièce est jetée 50 fois, quelle est la probabilité pour que le nombre total de faces soit pair ?

(A) $25\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ (B) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{50}}\right)$ (C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right)$ (E) $\frac{2}{3}$

« Jeter une pièce de monnaie n fois » est un phénomène aléatoire répondant à une loi binomiale $B(n,p)$. Si nous appelons « succès » le fait que la pièce tombe « face », cette loi binomiale est ici décrite par $n = 50$ et $p = 2/3$.
La probabilité pour que le nombre de jets donnant « face » soit pair vaut

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{25} C_{50}^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{50-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{25} C_{50}^{2k}\cdot\frac{2^{2k}}{3^{50}} = \frac{1}{3^{50}}\sum_{k=0}^{25} C_{50}^{2k}\cdot 2^{2k} \end{aligned}$$

En développant à l'aide du binôme de NEWTON, nous obtenons

$$\begin{aligned} 3^{50} &= (2+1)^{50} = \sum_{i=0}^{50} C_{50}^{i}\cdot 2^{i} \\ 1^{50} &= (2-1)^{50} = \sum_{i=0}^{50} C_{50}^{i}\cdot 2^{i}\cdot(-1)^{50-i} \end{aligned}$$

Ensuite, en additionnant membre à membre, nous avons

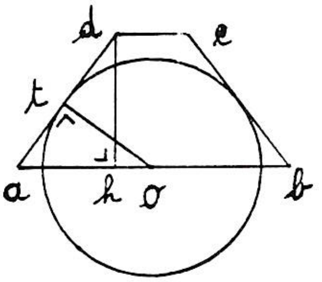
$$3^{50}+1^{50} = 2\cdot\sum_{\substack{i=0\\ i\ pair}}^{50} C_{50}^{i}2^{i} = 2\cdot\sum_{k=0}^{25} C_{50}^{2k}2^{2k}$$

Finalement, la probabilité que le nombre de jets donnant « face » soit pair est

$$p = \frac{1}{3^{50}}\cdot\frac{3^{50}+1}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right)$$

Question 30 MAXI : Soit $abcd$ un trapèze isocèle de bases $|ab| = 92$ et $|cd| = 19$. Supposons que $|ad| = |bc| = x$ et qu'un cercle dont le centre est situé sur la droite ab soit tangent aux segments $[ad]$ et $[bc]$. Si m est la plus petite des valeurs admissibles de x, alors $m^2 =$
(A) 1369 (B) 1679 (C) 1748 (D) 2109 (E) 8825

Appelons o le centre du cercle tangent aux segments $[ad]$ et $[bc]$ et t son point de contact avec $[ad]$.



Traçons la perpendiculaire dh à ab. Posons $y = |at|$. Les triangles had et tao sont semblables car ils ont deux angles 2 à 2 de même amplitude : un angle droit et un angle commun. D'où, il vient successivement

$$\begin{aligned} \frac{|ha|}{|ta|} &= \frac{|ad|}{|ao|} \\ \frac{46-\frac{19}{2}}{y} &= \frac{x}{46} \\ y &= \frac{73\cdot 23}{x} \\ y &= \frac{1679}{x} \end{aligned}$$

Pour que le cercle puisse être tangent aux segments $[ad]$ et $[bc]$, il faut que $y \leqslant x$. Nous devons donc avoir

$$\frac{1679}{x} \leqslant x \quad \text{ou} \quad x^2 \geqslant 1679.$$

Si m est la plus petite valeur admissible de x, alors $m^2 = 1679$.

Communiquons !

Les solutions proposées ci-avant résultent d'un choix (forcément arbitraire) : parmi les questions des demi-finales, certaines m'ont semblé assez difficiles, quelques-unes paraissaient sortir du cadre classique du cours de math, d'autres avaient un caractère amusant. C'est en tenant compte de ces critères que j'ai opéré la sélection des solutions à publier.

Mais, il se peut que tu restes sur ta faim. Tu n'y trouves vraisemblablement pas la réponse à la question qui t'a résisté jusqu'au bout (malgré les efforts nombreux et répétés que tu as prodigués pour essayer de la résoudre). A moins que tu n'aies mis au point pour l'une ou l'autre des questions choisies une solution meilleure que celle que je te présente. Dans ce cas, n'hésite pas. Ecris-moi. En fait, pour tout ce qui concerne la rubrique « Olympiades », solution originale, remarques, demande d'éclaircissement à propos d'une question, prolongement ou

Math-Jeunes n° 58, 42–44, 1992

généralisation à partir d'un problème posé, ..., tu peux m'envoyer une petite lettre ([1]). Si tu souhaites une réponse, joins à ta lettre une enveloppe correctement affranchie en y indiquant ton nom et ton adresse.

Olympiades internationales

En 1992, la 33^{e}Olympiade Mathématique Internationale s'est déroulée à Moscou du 10 au 21 juillet. Le pays organisateur était la Russie : 56 nations y participaient officiellement, dont la Belgique, et 8 autres y étaient présentes en tant qu'observateurs. Chaque pays envoie à l'O.M.I. au plus 6 concurrents. L'équipe belge est composée de trois étudiants néerlandophones et de trois étudiants francophones.

Six problèmes (difficiles) sont soumis à la perspicacité, à l'intelligence, à la clairvoyance des participants. Une note maximale de 7 points est attribuée à chacun de ces problèmes ; de la sorte, la note globale maximum est 42.

Voici les résultats obtenus par nos dignes représentants francophones :

GLINEUR François, Athénée Royal de Quiévrain, médaille de bronze, 23/42

DESSET Claude, Séminaire Saint Joseph, Bastogne, médaille de bronze, 19/42

HOROWITZ Joël, Collège Marie-Josée, Anvers, 6/42

Math-Jeunes les félicite.

Dans un classement par nations, la Belgique se situe au 23^{e}rang parmi les 56 participants officiels. Notre résultat général (100/252) nous place même au 4^{e}des pays d'Europe Occidentale derrière la Grande-Bretagne (168), l'Allemagne (149) et la France (139). C'est un bilan très honorable, compte tenu de la petitesse de notre pays.

Solutions

Voici les réponses aux questions préparatoires posées en début d'article.

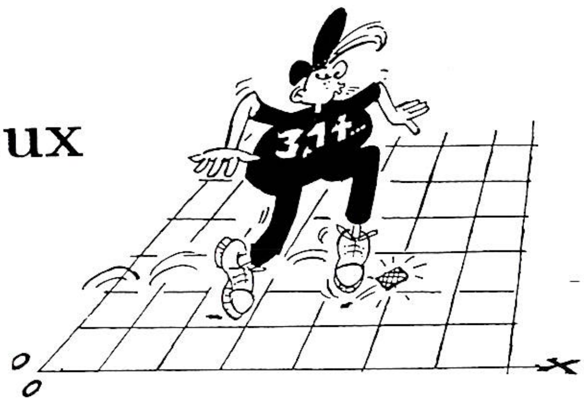
Questions MINI : 1. D / 2. B / 3. B / 4. 4 / 5. C / 6. D

Questions MAXI : 1. C / 2. D / 3. E / 4. 52 / 5. B / 6. A

Encore une question : B

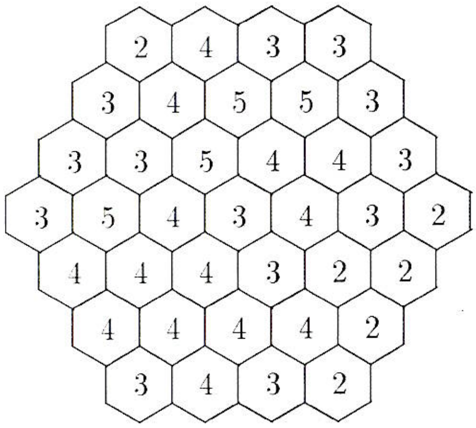
([1]) C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul, 25 6120 Marbaix-la-Tour

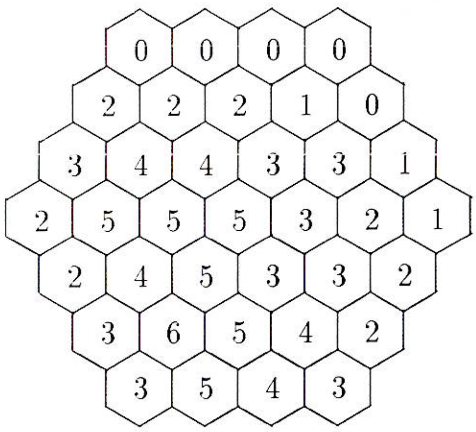
Jeux



Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.





Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

55		73		
16		5		14

70		61		
21			8	12

Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	22	15	
13			9
30			1
	14	2	

	16	15	
20			47
27			52
	19	32	

Produits croisés

A chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres-définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

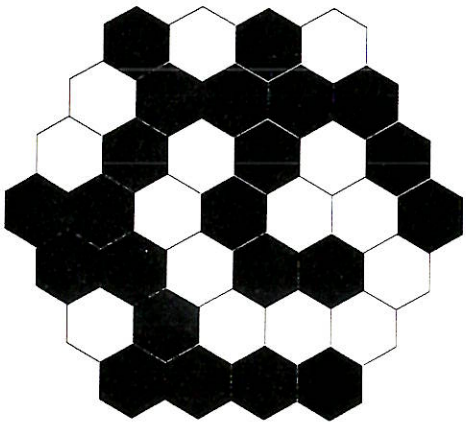
	1	2	3	4	5	6
1			P			
2					N	
3						
4		U				
5						
6						

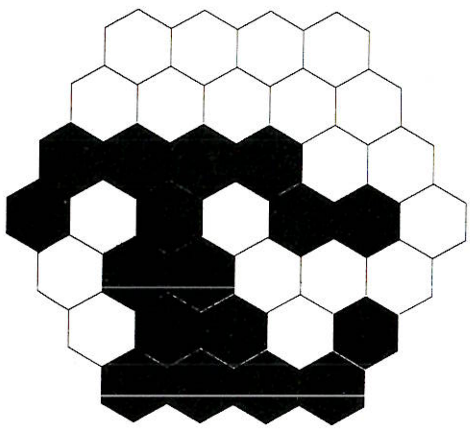
Horizontalement
1. 1634304
2. 50400
3. 379050
4. 630
5. 45 — 13
6. 168 — 1890

Verticalement
1. 10944
2. 88452
3. 9600
4. 5600
5. 1470 — 21
6. 117325

Solutions

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Le mur des nombres

236				
109	127			
55	54	73		
33	22	32	41	
16	17	5	27	14

295				
152	143			
70	82	61		
29	41	41	20	
21	8	33	8	12

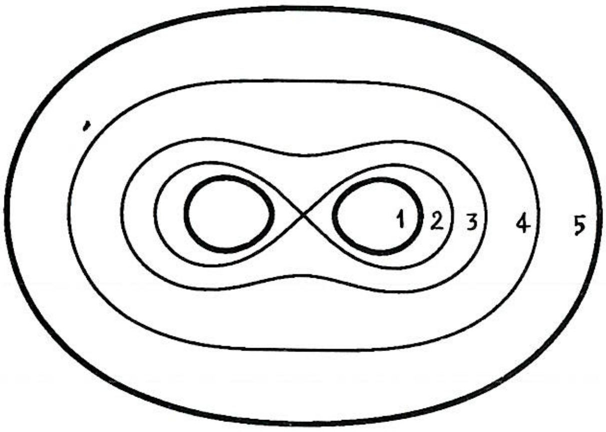
Grilles des moyennes

	22	15	
13	16	12	9
30	17	8	1
	14	2	

	16	15	
20	23	30	47
27	26	35	52
	19	32	

Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	P	A	P	P	U	S
2	A	L	L	E	N	E
3	S	C	E	N	E	S
4	C	U	B	E		A
5	A	I	E		A	M
6	L	N		R	U	E



La couverture du n° 58 de ta revue préférée montre des « OVALES DE CASSINI » ou encore des « ELLIPSES DE CASSINI » : en 1680, l'astronome français (né en Italie) Giovanni Domenico CASSINI (1625 – 1712) proposa cette courbe comme orbite de la Terre autour du Soleil en remplacement de l'ellipse (la vraie, celle-là) de la théorie de KEPLER (1571 – 1630). L'hypothèse selon laquelle cet ovale représente plus exactement l'orbite de notre Terre n'est, à notre connaissance, pas confirmée.

Qu'est-ce qu'un « OVALE DE CASSINI » ?

Considérons deux points fixes F_1 et F_2 appelés *foyers*. Appelons 2ℓ la distance $|F_1F_2|$. Le lieu géométrique des points M tels que le produit de leurs distances à F_1 et F_2 a une valeur constante a^2 s'appelle un « OVALE DE CASSINI ». Sa forme dépend du rapport des longueurs a et ℓ.

- si $\ell/a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la courbe est du type 4 ou 5
- si $\frac{\sqrt{2}}{2} < \ell/a < 1$, la courbe est du type 3
- si $\ell/a = 1$, la courbe est du type 2
- si $\ell/a > 1$, la courbe est du type 1 (deux ovales séparés)

Le type 2 s'appelle « LEMNISCATE DE BERNOULLI », du grec *lémniskos*, ruban. Jacques BERNOULLI (1654 – 1705) a étudié cette courbe en 1694 dans un travail consacré à la théorie des marées. Ce n'est qu'en 1806 que le mathématicien italien Girolamo SALADINI (1731 – 1813) identifia la « LEMNISCATE » à un cas particulier d' « OVALE DE CASSINI ».
Essaie de dessiner ces courbes ou de trouver leurs équations. Nous attendons ton courrier.

La Rédaction