En-tête de Karin TRUFFINO du Lycée Berlaymont

MATH-JEUNES

Courrier : J. MIEWIS, rue de joie, 75, 4000-LIEGE

2e année N° 6 - septembre-octobre 1980

Chers amis,

Voici que commence la deuxième année de notre petit journal. Nous avions l'an dernier près de 3000 abonnés. Nous aimerions cette année atteindre les 5000, voire plus. Nous comptons donc sur vous, que le journal a intéressés, pour le propager autour de vous.

Nous organisons cette année un "concours-rallye" de problèmes. Des réponses à certains problèmes posés dans MATH-JEUNES donneront droit à des points et le total des points acquis en fin d'année donnera lieu à un classement.

A côté du titre de chacun de ces problèmes, vous trouverez un couple de nombres. Le premier élément du couple est le nombre de points attribués pour la résolution de ce problème à un élève des classes inférieures; le second indique les points attribués à un élève des classes supérieures.

Vous pouvez accumuler des points en résolvant beaucoup de problèmes simples mais aussi en vous attaquant plus particulièrement à un problème plus ardu. Agissez selon votre tempérament. Vos réponses, pour entrer en ligne de compte, doivent nous arriver avant la parution du numéro suivant. Le total des points acquis se fera avant la parution du dernier numéro. En fin d'année des prix seront attribués aux mieux classés tant du cycle inférieur que du cycle supérieur. Il est normal que nous souhaitions que vos solutions soient le fruit d'un travail personnel. N'oubliez pas d'indiquer dans vos réponses votre classe et le nom de votre école. Il va de soi que comme par le passé nous recevrons également avec plaisir vos solutions aux autres problèmes.

A VOS MARQUES ! PRÊTS ? PARTEZ ...

Nombre d'Or

Quelque peu négligé par les mathématiciens de ce siècle, le nombre d'or a joué dans l'Antiquité et à la Renaissance un rôle important dans l'histoire de l'Art. Analysons d'abord ce phénomène avec le regard serein du mathématicien, ensuite, nous laisserons libre cours à l'enthousiasme de nos sens artistiques.

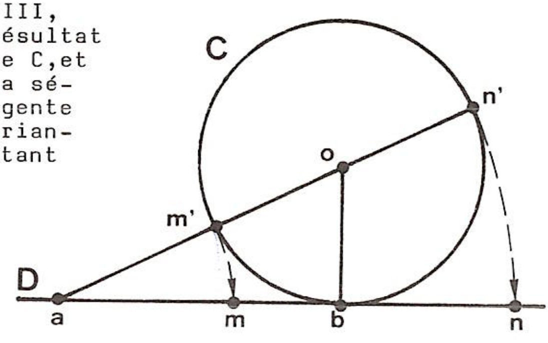
Le nombre d'or est le nom de baptême de l'irrationnel algébrique $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pourquoi un tel nom pour ce nombre assez banal ? L'origine historique de cette valeur - suivant la formule consacrée - se perd dans la nuit des temps. C'est à EUCLIDE, le mathématicien grec du IIIe siècle avant J.C., le père de la géométrie, et à ses ELEMENTS que nous remonterons pour trouver la première trace écrite de cette valeur. Au troisième livre, EUCLIDE traite de *la division d'un segment en moyenne et extrême raison* : deux points a et b fixés sur une droite D, il s'agit de trouver un point m situé sur la droite D, vérifiant la relation :

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{am}} = \frac{\overline{am}}{\overline{mb}} \quad \text{ou encore} \quad \overline{am}^2 = \overline{ab}\ \overline{mb} \qquad (1)$$

Le problème est ici posé avec nos notations modernes; $\overline{ab}$ représente la valeur de la mesure algébrique du segment orienté d'origine a et d'extrémité b.

Au début du livre III, EUCLIDE a démontré le résultat suivant : soit un cercle C,et un point extérieur a, la sécante (am'n') et la tangente (ab) au cercle C. Les triangles a,b,m' et a,n',b étant semblables, on trouve :

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{an'}} = \frac{\overline{am'}}{\overline{ab}} \qquad (2)$$



EUCLIDE nous propose de tracer la sécante (am'n') contenant le centre o du cercle C, de diamètre $\overline{ab}$, tangent à D en b ; ensuite de porter m sur (ab) tel que : $\overline{am} = \overline{am'}$ (3) (Un simple arc de cercle de centre a suffit!) On vérifie que m répond à notre demande (1) en partant de (2) :

$$\overline{am'}\ \overline{an'} = \overline{ab}^2$$
$$\overline{am}\ (\overline{am'} + \overline{m'n'}) = \overline{ab}^2 \quad \text{par (3)}$$
$$\overline{am}\ (\overline{am} + \overline{ab}) = \overline{ab}^2$$
$$\overline{am}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{ab}\ \overline{am}$$
$$\overline{am}^2 = \overline{ab}\ (\overline{ab} - \overline{am})$$
$$\overline{am}^2 = \overline{ab}\ \overline{mb} \quad \text{ce qui est (1)}$$

On dit que m partage le segment [ab] en moyenne et extrême raison. Si $\overline{an} = \overline{an'}$, remarquons que b partage le segment [an] en moyenne et extrême raison car :

$$\frac{\overline{an}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bn}} \quad \text{ou} \quad \overline{an}\ \overline{bn} = \overline{ab}^2 \qquad (4)$$

ce qui se vérifie en rapprochant (4) de (2) : il suffit de remarquer que :

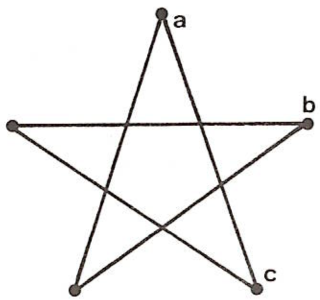
$$\overline{am'} = \overline{am} = \overline{an} - \overline{mn} = \overline{an} - \overline{m'n'} = \overline{an} - \overline{ab} = \overline{bn}$$

Calculons à présent un de ces rapports : (2) par exemple. On pose $\overline{ab} = x$. Par le théorème de PYTHAGORE appliqué au triangle a,b,o , on trouve :

$\overline{ao} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$, d'où $\overline{am} = \overline{am'} = \frac{x}{2}\sqrt{5} - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}(\sqrt{5}-1)$, et

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{am}} = \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ce qui est le nombre d'or. Numériquement, ce nombre vaut approximativement **1,618033989...**



Dans son quatrième livre des ELEMENTS, EUCLIDE retrouve cette valeur lorsqu'il compare la longueur du côté d'un pentagone étoilé (*ou pentacle*) avec la longueur du côté du pentagone convexe, tous deux inscrits dans un même cercle.

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Le lecteur scrupuleux vérifiera facilement ce résultat !

Cet irrationnel est donc pour les Grecs un nombre lié au problème précis de la division en moyenne et extrême raison et à quelques propriétés des pentagones et pentacles. L'essentiel des propriétés géométriques de ce nombre est ainsi déjà connu depuis longtemps. Le procédé indiqué par EUCLIDE permet, à l'aide du compas et de la règle de construire deux distances dont le rapport est ce nombre.

Replaçons-nous à l'époque d'EUCLIDE : sous l'impulsion de PYTHAGORE, une mystique des nombres s'est développée : la beauté et l'organisation du monde sont liées à de savantes manipulations de nombres et de concepts géométriques. Le pentacle est le symbole universel de perfection, symbole de vie, de beauté et d'amour. On pense qu'il servit de signe de ralliement aux Pythagoriciens. On le retrouve sur plusieurs monnaies antiques. Le pentacle figure aussi dans les "roses" de certaines cathédrales (Amiens en France en est un exemple). Bref, ce rapport est récupéré par la mystique : un rectangle sera "beau", agréable au regard si le rapport des longueurs de ses côtés est cette valeur 1,61...

Il y avait peut-être une justification plus terre à terre qui a provoqué le choix de cette valeur comme base artistique et architecturale : à cette époque, les procédés de calculs numériques sont quasi-inexistants, et le procédé que décrit EUCLIDE permet une construction rigoureuse (facile à décrire, facile à mémoriser, facile à reconstituer) de deux grandeurs dans un rapport précis. Contrairement à notre époque, on préfère alors une construction géométrique simple (au compas et à la règle) à une valeur numérique difficilement contrôlable.

Et la magie du nombre va jouer : ce rapport devient l'étalon de la plupart des constructions architecturales de l'époque.

Au PARTHENON d'ATHENES, le sculpteur PHIDIAS (490 - 430 av. J.C.) se servira à plusieurs reprises de rectangles dont les rapports des côtés valent le nombre d'or.

En voici deux exemples : en façade:

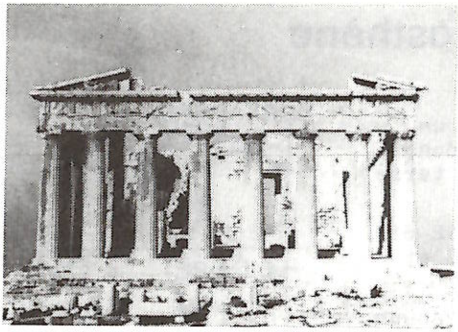
$$\overline{ab} = \overline{bc} = 2\,\overline{be} = x$$

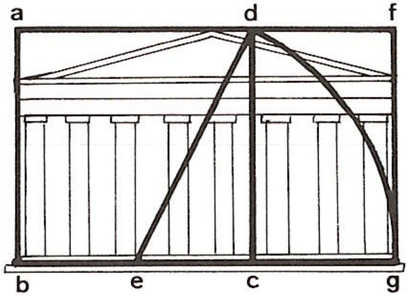
$$\overline{eg} = \overline{ed} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$$

$$\overline{bg} = \overline{be} + \overline{eg} = \frac{x}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

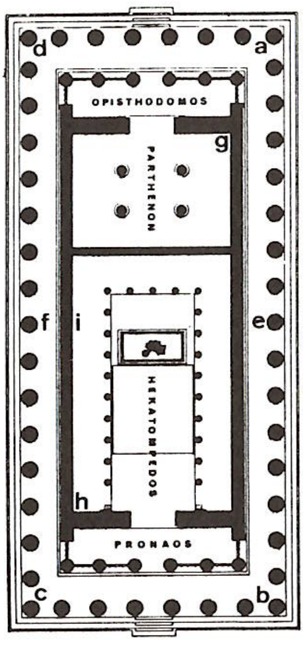
$$\frac{\overline{bg}}{\overline{ab}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Quant au rectangle allongé qui forme le plan du PARTHENON, on a remarqué que le rapport entre la diagonale et la diagonale du demi-rectangle était très voisin du nombre d'or.





Les rapports $\frac{\overline{ac}}{\overline{af}}$ et $\frac{\overline{gh}}{\overline{gi}}$ du plan ci-dessous sont à nouveau très proches du nombre d'or. Hasard ? Volonté réelle de PHIDIAS ? Depuis que ces calculs furent faits au PARTHENON, il n'est pas rare de trouver dans la littérature le nombre d'or représenté par la lettre grecque Φ : pour PHIDIAS bien sûr !



En 1509, le moine fransiscain LUCA PACIOLI (1450 - 1520) publie à Venise un ouvrage intitulé " LA DIVINE PROPORTION " où il expose les résultats connus sur le nombre d'or. Il propose une série de rectangles dont les dimensions sont liées à ce nombre. Ces rectangles devraient servir de base à toutes les constructions de l'art, de la peinture à l'architecture. L'un de ces rectangles était d'ailleurs le rectangle " PARTHENON " ci-contre. Les raisons invoquées par LUCA PACIOLI pour justifier l'épithète " DIVINE " sont un curieux mélange d'affirmations métaphysiques et de résultats mathématiques. Cet ouvrage sera illustré par LEONARD DE VINCI (1452 - 1519). C'est ce dernier qui introduira les appellations *nombre d'or* et *section d'or*.

Dans un prochain article, nous aborderons les résultats de FIBONACCI sur le nombre d'or.

Mais c'est une autre histoire...

Erathosthène

En 230 avant notre ère, un bibliothécaire d'Alexandrie donna une évaluation du tour de la terre sans quitter l'Egypte.

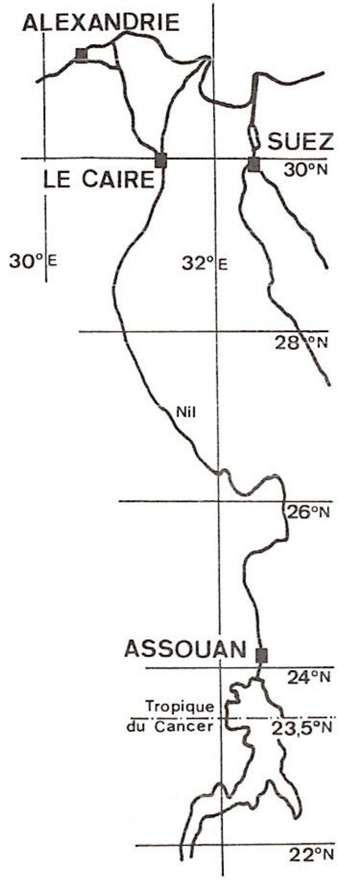
Il s'appelait ERATOSTHENE et on croit qu'il vécu entre 275 et 195 avant Jésus-Christ.

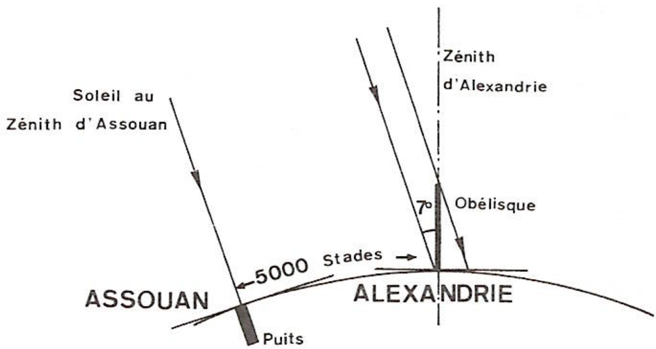
Un jour qu'il était à Assouan - c'était un jour proche du solstice d'été -, il constata que le soleil éclarait le fond d'un puits profond. Si, au même instant, on mesure à Alexandrie l'ombre d'un obélisque, on peut en déduire que la direction du soleil fait, avec le zénith un angle de 7,2°.

Il montre ainsi qu'Alexandrie est située à 7,2° de latitude au nord d'Assouan. Eratosthène évalue la distance entre Alexandrie et Assouan à 5000 stades.

L'historien PLINE (62 - 113) estime le stade équivalant à 535 pieds romains. Nous attribuons la valeur de 0,2944 m au pied romain.

Une différence de 7,2° de latitude mesurée par ERATOSTHENE représente donc 5000 stades grecs, 5000 x 535 pieds = 2675000 pieds,





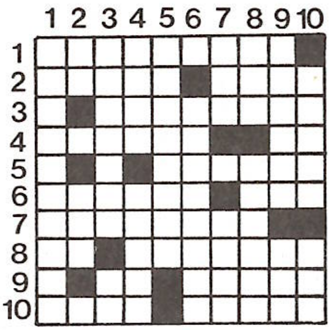
2675000 x 0,2944 m = 787520 mètres. Une simple règle de trois nous permet de déduire pour le tour de la terre :

$$787520 \text{ mètres} \times \frac{360}{7,2} = 39376000 \text{ mètres}$$

Le rayon moyen de la terre est aujourd'hui connu : 6371 kilomètres, ce qui donne une longueur de grand cercle égale à 40030174 km. L'estimation d'ERATOSTHENE est donc précise à 1,5%. Cette précision est remarquable compte tenu des difficultés de la mesure de la distance entre Alexandrie et Assouan, du fait que ces deux villes ne sont pas sur le même méridien, et enfin parce que Assouan n'est pas exactement sur le tropique du Cancer. Admirons la simplicité du principe et la sobréité des moyens mis en oeuvre ...

* * *

LES MOTS CROISES DE MAJEUNIX : Grille n° 3.



HORIZONTALEMENT :

1. Mathématicien allemand.
2. Mathématicien suisse - Se roquent.
3. Aide.
4. A moi - Hors de combat.
5. Courtois.
6. Important en probabilité - Bière étrangère.
7. Des bords du Rhin.
8. Est nordique - Exerce un art.
9. Dedans - Prénom féminin.
10. Epiça - Après une division.

VERTICALEMENT :

1. Il y en a d'autres que l'Euclidienne.
2. Un peu d'eau - Abréviation chrétienne.
3. Etude des structures - article étranger.
4. De bas en haut : dévêtues - Fruit sans s .
5. Ville de l'Inde.
6. Contredire.
7. Oiseau - Ile verte.
8. Négation - Utiles pour la pêche.
9. Métal blanc - Dangereux.
10. Hardies dans le désordre - Triple voyelle.

Solution de la grille n°2 (proposée dans MATH - JEUNES n° 4)

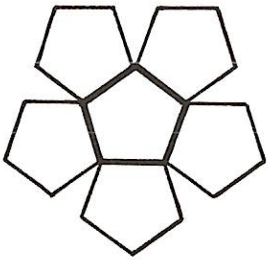
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	P	A	R	A	M	E	T	R	E
2	A	B	S	C	I	S	S	E	S
3	R	A	■	C	E	P	E	■	P
4	A	Q	U	A	■	A	■	P	E
5	B	U	■	B	A	C	L	E	R
6	O	E	■	L	I	E	■	N	A
7	L	■	S	E	S	■	A	D	N
8	E	M	U	■	E	R	■	R	C
9	S	I	N	U	S	■	L	E	E

Le coin des problèmes

Voici d'abord quelques uns des problèmes que nous avions proposés dans les Math-Jeunes de l'année dernière. Nous pensons à leurs propos avoir reçu trop peu de réponses pour déjà en donner la solution. Alors, chers amis lecteurs, nouveaux ou anciens, à vous de jouer !

4 A propos d'un polyèdre. ✻ (20;10)

Dessiner six pentagones réguliers, inscrits dans un cercle de 5 cm de rayon. Dessiner dix triangles équilatéraux dont les côtés ont même longueur que le côté du pentagone. Découper ces seize polygones dans du carton. Poser ensuite les pentagones comme ci-contre et les coller avec du papier collant le long du trait épais. Relever ensuite les cinq pentagones extérieurs et poser des bandelettes collantes pour les fixer l'un à l'autre de manière à obtenir une sorte de coupe dont le bord supérieur est un polygone non plan de dix côtés. Fixer sur chacun des dix côtés les dix triangles équilatéraux : chaque triangle a ainsi un côté commun avec un côté des pentagones. Les triangles peuvent pivoter autour du côté ainsi fixé. En les faisant pivoter on peut les placer de deux manières différentes pour qu'ils se raccordent deux à deux. Choisir la manière telle que les dix côtés restant libres de ces triangles forment un polygone étoilé. Ce polygone est-il plan ?



22 Un code très secret.

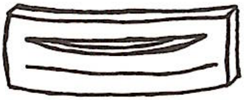
s_n est une permutation de $(1,2,3, \ldots , n)$. Cette permutation obéit à une loi secrète, toujours la même. Voici les premières suites :

$s_1 = (1)$ (évidemment)
$s_2 = (2,1)$
$s_3 = (2,3,1)$
$s_4 = (2,4,3,1)$
$s_5 = (5,2,4,3,1)$
$s_6 = (5,2,4,6,3,1)$
$s_7 = (5,2,4,7,6,3,1)$
$s_8 = (5,2,8,4,7,6,3,1)$

Construire s_9 et indiquer la loi secrète .

✻ : *indique un problème du "concours-rallye"*

23 La tresse.



Dans un rectangle de tissu, deux fentes longitudinales sont pratiquées. (Voir figure du haut)

Pouvez-vous tresser ce tissu et obtenir la configuration du dessous sans pratiquer d'autres découpes dans le tissu ?

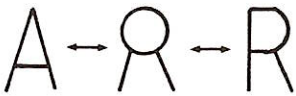
Faites-nous parvenir vos bouts de tissu tressés !

25 Avec 16 cartes. * (10;5)

D'un jeu de cartes, extrayez les quatre as, les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Si je vous demande de disposer ces seize cartes en carré de manière que dans chaque bande horizontale, verticale et diagonale, on trouve,dans le désordre, un as, un roi, une dame et un valet, et en même temps un coeur, un carreau, un pique et un trèfle, vous trouverez rapidement une solution. Aussi la question est ailleurs : combien de tels carrés de cartes différents peut-on réaliser ?

26 Un peu de topologie.

Je dis que deux dessins du plan sont équivalents si de légères déformations permettent de passer de l'un à l'autre. Par exemple, les majuscules A et R sont équivalentes en ce sens puisque je peux imaginer le schéma ci-contre. A et R sont équivalents car ces deux dessins sont constitués d'une courbe fermée d'où s'échappent - en deux points différents - deux petits bouts de ligne. Dans l'ensemble {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J, K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,0,1,2 ,3,4,5,6,7,8,9}, A et R forment un couple isolé car aucune autre lettre ou chiffre ne leur est équivalent.



Quels sont les deux autres couples ? Il y a aussi un isolé, c'est-à-dire un dessin qui n'est équivalent à aucun autre, lequel ?

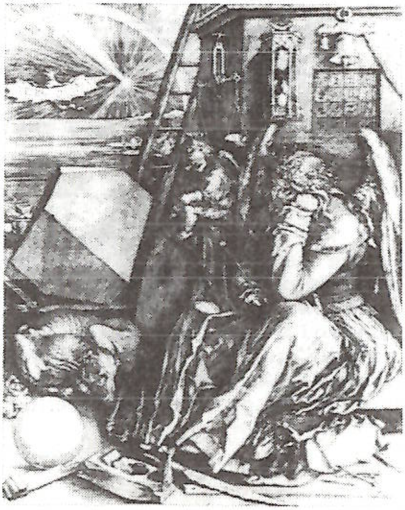
27 Les lois cachées. * (8;8)

Chacune de ces séries de 5 nombres obéit à une loi. Découvrez ce lien et suivant celui-ci, donnez-nous le sixième nombre de chaque série. Quelquefois, plusieurs lois sont possibles et donc plusieurs sixièmes termes.

5, 24, 123, 622, 3121, ...	1, 3, 7, 15, 31,....
2, 3, 4, 7, 6, ...	13, 25, 37, 49, 511, ...
13, 17, 19, 23, 29, ...	6, 8, 12, 14, 18, ...
5, 8, 13, 21, 34, ...	11110, 1010, 132, 110, 50, ...

31 Mélancolie...

C'est le nom de la célèbre gravure d'Albert DURER (1471 - 1528) conservée à la bibliothèque nationale de Paris et reproduite ci-contre. Dans le coin supé rieur droit, nous découvrons :



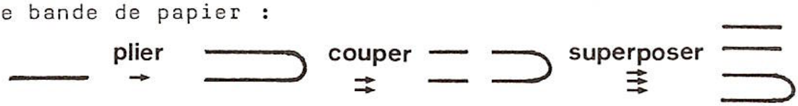
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Un carré de nombres, tels que les sommes des nombres écrits sur une ligne quelconque, ou sur une colonne quelconque, ou sur les deux diagonales, sont égales est un *CARRE MAGIQUE*.

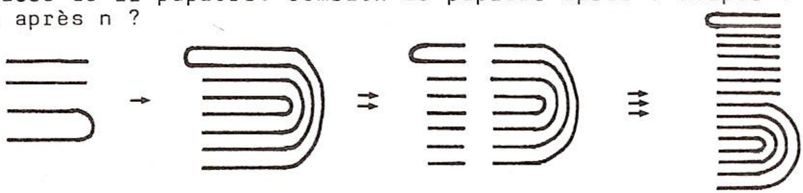
Il existe beaucoup d'autres carrés, formés avec les naturels entre 1 et 16, qui sont "magiques". A vous de jouer !

32 Plier, couper, superposer, ... ✻ (8;5)

Ces trois actions, on se propose de les faire subir à une bande de papier :



C'est là une première étape. On recommence ensuite avec les morceaux obtenus. Après cette seconde opération, on a une liasse de 11 papiers. Combien de papiers après 7 étapes ? et après n ?

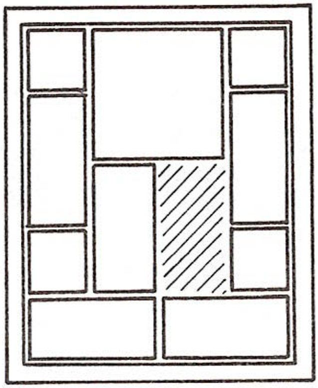


Brico - Puzzle

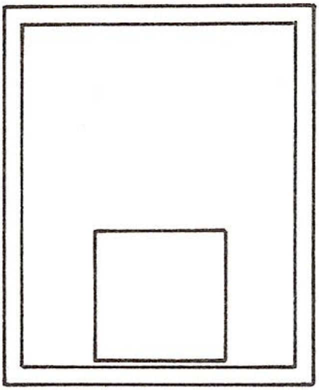
Découpez dans du carton épais, ou mieux dans du "triplex"

4 carrés de 4 cm x 4 cm,
5 rectangles de 4 cm x 8 cm,
1 carré de 8 cm x 8 cm

et disposez les sur une planchette rectangulaire de 22 cm x 18 cm comme ci-contre.



La case hachurée est vide ; le bord d'un cm qui encadre les pièces du puzzle est occupé par un cadre de même épaisseur que celles-ci.

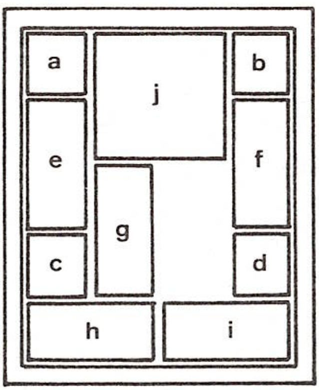


En glissant des pièces dans l'espace vide (à chaque étape) on demande d'amener le grand carré dans la position ci-contre.

Cela peut vous sembler difficile, mais je vous affirme que c'est possible !

Comment communiquer, ou simplement retenir les déplacements effectués . Voici une manière simple de faire :

On désigne les pièces par des lettres a,b,c,d,e,f,g,h,i,j.



Si vous glissez la pièce d vers la gauche, écrivez d←. Si vous la montez ensuite : d↑ ; ce qui peut s'écrire en une fois d←↑. Si ensuite, vous montez i : i↑ ; puis par exemple, h→ et ainsi de suite ...

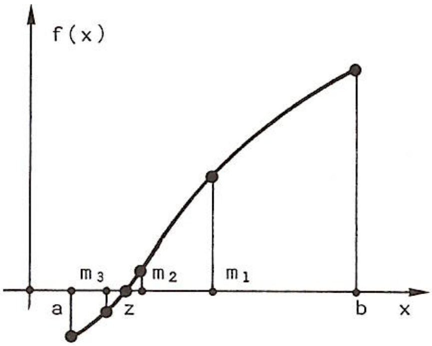
Il faut au moins une centaine de manipulations pour répondre à la demande.

Bon courage !


GÈBRE GÉRALD
OU... LA FIÈVRE DU MATH-RDI SOIR !!!
N°03
POUVEZ-VOUS ME DONNER DES EXEMPLES D'ELLIPSES ???
OUI M'SIEUR ... LE TRUC DU JARDINIER AVEC LES FICELLES ... ÇA TRACE UNE ELLIPSE! ...
SCRITCHHHHHH
MOI AUSSI M'SIEUR ... JE SAIS : LE TRUC DU BÉBÉ AVEC SA MAMAN ET SON BIBERON ...
SUK SUK SUK SUK
DESSINS SOLIVIER 80

Zéros d'une fonction

Il vous est peut-être arrivé de devoir factoriser un polynôme et de déplorer l'inefficacité de la " grille de HORNER ". En fait, nous devons admettre un certain dénuement face au problème de la recherche du zéro d'une fonction (ou du problème de la recherche de la racine d'une équation). Les techniques calculant une solution exacte sont rares. Par contre, plusieurs procédés permettent un calcul approché d'une solution, avec autant de décimales exactes que l'on veut. La méthode *des nombres moyens* proposée au quinzième siècle par NICOLAS CHUQUET (v1445 - v1500) sera aujourd'hui notre propos.



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Supposons que f(a) et f(b) sont de signes différents.

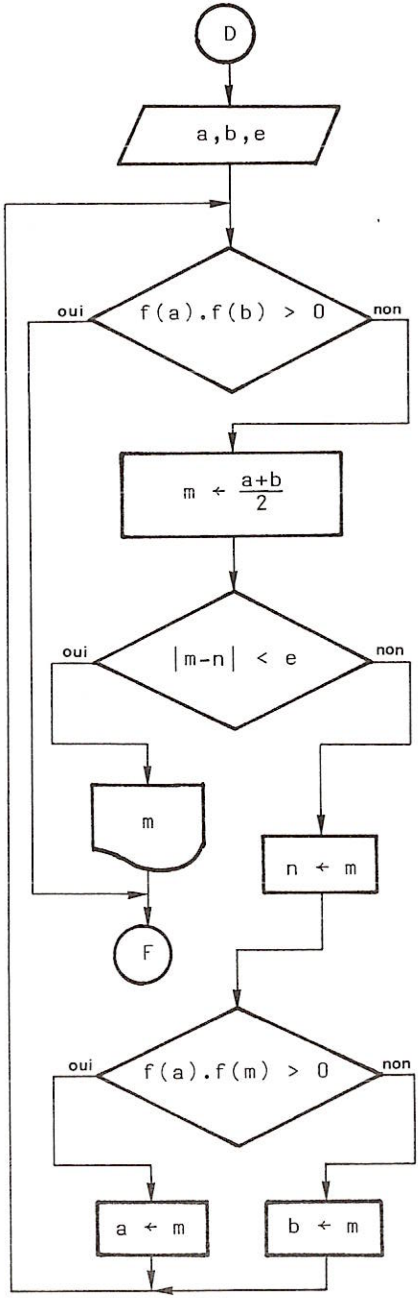
On peut alors démontrer (et c'est intuitivement évident, n'est-ce pas ?) que la fonction f a un zéro z appartenant à l'intervalle $]a,b[$. Une première approximation de ce point z sera le point m_1, milieu de $[a,b]$ Nous calculons le signe de $f(m_1)$.

Si le signe de $f(m_1)$ est le même que celui de f(a), on en déduit que $z \in [m_1,b]$. On s'intéressera désormais à ce dernier intervalle.

Si le signe de $f(m_1)$ est le même que celui de f(b), on en déduit que $z \in [a,m_1]$. C'est le cas de notre graphe. Le milieu m_2 de $[a,m_1]$ est une deuxième approximation de z. Le signe de $f(m_2)$ est le même que celui de $f(m_1)$, z appartient à l'intervalle $[a,m_2]$. Le milieu m_3 de $[a,m_2]$ sera notre troisième approximation de z.

La suite des nombres $m_1,m_2,m_3,\ldots$ s'approche du point z cherché. Nous terminons notre suite lorsque la valeur absolue de la différence entre deux m consécutifs est inférieure à une constante e que l'on s'est donnée au départ : si l'on veut 3 décimales exactes pour z, on choisit $e = 10^{-4}$.

Si la fonction f admet plus d'un zéro sur l'intervalle $[a,b]$ étudié, cette méthode ne permet que d'en découvrir un seul. Avec du bon sens, on admet que le risque d'oubli diminue lorsque la longueur de l'intervalle décroît.



Programme (H.P.33E.)

```
01  24 1    RCL 1
02  12 37   GSB 37
03  23 3    STO 3
04  24 2    RCL 2
05  12 37   GSB 37
06  24 3    RCL 3
07  61      x
08  15 51   x>0?
09  74      R/S
10  24 1    RCL 1
11  24 2    RCL 2
12  51      +
13  2       2
14  71      :
15  23 4    STO 4
16  24 6    RCL 6
17  41      -
18  15 34   ABS
19  24 0    RCL 0
20  14 51   x>y?
21  13 35   GTO 35
22  24 4    RCL 4
23  23 6    STO 6
24  12 37   GSB 37
25  24 3    RCL 3
26  61      x
27  15 51   x>0?
28  13 32   GTO 32
29  24 4    RCL 4
30  23 2    STO 2
31  13 00   GTO 00
32  24 4    RCL 4
33  23 1    STO 1
34  13 00   GTO 00
35  24 6    RCL 6
36  74      R/S
37  ...
```

Initialisation :

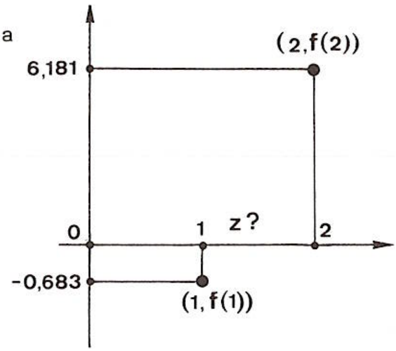
a STO 1
b STO 2
e STO 0

A partir du pas 37, on mémorise la fonction à étudier. la variable est reçue dans le régistre x, la valeur de la fonction est rendue dans ce même registre. La mémoire 5 est libre pour d'éventuels calculs intermédiaires.

A titre d'exemple, étudions la fonction : $f(x) = x^3 - 2\sin x$ sur l'intervalle $[1,2]$.

Voici le programme :

37	31	Enter
38	31	Enter
39	3	3
40	14 3	y^x
41	21	$x \rightleftarrows y$
42	14 7	SIN
43	2	2
44	61	x
45	41	-
46	15 12	RTN



1 STO 1, 2 STO 2, EEX 4 CHS STO 0, GTO 00, R/S

La solution avec 3 décimales exactes est : 1,236.

QUELQUES REPONSES ET COMMENTAIRES...

R17 bis Il fallait découvrir les valeurs du naturel k pour que l'expression $P(k) = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{\ldots}}}$ soit à son tour un naturel. Posons $P(k) = \chi$. On a : $\chi^2 = k + \chi$ et l'équation : $\chi^2 - \chi - k = 0$ devra admettre des solutions entières pour satisfaire à notre problème. Ce résultat est trouvé par Philippe THIRION du Séminaire de Floreffe.

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $1 + 4k$ toujours positif si k est naturel. Pour que les racines

$$\chi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

soient entières, il faut que $1 + 4k$ soit un carré parfait impair. C'est le résultat proposé par Didier DEPIREUX du Collège St Louis de Liège. En posant : $1 + 4k = (2z + 1)^2$ où z est un naturel, on calcule : $k = z(z+1)$.

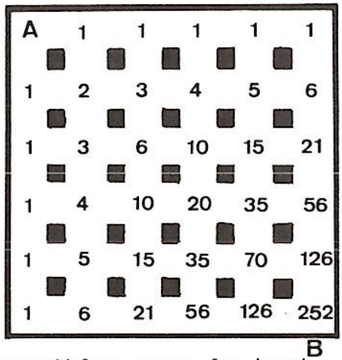
Par des considérations sur les limites de série, Louis PELSENEER de Bruxelles doit résoudre la même équation. En appelant a et b les racines de l'équation, on peut écrire :

$$\chi^2 - \chi - k = \chi^2 - (a + b)\chi + ab$$

et par comparaison : $a+b = 1$ et $k = -ab$ d'où $b = 1-a$ et $k = a(a-1)$. A condition de choisir a naturel non nul, k sera naturel.

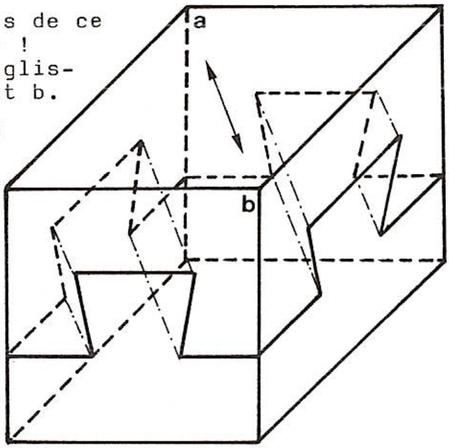
On vérifie : $P(0) = 0$; $P(2) = 2$; $P(6) = 3$; $P(12) = 4$; $P(20) = 5$; $P(30) = 6$; ... Le problème est loin d'être épuisé. Lorsque l'on calcule $P(k)$ avec des radicaux autres que 2, par exemple ...

R19 On dénombre d'abord les itinéraires possibles jusqu'aux croisements les plus rapprochés du point de départ A. On constate que le nombre d'itinéraires menant à un carrefour est égal à la somme des itinéraires menant au deux carrefours voisins, celui de gauche et celui au-dessus de lui.



André THOMAS, 3Lg à l'Athénée Royal de Mons, Laurent GRYSON, 4ScB au Collège St Henri de Comines, Anna CASTI, 3 mod. et Pascal CAULIER, 61m au Lycée M. Bervoets de Mons en déduisent qu'il y a 252 itinéraires possibles pour le taxi. *(Remarquer l'analogie avec le triangle de PASCAL !)*

R20 Eh oui! les deux parties de ce cube peuvent se séparer ! Il suffit de ... faire glisser du sommet a vers le sommet b.



Philippe THIRION, 4scA au Petit Séminaire de Floreffe, Marcel DELHEZ, 5scA au Collège St Quirin de Huy, Michel LEMINEUR, 4Ls au Collège d'Alzon à Bure, Pierre SAINT-MARD, 5B, à l'Athénée Royal de Virton, Frédéric STICHELBAUT, 4ScA à l'Athénée Provincial de La Louvière, et Pacal CAULIER l'ont très bien compris. Bravo !

R21 Le nombre de facteurs 10 dans 100! est égal au minimum entre le nombre de facteurs 5 et de facteurs 2 dans 100!. Il y a beaucoup de facteurs 2, aussi nous comptons les facteurs 5 : il y a vingt multiples de 5 entre 1 et 100, mais 25,50,75 et 100 comptent 2 facteurs 5. Il y a donc 24 zéros pour terminer le nombre 100!. Voila le raisonnement de Frédéric STICHELBAUT, d'André THOMAS et de Fabien DESCAMP, 6ScA à l'Athénée Royal de Mons.

R24 La solution est 42857. Nous l'on fait parvenir : Bruno DEMEY, 4ScB au Collège St Henri à Comines, Laurent GRYSON, Philippe THIRION, Marcel DELHEZ, Pierre-Yves DEBLIQUY,4ScA au Collège St Michel de Bruxelles, Philippe LESOIL, 1Aa, au Collège d'Alzon à Bure, Fabien DESCAMP, Michel TURCHET, 4ScA à l'Institut St Joseph de Charleroi, André THOMAS, Pierre SAINT-MARD, Frédéric STICHELBAUT, Anna CASTI et Edith HOEBEECK, 6e rénové au Lycée Royal de Molenbeek.