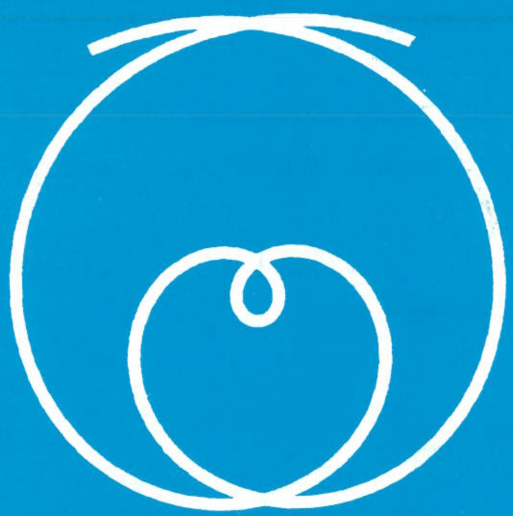
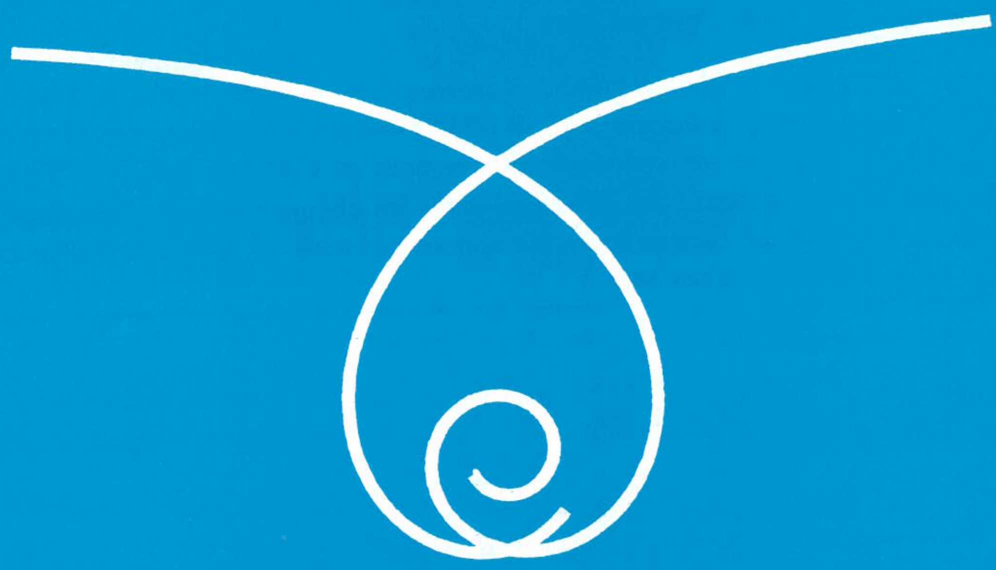
MATH - JEUNES





14e année
Avril - n° 60

Bureau de dépôt Pont-à-Celles 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.

Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, J.HUMIER, N.JOELANTS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS

Illustrations : R.A.CATTAUX

Conception de la couverture : K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 exempl. au moins) : 100 FB
- Isolés : 140 FB

Etranger :

- Pour 5 abonnements : 1000 FB
- Isolés : 280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1988 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 88/89, 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Année 91/92 — 100 FB (Etranger : 200 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.

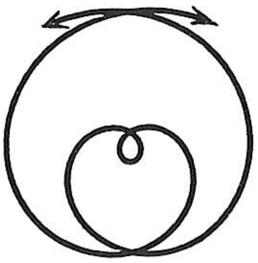
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

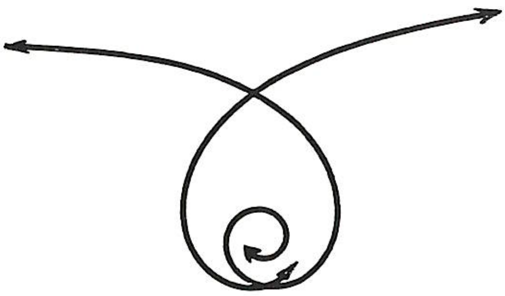
- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 60 Quatorzième année 1993

MATH-JEUNES





Math-Jeunes n° 60, 70–72, 1993

Jeux et Passe-temps (4)

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

La fin de l'année scolaire approche à grands pas et voici déjà le dernier numéro « ordinaire » de *Math-Jeunes* pour 1992–1993.
Rappelons l'énoncé du jeu sur lequel vous étiez invités à vous pencher de manière attentive, remarquez d'ailleurs au passage qu'il est encore temps de réaliser cette réflexion avant de poursuivre votre lecture.

> Sur un alignement de $2p+1$ cases (p est un nombre naturel), on aligne p pions blancs tout à gauche et p pions noirs tout à droite. Le défi consiste à faire passer les pions blancs à droite et les pions noirs à gauche en profitant de la case libre (centrale au début du jeu) et en respectant les deux règles suivantes :
> a) les pions blancs peuvent avancer d'une case à la fois vers la droite,
> b) les pions noirs peuvent avancer d'une case à la fois vers la gauche,
> c) un pion peut passer par dessus un pion de l'autre couleur, dans le sens de sa marche, pour aller se poser sur une case vide,
> d) on ne peut jamais superposer deux pions.

Une première approche consiste à essayer de relever le défi en n'utilisant qu'un petit nombre de pions. Le cas le plus simple consiste à ne disposer que de deux pions (un blanc et un noir) séparés par la case vide.
Cette situation de départ peut être écrite sous la forme

b	•	n

Le jeu a alors un déroulement simple (je suis persuadé que vous l'avez découvert) dont l'histoire est racontée dans le tableau ci-dessous :

b	•	n
•	b	n
n	b	•
n	•	b

Remarquez que ce tableau comporte quatre rangées.
Voici maintenant un déroulement possible du jeu pour le cas où $n = 2$ (il y a donc deux pions de chaque couleur et cinq cases en tout par rangée). Cherchez-le avant de lire la suite.

b	b	•	n	n
b	•	b	n	n
b	n	b	•	n
b	n	b	n	•
b	n	•	n	b
•	n	b	n	b
n	•	b	n	b
n	n	b	•	b
n	n	•	b	b

Cette fois le tableau comporte neuf rangées traduisant autant d'étapes du déroulement du jeu.
Si vous vous confrontez au cas où trois pions de chaque couleur doivent être déplacés alors vous constaterez que chaque étape du déroulement comporte sept cases ($3+1+3$) et que le nombre total d'étapes – en incluant les configurations initiale et finale – est 16.
Résumons les résultats de ces 3 expériences :

n	Nombre d'étapes
1	4
2	9
3	16

Il est dès lors légitime de penser que le nombre total minimum d'étapes (nous écrirons NTE) lorsque le nombre de pions de chacune des deux couleurs est n est $NTE = (n+1)^2$.
Mais ceci est une conjecture. Encore faut-il justifier sa validité quel que soit le nombre naturel non nul n.
Cette justification peut se réaliser de différentes façons. Vous en trouverez un exemple dans l'annexe 1 à cet article. Mais vous pouviez encore faire d'autres constats, par exemple, que les tableaux présentent une symétrie par rapport à

la case ou à la ligne qui les sépare en deux tableaux de même importance. C'est assez normal puisque le jeu est lui-même basé sur une symétrisation de la situation initiale.
Un.autre aspect se rapporte à la façon de regarder l'évolution des tableaux.
Notre attention se porte tout naturellement sur les lettres b et n puisque ce sont elles qui nous indiquent directement quel pion bouge et où il va.
De manière duale, nous pouvons plutôt fixer notre attention sur les seuls mouvements de la case vide. Son changement de position nous montre clairement quel pion a bougé et où il est allé.
En utilisant le numéro de la position de la case vide, il est possible de raconter l'histoire du déroulement d'un jeu sous la forme d'une suite de nombres.
Reprenons, à titre d'exemple, l'histoire du jeu pour $n = 1$.
Au début, la configuration est $\boxed{\text{b} \bullet \text{n}}$ qui est caractérisée par le chiffre 2 puisque la case vide occupe la position n° 2. Ensuite on passe à la configuration $\boxed{\bullet \text{ b n}}$ qui se traduit par le chiffre 1 puisque maintenant la case vide occupe la première position.
Puis on passe à la configuration $\boxed{\text{n b} \bullet}$ traduite par le chiffre 3 puisque la case vide occupe la troisième position.
Enfin le jeu se termine ·par la configuration $\boxed{\text{n} \bullet \text{b}}$ traduite par le chiffre 2.
Toute l'histoire est alors exprimée par la suite $2, 1, 3, 2$ De même l'histoire du jeu pour $n = 2$ est ...(cherchez en observant le tableau à $(2+1)^2 = 9$ cases que nous avons donné plus tôt dans ce texte).

Alors, vous y êtes ??

Vous avez trouvé la suite $3, 2, 4, 5, 3, 1, 2, 4, 3$. Ce que nous sommes en train de réaliser, en fin de compte, est un codage. C'est un domaine où la mathématique trouve à s'éclater de façon remarquable mais vous en parler en détails dépasse le cadre de cet article.
Remarquez encore que la suite précédente $3, 2, 4, 5, 3, 1, 2, 4, 3$ peut être simplifiée car nous savons qu'elle raconte une histoire présentant une symétrie.
Cette suite de neuf nombres traduit une symétrie par rapport à son cinquième élément.
Les quatre derniers éléments peuvent donc être déduits des quatre premiers. La somme de deux éléments symétriques (par rapport au cinquième élément) donne toujours 6. De la même manière, dans le cas précédent, les sommes de deux éléments équidistants des extrémités étaient 4.
D'une manière générale, nous constatons que cette somme est $2 \times (n+1)$. Dans le cas où $n = 3$, nous savons que chaque étape de l'histoire du jeu est traduite par une rangée de 7 cases $(2 \times 3 + 1)$. Bien entendu, vous ne confondez pas $2 \times (3+1)$ et $2 \times 3 + 1$. Cette histoire comporte $(3+1)^2 = 16$ étapes. Le tableau qui la résume est donc un tableau symétrique par rapport à la séparation entre les huitième et neuvième rangées. Nous savons aussi que la première et la dernière configuration ont la case vide en quatrième place.
Le code complet devrait donc comporter seize éléments, commencer et finir par 4 et être tel que toute somme de deux éléménts équidistants des extrémités soit $2 \times (3+1)$ c'est-à-dire 8.
On peut donc éliminer les éléments inutiles que sont le premier et les huit derniers nombres et traduire l'histoire par un code à sept éléments. Le voici : $3, 5, 6, 4, 2, 1, 3$. A vous de retrouver les neuf éléments manquants (voyez la réponse en annexe 2).

Remarques

1. Ce jeu, connu de longue date, figure dans un livre intitulé « *Récréations Mathématiques* » que nous avons déjà cité et dont l'auteur est Edouard LUCAS. Ce texte a été réédité par la librairie scientifique et technique Albert Blanchard, rue de Médicis, 9 à Paris.

2. Ce jeu fut probablement à l'origine d'une question posée, en 1990, aux éliminatoires des championnats de France des jeux mathématiques et logiques, dans les catégories Grand Public et Haute Compétition. En voici l'énoncé :

Il y avait deux groupes d'égale importance, des grenouilles et des crapauds, chacun formant une procession. Les deux groupes sont l'un en face de l'autre, séparés seulement par un petit espace. Minuit sonne, un étrange ballet commence : les grenouilles vont toujours vers le sud, soit en sautant au-dessus d'un crapaud, soit en avançant sur une place libre. Les crapauds font exactement de même, mais en se dirigeant vers le nord. Chacun de ces déplacements prend exactement une seconde. Il ne peut y avoir deux déplacements simultanés.
A la fin, les grenouilles ont pris la place des crapauds et inversement.
Lorsque 3h sonnent, le ballet est déjà terminé. Combien y a-t- il de batraciens, au plus ?

Ce ne sera qu'un jeu d'enfant pour vous de résoudre maintenant ce problème.

Annexes

(1) Le nombre total d'étapes, c'est-à-dire de rangées dans le tableau décrivant l'histoire de chaque jeu, est égal au nombre (NM) de mouvements que nous devons effectuer pour déplacer les pions un à la fois, augmenté de 1 (puisque la première étape est la situation de départ).
Dès lors $NTE = NM + 1$.
Il reste à calculer NM.
Ces mouvements sont de deux sortes, des sauts et des glissements, on a donc $NM = NS + NG$ (avec des notations évidentes). On sait que chacun des n pions blancs doit se déplacer de $n + 1$ cases (par exemple, si $n = 3$ alors chacun des 3 pions blancs doit se déplacer de 4 cases) soit au total $n(n + 1)$ déplacements de une case. De même chacun des n pions noirs doit se déplacer de $n + 1$ cases ce qui fait un total de $n(n + 1)$ déplacements de une case.
Pour l'ensemble des pions blancs et des pions noirs cela fait un total de $2n(n + 1)$ déplacements de une case.
Ces $2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ cases sont parcourues par sauts ou par glissements. Chaque saut correspond à un déplacement de deux cases et chaque glissement à un déplacement de une case. Dès lors, nous pouvons écrire

$$2 \cdot NS + NG = 2n^2 + 2n \qquad (1)$$

Chacun des n pions blancs doit sauter par dessus chacun des n pions noirs (ou le contraire) ce qui fait qu'au total, il y a $n \cdot n$ sauts effectués et on a $NS = n^2$.
L'égalité (1) établie plus haut devient $2n^2 + NG = 2n^2 + 2n$ d'où $NG = 2n$.
Le nombre total de mouvements est $NM = NS + NG = n^2 + 2n$ et enfin $NTE = NM + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ qui est bien la formule de notre conjecture.

(2) 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3 comporte sept éléments. Le double de 7 est 14 qui n'est pas un carré, le carré parfait suivant 14 est $16 = 4^2 = (n + 1)^2$. Dès lors $n = 3$ et la case vide occupe au début et à la fin du jeu la position n° 4.
La somme des éléments équidistants des extrémités du code complet vaut $2 \times (3 + 1)$ soit 8.
Le code complet issu de 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3 est donc 4, 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 6, 4, 2, 3, 5, 4 et le tableau correspondant est

b b b • n n n	n n n • b b b
↓	↑
b b • b n n n	n n n b • b b
↓	↑
b b n b • n n	n n • b n b b
↓	↑
b b n b n • n	n • n b n b b
↓	↑
b b n • n b n	n b n • n b b
↓	↑
b • n b n b n	n b n b n • b
↓	↑
• b n b n b n	n b n b n b •
↓	↑
n b • b n b n →	n b n b • b n

La symétrie apparaît mieux sur les tableaux que sur les codes. Ceux-ci ont pourtant l'avantage de pouvoir être donnés à des machines qui peuvent alors être programmées pour jouer seules ... Mais cela est une autre histoire !

Math-Jeunes n° 60, 73–79, 1993

L'arithmétique et l'algorithmique en bricolant

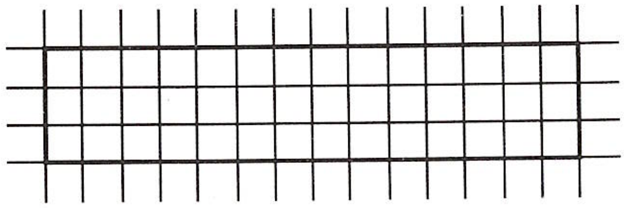
Yolande Noël-Roch, *I.E.S.P.E.C.F. Mons-Tournai*

1. Travail manuel et ... première réflexion

Avant de commencer la lecture de cet article, munis-toi d'une paire de ciseaux et de papier quadrillé.

1.1. Des confettis carrés

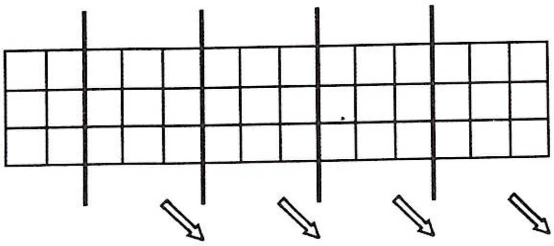
Dans tout ce qui suit, notre unité de mesure de longueur sera la longueur d'un côté d'un carré du papier quadrillé.



Ainsi, le rectangle dessiné ci-contre sera appelé un « rectangle 14 ; 3 ».

1.1.1. En respectant les traits du quadrillage de ta feuille, découpe un rectangle 14 ; 3.

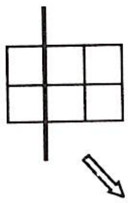
1.1.2. En tenant le rectangle obtenu par un « petit côté », découpe et laisse tomber les carrés les plus grands possibles.



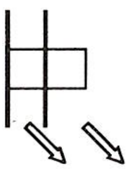
Tu gardes en main un rectangle 3 ; 2.

1.1.3. Recommence l'opération 1.1.2 avec ce rectangle 3 ; 2.

Tu gardes en main un rectangle 2 ; 1.



1.1.4. Recommence l'opération analogue.



Tu gardes en main un carré ... tu peux donc le laisser tomber à côté du carré que tu viens de découper et il ne te reste rien en main.

Récapitulons la manipulation :

Donnée : un rectangle 14 ; 3.

1^er^ découpage : 4 carrés de côté 3 – reste un rectangle 3 ; 2.
2^ème^ découpage : 1 carré de côté 2 – reste un rectangle 2 ; 1.
3^ème^ découpage : 2 carrés de côté 1 – il ne reste rien.

Ou encore, sous la forme d'un tableau, en oubliant quelques détails :

Départ	Etape(s) intermédiaire(s)	Découpage final
Rectangle 14 ; 3	Rectangle 3 ; 2 Rectangle 2 ; 1	Des carrés de côté 1

1.2. Recommence ce processus de découpages successifs en partant d'autres rectangles découpés en suivant toujours les lignes du quadrillage et en utilisant des dimensions variées. Note tes résultats dans un tableau comme ci-dessus ou sur un graphe ou sur tout autre support qui te paraît clair.

1.3. Peux-tu maintenant prévoir, *sans les exécuter*, les différentes étapes du découpage si tu disposes au départ de

– un rectangle 12 ; 7 ?
– un rectangle 250 ; 4 ?
– un rectangle 200 ; 80 ?
– un rectangle 30 ; 15 ?
– un rectangle 8 ; 8 ?

1.4. Recopie tous tes résultats en notant uniquement

Les deux nombres de départ	La dimension des carrés à la dernière étape du découpage
12 ; 7	1
250 ; 4	2
⋮	⋮

Peux-tu deviner ce qu'est, *dans tous les cas*, le nombre final par rapport aux deux nombres de départ ?
Si tu n'y arrives pas, continue avec quelques exemples simples comme 12 ; 8, 30 ; 10, 6 ; 4, ... Tu verras dans la suite du texte (en 2.2) si tu as bien deviné.

2. Des algorithmes

2.1. Quand tu dois effectuer une division, tu procèdes par estimation mentale que tu rectifies éventuellement après essai. On dit qu'on procède par essai-erreur :

$$\begin{array}{r|l} 3\,5\,2\,9\,0\,6 & 8\,9 \\ \hline \cancel{3\,5\,6} & \cancel{4} \\ 2\,6\,7 & 3\ \ldots \\ \hline 8\,5 & \\ \vdots & \end{array}$$

« Combien de fois 89 dans 352 ? »

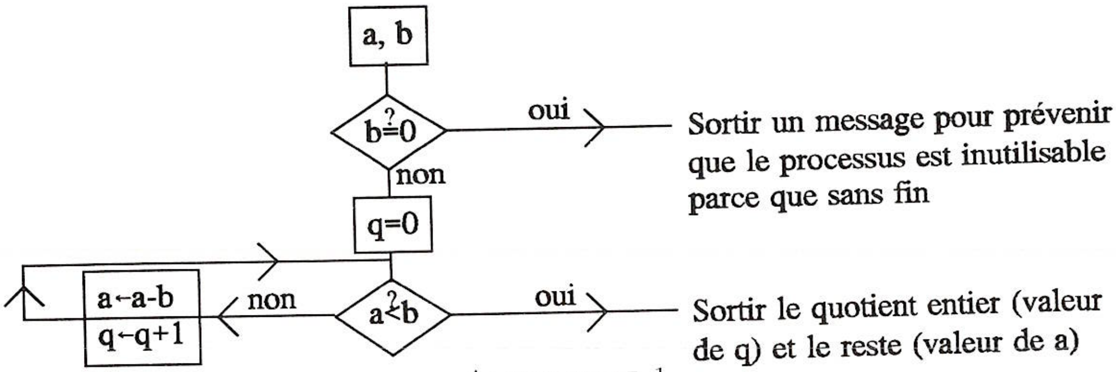
Une machine ne peut procéder ainsi. Elle est programmée d'une manière qui peut paraître lente, parce qu'elle nécessite de nombreuses soustractions, mais chaque étape est exécutée en toute sécurité et uniquement si elle est utile. Comme chaque étape ne nécessite qu'une très très petite fraction de seconde, la machine calcule malgré tout très très vite !
Ainsi, pour diviser 128 par 5, elle exécute

$$128 \xrightarrow[(1)]{-5} 123 \xrightarrow[(2)]{-5} 118 \xrightarrow[(3)]{-5} 113 \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow[(\ldots)]{-5} 3$$

Elle s'arrête parce que $3 < 5$, en ayant enregistré le nombre de fois qu'elle a soustrait 5.
C'est exactement l'équivalent du découpage du rectangle 14 ; 3 exécuté en fabriquant nos confettis :

$$14 \xrightarrow{-3} 11 \xrightarrow{-3} 8 \xrightarrow{-3} 5 \xrightarrow{-3} 2$$

En voici une écriture algorithmique ((a, b) est un couple de naturels)



ALGORITHME 1

Appliquons cet algorithme à la division de 14 par 3 :

- données : 14 et 3
- comme $3 \neq 0$, q prend la valeur 0 ;
  comme $14 \not< 3$, a prend la valeur 11 et q la valeur 1 ;
  comme $11 \not< 3$, a prend la valeur 8 et q la valeur 2 ;
  comme $8 \not< 3$, a prend la valeur 5 et q la valeur 3 ;
  comme $5 \not< 3$, a prend la valeur 2 et q la valeur 4 ;
  comme $2 < 3$, les résultats sont produits $\begin{cases} \text{quotient } 4 \\ \text{reste } 2 \end{cases}$.

Applique toi-même l'algorithme à la division de 12 par 7.
On dit que la *division* est remplacée par une *soustraction itérée*.
As-tu remarqué qu'aux étapes 1.1.2 et 1.1.3, le découpage était équivalent à une telle soustraction itérée ?

2.2. Reprends maintenant ton tableau complété par de nombreux exemples à partir de l'ébauche donnée en 1.4.

As-tu remarqué que 1 est le plus grand commun diviseur de 12 et 7 ?
2 est le plus grand commun diviseur de 250 et 4 ?
40 est le plus grand commun diviseur de 200 et 80 ?
15 est le plus grand commun diviseur de 30 et 15 ?
8 est le plus grand commun diviseur de 8 et 8 ?
⋮

Rappelons-nous nos premiers découpages, partons du rectangle 14 ; 3 et utilisons un support qui montre bien l'analogie entre toutes les étapes.

$$14\ ;\ 3 \xrightarrow[14=(4\times 3)+2]{} 3\ ;\ 2 \xrightarrow[3=(2\times 1)+1]{} 2\ ;\ 1 \xrightarrow[2=(1\times 2)+0]{} 1\ ;\ 0$$

Les parenthèses indiquent les carrés qui sont éliminés, remarquons que :

- la dimension « la plus petite » à chaque étape est la dimension « la plus grande » à l'étape suivante (tu tiens le rectangle par son « petit côté » et, après découpage, le côté découpé est devenu plus petit ...sinon tu pourrais encore faire tomber un carré au moins) ;
- le reste de la division de la « grande dimension » par « la petite » fournit la « petite dimension » à l'étape suivante ;

- le quotient de cette division ne joue aucun rôle. Oublions-le donc dans notre schéma fléché :

$$14 ; 3 \longrightarrow 3 ; 2 \longrightarrow 2 ; 1 \longrightarrow 1 ; 0$$

Remarquons encore que l'importance prise par le *reste* à chaque étape nous conduit à noter notre dernier découpage sous la forme

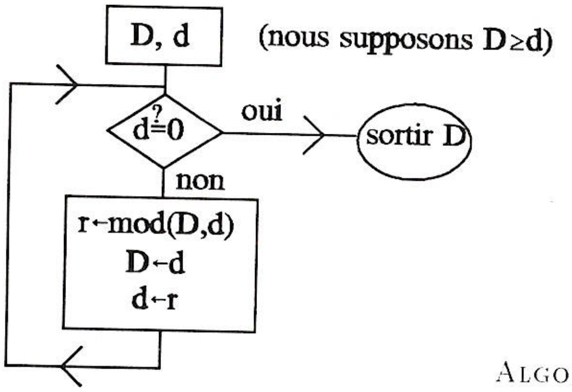
$$2 ; 1 \longrightarrow 1 ; 0$$

Ceci correspond bien au fait que le rectangle 2 ; 1 est découpé en deux carrés 1 ; 1 et qu'il ne nous reste rien en main. Qu'est, en effet, un « rectangle » dont un côté est de mesure nulle ?
Nous avons ainsi la possibilité de schématiser une quelconque des étapes sous la forme générale

$$D ; d \xrightarrow[D = d \cdot q + r]{} d ; r$$

$$\text{où } D \geqslant d \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant d$$

Nos découpages successifs consistent à exécuter la *division euclidienne* de D par d jusqu'à ce que le reste obtenu soit nul.
Voici l'*algorithme d'Euclide* qui traduit l'itération contrôlée de ce processus :



mod se lit « modulo ».
mod(D, d) est le reste de la division de D par d. ainsi, mod$(14, 4) = 2$, mod$(50, 3) = 5$, ...

ALGORITHME 2

En voici l'application à $(D, d) = (12, 7)$:

comme $7 \neq 0$, r prend la valeur 5, D prend la valeur 7, d la valeur 5
comme $5 \neq 0$, r prend la valeur 2, D prend la valeur 5, d la valeur 2
comme $2 \neq 0$, r prend la valeur 1, D prend la valeur 2, d la valeur 1
comme $1 \neq 0$, r prend la valeur 0, D prend la valeur 1, d la valeur 0
comme $0 = 0$, l'exécution s'arrête et produit le résultat 1.

1 est le plus grand commun diviseur de 12 et 7.

3. Algorithmes et mathématique

Pour qu'un algorithme soit valable, il doit être rapide et l'utilisateur doit être certain que l'exécution ne « tournera pas en rond ».
Toutes ces qualités se retrouvent dans l'analyse réalisée en 2.

3.1.

- Le traitement effectué sur (D, d) est reproduit sur (d, r). Chaque nouveau couple joue le même rôle que le couple précédent aussi longtemps que son deuxième élément ne vaut pas 0.

- Les nombres sont liés par $D = d \cdot q + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant d$. Ils sont donc de plus en plus petits et comme ils sont tous naturels, nous sommes certains d'obtenir, à un moment donné, un reste nul, quels que soient les deux nombres de départ.

- L'exécution de l'algorithme produit le nombre d lorsque le couple obtenu est $(d, 0)$. Cela signifie qu'au stade précédent, nous avions (x, d) avec x multiple de d.
  On a donc $d = \text{pgcd}(x, d)$ et l'algorithme produit d.

- Pour justifier que le nombre produit est le plus grand commun diviseur des deux nombres de départ, il reste à prouver que $\text{pgcd}(D, d) = \text{pgcd}(d, r)$.

3.2. Justifions cette propriété en montrant plus :

L'ensemble des diviseurs communs à D et d égale l'ensemble des diviseurs communs à d et r.

(a) Soit t un diviseur commun à D et d alors soit $D = tD'$, $d = td'$ $(D', d' \in \mathbb{N})$
Comme $D = dq + r$, on a $r = D - dq = tD' - td'q = t(D' - d'q)$ et t est un diviseur de r donc un diviseur commun à r et d.

(b) De manière analogue, tout diviseur commun à d et r est diviseur de $D = dq + r$ et donc diviseur commun à d et D.

Le découpage effectué en 1 montre que $\text{pgcd}(14, 3) = \text{pgcd}(3, 2) = \text{pgcd}(2, 1) = 1$

3.3. La dimension des carrés obtenus au dernier découpage est donc bien le plus grand commun diviseur des dimensions du rectangle initial.

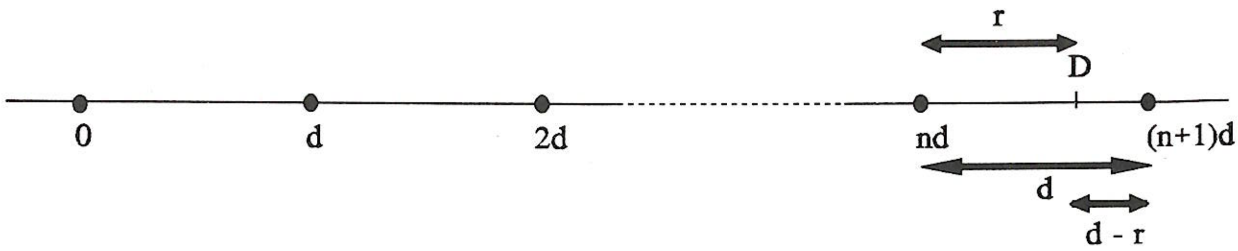
4. Sortons un peu du cadre classique de l'algorithme d'Euclide

4.1. Tu peux encore t'amuser à vérifier que l'*algorithme d'Euclide* (donné en 2.2) fonctionne très bien lorqu'on démarre avec le couple $(D, d) = (2, 6)$ ...en oubliant de placer d'abord le plus grand nombre en tête.

4.2. L'efficacité de l'algorithme – c'est-à-dire la rapidité de son exécution – est liée au fait que les nombres décroissent vite. Nous avons ici lié cette décroissance au calcul traditionnel de *quotients par défaut* : $14 = 4 \times 3 + 2$.
Mais nous pourrions aussi utiliser un *quotient par excès* : $14 = 5 \times 3 - 1$
Choisissons un support géométrique :

14 est compris entre deux points consécutifs de la graduation engendrée par $(0, 3)$: 12 et 15
Dans l'algorithme 2, nous considérions l'*écart à gauche* – soit ici $2 = 14 - 12$. Il apparaît dans $14 = 4 \times 3 + 2$.

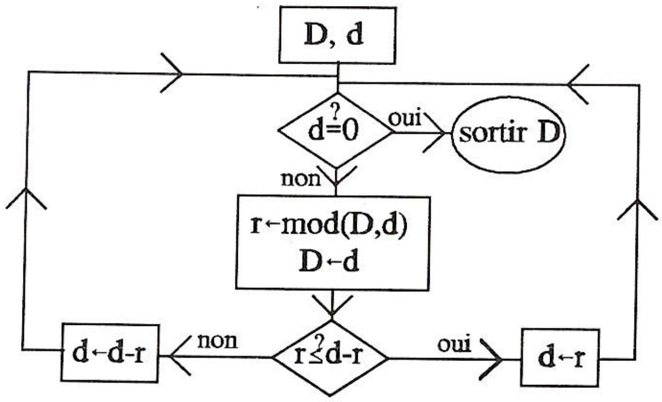
Par contre, l'*écart à droite* – ici $1 = 15 - 14$ – apparaît dans $14 = 5 \times 3 - 1$.
Observons les écarts à gauche et à droite dans le cas général :



L'écart entre D et le point le plus proche de la graduation engendrée par $(0, d)$ est le plus petit des deux nombres r et $d - r$.
Utilisons-le dans le cas où $(D, d) = (14, 3)$

$$14 \ ; 3 \longrightarrow 3 \ ; 1 \longrightarrow 1 \ ;0$$

et nous avons moins d'étapes qu'en 2.2.
Modifions en conséquence l'algorithme d'Euclide, nous obtenons :



ALGORITHME 3

Dans certains cas, r et $d - r$ sont égaux. Par exemple, pour $(D, d) = (200, 80)$, la succession des couples sera – avec l'algorithme 3 comme avec l'algorithme 2 :

$$200 \ ; 80 \longrightarrow 80 \ ; 40 \longrightarrow 40 \ ;0$$

Appliquons l'algorithme 3 à $(D, d) = (200, 85)$:

comme $85 \neq 0$, r prend la valeur 30, D la valeur 85

comme $30 \leqslant 55$, d prend la valeur 30

comme $30 \neq 0$, r prend la valeur 25, D la valeur 30

comme $25 \not\leqslant 5$, d prend la valeur 5

comme $5 \neq 0$, r prend la valeur 0, D la valeur 5

comme $0 \leqslant 5$, d prend la valeur 0

comme $0 = 0$, l'exécution s'arrête et produit le résultat 5.

5 est le plus grand commun diviseur de 200 et 85.
En utilisant l'algorithme 3, les couples successifs sont

$$200 \ ; 85 \longrightarrow 85 \ ; 30 \longrightarrow 30 \ ; 5 \longrightarrow 5 \ ; 0$$

En utilisant l'algorithme 2, les couples successifs sont

$$200 \ ; 85 \longrightarrow 85 \ ; 30 \longrightarrow 30 \ ; 25 \longrightarrow 25 \ ; 5 \longrightarrow 5 \ ; 0$$

4.3. Nous avons démontré – dans 3.2 – que l'algorithme 2 produit le plus grand commun diviseur des deux nombres initiaux. Est-ce encore le cas pour l'algorithme 3 ?
Sans rédiger les détails de la démonstration analogue à 3.2, remarquons que

- si $r \leqslant d - r$, la substitution
  $$(D, d) \longrightarrow (d, r)$$
  se fait comme dans l'algorithme 2.
- si $r > d - r$, la substitution
  $$(D, d) \longrightarrow (d, d - r)$$
  est différente mais – de manière analogue à 3.2 :

L'ensemble des diviseurs communs à D et d égale l'ensemble des diviseurs communs à d et $d-r$.

De sorte que l'algorithme 3 produit – comme l'algorithme 2 – le plus grand commun diviseur des deux nombres de départ tout en comportant souvent moins d'étapes que l'algorithme 2.
Cette éventuelle économie d'étapes n'entraîne pas nécessairement une économie de temps lors de l'exécution sur ordinateur car chaque étape de l'algorithme 3 comporte une soustraction et une comparaison qui ne figurent pas dans l'algorithme 2.

π-oncer

A propos de ln x

Laurence Lion,
Athénée Royal de Mons

La démonstration permettant d'établir la règle de calcul
$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$
utilise le passage à la dérivée (cf, par exemple, Collection *Savoir et Savoir-faire en Mathématique*, par E. Boutriau, J. Boutriau et J. Lievens).
Il est possible de reprendre cette idée pour prouver que

$$\ln x^m = m \cdot \ln x \quad (x \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{Q})$$

En effet, considérons la fonction
$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x^m)$$
$$f'(x) = (\ln x^m)' = \frac{1}{x^m} \cdot m \cdot x^{m-1} = \frac{m}{x}$$
$$(\ln x^m)' = \frac{m}{x} = (m \cdot \ln x + \varepsilon)'$$
puisque $(m \cdot \ln x + \varepsilon)' = m \cdot \frac{1}{x}$ (où ε est une constante)
donc, $\ln x^m = m \cdot \ln x + \varepsilon$ (*) pour un certain ε.
Calculons ε :
Si $x = 1$, alors (*) devient :
$$\underbrace{\ln 1^m}_{=0} = m \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + \varepsilon$$
Donc $\varepsilon = 0$, ce qui laisse pour (*) :

$$\ln x^m = m \cdot \ln x$$

Math-Jeunes n° 60, 80–80, 1993

La tour de Hanoï bicolore

André Parent, *Lycée de Mouscron*

Dans le numéro 59 de *Math-Jeunes*, Claude VILLERS te présentait le jeu connu sous le nom de *tour de Hanoï*. Le jeu-problème suivant s'en inspire et a été posé dans le cadre du deuxième championnat international des jeux mathématiques et logiques.

On dispose de deux « tours de Hanoï » composées de trois anneaux de tailles décroissantes et enfilés autour d'une tige. Ces anneaux sont noirs ou blancs, comme indiqué sur la figure 1. On dispose également d'une troisième tige. Le but du jeu est de parvenir au résultat représenté sur la figure 2.
Règle : A chaque coup, on retire l'anneau supérieur de l'une des tiges, et on le pose sur une pile. Attention ! On ne peut poser un anneau que sur un anneau plus grand ou de même dimension.
Quel est le nombre minimum de coups pour arriver au résultat ?
Ce problème est extrait de *Jeux Mathématiques et Logiques*, Championnat de France – Volume n° 3, Ed. Hatier et est diffusé par la Fédération Française des Jeux Mathématiques et Logiques.

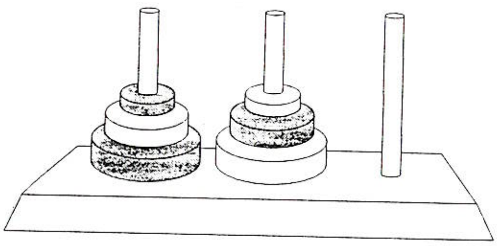


Figure 1

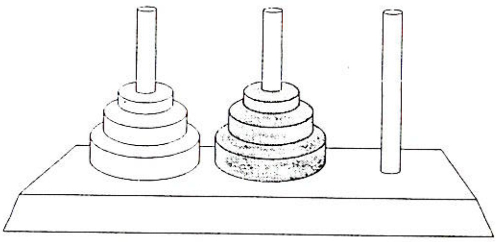


Figure 2

Solution (proposée dans la revue citée en référence)
Si on appelle les tiges 1, 2 et 3, un mouvement pourra être représenté par deux chiffres : la tige origine et la tige aboutissement.
Voici l'enchaînement de mouvements qui semble minimal. Si tu trouves moins de 29 coups, informe la rédaction.

Coup n°	Mouvement
1	1-3
2	2-3
3	2-1
4	3-1
5	3-1
6	2-3
7	1-3
8	1-3
9	1-2
10	1-2
11	3-1
12	3-1
13	2-3
14	2-3
15	1-3
16	1-3
17	1-2
18	3-1
19	3-1
20	3-2
21	3-2
22	1-2
23	1-2
24	3-1
25	2-3
26	2-3
27	2-1
28	3-2
29	3-1

Math-Jeunes n° 60, 81–81, 1993

A propos des nombres et angles d'or

Marcel Peltier, *Lycée de Quevaucamps*

1. Les nombres d'or

Le nombre d'or trouve son origine, chez les Grecs, dans la division d'un segment en moyenne et extrême raison. Le problème consiste à trouver le point M entre A et B tel que $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AB|}{|AM|}$ ou encore $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.

$A \quad x \quad M \quad y \quad B$

On trouve encore ce nombre d'or dans la « proportion dorée » utilisée par Léonard DE VINCI, par LE CORBUSIER et tant d'autres créateurs. Si nous prenons y pour unité, il vient l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

qui admet deux racines réelles distinctes, les *nombres d'or* :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339\ldots$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180339\ldots$$

La *suite de Fibonacci* est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4\ldots)$$

KEPLER a remarqué que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180339\ldots$$

$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8}$ donne une valeur approchée suffisante pour construire, en peinture, des rectangles répondant à la dite proportion dorée. Dans son œuvre picturale, MONDRIAN (1872 – 1944) est sans cesse à la recherche de ce nombre d'or, fantôme de perfection.

2. Les angles d'or

Ce qui est moins connu, c'est l'existence d'un angle d'or (137° 30'28"). Cet angle est rencontré dans le domaine de la phyllotaxie spirale (disposition des feuilles, ...). L'angle de 137,5...° est celui qui place les points sur une spirale de telle façon que chacun forme un petit angle avec le point le plus ancien de la spire précédente et un grand angle avec le point le plus jeune. Comment arrive-t-on à cet angle ?

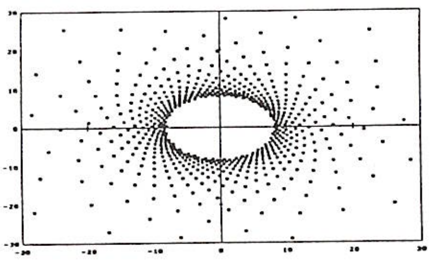
$$x_1 = 1,6180339\ldots$$
$$x_1^2 = 2,6180339\ldots \text{ et}$$
$$\mu_1 = 360° \cdot 2,6180339\ldots = 222,49223\ldots°$$
$$\mu_1 = 3,8832220\ldots \text{ rad}$$
$$x_2 = -0,6180339\ldots$$
$$x_2^2 = 0,38196601\ldots \text{ et}$$
$$\mu_2 = 360° \cdot 0,38196601\ldots = 137,50776\ldots°$$
$$\mu_2 = 2,3999632\ldots \text{ rad}$$

3. Création artistique

Afin d'illustrer la notion d'angle d'or, je propose le graphique suivant. Il a été obtenu à partir de l'équation du *lituus* (en coordonnées polaires) :

$$r^2 \cdot \mu = 317^2.$$

Cependant, au lieu de construire une courbe continue, j'ai utilisé les multiples successifs de 2,3999... rad.



4. Bibliographie

LE CORBUSIER, *Modulor II*, Editions de l'Architecture d'aujourd'hui, Boulogne, 1955.

Peter S. STEVENS, *Les formes dans la nature*, Editions du Seuil, Coll. Science ouverte, 1978.

Math-Jeunes n° 60, 82–83, 1993

Au fil des jours ... De Jules César à Grégoire XIII

Maurice Famelart, *Institut Sainte-Claire, Soignies*

Même dans les pays où le système métrique est en usage depuis longtemps, les mesures d'angles, d'arcs et de temps sont encore exprimées dans le système sexagésimal (de base 60) : une heure vaut soixante minutes, une minute, soixante secondes,...

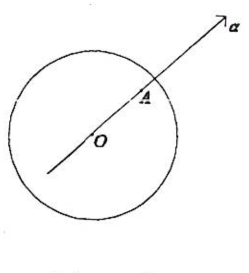
Quelques bases astronomiques de la mesure du temps

La mesure du temps a pour base la durée des mouvements de la terre :

- sa rotation sur elle-même ou mouvement diurne détermine le jour.
- sa révolution autour du soleil ou mouvement annuel détermine l'année.

En trigonométrie, pour la commodité de l'étude des angles, on introduit le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère orthonormé. De la même façon, on est conduit à considérer la *sphère céleste* : sphère de rayon arbitraire ayant pour centre l'œil de l'observateur.

L'idée de cette sphère est d'ailleurs fournie par l'apparence même de la voûte céleste à laquelle les Anciens attribuaient une existence matérielle.

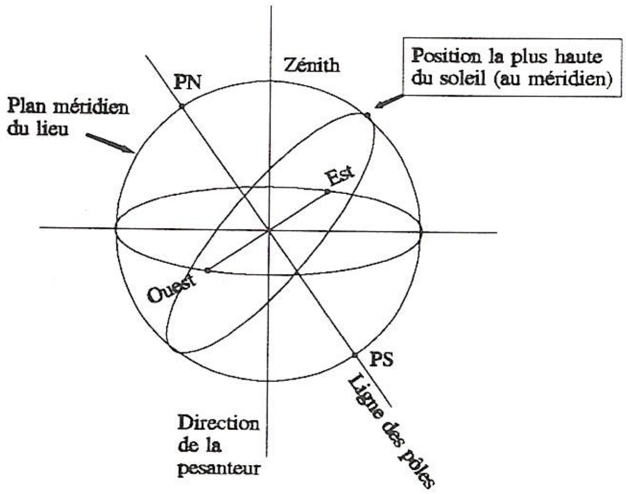


On appelle position apparente d'une étoile α, sur la sphère céleste, le point A où la ligne de visée de cette étoile perce la sphère céleste.

La sphère céleste semble tourner sur elle-même autour d'un axe appelé ligne des pôles célestes ou axe du monde.

Le plan méridien du lieu où l'on se trouve est le plan que déterminent la ligne des pôles célestes et la verticale du lieu.

Lorsque la terre a tourné exactement d'un tour sur elle-même, il s'est écoulé un jour sidéral. C'est aussi la durée entre deux passages consécutifs de la même étoile au méridien du lieu. Ce jour sidéral a une durée constante.



Si l'on prend le soleil comme point de repère de la rotation terrestre, on obtiendra la durée du jour solaire vrai comme étant le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au méridien du lieu. Mais ces jours solaires vrais n'ont pas tous la même durée au cours de l'année. Il est midi vrai en un lieu lorsque le soleil passe au méridien de ce lieu ; c'est à cet instant que le soleil est au plus haut sur la voûte céleste et que l'ombre projetée est la plus courte.

Comme la vie civile ne pourrait s'accomoder d'un jour dont la durée serait variable, on a alors adopté comme unité de mesure du temps, le jour civil ou jour solaire moyen.

Ce jour civil a une durée telle que 365 jours civils consécutifs ont la même durée que 365 jours solaires vrais consécutifs. Le temps moyen est celui que marquent les horloges.

Le temps nécessaire à la révolution complète de la terre autour du soleil s'appelle année tropique. L'année tropique est plus longue que l'année civile ordinaire : elle vaut 365 jours, 5 heures, 48 minutes, 45 secondes et 51 centièmes de seconde, ce qui signifie, en d'autres termes, qu'après 365 jours civils, la terre n'a pas encore achevé sa révolution complète autour du soleil.

Cette fraction sexagésimale de jour donne, en système décimal, 20 925,51 secondes, c'est-à-dire environ 0,242193403 jour.

Historique du calendrier

Dans l'Antiquité romaine, il n'existait aucune règle fixe pour l'établissement du calendrier ; les Pontifes, lorsqu'ils étaient honnêtes, ajoutaient de temps en temps un ou plusieurs jours à une année civile pour maintenir approximativement la concordance entre le temps civil et le temps tropique. D'autres, moins scrupuleux, profitaient de leur pouvoir pour prolonger la magistrature de leurs amis ou abréger celle de leurs ennemis, ...

En l'an 44 avant Jésus-Christ, Jules CÉSAR fit venir d'Egypte l'astronome grec SOSIGÈNE : il fut décidé que l'année civile ordinaire compterait trois cent soixante-cinq jours et que, tous les quatre ans, il y aurait une année *bissextile* de trois cent soixante-six jours. Cette correction se basait sur l'estimation que l'année tropique était plus longue d'environ un quart de jour par rapport à l'année civile.

Telle fut la réforme julienne d'où sortit le calendrier julien. Ce calendrier fut adopté par l'Eglise au Concile de Nicée en 325.

Ainsi, une année julienne compte $0,25 - 0,242193403 = 0,007806597$ jour de plus qu'une année tropique.

Selon le calendrier julien, on a, après 128 ans ($\simeq \dfrac{1}{0,007806597}$ jour) environ, un écart d'un jour par rapport à l'année tropique c'est-à-dire environ trois jours après quatre cents ans.

Au seizième siècle, on s'aperçut que l'année civile était en retard d'une dizaine de jours environ sur l'année tropique, ce qui s'explique aisément par l'erreur de SOSIGÈNE.

En 1582, le Pape GRÉGOIRE XIII, guidé par des motifs religieux (fixation de la date de Pâques), entreprit la réforme du calendrier julien. Chaque année bissextile du calendrier julien faisait retarder l'année civile de quatre fois 11 minutes, 14 secondes et 49 centièmes par rapport à l'année tropique. D'où le retard de 10 jours constaté en 1582. Pour cette réforme, GRÉGOIRE XIII fit appel à une commission de savants parmi lesquels on cite les frères LELIO et le jésuite allemand CLAVIUS.

Le Pape GRÉGOIRE XIII publia une bulle qui stipulait :

- le jour qui suivra le jeudi 4 octobre 1592 sera le vendredi 15 octobre 1592 ;
- ne seront désormais plus bissextiles les années séculaires dont le millésime n'est pas divisible par 400.

Ainsi, les années 1700, 1800, 1900 n'ont pas été bissextiles mais l'an 2000 le sera.

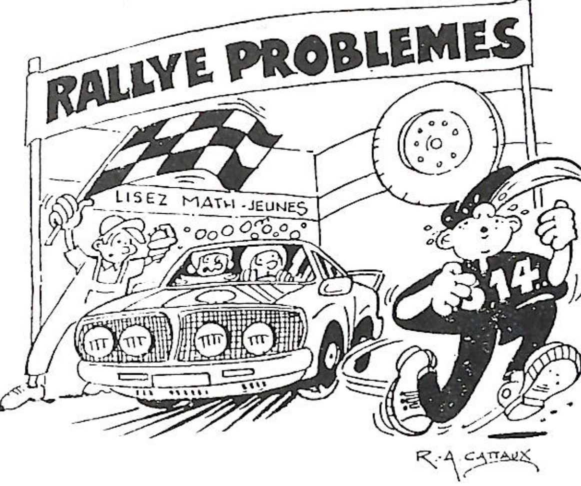
La réforme grégorienne n'est pas encore parfaite : elle laisse subsister un léger retard du temps civil sur le temps tropique. Ce retard atteindra 23 heures 28 minutes vers l'an 4780. A cette époque, il suffira de convertir une année normalement bissextile en une année ordinaire afin de ramener la concordance.

Bibliographie

O. DUHAUT et H. LUCK, *Traité d'arithmétique*, Wesmael-Charlier, 1947.

A. BENOÎT et P. BACCHUS, *Cosmographie*, Librairie Vuibert, 1958.

P. BAKOULINE, E. KONONOVITCH et V. MOROZ, *Astronomie générale*, ed. Mir, 1974.



Math-Jeunes n° 60, 84–88, 1993

C. Festraets

J'ai reçu de nombreuses réponses aux problèmes proposés dans les trois premiers numéros de *Math-Jeunes* de cette année. Beaucoup de solutions intéressantes et astucieuses, et j'en remercie et félicite les auteurs. Mais à tout concours, il y a toujours des gagnants ; voici donc la liste des lauréats de ce rallye.

Alice DEVILLERS, 5è, A.R. Waterloo
Frédéric BOURGEOIS, 6è, Coll. St Michel, Bruxelles
Xuan Hien NGUYEN, 3è, A.R. Spa
Pierre VANHEES, 5è, Inst. St Boniface-Parnasse, Bruxelles
Sébastien LEROY, 4è, Inst. St Boniface-Parnasse, Bruxelles
Quentin LOUVEAUX, 5è, Coll. N.D., Basse-Wavre
Geoffrey MOURUE, 6è, Coll. Sacré-Cœur, Charleroi

1. Solutions des problèmes des numéros 57, 58 et 59

$\mathfrak{m}_1$ L'énoncé, pour le moins ambigu, a donné lieu à diverses interprétations (en fait, une phrase a « sauté » à la composition).

1) Si Anne a le moins dansé parmi les filles, il se peut qu'il n'y ait eu que deux filles et donc quarante garçons.

Anne a dansé avec sept garçons différents,
Julie a dansé avec les quarante garçons,

et toutes les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées. Mais il se peut qu'il y ait eu davantage de filles. Combien au maximum ?

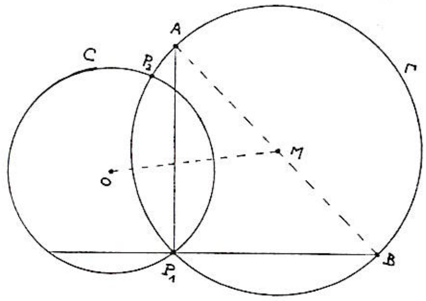
Anne a dansé avec sept garçons, une deuxième fille a dansé avec huit garçons, une troisième fille avec neuf garçons, …, une x^e fille (Julie) avec $(6 + x)$ garçons.

D'où $x + (6 + x) = 42$ et $x = 18$

Il y a au plus dix-huit filles et, dans ce cas, vingt-quatre garçons.

2) Si Anne a le moins dansé parmi les filles et les garçons, chacun des garçons a dansé au moins huit fois. Mais comme rien dans l'énoncé ne dit qu'ils ont dansé avec des filles différentes, il se peut que sept d'entre eux aient dansé une fois avec Anne et les trente-trois autres, huit fois avec Julie.

$\mathfrak{m}_2$ Soit C le cercle donné, O son centre et R son rayon. Quelle que soit la position des points A et B, si P est le sommet de l'angle droit du triangle cherché, alors APB est aussi un triangle rectangle en P. Donc P appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$. Comme P est situé sur le cercle C donné, P est un point d'intersection de Γ et de C.



Il y a deux points d'intersection, donc deux solutions si et seulement si $|OM| - R < \frac{1}{2}|AB|$ (M étant le centre de Γ).

Les deux cercles sont tangents et il y a une seule solution si et seulement si $|OM| - R = \frac{1}{2}|AB|$.

Les deux cercles sont disjoints et il n'y a aucune solution si et seulement si $|OM| - R > \frac{1}{2}|AB|$.

$\mathfrak{m}_3$ Soit $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell\}$ l'ensemble des douze pièces. Lors d'une pesée comparant les poids de deux ensembles de pièces A et B, on indiquera $A = B$ ou $A < B$ selon que les deux ensembles ont même poids ou que A est plus léger que B.

1) Si $\{a, b, c, d\} = \{e, f, g, h\}$, alors la fausse pièce appartient à $\{i, j, k, \ell\}$:

- si $\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$, alors la pièce fausse est ℓ,
  si $\{\ell\} < \{a\}$, la fausse pièce ℓ est plus légère,
  si $\{\ell\} > \{a\}$, la fausse pièce ℓ est plus lourde.

- si $\{i,j,k\} < \{a,b,c\}$, alors la fausse pièce est dans $\{i,j,k\}$ et est plus légère ;
  si $\{i\} = \{j\}$, la fausse pièce est k,
  si $\{i\} < \{j\}$, la fausse pièce est i,
  si $\{i\} > \{j\}$, la fausse pièce est j.

- si $\{i,j,k\} > \{a,b,c\}$, on a le même raisonnement, la fausse pièce étant plus lourde.

2) Si $\{a,b,c,d\} < \{e,f,g,h\}$, alors la fausse pièce est soit dans $\{a,b,c,d\}$ et plus légère, soit dans $\{e,f,g,h\}$ et plus lourde ;

- si $\{a,b,e\} = \{c,d,f\}$, alors la pièce fausse est g ou h et est plus lourde,
  si $\{g\} = \{i\}$, h est la fausse pièce,
  si $\{g\} > \{i\}$, g est la fausse pièce.

- si $\{a,b,e\} < \{c,d,f\}$, alors la fausse pièce est soit dans $\{a,b\}$ et plus légère, soit f et plus lourde,
  si $\{a\} = \{b\}$, f est la fausse pièce,
  si $\{a\} < \{b\}$, a est la fausse pièce,
  si $\{a\} > \{b\}$, b est la fausse pièce.

- si $\{a,b,e\} > \{c,d,f\}$, alors la fausse pièce est soit e et plus lourde, soit dans $\{c,d\}$ et plus légère et on a le même raisonnement que ci-dessus.

3) Si $\{a,b,c,d\} > \{e,f,g,h\}$: même raisonnement que pour (2).

$\mathfrak{m}_4$ Désignons les trois personnages par A, B, C.
Si A dit la vérité, alors C ment.
Puisque C ment, A n'est pas un menteur et B non plus.
Puisque B dit la vérité, C ment et A ment.
D'où contradiction avec l'hypothèse « A dit la vérité ».
On peut en conclure que A ment.
Puisque A ment, alors C dit la vérité.
Puisque C dit la vérité, A ment ou B ment ; ceci est correct car A ment.
Si B dit la vérité, alors C ment et A ment, ce qui est en contradiction avec le fait que C dit vrai. Donc B ment.
Puisque B ment, C dit la vérité ou A dit la vérité ; ceci est correct car C dit vrai.
Conclusion : A ment, B ment et C dit la vérité.

$\mathfrak{m}_5$
1) Pour obtenir le plus grand nombre possible, il faut mettre un maximum de chiffres 9 aux premiers chiffres à gauche de ce nombre.
Soient trois chiffres 9 et ensuite

$$\begin{cases}\text{un chiffre } 2\\ \text{deux chiffres } 0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\text{deux chiffres } 1\\ \text{un chiffre } 0\end{cases}$$

pour que la somme soit 29.
Ceci donne, dans l'ordre décroissant,

999 200, 999 110, 999 101, 999 020, 999 011, 999 002

Seul 999 020 est divisible par 11. C'est la solution.
2) Si les six chiffres doivent en plus être différents, le plus grand nombre pourrait être obtenu en mettant 987 aux trois premiers chiffres à gauche, 0, 1, 4 ou 0, 2, 3 aux trois autres chiffres pour que la somme soit 29.
Ceci donne, dans l'ordre décroissant,

987 410, 987 401, 987 320, 987 302, 987 230, 987 203, 987 140, 987 104, 987 041, 987 032, 987 023, 987 014.

Le plus grand de ces nombres divisible par 11 est 987 140.

$\mathfrak{m}_6$ L'hypoténuse d'un triangle rectangle étant plus longue que chacun des côtés de l'angle droit, on a

$$a < c \quad \text{et} \quad b < c$$

De plus, par le théorème de Pythagore,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= a^2 \cdot a^3 + b^2 \cdot b^3 \\ &< a^2 \cdot c^3 + b^2 \cdot c^3 = c^3 \cdot (a^2 + b^2) = c^3 \cdot c^2 = c^5 \end{aligned}$$

$\mathfrak{m}_7$ Posons x^2 la population du village. La population ayant augmenté de cent habitants est un carré parfait plus un :

$$x^2 + 100 = y^2 + 1 \qquad (1)$$

Ayant encore augmenté de cent habitants, c'est à nouveau un carré parfait :

$$x^2 + 200 = z^2 \qquad (2)$$

Soustrayons (2) de (1) :

$$-100 = y^2 + 1 - z^2 \quad \text{d'où} \quad z^2 - y^2 = 101$$

Or 101 est un nombre premier, il n'admet donc comme facteurs que 1 et 101 ; d'autre part, $z^2 - y^2$ se factorise en $(z+y)\cdot(z-y)$, on a donc

$$(z+y)\cdot(z-y) = 101 \cdot 1$$

Comme y et z sont des entiers, il faut que

$$\begin{cases} z+y &= 101 \\ z-y &= 1 \end{cases}$$

D'où $z = 51$ et $y = 50$.
L'égalité (1) nous donne alors la population du village

$$x^2 = y^2 - 99 = 2500 - 99 = 2401$$

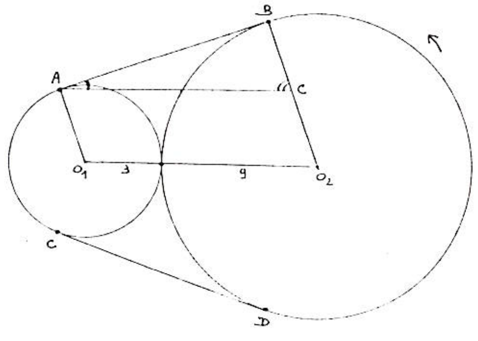
m8 E_1 comprend un élément, E_2 comprend deux éléments, ..., E_{1992} comprend 1992 éléments. Comme ces éléments sont des entiers consécutifs, le dernier élément de E_{1992} sera $1+2+3+\cdots+1992$.
Calculons cette somme :

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1 + 2 + 3 + \cdots + 1992 \\ S &=& 1992 + 1991 + 1990 + \cdots + 1 \\ 2S &=& 1993 + 1993 + 1993 + \cdots + 1993 \\ && \text{(1992 termes)} \\ &=& 1993 \cdot 1992 \\ S &=& \frac{1}{2} \cdot 1993 \cdot 1992 = 1\ 985\ 028 \end{array}$$

Donc
$E_{1993} = \{1\ 985\ 029, 1\ 985\ 030, \ldots, 1\ 987\ 021\}$ (1993 termes)
Calculons la somme des éléments de E_{1993} :

$$\begin{array}{rcl} S' &=& 1985029 + 1985030 + \cdots + 1987021 \\ S' &=& 1987021 + 1987020 + \cdots + 1985029 \\ 2S' &=& 3972050 + 3972050 + \cdots + 3972050 \\ && \text{(1993 termes)} \\ &=& 3972050 \cdot 1993 \\ S' &=& \frac{1}{2} \cdot 3972050 \cdot 1993 = 3\ 958\ 147\ 825 \end{array}$$

m9



Soient O_1, O_2 les centres des cercles et soient A, B, C, D les points de tangence du fil (voir figure).
On a donc $O_1A \perp AB$ et $O_2B \perp AB$.
Menons $AC // O_1O_2$, $C \in O_2B$.
On a $|AC| = |O_1O_2| = 12$
et $|BC| = |O_2B| - |O_2C| = |O_2B| - |O_1A| = 6$.
Dans le triangle rectangle ABC

$$\begin{array}{rcl} |AB|^2 &=& |AC|^2 - |BC|^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \\ |AB| &=& \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \quad (\text{d'où } |CD| = 6\sqrt{3}) \end{array}$$

Remarquons que dans le triangle rectangle ABC, la longueur de l'hypoténuse $[AC]$ est double de celle du côté de l'angle droit $[BC]$, donc les angles en A et en C valent respectivement 30° et 60° et, le plan étant orienté, on a :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{BO_2D} &=& 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ = \widehat{AO_1C} \\ \widehat{DO_2B} &=& 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \end{array}$$

La longueur de l'arc de cercle intercepté

- par l'angle $\widehat{AO_1C}$ est $\dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 120}{360} = 2\pi$
- par l'angle $\widehat{DO_2B}$ est $\dfrac{2\pi \cdot 9 \cdot 240}{360} = 12\pi$

La longueur totale du fil est donc
$$6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\pi + 12\pi = 12\sqrt{3} + 14\pi$$

M1 Après la première étape, il reste huit carrés pour lesquels la longueur du côté vaut $\frac{1}{3}$.
Après la deuxième étape, il reste
$$8 \cdot 9 - 8 = 8 \cdot 8 = 8^2$$
carrés pour lesquels la longueur du côté vaut $\dfrac{1}{3^2}$.
Si, après la $(n-1)^e$ étape, il reste u_{n-1} carrés dont la longueur du côté vaut $(\dfrac{1}{3})^{n-1}$, alors, après la n^e étape, il reste

$$u_n = u_{n-1} \cdot 9 - u_{n-1} = u_{n-1} \cdot (9-1) = 8 \cdot u_{n-1}$$

carrés dont la longueur du côté vaut $(\dfrac{1}{3})^n$.
D'où, $u_n = 8^n$.
La somme des aires des carrés restants est

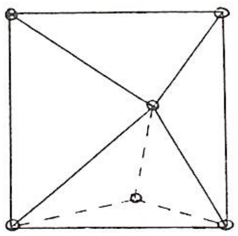
$$8^n \cdot (\frac{1}{3})^n \cdot (\frac{1}{3})^n = (\frac{8}{9})^n$$

donc, la somme des aires des carrés enlevés vaut
$$1 - (\tfrac{8}{9})^n$$
et lorsque n tend vers l'infini, $(\dfrac{8}{9})^n$ tend vers zéro.
Ainsi, cette aire tend vers 1.

M2 Vous trouverez dans ce numéro un article intitulé « Jouer avec les mathématiques pendant nos heures de fourche » et traitant la résolution de ce problème.

M3 Le premier arbre planté dans le champ détermine, avec les arbres plantés aux quatre coins, quatre parcelles triangulaires.

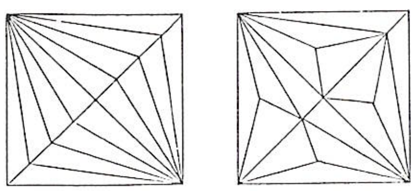
Si on plante un arbre dans l'une de ces parcelles, il détermine, avec les arbres plantés aux trois sommets, trois nouvelles parcelles triangulaires ; le nombre de parcelles a ainsi augmenté de deux.



Avec sept arbres, le premier donne quatre parcelles et les six autres en ajoutent $6 \cdot 2 = 12$. On obtient, au total, 16 parcelles.

La superficie totale du champ est de 160 ares. Donc, la superficie moyenne d'une parcelle est $\dfrac{160}{16}$ ares $= 10$ ares. Il y a donc au moins une parcelle qui a une superficie d'au moins dix ares.

Exemples de disposition des arbres donnant des parcelles de même aire :



M_4 Désignons par 0, 1 les abscisses des extrémités de la baguette

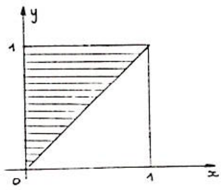
$$0 \qquad x \qquad y \qquad 1$$

et par x, y les abscisses des points où elle est brisée. Les trois morceaux forment les côtés d'un triangle si et seulement si chacun est inférieur à la somme des deux autres. Sans nuire à la généralité, on peut toujours supposer $x < y$. On a alors les conditions :

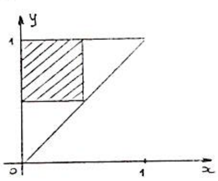
$$\begin{cases} x < 1 - x \\ y - x < x + 1 - y \\ 1 - y < y \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ y - x < \dfrac{1}{2} \\ y > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

En considérant le couple (x, y) comme la coordonnée d'un point du plan,

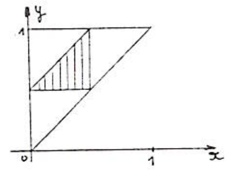
la région hachurée représente l'ensemble des points tels que $x < y$



le carré hachuré représente l'ensemble des points tels que $x < y$, $x < \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$



le triangle hachuré représente l'ensemble des points tels que $x < y$, $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$ et $x - y + \frac{1}{2} > 0$



L'aire de la région hachurée est le quart de l'aire du triangle. Donc, la probabilité cherchée, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un point du triangle appartienne à cette région est $\frac{1}{4}$.

M_5 Divisons le carré en 25 carrés isométriques. Puisqu'il y a 51 points à l'intérieur du carré initial, il y a au moins un petit carré qui contient trois points (principe des tiroirs).

Considérons le cercle circonscrit à ce petit carré. Le rayon r de ce cercle est égal à la demi-diagonale du carré dont le côté vaut un cinquième. On a donc

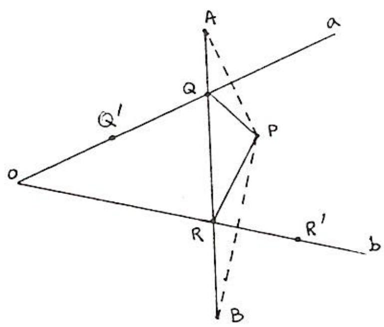
$$(2r)^2 = \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2$$
$$4r^2 = \tfrac{2}{25}$$
$$r^2 = \tfrac{2}{100} \quad \text{et} \quad r = \tfrac{\sqrt{2}}{10}$$

Montrons que $r < \dfrac{1}{7}$

En effet,

$$\tfrac{\sqrt{2}}{10} < \tfrac{1}{7} \iff 7\sqrt{2} < 10$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{10} < \tfrac{1}{7} \iff (7\sqrt{2})^2 < 10^2$$
$$\tfrac{\sqrt{2}}{10} < \tfrac{1}{7} \iff 98 < 100$$

M_6 Désignons par $[oa$ et $[ob$ les deux demi-droites.



Soient A et B les symétriques de P par rapport à $[oa$ et à $[ob]$ respectivement.

Joignons AB. Cette droite coupe $[oa$ et $[ob$ respectivement en Q et R.

PQR est le triangle cherché. En effet, si Q' et R' sont deux points quelconques situés sur $[oa$ et $[ob$ respectivement, on a

$$\begin{aligned} PQ' + Q'R' + R'P &= AQ' + Q'R' + R'B \\ &> AB = AQ + QR + RB \\ &= PQ + QR + RP \end{aligned}$$

M$_7$ Soit m la somme possédée à un moment quelconque du jeu. Si la personne gagne, après son gain, elle possèdera

$$m + \frac{m}{2} = \frac{3}{2}m$$

Si la personne perd, après sa perte, elle possèdera

$$m - \frac{m}{2} = \frac{1}{2}m$$

Gagner revient donc à multiplier son avoir par $\frac{3}{2}$ tandis que perdre revient à le multiplier par $\frac{1}{2}$.
A la fin de la partie, la personne qui a gagné trois fois et perdu trois fois, aura donc

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 64\ 000 \text{ F} = 27\ 000 \text{ F}$$

Elle aura perdu

$$64\ 000 \text{ F - } 27\ 000 \text{ F} = 37\ 000 \text{ F}$$

M$_8$

$$f_1(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{2\cdot\frac{2x-1}{x+1} - 1}{\frac{2x-1}{x+1} + 1} = \frac{4x-2-x-1}{2x-1+x+1} = \frac{x-1}{x}$$

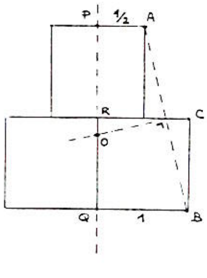
$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{2\cdot\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x} + 1} = \frac{2x-2-x}{x-1+x} = \frac{x-2}{2x-1}$$

$f_6(x) = f_1(f_1(f_1(f_3(x)))) = f_1(f_2(f_3(x))) = f_3(f_3(x))$

$$= \frac{\frac{x-2}{2x-1} - 2}{2\cdot\frac{x-2}{2x-1} - 1} = \frac{x-2-4x+2}{2x-4-2x+1} = \frac{-3x}{-3} = x$$

$$f_{1993}(x) = f_{6\cdot 332+1}(x) = f_6(f_6(f_6\cdots(f_6(f_1(x)))\cdots)) = f_1(x)$$

M$_9$ Soit O le point d'intersection de l'axe PQ de symétrie de la figure et de la médiatrice de $[AB]$.



$$|OA|^2 = |OP|^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$|OB|^2 = |OQ|^2 + 1^2 = (2 - |OP|)^2 + 1$$
Or $|OA| = |OB|$, d'où
$$|OP|^2 + \frac{1}{4} = 4 - 4|OP| + |OP|^2 + 1$$
$$4|OP| = 4 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$
$$|OP| = \frac{19}{16}$$

$$\begin{aligned} |OC|^2 &= |OR|^2 + 1 \\ &= (|OP| - 1)^2 + 1 \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^2 + 1 = \frac{265}{256} \\ |OA|^2 &= |OB|^2 = |OP|^2 + \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{19}{16}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{425}{256} \end{aligned}$$

$$|OC| < |OA| = |OB|$$

Le plus petit cercle contenant la figure a donc comme centre O et comme rayon

$$|OA| = \sqrt{\frac{425}{256}} = \frac{5}{16}\cdot\sqrt{17}$$

Solutions des questions du 7^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Les questions ont paru dans *Math-Jeunes* n° 57, pages 15 et 16.

1) 24 vendredis 13.
2) Deux solutions : 0 et 7.
3) Deux solutions :
A : 12 et B : 17 ou A : 13 et B : 18.
4) 6 dispositions possibles.
5) Il faut inverser les verres n° 2 et 5.
6) Il y a 6 solutions.
7) Il faut au moins 55 mouvements.
8) Il y a 38 schémas possibles.
9) Une solution : avril 1945.

Math-Jeunes n° 60, 89–92, 1993

Jouer avec les mathématiques pendant nos heures de fourche

H. Dujacquier, O. Luycx, X. Malfroot et P. Rosière,
Ecole Normale de Braine-le-Comte

1. A partir d'un problème

• En tant que professeur de mathématique dans les classes de cinquième et sixième (cours à 5 heures par semaine), je propose aux élèves l'abonnement à la revue *Math-Jeunes*.
• Ayant reçu *Math-Jeunes* n° 57 avant les élèves intéressés, je leur ai suggéré de se pencher sur le Rallye-Problèmes et, en particulier, sur l'énoncé M_2 (page 17) : r étant un réel, on désigne par $\langle r \rangle$ l'entier le plus « proche » de r, et dans le cas où il y a deux tels entiers, $\langle r \rangle$ est égal au plus grand des deux. Démontrer que l'égalité

$$N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \cdots + \frac{N}{2^n} + \cdots$$

où N est un entier positif, peut aussi s'écrire

$$N = \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N}{4} \right\rangle + \left\langle \frac{N}{8} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N}{2^n} \right\rangle + \cdots$$

• Pendant leurs heures de fourche, ils y ont réfléchi après que je leur ai conseillé de rapprocher cet énoncé d'une fonction vue au cours :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x) = E(x)$$

où $E(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel x.
• Les élèves ont ensuite commencé par vérifier la « double égalité » sur des exemples. Après leur avoir expliqué le principe de récurrence, ils ont commencé la recherche de la démonstration proprement dite.
Voici le fruit de leur travail.

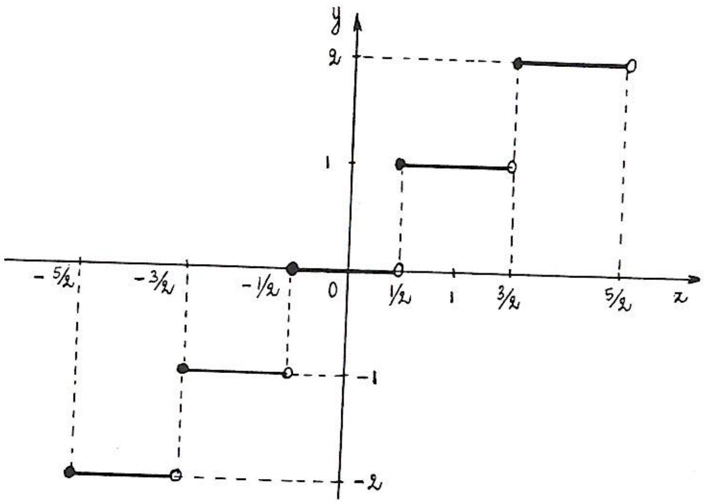
2. Approche de fonctions particulières

2.1 En se référant au problème posé, on peut considérer la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x) = \langle x \rangle.$$

x	$\cdots$	$-1{,}5$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-0{,}5$	$\cdots$	0	$\cdots$	$0{,}5$	$\cdots$	1	$\cdots$
$\langle x \rangle$	$\cdots$	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1

Représentons f sur $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[$



Il apparaît immédiatement que f est une fonction en escalier ou constante par intervalle. Remarquons que :

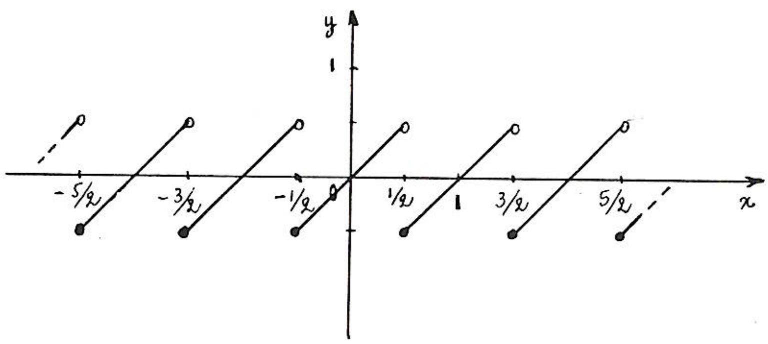
1. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$
2. f n'est pas impaire
3. $\forall x \in \mathbb{R} : \langle x \rangle - \dfrac{1}{2} \leqslant x < \langle x \rangle + \dfrac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} : x - \langle x \rangle \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{Z} : \langle x + z \rangle = \langle x \rangle + z$

2.2 Considérons maintenant la fonction suivante :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow g(x) = x - \langle x \rangle$$

x	$\cdots$	$-1,5$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-0,5$	$\cdots$	0	$\cdots$	$0,5$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g(x)$	$\cdots$	$-0,5$		0		$-0,5$		0		$-0,5$		0	

Représentons g sur $\left[-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right[$



Constatons que si (x, y) est un point du graphique de g, il en est de même des points $(x+1, y)$ et $(x-1, y)$: g est périodique de période 1.
Vérifions par calcul

$$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{dom} g = \mathbb{R} : g(x+1) &= x + 1 - \langle x+1 \rangle = x + 1 - [\langle x \rangle + 1] \\ &= x + 1 - \langle x \rangle - 1 = x - \langle x \rangle = g(x) \end{aligned}$$

En fait, connaissant le graphique de g sur un intervalle $[a, b[$ tel que $b - a = 1$, il suffit de le compléter en effectuant des translations de vecteur $\overrightarrow{v} = n\overrightarrow{e_1}$, où $n \in \mathbb{Z}_0$ et $\overrightarrow{e_1}$ de coordonnée $(1, 0)$.

Soulignons aussi que

$$\begin{aligned} g(x) &= x \quad &\text{sur} \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ &= x+1 \quad &\text{sur} \quad \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[\\ &= x-1 \quad &\text{sur} \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\end{aligned}$$

3. Propriété intéressante

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N} : \left\langle \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+1}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N+1}{2^n} \right\rangle + \cdots = \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N}{2^n} \right\rangle + \cdots}$$

Démontrons cette propriété par récurrence :
1) Si $N = 0$, on a

$$\begin{cases} \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle + \cdots = 1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1 \\ \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{0}{2} \right\rangle \left\langle \frac{0}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{0}{2^n} \right\rangle + \cdots = 1 \end{cases}$$

Si $N = 1$, on a

$$\begin{cases} \left\langle \frac{2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{2}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{2}{2^n} \right\rangle + \cdots = \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{2}{4} \right\rangle = 1 + 1 = 2 \\ \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle + \cdots = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = 2 \end{cases}$$

2) Prouvons que :
Si $\left\langle \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+1}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N+1}{2^n} \right\rangle + \cdots = \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N}{2^n} \right\rangle + \cdots$

alors $\left\langle \frac{N+2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+2}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N+2}{2^n} \right\rangle + \cdots = \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+1}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N+1}{2^n} \right\rangle + \cdots$

En effet, $\left\langle \frac{N+2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+2}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N+2}{2^n} \right\rangle + \cdots = \left\langle \frac{(N+1)+1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{(N+1)+1}{4} \right\rangle + \cdots$
$= \langle 1 \rangle + \left\langle \frac{N+1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N+1}{4} \right\rangle + \cdots$

4. Une égalité remarquable

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N} : N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \cdots + \frac{N}{2^n} + \cdots = \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{N}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{N}{2^n} \right\rangle + \cdots}$$

Démontrons cette égalité par récurrence.
1) Si $N = 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots & = 0 = N \\ \left\langle \frac{0}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{0}{4} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{0}{2^n} \right\rangle + \cdots & = 0 = N \end{cases}$$

Si $N = 1$, on a

$$\left\{\begin{array}{lll} \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{S_n}+\cdots & = & \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 = N \\ \left\langle\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{1}{2^n}\right\rangle+\cdots & = & 1 = N \end{array}\right.$$

Si $N = 2$, on a

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{2^n}+\cdots & = & 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \\ & = & 1+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right) \\ & = & 1+1 = 2 = N \\ \left\langle\frac{2}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{2}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{2}{2^n}\right\rangle+\cdots & = & \langle 1\rangle+\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{1}{2^{n-1}}\right\rangle+\cdots \\ & = & 1+1+0+\cdots+0+\cdots \\ & = & 2 = N \end{array}\right.$$

2) Supposons l'égalité prouvée pour l'entier positif N et démontrons-la pour l'entier positif $N+1$

$$N+1 = \underbrace{\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{4}+\cdots+\frac{N+1}{2^n}+\cdots}_{(1)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\left\langle\frac{N+1}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{N+1}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{N+1}{2^n}\right\rangle+\cdots}_{(2)}$$

(1) donne : $\frac{N}{2}+\frac{1}{2}+\frac{N}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{N}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\cdots+\frac{N}{2^n}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right) \\ &= N+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right) \\ &= N+1 \end{aligned}$$

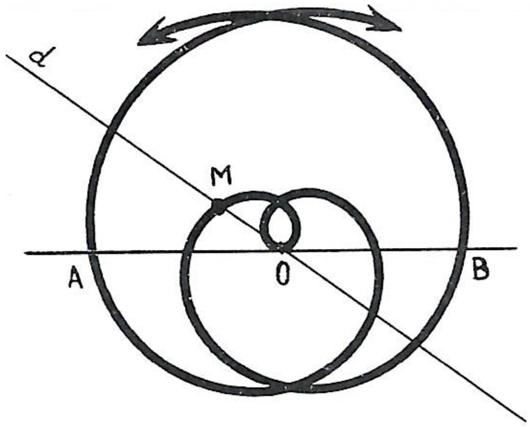
(2) donne : $\left\langle\frac{N+1}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{N+1}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{N+1}{2^n}\right\rangle+\cdots$

$$\begin{aligned} &= \langle 1\rangle+\left\langle\frac{N}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{N}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{N}{2^n}\right\rangle+\cdots \text{ (voir 3.)} \\ &= \langle 1\rangle+\left[\left\langle\frac{N}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{N}{4}\right\rangle+\cdots+\left\langle\frac{N}{2^n}\right\rangle+\cdots\right] = \langle 1\rangle+N = 1+N \end{aligned}$$

Sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, voici maintenant une SPIRALE D'ARCHIMÈDE et une SPIRALE HYPERBOLIQUE.
La première fut étudiée par ARCHIMÈDE vers les années 225 avant JÉSUS-CHRIST.
Pendant que la droite d effectue un mouvement uniforme de rotation autour de O, un point M se déplace uniformément sur cette droite d à partir de O ; il engendre alors la courbe en question.
Son équation, en coordonnées polaires, est

$$r = a \cdot \theta$$

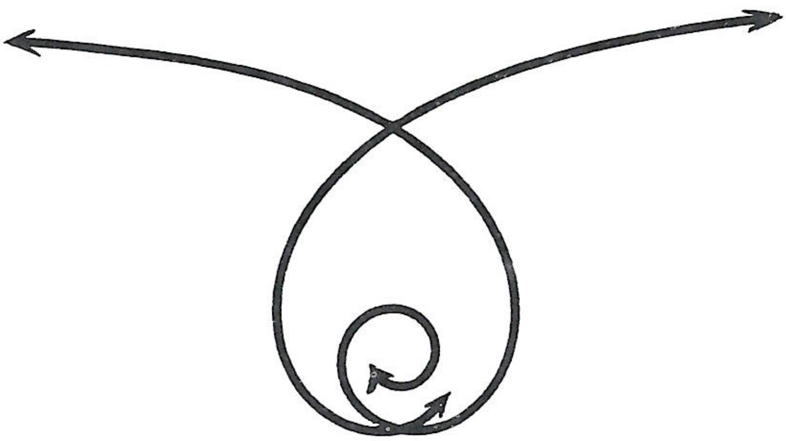
où $a \in \mathbb{R}_0$, r représente la mesure algébrique du segment $[OM]$ et θ, la mesure de l'angle (en radians) entre la demi-droite $[OM$ et la demi-droite $[OB$.



C'est une équation du type $r^m = a^m \cdot \theta$; ici, $m = 1$.
Si $m = -1$, nous obtenons

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{a} \quad \text{ou} \quad r \cdot \theta = a$$

dont la courbe représentative est la spirale hyperbolique (ci-dessous), étudiée d'abord par Pierre VARIGNON en 1704, puis par Johann BERNOULLI entre 1710 et 1713 et par le mathématicien anglais Roger COTES en 1722.



Chacune des deux figures est formée de deux spirales ; selon le signe de θ, le point M parcourt l'une ou l'autre.