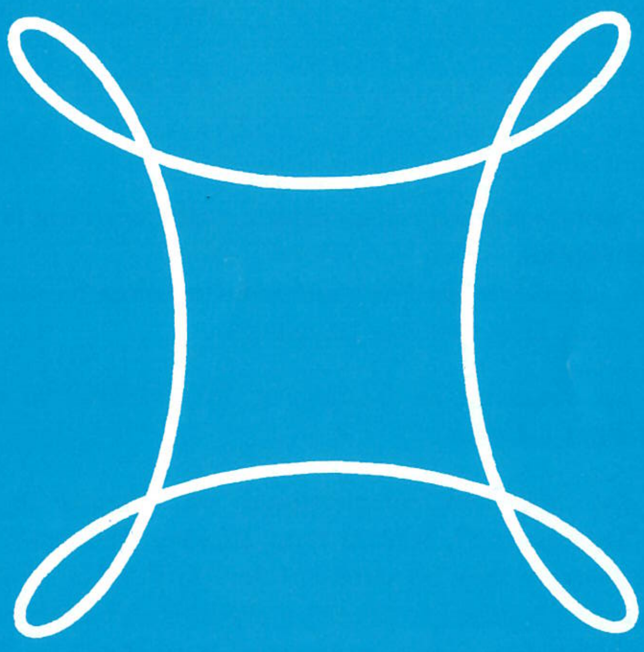
MATH - JEUNES



14e année
Février - n° 59

Bureau de dépôt Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.

Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, J.HUMIER, N.JOELANTS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS

Illustrations : R.A.CATTAUX

Conception de la couverture : K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 exempl. au moins) : 100 FB
- Isolés : 140 FB

Etranger :

- Pour 5 abonnements : 1000 FB
- Isolés : 280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1988 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 88/89, 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Année 91/92 — 100 FB (Etranger : 200 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 59 Quatorzième année 1993

MATH-JEUNES

Math-Jeunes n° 59, 46–49, 1993

Jeux et Passe-temps (3)

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

Dans le numéro 58 de *Math-Jeunes*, votre journal favori, nous vous avons proposé de porter un peu d'attention sur un jeu très connu sous le nom de « Tours de Hanoï » dont voici le rappel.

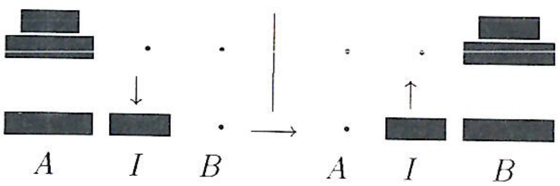
> Une tour, composée d'un certain nombre d'étages dont les tailles sont décroissantes, doit être déplacée d'un endroit de départ A vers un endroit d'arrivée B via un endroit intermédiaire I si besoin est.
> Pour cela, il est permis de déplacer un étage à la fois et il est interdit de déposer un étage sur un étage plus petit.

Il n'y avait (intentionnellement) pas de question posée mais vous avez compris que ce qu'il est intéressant de déterminer, à côté du transfert de la tour proprement dit, c'est le nombre minimum de mouvements d'étages qu'il faut effectuer pour réussir ce transfert.
Voici donc quelques idées à ce sujet...
En premier lieu, essayons de déplacer des tours ayant peu d'étages. Voyons ce qu'il en est sur quelques exemples simples et essayons de conjecturer une loi.

Tour de un étage...

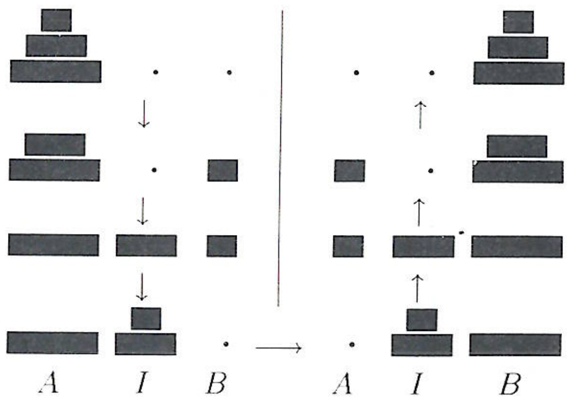
Il faut, au minimum, un mouvement.

Tour de deux étages...



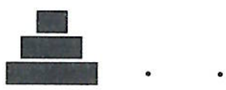
Il faut, au minimum, trois mouvements.

Tour de trois étages...



Il faut, au minimum, sept mouvements.

Avez-vous remarqué, au passage, la symétrie qui apparaît dans le déroulement du transfert des tours.
Tout ce qui a été effectué quand l'étage de base est en A doit être effectué symétriquement quand cet étage de base vient d'être placé en B.
On peut encore coder les différentes étapes à l'aide d'un système de nombres. Ainsi, par exemple, on peut traduire la situation de départ pour une tour de trois étages de la façon suivante :

(321, 0, 0) traduit le dessin 

Toute l'histoire du déplacement d'une tour de trois étages s'écrit alors

$$\begin{array}{c} (321,0,0)\rightarrow(32,0,1)\rightarrow(3,2,1)\rightarrow(3,21,0) \\ \hfill\downarrow \\ (0,0,321)\leftarrow(1,0,32)\leftarrow(1,2,3)\leftarrow(0,21,3) \end{array}$$

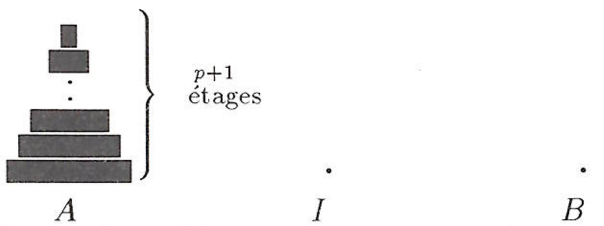
Cette façon d'écrire le déroulement du transfert est plus facile que l'emploi de dessins mais peut être moins explicite sur le plan visuel.
Vous avez probablement conjecturé que s'il faut n mouvements (au minimum) pour déplacer une

tour de p étages, il faudra, au minimum, $2n+1$ mouvements pour déplacer une tour de $p+1$ étages, et vous avez le tableau de synthèse que voici :

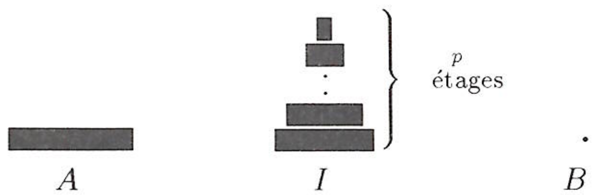
Nombre d'étages	Nombre minimum de mouvements
1	1
2	$2\times 1+1=3$
3	$2\times 3+1=7$
4	$2\times 7+1=15$
5	$2\times 15+1=31$
$\vdots$	$\vdots$

La formule conjecturée doit être justifiée. On peut le réaliser comme suit :

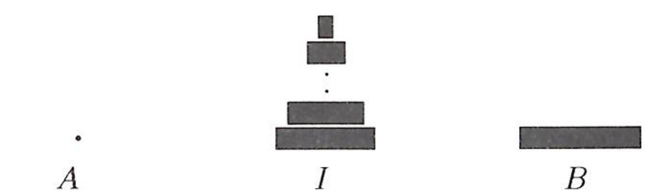
Supposons que le nombre minimum de mouvements nécessaires au déplacement d'une tour de p étages soit n et regardons de plus près comment nous pouvons alors déplacer une tour de $p+1$ étages.



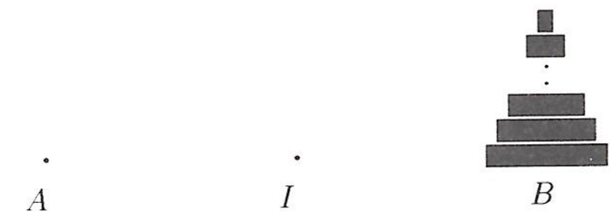
On déplace d'abord les p étages supérieurs, de A en I, en n mouvements comme supposé ci-avant.



On déplace alors l'étage de base, de A en B, en un mouvement.



Il reste à déplacer les p étages supérieurs, de I en B, en n mouvements comme plus haut (ce qui explique la symétrie dont nous avons parlé).



Au total, on aura donc effectué $n+1+n$ mouvements soit effectivement $2n+1$ mouvements. Cette formule a un inconvénient majeur. Elle ne donne pas directement le nombre minimum de mouvements à effectuer pour déplacer une tour de p étages. Elle nécessite la connaissance du nombre de mouvements relatif à la tour de $p-1$ étages. C'est ce qu'on appelle une formule récurrente.

Il existe une formule donnant directement le nombre de mouvements en fonction du nombre d'étages. Nous allons l'établir mais, pour suivre fructueusement le raisonnement utilisé, il faut connaître la technique de calcul de la valeur numérique d'un polynôme dite « *algorithme de Hörner* ». Si c'est nécessaire, allez d'abord lire l'annexe 1 de cet article ou ... interrogez votre professeur de mathématique. Sinon, vous pouvez poursuivre directement la lecture de ce qui suit.

Soit n le nombre minimum de mouvements nécessaires au transfert d'une tour de p étages.

- Si $p=1$ alors $n=1$.
- Si $p=2$ alors $n=1\times 2+1$ ou encore $(1\times 2)+1$ avec une paire de parenthèses.
- Si $p=3$ alors $n=((1\times 2)+1)\times 2+1$ avec deux paires de parenthèses.
- Si $p=4$ alors $n=(((1\times 2)+1)\times 2+1)\times 2+1$ avec trois paires de parenthèses.
- Si $p=p$ alors $n=$ $(\cdots(((1\times 2)+1)\times 2+1)\times 2\cdots+1)\times 2+1$ avec $p-1$ paires de parenthèses.

On reconnaît l'application de l'algorithme de Hörner a l'expression

$$f(2)=2^{p-1}+2^{p-2}+2^{p-3}+\cdots+2^2+2+1,$$

ceci est le n recherché.

Dès lors $n+1=2^p$ (voir annexe 2) d'où

$$\boxed{n=2^p-1}$$

Exemples

Pour $p=3$, on a $n=2^3-1=7$.
Pour $p=10$, on a $n=2^{10}-1=1023$.
Si vous mettez une seconde par mouvement d'étage, il vous faudra donc 1023 secondes pour déplacer la tour soit donc 17 minutes et 3 secondes.
Et pour une tour de 25 étages ? A vous d'effectuer les calculs.

Conclusion

Nous constatons, une fois de plus, qu'à condition de se donner un peu de peine, des situations qui paraissent anodines peuvent cacher de grandes possibilités de « faire des mathématiques ».

* *
*

Voici maintenant le sujet proposé pour terminer cette année scolaire.

> Sur un alignement de $2p+1$ cases (p est un nombre naturel), on aligne p pions blancs tout à gauche et p pions noirs tout à droite. Le défi consiste à faire passer les pions blancs à droite et les pions noirs à gauche en profitant de la case libre (centrale au début du jeu) et en respectant les deux règles suivantes :
> a) les pions blancs peuvent avancer d'une case à la fois vers la droite.
> b) les pions noirs peuvent avancer d'une case à la fois vers la gauche.
> c) un pion peut passer par dessus un pion de l'autre couleur, dans le sens de sa marche, pour aller se poser sur une case vide.
> d) on ne peut jamais superposer deux pions.

Essayez-vous à ce jeu. Posez-vous des questions à son sujet. J'attends vos réflexions, remarques et commentaires, au plus vite, à l'adresse que je rappelle :

Claude VILLERS
rue Piérard,29
7022 Hyon-Mons.

Vous pouvez aussi nous proposer des jeux et passe-temps ainsi que leur exploitation sur le plan mathématique. Ce serait formidable si vous arriviez à rédiger les textes d'une chronique. N'hésitez pas.

Annexes

1. L'algorithme de Hörner

Soit le polynôme $f(x)=2x^3-4x^2+5x+3$.
Si vous souhaitez calculer la valeur numérique de ce polynôme pour $x=-2$ (par exemple), vous remplacez tous les x par -2 et vous effectuez les calcules indiqués en respectant la hiérarchie des différentes opérations.
Cela donne

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3-4(-2)^2+5(-2)+3 \\ &= 2(-8)-4(+4)+5(-2)+3 \\ &= -16-16-10+3 \\ &= -39 \end{aligned}$$

C'est plus malaisé encore si vous voulez utiliser une calculatrice car le calcul doit être bien organisé et des mises en mémoire de résultats partiels sont nécessaires. Utiliser l'algorithme de Hörner c'est écrire autrement le polynôme $f(x)$ en procédant par mises en évidence de x.
On a alors

$$f(x)=(2x^2-4x+5)x+3=((2x-4)x+5)x+3$$

avec deux paires de parenthèses et le calcul d'une valeur numérique est alors tout à fait itératif (on ne doit rien mémoriser).
On calcule $2\cdot(-2)$ puis $-4-4$ puis $(-8)\cdot(-2)$ puis $16+5$ puis $21\cdot(-2)$ et enfin $-42+3$ et on obtient la valeur cherchée -39.

2. La numération binaire

La numération binaire est la numération de base deux : seuls les chiffres 0 et 1 y sont utilisés.
Chaque fois qu'on dénombre deux unités, on les transforme en 1 deuxaine et 0 unité. De même 2 deuxaines sont transformées en 1 quatraine et 0 deuxaine puis 2 quatraines donnent 1 huitaine et 0 quatraine, etc.

Exemple : (1111) en binaire peut se représenter dans le tableau suivant (similaire au tableau qu'on utiliserait en décimal) :

16-aines	8-aines	4-aines	2-aines	unités
	1	1	1	1

(1111) en binaire vaut donc 8+4+2+1 en décimal soit 15.
Pensons maintenant à ce qui se passe dans une voiture dont le compteur indique 0999 ou 09999 ou 0999999 etc.
Tout le monde attend que le dernier kilomètre parcouru soit pris en compte car il y a apparition de zéros en cascade, en effet, 0999+1=1000, 09999+1=10000, 0999999+1=1000000, etc.
Il en est de même en binaire quand tous les chiffres binaires d'un nombre sont des 1. L'ajout d'une unité déclenche l'apparition de 0 en lieu et place des 1 et l'apparition d'un 1 comme chiffre supplémentaire tout à gauche.
Or, par exemple, pour une tour de 4 étages le nombre minimum de mouvements est

$$(((1 \times 2) + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1$$

(voir plus haut le cas $p = 3$) ou encore $2^3 + 2^2 + 2 + 1$ ou encore (1111) en binaire.

$$\begin{array}{lrl} \text{En binaire, on a} & n = & (01111) \\ & 1 = & (1) \\ \text{donc} & n+1 = & (10000) \end{array}$$

c'est-à-dire 2^4 en décimal d'où $n = 2^4 - 1$.
De même, pour une tour de p étages il faut, au minimum, $2^p - 1$ mouvements pour réaliser le transfert.

Curiosités

La Rédaction

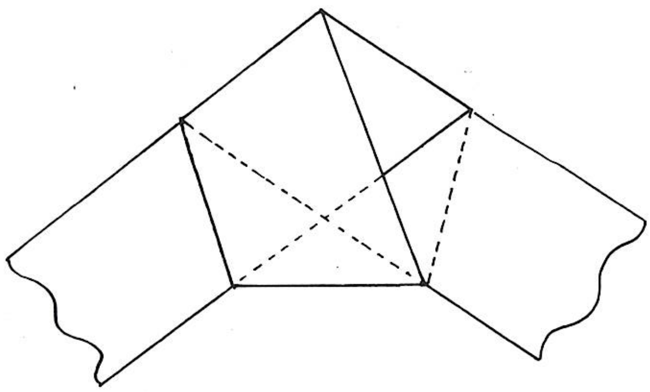
- $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$ en simplifiant les deux « 6 ». Horreur !!! s'écrie le prof. de math. Et cependant, c'est correct, dans ce cas particulier ; et même, il existe trois autres exemples où « ça marche encore » avec des nombres inférieurs à 100 ???

- Ecris les parties entières des multiples de $\sqrt{2}$ et, en dessous, les entiers qui n'apparaissent pas dans la première ligne :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 11 & \ldots \\ 3 & 6 & 10 & 13 & 17 & 20 & 23 & 27 & \ldots \end{array}$$

La différence entre le nombre du dessous et celui du dessus vaut $2n$ à la n^e place. (Roland SPRAGUE, *Recreations in Mathematics*, London, 1963).

- Fais un nœud au moyen d'une bande de papier et tu obtiendras un pentagone régulier :



- $47 + 2 = 49$ et $47 \times 2 = 94$!!!

- $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$
50 est de deux façons la somme de deux carrés. Y a-t-il d'autres nombres possédant cette propriété ?

- 3 est tel que la somme de ses diviseurs est un carré :

$$1+3=4=2^2$$

Tiens, 22 aussi possède cette propriété, puisque

$$1+2+11+22=36=6^2$$

Y en a-t-il d'autres ?

- $132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$
132 est la somme de tous les nombres de deux chiffres qu'on peut former avec ses chiffres. Est-ce un cas isolé ?

- $169 = 13^2$ et $961 = 31^2$

- $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$ et il y en a d'autres ...

- $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ et il n'est pas le seul ...

- $54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$

- $548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$

- $1741725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$

- $24678050 = 2^8+4^8+6^8+7^8+8^8+0^8+5^8+0^8$

- Un nombre dont tous les chiffres sont des unités s'appelle une *repunit* (Albert BEILER, mathématicien contemporain). On le note R_n où n est le nombre de ses chiffres. Ainsi, $R_1 = 1$, $R_2 = 11$ (le plus petit repunit premier) ; le suivant (qui est premier) est R_{19} (découvert en 1918) ; le troisième est R_{23} ; le quatrième est R_{317} (c'est le plus grand repunit premier connu à ce jour).

- Remarquons que

$$1^2 = 1 \text{ palindrome}$$

$$11^2 = 121 \text{ palindrome}$$

$$111^2 = 12321 \text{ palindrome}$$

$$1111^2 = 1234321 \text{ palindrome}$$

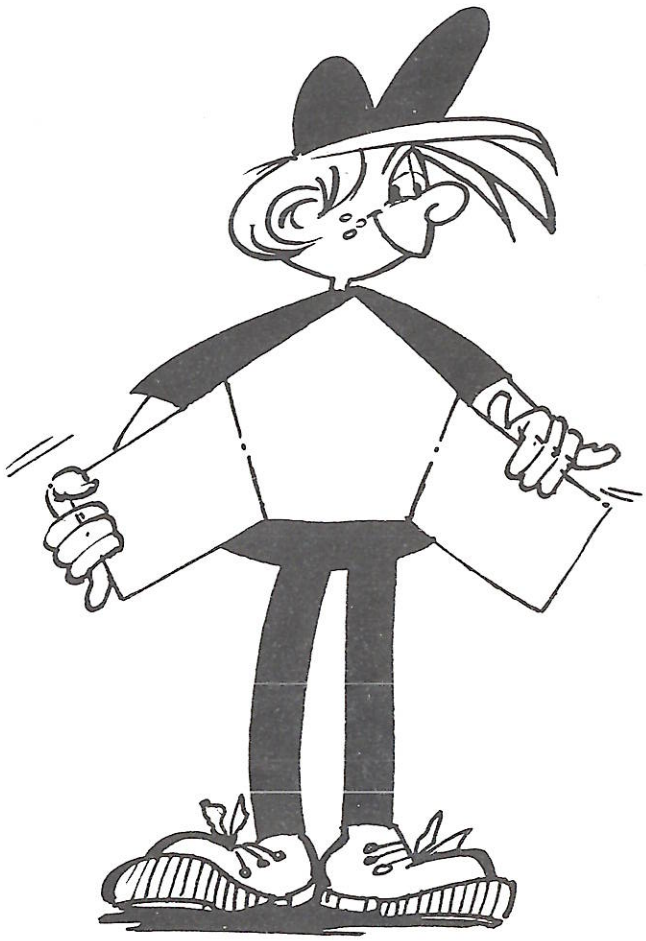
$$11111^2 = 123454321 \text{ palindrome}$$

- 357 686 312 646 216 567 629 137 est le plus grand nombre premier écrit en base 10 tel que, si on enlève consécutivement un chiffre à gauche, on a toujours un nombre premier. Cela se termine, évidemment, avec les nombres 9137, 137, 37, 7.

Tiens, à propos, le plus grand nombre premier connu à ce jour, fut découvert au début de 1992 : ce nombre possède 227832 chiffres décimaux et vaut $2^{756839} - 1$; c'est un premier dit de MERSENNE c'est-à-dire de la forme $2^p - 1$.

Référence :

David WELLS, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Books, 1987.



Des équations de Molière ... aux corps finis de Prévert

Maryse Burnet, *Institut Cooremans (Ville de Bruxelles)*

Introduction

S'il est de notoriété publique que certains auteurs éminents tels que PASCAL, Lewis CARROL ou même Marcel PAGNOL (ce qui est moins connu), se sont distingués par des travaux à caractère mathématique autant que par leurs œuvres littéraires, on ne songe pas qu'il est possible de tirer de textes sans aucune prétention scientifique des applications mathématiques ...

Quand la science-fiction s'appuie sur la science : l'incontournable Jules Verne

Dans *Sans dessus dessous*, titre calembour du troisième épisode des aventures du mathématicien J.T. Maston (les deux premiers étant *De la terre à la lune* et *Autour de la lune*), les membres du « gun club » tentent de redresser l'inclinaison de l'axe terrestre dans le but de supprimer les saisons, et de faire fondre la calotte glaciaire du Pôle Nord afin d'y exploiter d'hypothétiques mines de charbon. Le moyen utilisé sera un canon géant creusé dans l'écorce terrestre, propulsant dans l'espace un énorme obus à la vitesse de 2800 km/s, et dont le recul fera basculer la terre de 23° . Pour répondre à une critique de Camille FLAMMARION portant sur la rigueur scientifique de ses romans, Jules VERNE fait exécuter tous les calculs nécessaires à cette entreprise par son ami Alfred BADOUREAU, polytechnicien, ingénieur aux Mines et Tourbières, modèle du personnage d'Alcide Pierdeux (ndlr : pense à MATHieu Troisquatorze), brillant mathématicien qui découvrira l'erreur de calcul à l'origine de l'échec de J.T. Maston. Le dernier chapitre du roman, destiné exclusivement à une minorité éclairée, et intitulé, sans illusions par son auteur, « chapitre supplémentaire dont peu de personnes prendront connaissance », est farci de schémas et truffé de formules.

Quand Féval, Boileau et Molière enseignent l'usure

A la même époque, Paul FÉVAL, avocat de formation et qui fut commis dans une banque parisienne jusqu'à ce qu'il s'en fasse renvoyer parce qu'il lisait au lieu de travailler, nous initie à la technique du prêt « à la petite semaine » dans *Les habits noirs*. De cet extrait (qui figure en annexe), nous pouvons tirer le calcul du taux d'intérêt annuel réel de cette pratique légale, et proposer deux illustrations de la notion de progression géométrique.
En prêtant 5F le lundi et en en exigeant 6 le dimanche, on applique en fait un taux hebdomadaire de 20%. Le taux annuel réel (théorique) s'obtient par la formule :

$$i = (1,2)^{52-1} \approx 10\ 920,55$$

soit un taux de 1 092 055% !!!
Le personnage détaille avec humour les termes de deux progressions géométriques en soulignant fort intelligemment l'écart entre la théorie et la pratique. En travaillant par semaine, on obtient :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1000 \\ t_2 &= 1000 \cdot 1,2 = 1200 \\ t_3 &= 1000 \cdot (1,2)^2 = 1440 \\ t_4 &= 1000 \cdot (1,2)^3 = 1728 \\ t_5 &= 1000 \cdot (1,2)^4 = 2073,6 \end{aligned}$$

On considère alors avec réalisme que le capital de départ est doublé tous les mois, ce qui donne naissance à la deuxième progression. Ici, les écarts entre théorie et pratique deviennent rapidement plus que significatifs.

Cette apparition de la mathématique dans l'œuvre de FÉVAL n'est pas unique : dans *Jean le Diable*, roman qui n'a, malheureusement, plus été publié depuis des lustres, l'auteur fait une apologie du calcul des probabilités et propose d'appliquer la technique des tableaux à double entrée et des graphes à la détection policière.

La mathématique financière est présente dans la littérature de toutes les époques. En 1667, dans sa *Satire VIII*, BOILEAU, qui constate que la valeur des hommes se mesure à l'importance de leur fortune, la présente comme la seule connaissance vraiment utile. L'extrait proposé en annexe débouche sur une équation homogène à deux inconnues qui établit la parité entre les unités « franc » et « livre », une égalité qui nous sera bien utile dans la suite. Signalons que le denier cinq représente un intérêt équivalent à un cinquième du capital par unité de temps (un denier d'intérêt pour cinq prêtés). L'équation est :

$$\frac{1}{5} \cdot 100 \cdot x = 20y$$

dont on tire évidemment $x = y$.

Dans *L'Avare* de MOLIÈRE (1668), acte II, scène 1, Cléante a recours aux services de Maître Simon, courtier, pour obtenir un prêt de 15000 francs. Celui-ci est souscrit au denier 18 ($5,55\%$) mais ...

comme ledit prêteur n'a pas chez lui la somme dont il est question, et que, pour faire plaisir à l'emprunteur, il est contraint lui-même de l'emprunter d'un autre sur le pied du denier cinq, il conviendra que ledit premier emprunteur paie cet intérêt, sans préjudice du reste, attendu que ce n'est que pour l'obliger que ledit prêteur s'engage à cet emprunt.

Comme le fait observer Cléante :

C'est plus qu'au denier quatre.

Vérifions que :

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{5} > \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{10}{180} + \frac{36}{180} > \frac{45}{180}$$

On peut admirer la vivacité d'esprit du jeune homme, sans doute habitué aux sinistres pratiques des usuriers !

Là ne s'arrête pas le cynisme du « fessemathieux ».

Des quinze mille francs qu'on demande, le prêteur ne pourra compter en argent que douze mille livres ; et pour les mille écus restants, il faudra que l'emprunteur prenne les hardes, nippes, bijoux dont s'ensuit le mémoire ...

La rapacité d'Harpagon (dont Maître Simon n'est que l'intermédiaire), nous permet de calculer la conversion « franc » — « écu ».

$$15000 \text{ francs} - 12000 \text{ livres} = 1000 \text{ écus}$$

Nous avons déjà observé l'égalité du franc et de la livre. On en déduit :

$$3000 \text{ francs} = 1000 \text{ écus}$$

Un écu vaut donc 3 francs.

On retrouve cette équation dans *Les fourberies de Scapin*, acte II, scène 7.

Moyennant ces subtilités, on peut calculer le taux réel annuel au moyen d'une équation du premier degré :

$$12000 \cdot (1 + i) = 15000 + \frac{46}{180} \cdot 15000$$

ce qui fait $i = 0,5694$.

Cette pratique ancienne visant à dissimuler le taux d'intérêt excessif exigé en trompant le débiteur sur le montant réellement emprunté est à rapprocher des méthodes utilisées par certaines firmes de vente par correspondance sur catalogue qui affichent 15000 francs un article que l'on trouve couramment pour 12000.

On peut également tirer des diverses sommes exprimées en unités différentes un système d'équations homogènes qui permettra d'établir la parité entre les diverses monnaies en cours au XVII^e siècle.

Notons

- x_1 le *franc* et la *livre* dont on a déjà montré l'égalité.
- x_2 la *pistole*.

- x_3 le *sou* ou le *sol*.
- x_4 le *denier*.
- x_5 l'*écu* ; on sait déjà que celui-ci vaut trois francs : $x_5 = 3 \cdot x_1$.
- x_6 le *louis*.

On trouve dans *L'Avare*, acte I, scène 4 :
Je vais gager qu'en perruques et rubans, il y a du moins vingt pistoles ; et vingt pistoles rapportent par année dix-huit livres six sous huit deniers, à ne les placer qu'au denier douze.
On en tire l'équation

$$\frac{1}{12} \cdot 20x_2 = 18x_1 + 6x_3 + 8x_4 \qquad (1)$$

Dans *Le Bourgeois Gentilhomme* (1670), acte III, scène 4, Monsieur Jourdain récapitule le montant de ses prêts à Dorante :
Ces trois articles font quatre cent soixante louis qui valent cinq mille soixante livres (...)

$$460x_6 = 5060x_1 \qquad (2)$$

Mille huit cent trente-deux livres à votre plumassier (...) Deux mille sept cent quatre-vingts livres à votre tailleur (...) Quatre mille trois cent soixante-dix-neuf livres douze sols huit deniers à votre marchand (...) Et mille sept cent quarante-huit livres sept sols quatre deniers à votre sellier. (...) Somme totale quinze mille huit cents livres.

$$\begin{aligned} &5060x_1 + 1832x_1 + 2780x_1 + 4379x_1 + 12x_3 \\ &\quad +8x_4 + 1748x_1 + 7x_3 + 4x_4 = 15800x_1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Et Dorante de répondre :
Somme totale est juste. Quinze mille huit cents livres. Mettez encore deux cents pistoles que vous m'allez donner : cela fera justement dix-huit mille francs, que je vous paierai au premier jour.

$$15800x_1 + 200x_2 = 18000x_1 \qquad (4)$$

La résolution est élémentaire. De (2) on tire :

$$x_6 = 11x_1$$

Un louis vaut onze francs ou onze livres (au XIX[e] siècle, le louis valait vingt francs or).
De (4), on déduit :

$$x_2 = 11x_1$$

La pistole, comme le louis, vaut onze francs.
(1) et (3) constituent le système :

$$\begin{cases} 6x_3 + 8x_4 = \frac{1}{3}x_1 \\ 19x_3 + 12x_4 = x_1 \end{cases}$$

dont la solution est :

$$x_3 = \frac{1}{20}x_1$$

$$x_4 = \frac{1}{240}x_1 = \frac{1}{12}x_3$$

Le sou vaut un vingtième de franc (d'où l'expression « cent sous » pour cinq francs) et le denier vaut un douzième du sou.
Remarquons que les systèmes homogènes dont la solution est indéterminée permettent en fait d'établir des relations entre les différentes variables. Dans le cas qui nous occupe, la valeur du franc est conventionnelle et toutes les unités peuvent s'exprimer en fonction du franc.

Mathématique et poésie

Même quand il tourne en dérision la pédagogie répétitive qu'il réprouve (et qui ne convient justement pas pour la mathématique qui demande réflexion ...), PRÉVERT ouvre la porte à une interprétation algébrique de sa poésie.
Dans sa *Page d'écriture* (voir annexe), l'enfant rêveur proclame :

> « *Ils ne font rien seize et seize*
> *et surtout pas trente-deux* »

De manière littéraire, on interprète le texte comme un rejet des méthodes d'apprentissage basées uniquement sur la mémoire au profit du développement de l'imaginaire, et ce ne sont pas les mathématiciens qui le contrediront : ils sont bien placés pour se rendre compte que leur savoir est né de leur seule imagination. Malheureusement, l'élève de PRÉVERT constitue une heureuse exception parmi ceux, trop nombreux, qui préfèrent le confort des exercices à caractère purement répétitif !

Dans quels corps finis seize et seize ne font-ils pas trente-deux ?

Dans $\mathbb{Z}_{17} : 16 + 16 = 15$

$\mathbb{Z}_{19} : 16 + 16 = 13$

$\mathbb{Z}_{23} : 16 + 16 = 9$

$\mathbb{Z}_{29} : 16 + 16 = 3$

$\mathbb{Z}_{31} : 16 + 16 = 1$

Et dans la vie de tous les jours ? Il est seize heures, seize heures s'écoulent, quelle heure est-il ?

En guise de conclusion

Pour boucler la boucle, revenons à Jules VERNE et son ami BADOUREAU qui semble donner raison à PRÉVERT : comme un membre de l'Académie d'Amiens avait eu le malheur de dire en sa présence : « C'est vrai comme deux et deux font quatre », le mathématicien frémit et expliqua à qui voulait l'entendre que « un et un font deux, c'est une définition, tandis que deux et deux font quatre, ça n'est tout au plus qu'un théorème, c'est-à-dire une de ces choses qui s'acceptent sans pouvoir se démontrer absolument *(sic)* ».

Annexe 1

En 1825, Monsieur Schwartz arriva à Paris avec mille francs. Connaissez-vous les Halles ? Monsieur Schwartz avait son idée. Dans la rue de la Ferronnerie, il loua une chambre. Il y avait aux Halles un vieux Schwartz qui donnait des leçons de petite semaine. Notre Schwartz à nous prit pour cent sous de leçons.

« Quelle spéculation, messieurs, si on la connaissait bien ! Mais il faut tenir dur et veiller au gain ! Cinq francs prêtés le lundi, six francs rendus le dimanche. Voilà l'élément. Il est joli. Monsieur Schwartz, sortant des mains du vieux Schwartz, fit un bureau dans sa mansarde. Ses mille francs, prêtés jusqu'au dernier sou, produisirent, au taux légal de la petite semaine, mille deux cents francs ronds le premier dimanche ; le second dimanche, ses mille deux cents francs lui rapportèrent mille quatre cent quarante francs ; le troisième, il eut mille sept cent vingt-huit francs ; le quatrième, deux mille soixante-treize francs cinquante centimes ... Admettez-vous cela ? Oui, on ne va pas contre les chiffres. Négligeons les soixante-treize francs cinquante centimes pour les frais, non-valeurs, etc. Le principe reste celui-ci : le capital doublé en vingt-huit jours. Eh bien ! accordons le mois rond, pour désarmer toute objection ... j'aime mieux concéder ça et ça que d'être taxé d'exagération. Y êtes-vous ? Quatre mille francs le deuxième mois, n'est-ce pas ? huit mille francs le troisième, seize mille francs le quatrième, trente-deux mille francs le cinquième, soixante-quatre mille francs le sixième, cent vingt-huit mille francs le septième, deux cent cinquante-six mille francs le huitième, cinq cent douze mille francs le neuvième ... Je vous fais observer que nous avons déjà dépassé le but.

Le natif voulut protester.

— Permettez ! s'écria Cotentin de la Lourdeville. Au quinzième mois, en suivant cette progression géométrique, nous obtenons trente-deux millions sept cent soixante-huit mille francs, ce qui est agréable résultat. Je prévois vos objections ; je fais plus, je les approuve. Il y a les mécomptes ... Ça et ça ... En outre, arrivé à un certain chiffre, on trouve difficilement dans l'enceinte des Halles deux ou trois millions de marchandes des quatre saisons qui vous empruntent cinq francs par semaine. Tel est l'écueil. Aussi, après quinze mois, Monsieur Schwartz, quand il se maria, n'avait encore que quatre cent mille francs, c'est-à-dire la quatre-vingt deuxième partie de ce qu'il aurait dû avoir ... ».

Paul FÉVAL, **Les habits noirs.**

Annexe 2

Toi-même réponds-moi : Dans le siècle où
nous sommes ;
Est-ce au pied du savoir qu'on mesure les
hommes ?

Veux-tu voir tous les grands à ta porte courir ?
Dit un père à son fils dont le poil va fleurir ;
Prends-moi le bon parti : laisse là tous les livres.
Cent francs au denier cinq combien font-ils ?
Vingt livres.
C'est bien dit. Va, tu sais tout ce qu'il faut savoir.
Que de biens, que d'honneurs sur toi s'en vont pleuvoir !
Exerce-toi, mon fils, dans ces hautes sciences ;
Prends au lieu d'un Platon le guidon des finances.

C'est ainsi qu'à son fils un usurier habile
Trace vers la richesse une route facile :
Et tel souvent y vient, qui sait, pour tout secret ;
Cinq et quatre font neuf, ôtez deux, reste sept.

BOILEAU, **Satire VIII**

Annexe 3

Page d'écriture

Deux et deux quatre
quatre et quatre huit
huit et huit font seize ...
Répétez ! dit le maître
Deux et deux quatre
quatre et quatre huit
huit et huit font seize.
Mais voilà l'oiseau lyre
qui passe dans le ciel
l'enfant le voit
l'enfant l'entend
l'enfant l'appelle.
Sauve-moi
joue avec moi
oiseau !
Alors l'oiseau descend
et joue avec l'enfant
Deux et deux quatre ...
Répétez ! dit le maître
et l'enfant joue
l'oiseau joue avec lui ...
Quatre et quatre huit
huit et huit font seize
et seize et seize qu'est-ce qu'ils font ?
Ils ne font rien seize et seize
et surtout pas trente-deux
de toute façon
et ils s'en vont.
Et l'enfant a caché l'oiseau
dans son pupitre
et tous les enfants
entendent sa chanson
et tous les enfants
entendent la musique
et huit et huit à leur tour s'en vont
et quatre et quatre et deux et deux
à leur tour fichent le camp
et un et un ne font ni une ni deux
un à un s'en vont également.
Et l'oiseau lyre joue
et l'enfant chante
et le professeur crie :
Quand vous aurez fini de faire le pitre !
Mais tous les autres enfants
écoutent la musique
et les murs de la classe
s'écroulent tranquillement.
Et les vitres redeviennent sable
l'encre redevient eau
les pupitres redeviennent arbres
la craie redevient falaise
le porte-plume redevient oiseau.

Jacques PRÉVERT, **Paroles**,
Éd. Gallimard et Folio.

Math-Jeunes n° 59, 56–60, 1993

Ne dites plus Jules et Jim sont amis, dites plutôt Jules (1184) et Jim (1210)

(Mais non, il ne s'agit pas de leurs dates de naissance !)

M. Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

La Mathématique est la Reine des Sciences et l'Arithmétique, la Reine des Mathématiques.
—K. F. GAUSS (1777-1855)

1. Introduction

On appelle *Théorie des Nombres* la partie des mathématiques qui s'occupe d'arithmétique à un niveau relativement élevé. Chacun a peut-être encore en mémoire les quelques définitions de base qui suivent. Nous travaillerons dans l'ensemble $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ et, afin d'alléger le texte, nous conviendrons que, dans cet article, le vocable « *nombre entier* » ou, plus simplement « *entier* » désignera un élément de $\mathbb{N}^*$.

- *Un entier a est* divisible *par un entier b s'il existe un troisième entier c tel que $a = bc$. On dit encore que b est un* diviseur *de a, ce qu'on note $b \mid a$.*
- *Un entier p est* premier *si p possède* exactement deux *diviseurs : 1 et p.*
  Tout entier supérieur à 1 et non premier est appelé composé.
  Ainsi,
  - ⋆ 2, 3, 5, 7, 11 sont *premiers*.
  - ⋆ 4, 6, 8, 9, 10 sont *composés*.
  - ⋆ 1 n'est ni *premier* ni *composé*.
- *Deux entiers a et b sont dits* premiers entre eux, *ce qu'on note $(a, b) = 1$, si leur seul diviseur commun est 1.*

Rappelons également, sans le démontrer, le

> THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE
> *Tout entier n différent de 1 s'écrit de manière unique*
> *$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ où $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sont des premiers, $a_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et $k \geqslant 1$.*

L'écriture de n dans le théorème qui précède s'appelle *forme standard de n.*

2. A propos des diviseurs d'un entier

2.1. La fonction « nombre de diviseurs de n »

Soit n un entier et désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n). Nous allons tenter d'évaluer cette fonction $d(n)$. Remarquons que :

- si $n = p^a$, où p est *premier*, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur nombre $d(n) = a + 1$
- si $n = p^a q^b$, où p et q sont des *premiers distincts*, ses diviseurs sont :

$$(b+1)\left\{\overbrace{\begin{array}{lllll} 1, & p, & p^2, & \ldots, & p^a \\ q, & pq, & p^2q, & \ldots, & p^aq \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q^b, & pq^b, & p^2q^b, & \ldots, & p^aq^b \end{array}}^{(a+1)}\right.$$

et donc,

$$d(n) = (a + 1) \times (b + 1).$$

THÉORÈME 1
Si n est écrit sous sa forme standard unique

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

alors

$$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 2) \times \cdots \times (a_k + 1)$$

ou encore

$$d(n) = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1)$$

où la notation $\prod_{i=1}^{k}$ *se lit « produit pour i allant de 1 à k ».*

Nous allons utiliser le principe de démonstration « *par induction* » encore appelé « *par récurrence* ». Ce principe est le suivant :

- on vérifie d'abord que le théorème est vrai pour la plus petite valeur de k
- on suppose ensuite le théorème vrai pour $k = u - 1$ et, sous cette hypothèse, on démontre qu'il est vrai pour $k = u$.

La démonstration est alors complète :

- puisque nous avons vérifié que le théorème était vrai pour la plus petite valeur de k, disons $k = 1$, en vertu de la seconde partie de la démonstration, le théorème est encore vrai pour $k = 2$
- maintenant que le théorème est vrai pour $k = 2$, il l'est aussi pour $k = 3$
- ... *(in infinitum !)*

Démonstration :

- Nous avons vu que si l'entier $n = p^a$ (le nombre k de premiers distincts vaut 1), alors $d(n) = a + 1$. Le théorème est donc vrai pour la plus petite valeur de k.
- Montrons que si nous supposons que le nombre de diviseurs de l'entier $n' = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}}$ est égal à

$$d(n') = (a_1+1) \times (a_2+1) \times \cdots \times (a_{k-1}+1)$$

alors, nous pouvons montrer que pour $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k}$,

$$d(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1)$$

En effet, on voit aisément que tous les diviseurs de n s'obtiennent en multipliant chacun des diviseurs de n' par

$$\begin{aligned} 1 &= p_k^0 \\ p_k &= p_k^1 \\ & p_k^2 \\ & \vdots \\ & p_k^{a_k} \end{aligned}$$

Il y a ainsi $(a + 1)$ fois plus de diviseurs dans n que dans n', ce qui achève la démonstration.

Exercice 1. Applique donc ce premier théorème à quelques entiers.

2.2. La fonction « somme des diviseurs de n »

Désignons-la par $\sigma(n)$ et essayons de l'évaluer. Remarquons que

- si $n = p^a$, ses diviseurs sont $1, p, p^2, \ldots, p^a$ et leur somme $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a$; il est encore possible d'exprimer cette somme autrement :

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= p^a + p^{a-1} + \cdots + p^2 + p + 1 \\ p\sigma(n) &= p(p^a + p^{a-1} + \cdots + p + 1) \\ &= p^{a+1} + p^a + \cdots + p^2 + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\sigma(n) - \sigma(n) \\ &= (p-1)\sigma(n) \\ &= p^{a+1} + p^a + \cdots + p^2 + p \\ &\quad -(p^a + p^{a-1} + \cdots + p^2 + p + 1) \end{aligned}$$

$$(p-1)\sigma(n) = p^{a+1} - 1$$

et donc

$$\sigma(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

- si $n = p^a q^b$, ses diviseurs sont

$$\begin{array}{lllll} 1, & p, & p^2, & \ldots, & p^a, \\ q, & pq, & p^2q, & \ldots, & p^aq, \\ q^2, & pq^2, & p^2q^2, & \ldots, & p^aq^2, \\ \vdots & & & & \\ q^b, & pq^b, & p^2q^b, & \ldots, & p^aq^b \end{array}$$

et tu vérifieras que leur somme vaut bien $(1+p+p^2+\cdots+p^a) \times (1+q+q^2+\cdots+q^b) = \dfrac{p^{a+1}-1}{p-1} \times \dfrac{q^{b+1}-1}{q-1}$.

Afin d'éviter de remplir ce numéro de *Math-Jeunes* avec un seul article, nous te laissons le soin — si, selon toi, cela s'avère vraiment nécessaire — de faire la démonstration complète par récurrence. Nous avons ainsi :

> THÉORÈME 2
> *Si n est écrit sous sa forme standard unique, alors*
>
> $$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \times \cdots \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$$
>
> $$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$$

Exercice 2. Applique ce théorème à quelques entiers.

3. A propos du titre de l'article

On appelle *partie aliquote* d'un nombre, tout diviseur de ce nombre autre que ce nombre lui-même.

Exemple : Les parties aliquotes de 12 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

3.1. Nombres parfaits

Un nombre est *parfait* s'il est égal à la somme de ses parties aliquotes.
Exemple : $6 = 1 + 2 + 3$

> THÉORÈME 3
> *Si 2^{m-1} est premier, alors $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ est parfait.*

On peut montrer que, pour que $2^m - 1$ soit premier, il faut nécessairement m que m soit premier. Dans ce cas, un premier tel que $2^m - 1$ est appelé *premier de Mersenne.* Le Révérend Père Marin DE MERSENNE (1588-1648), ami de DESCARTES (1596-1650) croyait détenir là une formule permettant de trouver les nombres premiers ; bien qu'imparfaite, sa formule est à l'origine de nombreuses recherches en *Théorie des Nombres.*

Démonstration :
Nous devons voir que la *somme des parties aliquotes de n*, c'est-à-dire $\sigma(n) - n = n$ ou encore que $\sigma(n) = 2n$.
Puisque $2^m - 1$ est premier, désignons-le par p ; ainsi, nous avons

$$n = 2^{m-1}p$$

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{2^{(m-1)+1}-1}{2-1} \times \frac{p^2-1}{p-1} \\ &= (2^m 11) \times \frac{(p-1)(p+1)}{p-1} \\ &= p \times (p+1) \\ &= 2^m p \\ &= 2 \times 2^{m-1} \times p \\ &= 2n \end{aligned}$$

Exercice 3. Nous avons vu que 6 était parfait ; recherche d'autres nombres parfaits (il y en a quatre inférieurs à 10000 ; le cinquième possède 8 chiffres, le sixième, 10, le septième, 12, le huitième, 19 chiffres !!!).
Ce résultat était connu d'EUCLIDE (troisième siècle avant Jésus-Christ) : il constitue la *proposition XXXVI du Neuvième Livre des Eléments*

et est ainsi exprimé :
Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Exercice 4. Essaie de décrypter le langage utilisé ci-dessus et convaincs-toi qu'il est équivalent à l'énoncé qui précède.

On peut aussi montrer que tout nombre parfait pair est de la forme mentionnée ci-dessus ; nous devons ce résultat à EULER (1707-1783) mais, à ce jour, nous ignorons toujours s'il existe des nombres parfaits *impairs*. Des mathématiciens tels que TUCKERMAN, HAGIS, STUBBLEFIELD, BUXTON et ELMORE ont graduellement repoussé la frontière en deça de laquelle il ne peut y avoir de nombre parfait impair ; cette frontière se situe actuellement aux alentours de 10^{200} !!! Ce sont là des résultats relativement récents et qui font appel à des théories nettement moins élémentaires que celles que nous avons utilisées ; ne t'attaque donc pas trop vite à ce problème.

3.2. Nombres amis (ou amiables)

Deux entiers m et n sont dits *amis* ou *amiables* si la somme des parties aliquotes de l'un est égale à l'autre et inversement.

Exemple : 1184 et 1210 (Ouf ! Nous y voilà !) L'origine de ces nombres est biblique. EULER, en 1750, en possédait soixante paires, mais il avait oublié la deuxième par ordre croissant (1184 et 1210). Celle-ci ne fut découverte qu'en 1866 (!) par un gamin de seize ans, B.N.I. PAGANINI.

> THÉORÈME 4
> *Si $x > 1$ et si $p = 3\cdot 2^x - 1, q = 3\cdot 2^{x-1} - 1, r = 9\cdot 2^{2x-1} - 1$ sont trois premiers impairs, alors les nombres $m = 2^x pq$ et $n = 2^x r$ sont amis ou amiables.*

la première démonstration en fut donnée par le mathématicien arabe ABU-L-HASSAN TABIT IBN QURRA AS-SABI AL-HARRANI (830-901) qui, comme son nom l'indique, appartenait à la secte des Sabéens (adorateurs des étoiles) et était né à *Harran*, en Mésopotamie.

Démonstration :
Nous devons montrer que $\sigma(m) - m = n$ et que $\sigma(n) - n = m$, ce qui est équivalent à la double égalité :

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$$

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \frac{2^{x+1}-1}{2-1}\cdot\frac{p^2-1}{p-1}\cdot\frac{q^2-1}{q-1}\\ &= (2^{x+1}-1)\cdot(p+1)\cdot(q+1)\\ &= (2^{x+1}-1)\cdot 3\cdot 2^x\cdot 3\cdot 2^{x-1}\\ &= 9\cdot 2^{2x-1}\cdot(2^{x+1}-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \frac{2^{x+1}-1}{2-1}\cdot\frac{r^2-1}{r-1}\\ &= (2^{x+1}-1)\cdot(r+1)\\ &= (2^{x+1}-1)\cdot 9\cdot 2^{2x-1}\\ &= 9\cdot 2^{2x-1}\cdot(2^{x+1}-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&m+n\\ &= 2^x pq + 2^x r\\ &= 2^x(pq+r)\\ &= 2^x\left[(3\cdot 2^x - 1)(3\cdot 2^{x-1}-1) + 9\cdot 2^{2x-1} - 1\right]\\ &= 2^x(9\cdot 2^{2x-1} - 3\cdot 2^x - 3\cdot 2^{x-1} + 1 +\\ &\qquad 9\cdot 2^{2x-1} - 1)\\ &= 2^x\cdot 2\cdot 9\cdot 2^{2x-1} - 3\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2^{2x-1}\\ &= 9\cdot 2^{3x} - 3\cdot 2^{2x-1}(2+1)\\ &= 9\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x-1}\\ &= 9\cdot 2^{2x-1}\cdot(2^{x+1}-1)\end{aligned}$$

Exercice 5. Recherche quelques paires de nombres amis.

Bibliographie

[1] Alan BAKER, *A Concise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, 1984.

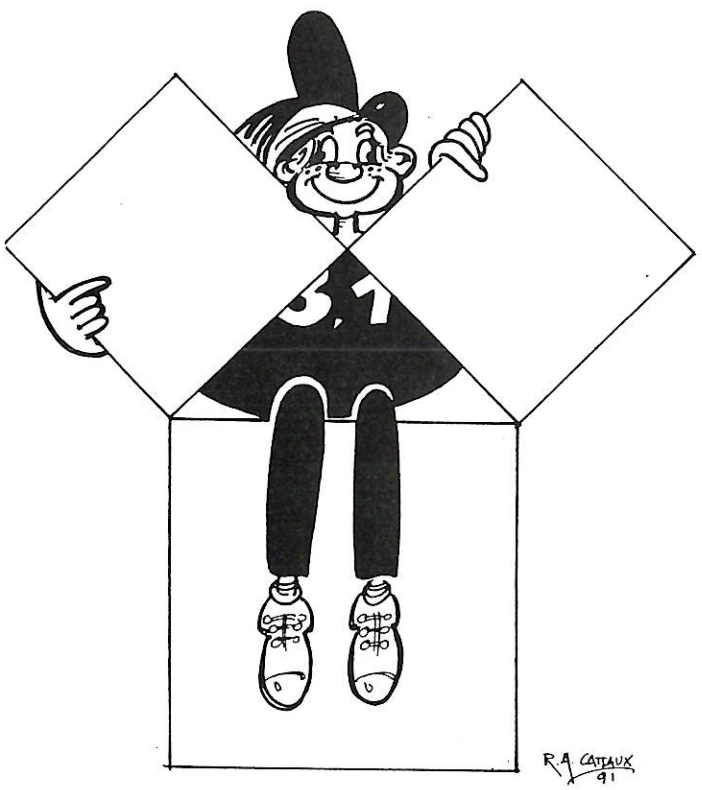
Math-Jeunes n° 59, 60–62, 1993

[2] Albert H. BEILER, *Recreations in the Theory of Numbers—The Queen of Mathematics entertains*, Dover Publ., Inc., New York, 1966.

[3] Richard K. GUY, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, 1981.

[4] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford University Press, 1979.

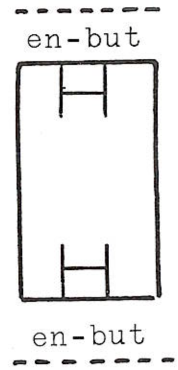
[5] Oystein ORE, *Number Theory and its History*, Dover Publ., Inc., New York, 1988.



La transformation d'un essai de rugby et la notion d'angle inscrit dans un cercle

Jacques Bair,
Université de Liège

Voici un second extrait du livre de Jacques BAIR *intitulé* **Mathématiques et sports**, *édité par la S.B.P.M.*

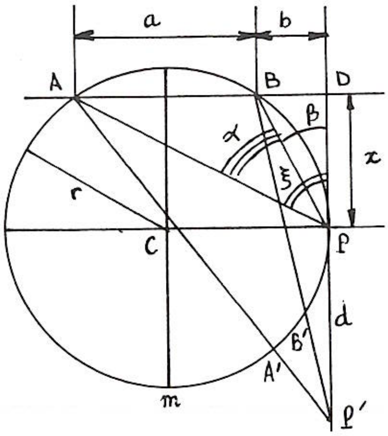


Un terrain de rugby se présente sous la forme d'un grand rectangle, d'environ 100 mètres de long sur 50 mètres de large. Il est délimité, dans sa longueur par les lignes de touche, et dans sa largeur par les lignes de but.

Au milieu de ces dernières s'élèvent deux poteaux, distants de 5,6 mètres, réunis à 3 mètres de hauteur par une barre transversale. Au-delà des lignes de but, sur 22 mètres de profondeur, se trouve une zone appelée l'*en-but*.

Pour marquer un essai, il faut faire toucher le ballon à terre dans l'en- but. Lorsqu'une équipe réussit un essai, elle peut tenter sa *transformation*. A cet effet, on désigne en son sein un buteur qui se place où il veut à l'intérieur du terrain à condition de rester juste en face de l'endroit où fut marqué l'essai (c'est-à-dire sur une verticale, par rapport à la ligne des buts, passant par le point où a été déposé le ballon dans l'en-but) : l'essai sera transformé lorsque le ballon sera envoyé par un coup de pied entre les poteaux et au-dessus de la barre transversale les reliant.

Supposons qu'un essai ait été marqué, par exemple à droite des deux poteaux de but (soit en un point M de la figure ci-dessous).



Le problème mathématique consiste à trouver le point P sur la droite d perpendiculaire à la droite passant par les points A et B qui délimitent le but de manière à ce que l'angle α $(= \widehat{APB})$ soit le plus grand possible.

Une solution peut être obtenue par la construction géométrique suivante.

On trace la médiatrice m du segment de droite d'extrémités A et B ; r étant la distance de m et d, on dessine un arc de centre A (ou B) et de rayon r, lequel coupe m au point C. Le cercle de centre C et de rayon r est tangent à d au point P cherché.

Ce point P répond bien à la question. En effet, en tant qu'angle inscrit dans le cercle, l'angle α a pour mesure la moitié de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qu'il intercepte (lorsque l'unité de mesure d'arc est l'arc intercepté par un angle au centre dont la mesure est égale à l'unité). Pour tout autre point P' situé sur d, l'angle $\widehat{AP'B}$ est formé par deux cordes qui se coupent à l'extérieur du cercle et a de ce fait pour mesure la demi- différence des deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ intercepté sur le cercle par ses côtés : la mesure de l'angle $\widehat{AP'B}$ est donc bien inférieure à celle de $\widehat{APB}$.

On peut procéder plus analytiquement en caractérisant le point P par sa distance x à la ligne des buts. Pour simplifier les écritures, nous noterons a la distance entre les deux poteaux, b la distance entre le point B et la droite d et D le point situé à l'intersection de la droite d et de la ligne des buts. L'angle α est égal à la différence des angles ξ $(= \widehat{APD})$ et β $(= \widehat{BPD})$: on a donc $\alpha = \xi - \beta$, avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Comme la fonction *tangente* est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, le problème posé revient à maximiser $\operatorname{tg}\alpha$. Or, on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\xi - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\xi - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\xi \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a+b}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{ax}{x^2 + b(a+b)}$$

Il est facile de voir que le maximum de cette fonction (pour $x > 0$) est atteint lorsque

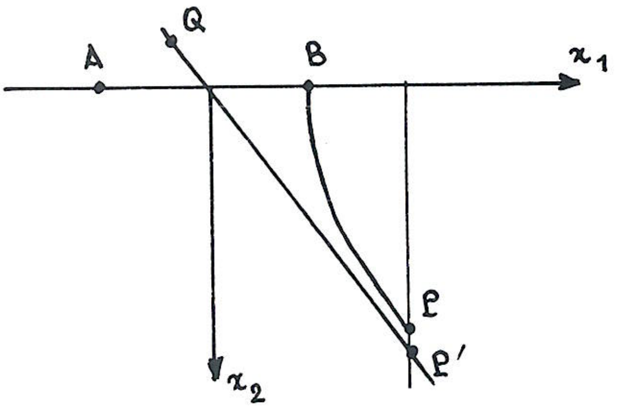
$$x = \sqrt{b(a+b)}.$$

Sachant que a vaut 5,6 mètres, on peut calculer l'endroit idéal (c'est-à-dire x) en fonction de b (c'est-à-dire de l'endroit où a été marqué l'essai). Voici quelques valeurs particulières [WORSNUP G., An aid to conversions in rugby, *The Mathematical Gazette, 72 (465),* 1989, pp. 225-226.]

Distance b (en mètres)	Valeur optimale de x (en mètres)
5	7,3
10	12,5
15	17,6
20	22,6
25	27,6
30	32,7
35	37,7
40	42,7

A la lecture de ce tableau, une règle simple et générale apparaît : le buteur doit choisir une distance x (par rapport à la ligne des buts) qui dépasse approximativement de 2,5 mètres la longueur b (représentant la distance de la droite d et du poteau de but le plus proche de d). Bien entendu, si l'essai a été marqué entre les poteaux ou si la longueur b est petite, le buteur devra se placer à une distance suffisamment grande pour pouvoir envoyer le ballon au-dessus de la barre horizontale des buts. D'un autre côté, si b est grand, la règle est également caduque : le tireur devra évidemment choisir

une distance x assez courte pour que son essai puisse au moins atteindre la ligne des buts.
Nous allons à présent donner un autre moyen pratique et efficace pour estimer la position optimale du tir. A cet effet, rapportons le plan du terrain à un système d'axes orthonormés avec pour origine le point O situé sur le milieu du segment $[AB]$, l'axe des abscisses étant la droite passant par les points A et B et orientée vers la droite, l'axe des ordonnées étant la verticale passant par O et dirigée vers le bas.



Si x_1 désigne l'abscisse de P, son ordonnée vaut

$$x_2 = \sqrt{(x_1 - \frac{a}{2}) \cdot (x_1 + \frac{a}{2})}$$

En d'autres termes, le point P est situé sur l'hyperbole d'équation

$$x_1^2 - x_2^2 = \frac{a^2}{4}$$

Cette courbe possède comme asymptote la bissectrice OP', d'équation $x_1 = x_2$. Comme le point P' ne paraît guère éloigné de P, il est assez raisonnable de se demander quelles sont les différences entre les angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{AP'B}$. A titre d'exemples, voici quelques données numériques [*ibid.*]

abscisse x_1 (en m)	5	10	15	20
ordonnée x_2 (en m)	4,14	9,6	14,74	19,8
angle $\widehat{APB}$	34,06°	16,26°	10,76°	8,05°
angle $\widehat{AP'B}$	33,59°	16,25°	10,76°	8,05°

Il résulte de ce tableau que le remplacement de P par P' ne provoque pratiquement aucune différence. Or, le point P' peut évidemment être trouvé facilement. Il suffit en effet de tracer sur le sol une marque au point O (point milieu entre les deux poteaux A et B), ainsi qu'au point Q situé sur la bissectrice du premier quadrant et derrière la ligne des buts. Le tireur devra se déplacer le long de la verticale DP jusqu'à ce qu'il aperçoive alignées les deux marques en O et Q : le point P' ainsi obtenu lui donne pratiquement la position idéale pour effectuer son shoot.

Le Gasp

André Parent, *Lycée de Mouscron*

Voici quelques années, dans la revue *Jeux et Stratégie*, Michel BRASSINNE proposait un jeu de pions en solitaire se jouant sur une grille carrée à l'aide de pions bicolores (par exemple, ceux d'un jeu d'*Othello/Reversi*) avec des règles très simples.

Situation de départ

Délimiter tout d'abord une zone de jeu, par exemple une grille 4×4.
Déposer un pion par case, face noire au-dessus par exemple.

But du jeu

Retourner tous les pions.

Règle du jeu

Choisir un pion, retourner alors tous les voisins (sauf lui-même).

On peut avantageusement remplacer les pions par des « O » et des « X » lors d'une utilisation de papier quadrillé et crayon par exemple.

	A	B	C	D
1	O	O	O	O
2	O	O	O	O
3	O	O	O	O
4	O	O	O	O

En jouant B2, les pions des huit cases voisines sont retournés.

	A	B	C	D
1	X	X	X	O
2	X	O	X	O
3	X	X	X	O
4	O	O	O	O

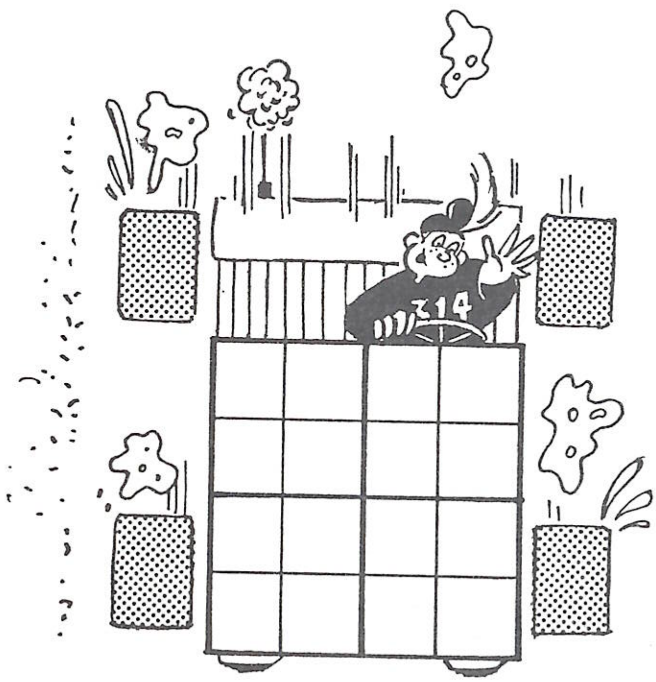
Après B2, jouer C4 retourne cinq pions et redonne à B3 et C3 leur couleur de départ.

	A	B	C	D
1	X	X	X	X
2	X	O	X	O
3	X	O	O	X
4	O	X	O	X

Si, à deux coups de la fin, la situation est celle de la figure ci-dessous, quels sont ces deux coups ?

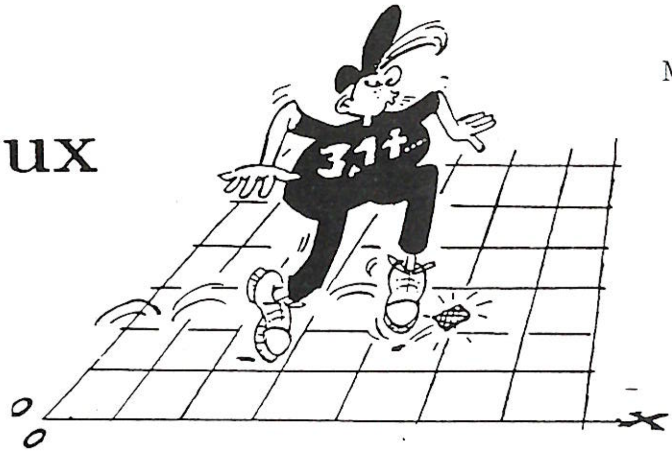
	A	B	C	D
1	X	O	X	O
2	X	O	O	O
3	O	O	O	X
4	O	X	O	X

Cherche une solution du Gasp en dix essais ; tu trouveras la séquence complète dans la page solutions.
Il est possible de réaliser un score nécessitant moins d'essais. On peut également utiliser une grille 6×6 ou 8×8 ....
Envoie le résultat de tes recherches à la Rédaction de *Math-Jeunes*.



 Math-Jeunes n° 59, 64–67, 1993

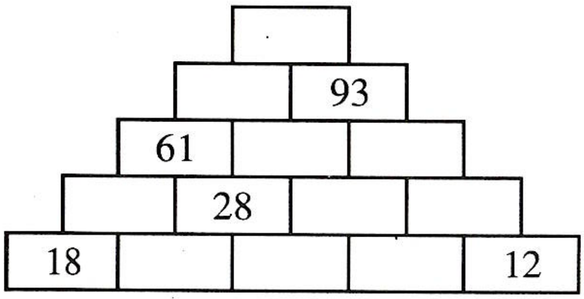
Jeux

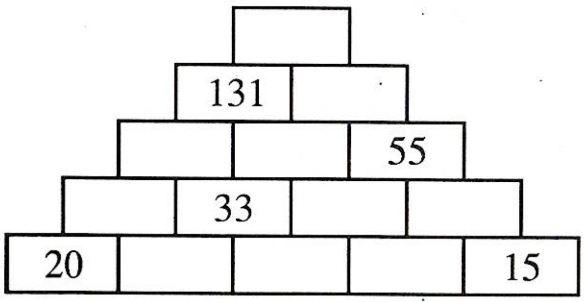


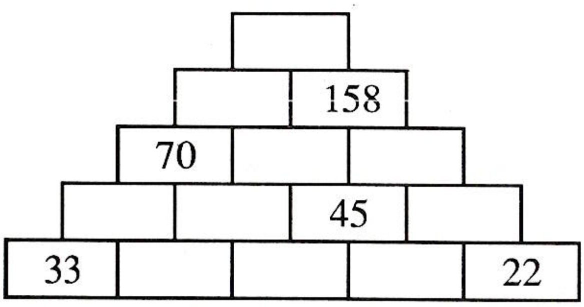
A.Parent

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.







Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	12	14	
8			6
30			19
	6	17	

	6	19	
4			29
3			20
	5	14	

Produits croisés

A chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres–définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1		H				
2	R					
3						
4						
5			T			
6						

Horizontalement
1. 182400
2. 76950
3. 270 — 4914
4. 1750
5. 1400 — 60
6. 359100

Verticalement
1. 1890000
2. 2721600
3. 19 — 500
4. 780
5. 315 — 252
6. 1462050

Nombres croisés (par C. Parent)

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Horizontalement
1. Carré
2. Carré
3. Carré
4. Carré

Verticalement
1. Cube
2. Puissance de 3
3. Probuit d'un carré, d'un cube et d'un nombre premier
4. Dix fois un nombre premier

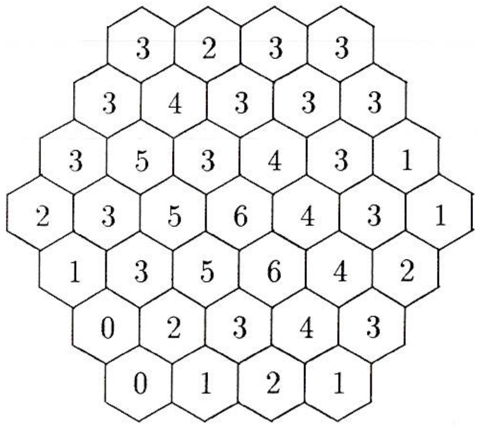
	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

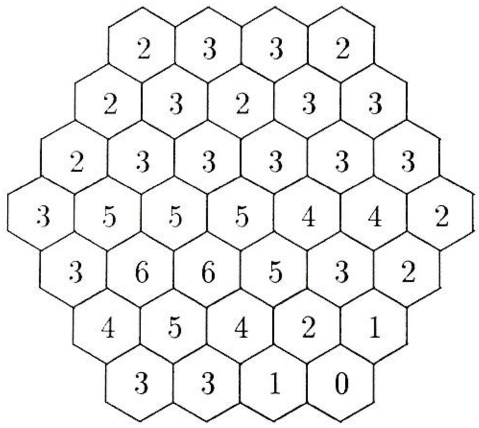
Horizontalement
1. Multiple de 383
2. Factorielle
3. Carré
4. Puissance de 6

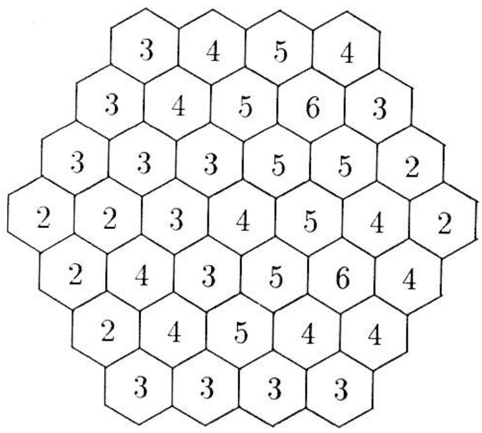
Verticalement
1. Puissance de 3
2. Multiple de 5
3. Palindrome
4. Puissance de 2

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.







Solutions

Le mur des nombres

204
111 93
61 50 43
33 28 22 21
18 15 13 9 12

247
131 116
70 61 55
37 33 28 27
20 17 16 12 15

309
151 158
70 81 77
34 36 45 32
33 1 35 10 22

Grilles des moyennes

	12	14	
8	12	12	6
30	16	16	19
	6	17	

	6	19	
4	9	18	29
3	8	15	20
	5	14	

Produits croisés

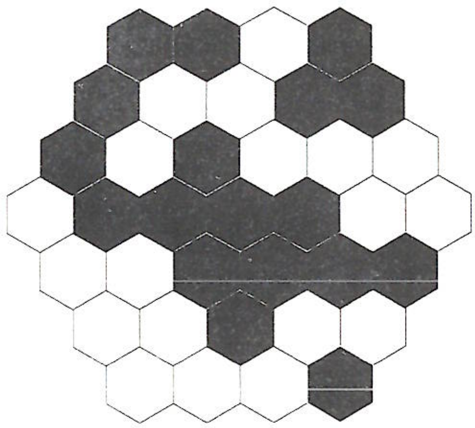
	1	2	3	4	5	6
1	T	H	A	L	E	S
2	R	O	S	A	C	E
3	O	R		M	U	R
4	E	N	E	E		I
5	N	E	T		L	E
6	E	R	E	B	U	S

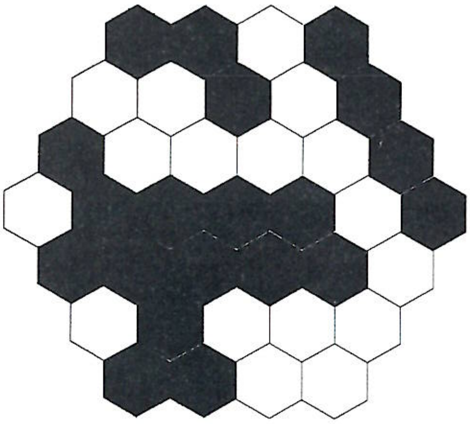
Nombres croisés

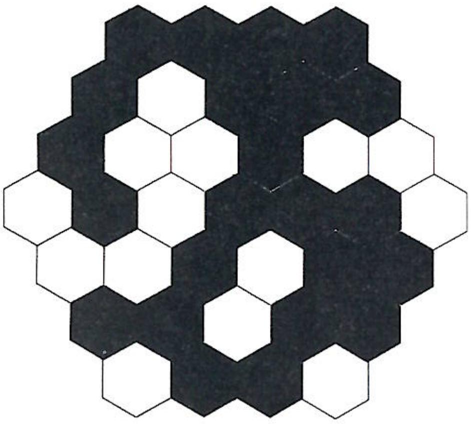
	1	2	3	4
1	1	6	8	1
2	7	5	6	9
3	2	6	0	1
4	8	1	0	0

	1	2	3	4
1	6	8	9	4
2	5	0	4	0
3	6		4	9
4	1	2	9	6

Jeu de l'hexagone et de la marguerite







Gasp

Les deux coups restants sont : B4 et C1. Solution en dix coups : A1 – B1 – C1 – D1 – A2 – B2 – C2 – D2 – B4 – C4
Tu auras sans doute constaté que l'ordre des coups n'a pas d'importance.

Publications

Outre ton magazine préféré (*Math-Jeunes* bien entendu ...), la SBPMef (*Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*) édite plusieurs ouvrages dont certains sont susceptibles de t'intéresser. La Rédaction te propose notamment :

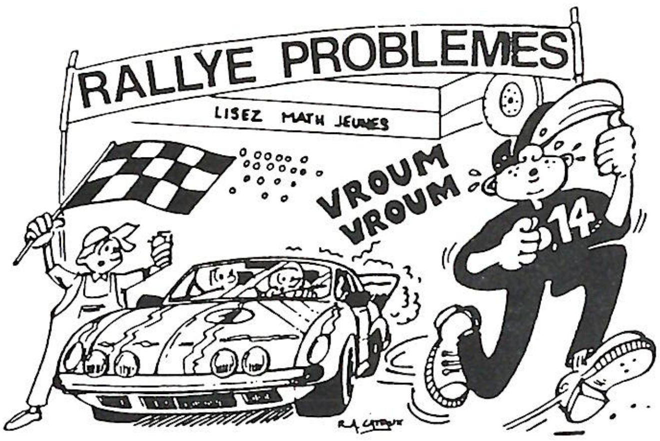
- *Olympiades Mathématiques Belges*, tome 2 — 200 FB
- *Mathématiques et sports* par J. Bair — 200 FB

Tu peux également te procurer d'anciens numéros de *Math-Jeunes*. Consulte la page 2 de couverture.
Tous les paiements sont à effectuer au compte de la SBPMef que tu trouveras aussi en page 2 de couverture, n'oublie pas de préciser le nom de ton école sur le virement.

A paraître ...

Le tome 3 des *Olympiades Mathématiques Belges*, il contiendra toutes les questions posées aux différentes épreuves (de l'éliminatoire à la finale) des six dernières années (1988 – 1993).
Il sortira de presse à la prochaine rentrée. Nous te tiendrons informé !

Math-Jeunes n° 59, 68–68, 1993



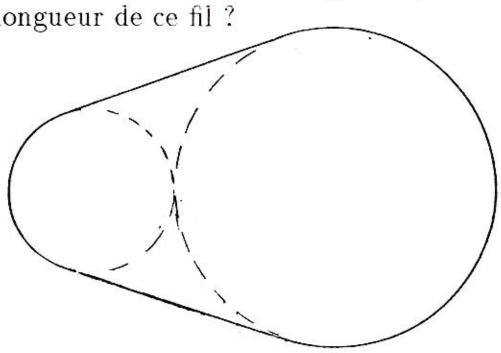
C. Festraets

Voici les derniers problèmes suivants de ce rallye. Vos solutions sont à envoyer à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, avant le 27 mars 1993.
Je rappelle que, pour chaque problème, la solution doit être rédigée sur une feuille différente. Certains m'ont envoyé une solution au recto et la solution d'un autre problème au verso de la même feuille. C'est très gênant pour un classement problème par problème.

m7 La population du village de Murnam était un carré parfait. Un peu plus tard, ayant augmenté de cent habitants, c'était un carré parfait plus un. Maintenant, ayant encore augmenté de cent habitants, c'est de nouveau un carré parfait. Quelle est la population actuelle de Murnam ?

m8 On considère les ensembles
$E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2,3\}$, $E_3 = \{4,5,6\}$, $E_4 = \{7,8,9,10\}, \ldots$
Chaque ensemble est formé d'entiers positifs consécutifs ; chaque ensemble contient un élément de plus que le précédent et le premier élément de chaque ensemble vaut une unité de plus que le dernier élément de l'ensemble précédent.
Que vaut la somme des éléments de E_{1993} ?

m9 Deux cercles de rayons 3 et 9 centimètres sont tangents extérieurement. Un fil (d'épaisseur négligeable) passe autour de ces deux cercles comme l'indique la figure. Quelle est la longueur de ce fil ?



M7 Une personne possède 64 000 F. Elle parie six fois, à chaque fois, la moitié de la somme qu'elle possède à ce moment. Si elle gagne, elle touche la même somme que celle pariée. A chaque pari, elle a autant de chances de gagner que de perdre. On sait qu'elle a gagné trois fois et perdu trois fois, mais on ignore dans quel ordre ces gains et ces pertes se sont produits.
Peut-on déterminer quel est, en fin de compte, son gain ou sa perte ?

M8 On considère la fonction

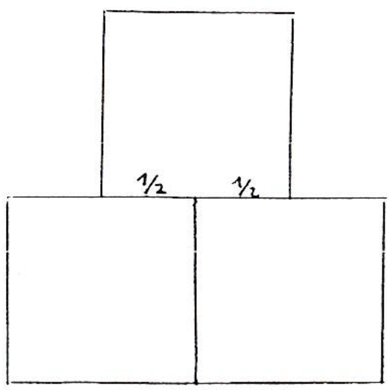
$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = \frac{2x-1}{x+1}$$

et on définit

$$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \text{ pour } n \in \{1,2,3,\ldots\}$$

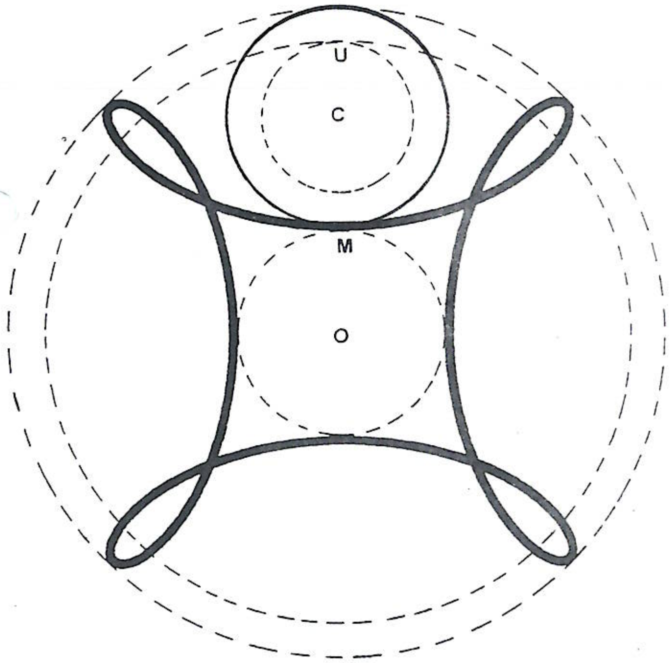
Montrer que $f_{1993}(x) = f_1(x)$.

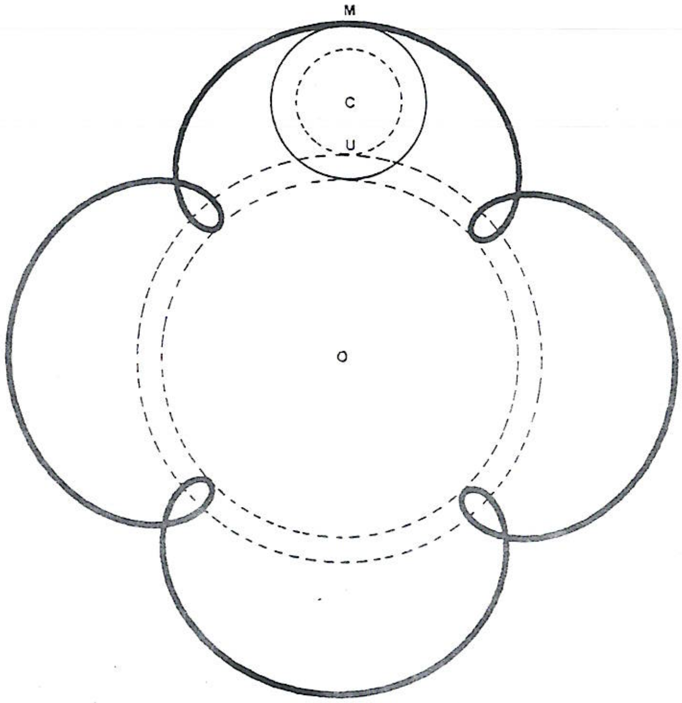
M9 Quel est le rayon du plus petit cercle contenant la figure formée de trois carrés de côté 1 représentée ci-dessous ?



La Rédaction de *Math-Jeunes* a le plaisir de présenter à tous ses lecteurs ses meilleurs vœux de bonne et heureuse année ; excellente santé à tous ... Que 1993 vous apporte tout ce que vous pouvez désirer de meilleur ...

Nous sommes également heureux de vous montrer deux jolies courbes : l'« HYPOCYCLOÏDE » (page 1 de couverture, figure de gauche ci-dessous) et l'« ÉPICYCLOÏDE » (page 4 de couverture, figure de droite, en bas).





Dans l'un et l'autre cas, on considère un cercle de centre O et de rayon $[OU]$ appelé *directrice*. Soit un deuxième cercle de centre C et de rayon $[CU]$ baptisé *cercle générateur*. Considérons maintenant le point M situé sur un des rayons du cercle de centre C à une distance d de C ; selon sa position (intérieure, repectivement extérieure), ce point M décrit une « HYPOCYCLOÏDE » (respectivement une « ÉPICYCLOÏDE ») lorsque le cercle générateur roule sans glisser sur la directrice.

Historiquement, on trouve déjà ces courbes dans la Grèce antique ; l'« ÉPICYCLOÏDE » permettait aux astronomes, qui suivaient HIPPARQUE, d'expliquer les mouvements rétrogrades des planètes. Au milieu du treizième siècle, nous y trouvons associé le nom de l'éminent mathématicien et astronome arabe Nasīr ad-Dīn AT-TŪSĪ. Ensuite, milieu du seizième siècle, Nicolas COPERNIC, le peintre Albrecht DÜRER et plus tard, DESARGUES, LA HIRE, NEWTON, LEIBNIZ, EULER et Daniel BERNOULLI.

Essaie de dessiner ces courbes ou de rechercher leur équation. Amuse-toi bien ; nous attendons ton courrier.

La Rédaction