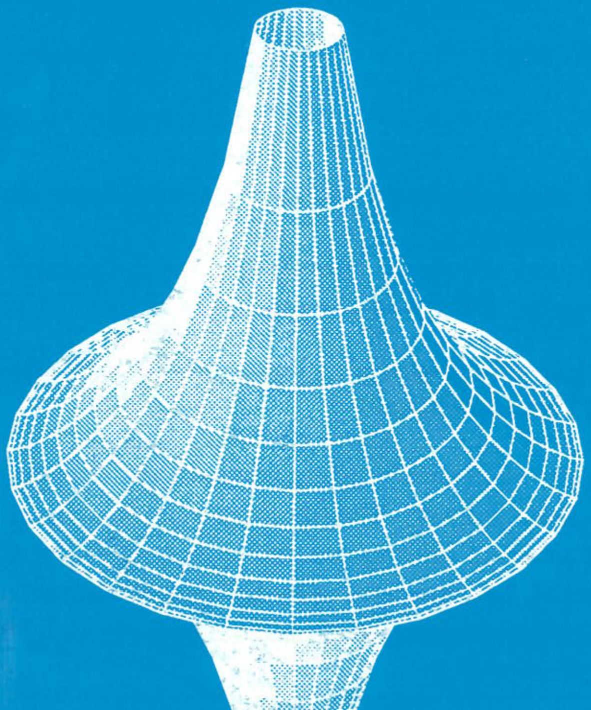
# MATH - JEUNES



14e année
Juin - n° 61

Bureau de dépôt Pont-à-Celles 1

# MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

*Rédaction, administration :* Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.



Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

*Abonnements :*

Belgique :

- Groupés (5 exempl. au moins) : 100 FB
- Isolés : 140 FB

Etranger :

- Pour 5 abonnements : 1000 FB
- Isolés : 280 FB

*Anciens numéros encore disponibles :*

- Avant 1988 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 88/89, 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Année 91/92 — 100 FB (Etranger : 200 FB)

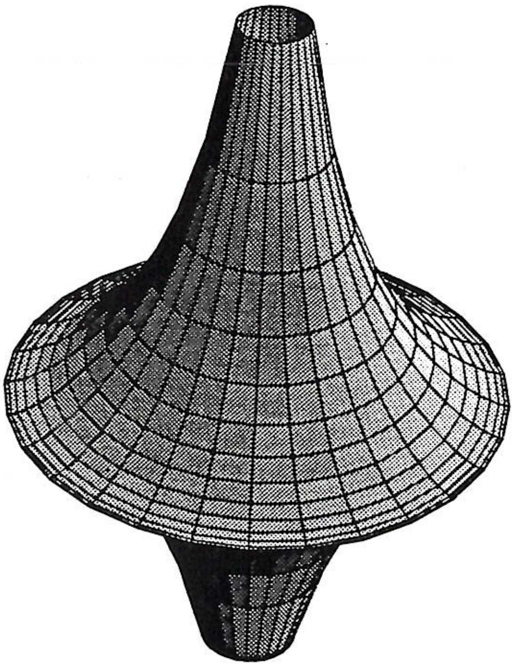
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : J. Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron

N° 61 Quatorzième année 1993

# MATH-JEUNES





Le dernier numéro de *Math-Jeunes* de cette année scolaire 1992/93 est entièrement consacré à l'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE.
Christian VAN HOOSTE, responsable de la rubrique « Olympiade » au sein du Comité de Rédaction de ta revue préférée te propose ses solutions commentées aux questions des éliminatoires et demi-finales MINI et MAXI. Nous espérons que cela te permettra de t'entraîner efficacement en vue de la prochaine Olympiade Belge qui en sera à sa 19[e] édition. Nous te fixons d'ores et déjà rendez-vous ...

**ERRATUM : Dans le *Math-Jeunes* n° 60, page 76, ligne 11 et page 77, ligne 1, il faut lire :**

$$0 \leqslant r < d$$

**au lieu de :**

$$0 \leqslant r \leqslant d$$

 Math-Jeunes n° 61, 94–101, 1993

# Mini éliminatoire

## Questions

1. Jean, qui pesait entre 65 et 70 kg, perd entre 3 et 4 kg. Son nouveau poids est entre

   (A) 61 et 66 kg ; (B) 61 et 67 kg ; (C) 62 et 66 kg ; (D) 62 et 67 kg ; (E) 68 et 74 kg.

2. Admettons que, dans une population donnée, une célébrité est une personne connue de toute autre personne, mais ne connaissant aucune autre personne. Le nombre de célébrités dans une population quelconque de 100 personnes est

   (A) toujours 0 ; (B) toujours 1 ; (C) parfois 0, parfois 1 ; (D) parfois 0, parfois 100 ; (E) parfois 1, parfois 2.

3. Un cône $X$ est de volume $U$ ; un cône $Y$ est de volume $V$. La hauteur du cône $Y$ vaut le tiers de la hauteur de $X$. Le diamètre de la base de $Y$ vaut le triple du diamètre de la base de $X$. Alors le rapport de $U$ à $V$ vaut

   (A) $\frac{1}{9}$ ; (B) $\frac{1}{3}$ ; (C) 1 ; (D) 3 ; (E) 9.

4. Parmi tous les nombres naturels dont l'écriture décimale est formée de trois chiffres distincts pris parmi 0, 5, 6, 9, combien sont divisibles par 3 ?

   (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 12 (E) aucun

5. Lequel des nombres suivants ne vérifie pas l'inéquation $5 - 3x > \frac{x}{2}$

   (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{11}{10}$ (D) $\frac{11}{7}$ (E) 0

6. Le plan euclidien ne peut pas être parfaitement pavé avec des copies isométriques d'un

   (A) triangle quelconque ; (B) carré ; (C) pentagone régulier ; (D) hexagone régulier ; (E) parallélogramme.

7. La division de 0,005208 par 100 donne

   (A) 0,00005208 ; (B) 0,00520800 ; (C) 0,5208 ; (D) 5,208 ; (E) une autre réponse.

8. Dans l'espace euclidien de dimension trois, étant donné un segment $[ab]$ et un nombre $\ell$, avec $0 < \ell < \frac{1}{2}|ab|$, combien existe-t-il de triangles rectangles dont l'hypoténuse est $[ab]$ et dont la hauteur relative à l'hypoténuse mesure $\ell$ ?

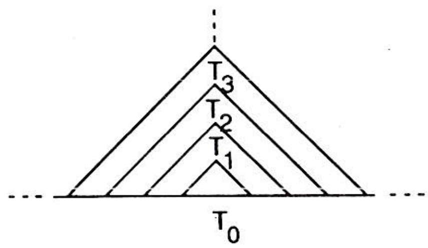
   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) une infinité

9. *(Sans réponse préformulée)* Dans un triangle $abc$, $|ab| = 7$, $\widehat{bac} = 100^\circ$ et $\widehat{acb} = 40^\circ$ . Que vaut la longueur du côté $[ac]$ ?

10. Quel est le plus petit nombre naturel qui soit non nul, multiple de 90 et cube parfait ?

    (A) 90 (B) 125 (C) 300 (D) 27 000 (E) 243 000

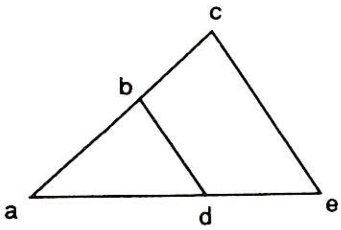
11. Dans la figure, chacun des triangles $T_0$, $T_1$, $T_2$, ... est isocèle et rectangle. La hauteur de $T_0$ relative à l'hypoténuse vaut 1. La hauteur de $T_1$ relative à l'hypoténuse vaut 1 de plus que celle de $T_0$ ; de même, celle de $T_2$ vaut 1 de plus que celle de $T_1$, etc. Alors l'aire du triangle $T_n$ vaut toujours




    (A) $n^2$ ; (B) $(n-1)^2$ ; (C) $(n+1)^2$ ; (D) $(2n-1)^2$ ; (E) $(2n+1)^2$.

12. Dans la figure, $bd \parallel ce$, $|bd| = 2$, $|bc| = 4$ et $|ce| = 5$, alors $|ab|$ vaut

(A) $\frac{8}{3}$ ; (B) $\frac{8}{5}$ ; (C) $\frac{5}{2}$ ; (D) $\sqrt{14}-2$ ;
(E) une autre réponse.



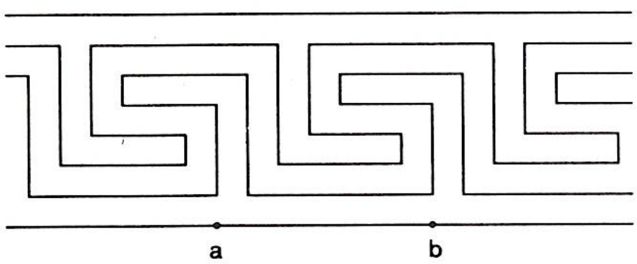

13. Si le nombre entier $n$ est divisible par 5, lequel des nombres suivants est toujours aussi divisible par 5 ?

(A) $n+4$ (B) $3(n+3)$ (C) $3n+2n-1$
(D) $n+2+4n+1$ (E) $6n-5$

14. Un terrain rectangulaire de 150 m de long et 120 m de large est quadrillé en carrés de 5 m de côté. Un arbre doit être planté en chaque sommet du quadrillage intérieur au terrain. Combien d'arbres faut-il ?

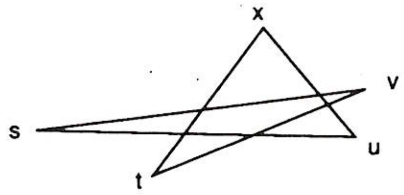
(A) 667 (B) 690 (C) 696 (D) 704 (E) 720

15.




Cette frise, conservée par la translation appliquant $a$ sur $b$, possède
(A) exactement un centre de symétrie ;
(B) une infinité de centres de symétrie ;
(C) exactement un axe horizontal de symétrie ;
(D) exactement un axe vertical de symétrie ;
(E) une infinité d'axes verticaux de symétrie.

16. *(Sans réponse préformulée)* Dans la figure, $\widehat{s}=10^\circ$, $\widehat{t}=20^\circ$, $\widehat{u}=30^\circ$ et $\widehat{v}=40^\circ$. Si $\widehat{x}=n^\circ$, avec $0<n<180$, que vaut $n$ ?




17. Si $A=1+2+3+\cdots+90$ et $B=5+7+9+\cdots+183$ alors $B$ vaut

(A) $A+4\times 90$ ; (B) $(A+4)\times 90$ ;
(C) $A+4+5+6+93$ ; (D) $2A+90$ ;
(E) $2A+3\times 90$.

18. Si trois sommets d'un parallélogramme sont connus, le nombre de positions permises pour le quatrième sommet est

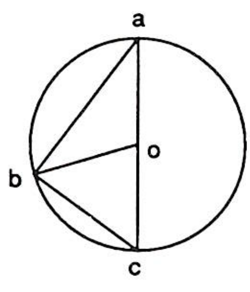
(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3 ; (E) 4.

19. *(Sans réponse préformulée)* Un marchand réduit un prix de 50 %. Par après, il applique une nouvelle réduction de 60 %. Si la réduction totale est alors de $n$ %, que vaut $n$ ?

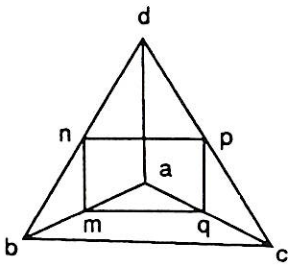
20. Si $n$ est un multiple non nul de 3 et si $m$ est un multiple non nul de 2, alors $n^m$
(A) est toujours pair ;
(B) vaut 1 pour certaines valeurs de $n$ et $m$ ;
(C) est nécessairement divisible par 6 ;
(D) est nécessairement un multiple de 9 ;
(E) n'est pas nécessairement un carré parfait.

21. Dans la figure, $o$ est le centre du cercle, $b$ en est un point et $[ac]$ un diamètre. L'angle $\widehat{boc}$ mesure $70^\circ$. Que vaut la différence des mesures de $\widehat{ocb}$ et $\widehat{oab}$ ?

(A) $10^\circ$ (B) $17^\circ 30'$ (C) $20^\circ$ (D) $27^\circ 30'$
(E) $35^\circ$



22. Dans le tétraèdre régulier *abcd*, les quatre faces sont des triangles équilatéraux isométriques. Si $m$, $n$, $p$ et $q$ sont les milieux respectifs des côtés $[ab]$, $[bd]$, $[cd]$, $[ac]$, le quadrilatère *mnpq* est nécessairement
(A) un carré ;
(B) un losange non carré ;
(C) un rectangle non carré ;
(D) un parallélogramme non rectangle et non losange ;
(E) une autre figure.




23. Si $\dfrac{2}{13} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{x}$, alors $x$ vaut

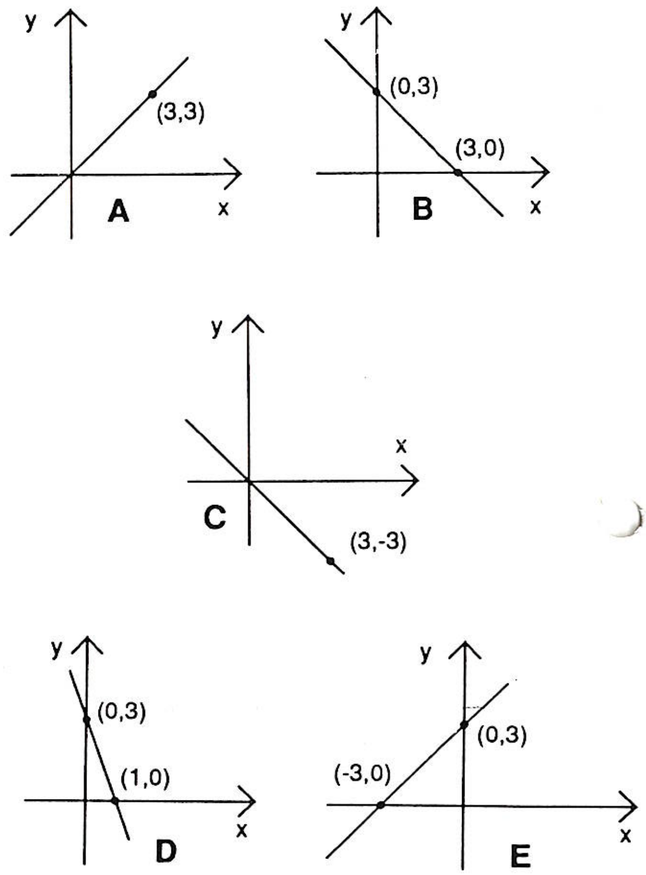
(A) $\dfrac{13}{7}$ ; (B) $\dfrac{1}{6}$ ; (C) 6 ; (D) $\dfrac{91}{27}$ ; (E) 91.

24. Que vaut $((3x - 49)x - 32)x - 30$ pour $x = 17$ ?

(A) $-2$ (B) 0 (C) 2 (D) 4 (E) 51

25. Un champ rectangulaire mesurant 120 m de long et 80 m de large est recouvert d'une couche de neige de 75 cm d'épaisseur. Un $dm^3$ de neige, en fondant, donne 0,2 $\ell$ d'eau. Le volume d'eau provenant de la fonte de toute cette neige
(A) mesure 960 $m^3$ ;
(B) mesure 1600 $m^3$ ;
(C) mesure 14400 $m^3$ ;
(D) mesure 14400 $\ell$ ;
(E) égale celui d'une couche d'eau uniforme de 15 cm d'épaisseur sur tout le champ.

26. Quel graphique représente la droite d'équation $x + y = 3$ ?

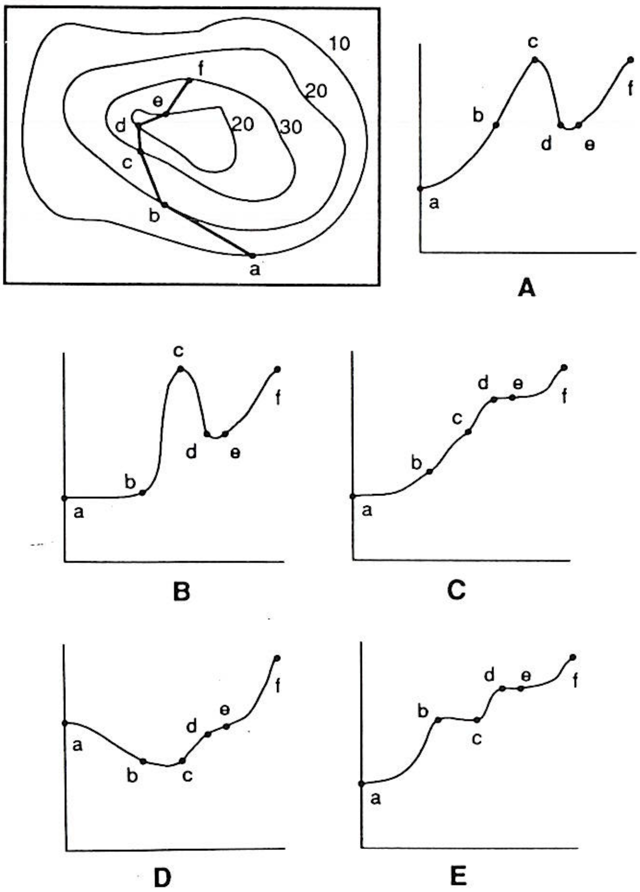



27. Le mobile 1 parcourt 50 kilomètres en 2 heures et 30 minutes ;
le mobile 2 parcourt 200 mètres en 30 secondes ;
le mobile 3 parcourt 300 mètres en 1 minute ;
le mobile 4 parcourt 1000 mètres en 3 minutes.
Quelles sont les deux mobiles qui ont la même vitesse moyenne ?

(A) 1 et 2 (B) 2 et 3 (C) 1 et 4 (D) 2 et 4 (E) 3 et 4

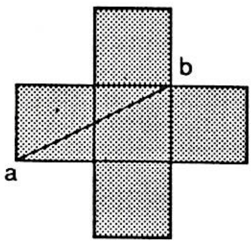
28. *(Sans réponse préformulée)* Alexandre pense à trois nombres. En les ajoutant deux à deux, il obtient 39, 45 et 52. Quel est le plus grand des trois nombres ?

29. La carte indique l'altitude en mètres de courbes de niveau. Un promeneur effectue le trajet représenté par $abcdef$, avec $|ab| = 1{,}5$ cm, $|bc| = 0{,}7$ cm, $|cd| = 0{,}5$ cm, $|de| = 0{,}4$ cm et $|ef| = 1$ cm. Le relief de ce trajet (hauteur en fonction de la distance horizontale) ressemble plus à




30. Une croix est formée de cinq carrés (voir figure). Que vaut l'aire de cette croix si $[ab]$ mesure 10 ?

(A) $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ (B) $50\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{50\sqrt{2}}{2}$ (D) 120 (E) 100




# Réponses

## Question 1 / réponse B

Le nouveau poids de Jean vaut au minimum $(65 - 4)$ kg, soit 61 kg. Et, il atteint au plus $(70 - 3)$ kg, soit 67 kg. Donc, ce nouveau poids est compris entre 61 et 67 kg.

## Question 2 / réponse C

S'il y avait deux célébrités ou plus, elles devraient se connaître mutuellement car toute célébrité est connue de toutes les autres personnes. Mais, cette situation n'est pas possible puisqu'une célébrité ne connaît aucune autre personne. Par conséquent, il ne peut y avoir qu'une célébrité au plus.

## Question 3 / réponse B

Le volume $U$ du cône $X$ est $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$, où $r$ et $h$ sont respectivement le rayon de la base et la hauteur de ce cône. Le volume $V$ du cône $Y$ est alors

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(3r)^2\cdot\frac{h}{3} = \pi\cdot r^2\cdot h = 3U$$

D'où, le rapport de ces volumes est

$$\frac{U}{V} = \frac{U}{3U} = \frac{1}{3}$$

## Question 4 / réponse B

Comme un nombre est divisible par 9 seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9, les nombres cherchés sont nécessairement formés des chiffres 0, 6 et 9. Ces nombres sont 609, 690, 906 et 960.

## Question 5 / réponse D

L'inéquation donnée est équivalente à $x < \frac{10}{7}$. Parmi les nombres proposés, seul $\frac{11}{7}$ ne vérifie donc pas cette inéquation.

## Question 6 / réponse C

Paver un plan avec des « carreaux », c'est le couvrir complètement à l'aide de ces carreaux de telle façon qu'aucune partie de ce plan ne soit recouverte par plus d'un carreau. Ce recouvrement est possible avec des carreaux ayant la forme d'un triangle, d'un carré, d'un hexagone régulier ou d'un parallélogramme. Consulte les figures 1a, 1b, 1c et 1d.

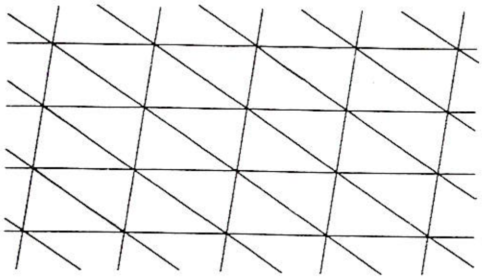


**Fig. 1a : pavage avec des triangles**

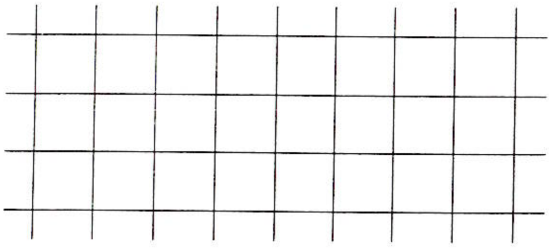


**Fig. 1b : avec des carrés**

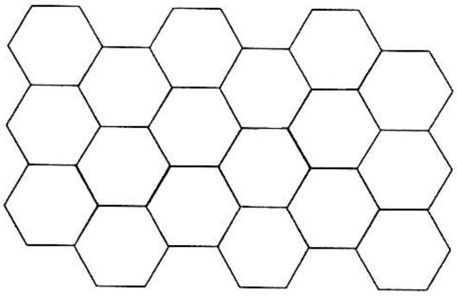


**Fig. 1c : avec des hexagones réguliers**

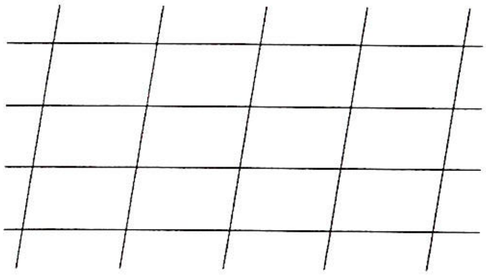


**Fig. 1d : avec des parallélogrammes**

Par contre, il est impossible de paver le plan euclidien à l'aide de pentagones réguliers. En effet, comme un angle intérieur de pentagone régulier mesure $108°$, on ne peut juxtaposer autour d'un même point $s$ (cf fig. 2a et 2b) un nombre entier de pentagones. Si on essaye de disposer ces pentagones pour qu'il aient $s$ comme sommet commun, alors il reste un secteur angulaire d'amplitude $(360° - 3 \times 108°) = 36°$ non recouvert. Si on place un premier pentagone pour qu'un de ses côtés comprenne $s$, puis un second de sommet $s$ s'appuyant sur le premier, il reste cette fois un secteur angulaire d'amplitude $(180° - 108°) = 72°$ non recouvert.

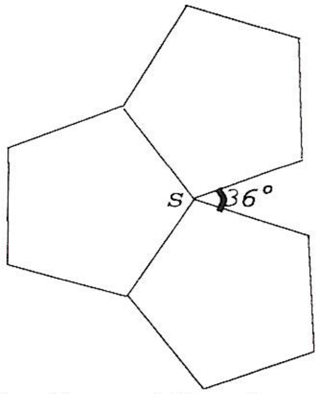



**Fig. 2a : Comme 108 ne divise pas 360, il reste un secteur angulaire qu'on ne peut recouvrir par un pentagone régulier.**

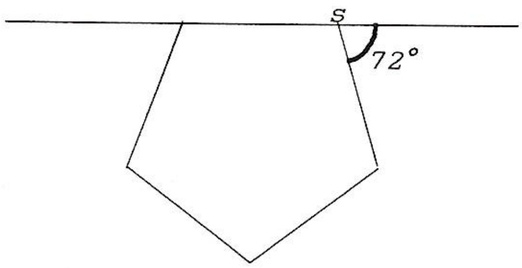



**Fig. 2b : et 108 ne divise pas 180 non plus. Il reste encore un secteur angulaire non recouvert.**

**A lire :** *Math-Jeunes* n° 43, pp 55-61, *Les pavages du plan et de l'espace.*

## Question 7 / réponse A

$$\frac{0,005208}{100} = 0,00005208$$

## Question 8 / réponse E

Le troisième sommet $c$ d'un triangle répondant à la question doit se trouver sur la sphère de diamètre $[ab]$ et dans un plan perpendiculaire à $ab$, situé à une distance $h = \sqrt{\frac{|ab|^2}{4} - \ell^2}$ du centre de $[ab]$ (cf fig. 3). Un tel plan est nécessairement sécant avec la sphère car $h < \frac{|ab|}{2}$. Dès lors, il y a une infinité de triangles rectangles possibles.

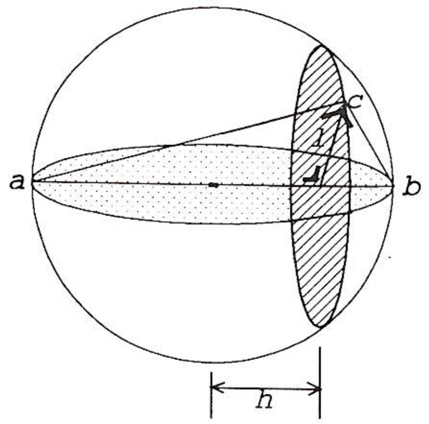



**Fig. 3 : Du point c, on voit le segment [ab] sous un angle droit.**

### Question 9 / réponse : 7

L'angle $\widehat{abc}$ de ce triangle vaut $180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$. Ce triangle est donc isocèle ; les côtés $[ab]$ et $[ac]$ ont la même longueur. D'où $|ac| = 7$.

### Question 10 / réponse D

Comme $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, le plus petit cube non nul, multiple de 90, est

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27000.$$

### Question 11 / réponse C

La hauteur relative à l'hypoténuse du triangle $T_n$ vaut $n+1$. De plus, ce triangle étant isocèle et rectangle, son hypoténuse vaut deux fois la hauteur correspondante, donc $2 \cdot (n+1)$. Par suite, l'aire de $T_n$ vaut

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2.$$

### Question 12 / réponse A

Les triangles $abd$ et $ace$ sont semblables car leurs côtés sont deux à deux parallèles. Dès lors, on a

$$\frac{|ab|}{|ac|} = \frac{|bd|}{|ce|}$$

D'où, on tire $|ab| = \frac{2}{5}|ac|$. Mais, $|ac| = |ab| + |bc| = |ab| + 4$.
Par conséquent, on a $|ab| = \frac{2}{5}(|ab| + 4) = \frac{2}{5}|ab| + \frac{8}{5}$.
On obtient donc $|ab| = \frac{8}{3}$.

### Question 13 / réponse E

Seul $6n - 5$ est divisible par 5 puisqu'il s'agit d'une différence entre deux multiples de 5.

### Question 14 / réponse A

Comme il n'y a pas d'arbres sur les bords du terrain, ceux-ci se répartissent sur un rectangle de 140 m de long sur 110 m de large. Il y a ainsi 29 rangées d'arbres dans le sens de la largeur et 23 rangées dans le sens de la longueur, donc 667 arbres.

### Question 15 / réponse B

Un point tel que $c$ (cf fig. 4) est un centre de symétrie de la frise. Dès lors, cette frise possède une infinité de centres de symétrie : entre autres, les points que l'on obtient à partir de $c$ en appliquant de proche en proche la translation qui engendre la frise.

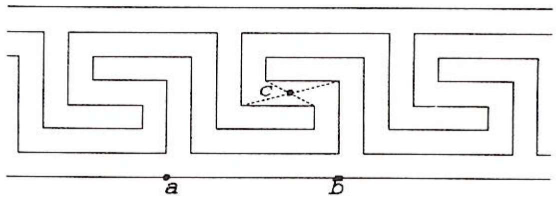



**Fig. 4 : Le point c est un centre de symétrie de la frise.**

### Question 16 / réponse : 80

Appelons $a$ et $b$ respectivement les points d'intersection de la droite $ab$ avec les droites $xt$ et $xu$ (cf fig. 5).

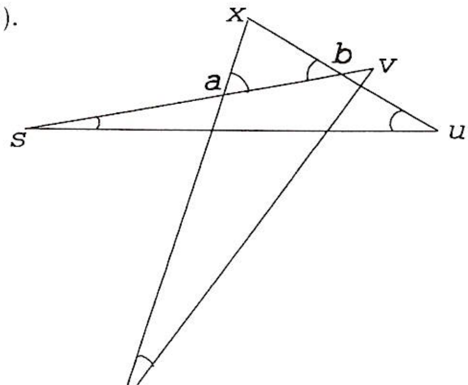



**Fig. 5**

L'angle $\widehat{a}$ du triangle $xab$ étant extérieur au triangle $atv$, on a

$$\widehat{a} = \widehat{t} + \widehat{v} = 60^\circ.$$

L'angle $\widehat{b}$ du triangle $xab$ étant extérieur au triangle $bsu$, on a

$$\widehat{b} = \widehat{s} + \widehat{u} = 40^\circ.$$

Ainsi, on trouve $\widehat{x} = 180^\circ - \widehat{a} - \widehat{b} = 80^\circ$.

### Question 17 / réponse E

Décomposons $B$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B &= (2+3)+(4+3)+(6+3)+\ldots+(180+3) \\ &= (2+4+6+\ldots+180)+(3+3+3+\ldots+3) \\ &= 2(1+2+3+\ldots+90)+(3+3+3+\ldots+3). \end{aligned}$$

Comme la première somme comprend 90 termes, la seconde en compte 90 aussi. De ce fait, on a

$$B = 2\cdot A + 3 \times 90.$$

### Question 18 / réponse D

Si $a$, $b$ et $c$ sont les trois sommets connus du parallélogramme, alors le quatrième sommet est un des sommets du triangle $xyz$ obtenu en traçant des parallèles aux droites $ab$, $bc$ et $ca$ respectivement par $c$, $a$ et $b$ (cf fig. 6).

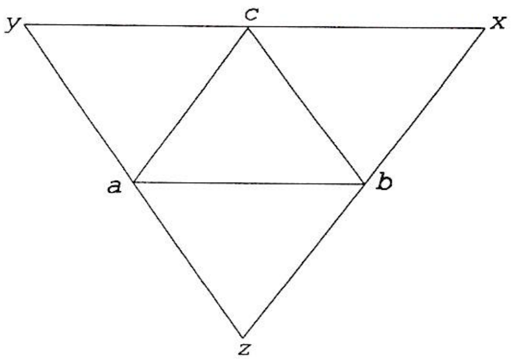



**Fig. 6 : abcy, abxc et azbc sont des parallélogrammes de sommets a, b et c.**

### Question 19 / réponse : 80

Supposons que le prix initial soit 100 F. Après la première réduction, celui-ci est ramené à 50 F. La seconde réduction (60%) vaut $0,6\cdot 50$ F $= 30$ F. Le nouveau prix est alors 20 F.
L'ensemble des deux réductions a ainsi fait chuter le prix de 100 à 20 F. La réduction totale est donc de 80%.

### Question 20 / réponse D

Etant donné que $n$ et $m$ sont respectivement des mutiples non nuls de 3 et de 2, il existe des naturels $k$ et $p$ non nuls tels que $n^m = (3\cdot k)^{2p}$. De ce fait, $n^m$ peut être impair et ne pas être multiple de 6. Comme $p$ ne peut être nul, $n^m$ n'est jamais égal à 1, mais toujours un carré parfait et toujours divisible par 9.

### Question 21 / réponse C

Le triangle $obc$ étant isocèle, l'angle $\widehat{ocb}$ vaut 55° . Le triangle $bac$ est rectangle, car inscrit dans un demi-cercle ; dès lors, l'angle $\widehat{oab}$ vaut 35°. Par conséquent, on a $\widehat{ocb} - \widehat{oab} = 20°$ .

### Question 22 / réponse A

Chaque côté du quadrilatère $mnpq$ joint les milieux de deux côtés d'une face du tétraèdre ; il vaut donc la moitié du troisième côté de cette face, c'est-à-dire d'une arête. Comme toutes les arêtes du tétraèdre ont la même longueur, il en est de même des côtés du quadrilatère $mnpq$. Par conséquent, ce quadrilatère est un losange.
De plus, les diagonales de ce losange $[nq]$ et $[pm]$ ont certainement la même longueur. En effet, ce sont les médianes (relatives à la base) de deux triangles isocèles isométriques, respectivement $nac$ et $pab$. Parmi les losanges, seul le carré a ses diagonales de même longueur. Par conséquent, $mnpq$ est un carré.
**Suggestion :** pour mieux comprendre ce problème de géométrie dans l'espace, il serait utile de construire un tétraèdre régulier et de tracer sur ses faces le quadrilatère $mnpq$.

### Question 23 / réponse E

De l'égalité donnée, on tire $\frac{1}{x} = \frac{2}{13} - \frac{1}{7} = \frac{1}{91}$
D'où, $x = 91$.

### Question 24 / réponse D

Il suffit de remplacer $x$ par 17 dans l'expression donnée. Le calcul est alors effectué en évaluant d'abord les parenthèses intérieures. On trouve

$$\begin{aligned} &((3\cdot 17-49)\cdot 17-32)\cdot 17-30 \\ &\quad = (2\cdot 17-32)\cdot 17-30 \\ &\quad = 2\cdot 17-30 = 4. \end{aligned}$$

### Question 25 / réponse E

Un dm$^3$ de neige fournit 0,2 $\ell$ d'eau. Cette eau occupe à son tour un volume valant 0,2 dm$^3$. De ce fait, le volume d'eau provenant de la fonte de la neige est le cinquième de celui de la neige.
Par conséquent, la fonte de la neige qui recouvre le champ produirait un volume d'eau équivalent à une couche uniforme de 15 cm (le cinquième de 75 cm) d'épaisseur étalée sur tout le champ.

### Question 26 / réponse B

Vu son équation, la droite doit comprendre les points de coordonnée (3,0) et (0,3).

### Question 27 / réponse C

Il suffit de calculer les vitesse de chaque mobile en se servant de la même unité, par exemple le mètre par seconde :

Mobile 1 : $\frac{50000}{150\cdot 60}$ m/s $= \dfrac{50}{9}$ m/s

Mobile 2 : $\frac{200}{30}$ m/s $= \dfrac{20}{3}$ m/s

Mobile 3 : $\frac{300}{60}$ m/s $= 5$ m/s

Mobile 4 : $\frac{1000}{180}$ m/s $= \dfrac{50}{9}$ m/s

### Question 28 / réponse: 29

Appelons $x$, $y$ et $z$ les trois nombres classés par ordre croissant.
On doit avoir

$$\begin{aligned} x+y &= 39 \;; \\ x+z &= 45 \;; \\ y+z &= 52. \end{aligned}$$

En additionnant ces trois égalités membre à membre, il vient successivement

$$\begin{gathered} 2x+2y+2z = 136 \;; \\ x+y+z = 68 \;; \\ 39+z = 68. \end{gathered}$$

et finalement $z = 29$.

### Question 29 / réponse A

En observant les courbes de niveau, on constate que $b$ et $e$ sont à la même altitude (20 m). Seul le graphique $A$ traduit ce fait.

### Question 30 / réponse E

Appelons $x$ la mesure du côté d'un carré.
Par le théorème de Pythagore appliqué dans un triangle rectangle dont $[ab]$ est l'hypoténuse, on a

$$|ab|^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2.$$

Or, $5x^2$ est l'aire totale de la croix. Donc, cette aire vaut $|ab|^2 = 100$.

# Mini demi-finale

## Questions

1. Si la longueur du côté d'un carré est doublée, l'aire de ce carré est multipliée par

   (A) 1 ; (B) $\sqrt{2}$ ; (C) 2 ; (D) 4 ; (E) un autre nombre.

2. Un chien et un chat prennent ensemble 1,5 minutes pour vider un bol de lait. Le chat et un hérisson prennent ensemble 3 minutes, tandis que le chien et le hérisson ensemble prennent 2 minutes. Alors le chien, le chat et le hérisson prennent tous ensemble

   (A) 50 sec ; (B) 1 min ; (C) 1 min 10 sec ; (D) 1 min 20 sec ; (E) 1 min 30 sec.

3. Notons $g$ le centre de gravité du triangle $abc$. La droite $ag$ coupe $bc$ en $a'$. Le rapport des aires des triangles $ga'c$ et $abc$ vaut

   (A) $\frac{1}{3}$ ; (B) $\frac{1}{4}$ ; (C) $\frac{1}{6}$ ; (D) $\frac{3}{8}$ ; (E) $\frac{1}{8}$.

4. Si $a$, $b$, $x$ et $y$ sont des nombres rationnels avec $a \neq 0$, alors $x = \frac{y}{a}$ est toujours équivalent à

   (A) $x(a-y) = 1$ ; (B) $ax + a = y$ ; (C) $y + b = ax + b$ ; (D) $xy = a$ ; (E) $\frac{ax-y}{a} = 1$.

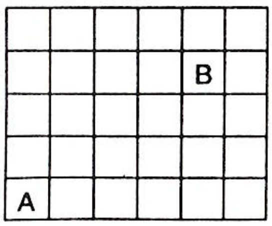
5. Dans le plan coordonné, la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $90^\circ$ dans le sens des aiguilles d'une montre applique le point de coordonnées $(-2,6)$ sur le point de coordonnées

(A) $(2,6)$ ; (B) $(6,2)$ ; (C) $(2,1)$ ;
(D) $(-3,10)$ ; (E) $(2,-6)$.

6. *(Sans réponse préformulée)* Sur un circuit automobile long de 25 km, le coureur $A$ roule à 200 km/h et le coureur $B$ à 188 km/h. Si $A$ et $B$ franchissent en même temps la ligne de départ, ils seront à nouveau, et pour la première fois, côte à côte au cours du $n$ème tour suivant de $A$ ; que vaut $n$ ?

7. Sur le quadrillage ci-dessous, les déplacements de la case $A$ vers la case $B$ obéissent aux règles suivantes :
1. un pas ne peut se faire que d'une case à une case adjacente ;
2. un pas ne peut se faire que vers le haut ou vers la droite.
Combien de chemins autorisés mènent de la case $A$ à la case $B$ ?

(A) 7 (B) 12 (C) 24 (D) 35
(E) une autre réponse



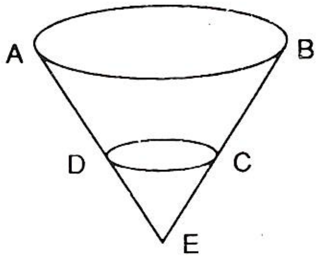

8. Les quatre derniers chiffres du nombre égal à $20 \times 19 \times 18 \times \cdots \times 2 \times 1$ sont

(A) 8000 ; (B) 6000 ; (C) 4000 ;
(D) 2000 ; (E) 0000.

9. Le tronc de cône $ABCD$ s'obtient en retirant la partie $CDE$ du cône $AEB$. Si $D$ et $C$ sont les milieux respectifs de $[BE]$ et $[AE]$, alors le rapport

$$\frac{\text{Volume du tronc } ABCD}{\text{Volume du cône } CDE} \text{ vaut :}$$

(A) 6 ; (B) 7 ; (C) $\frac{7}{2}$ ; (D) $\frac{7}{3}$ ; (E) $\frac{8}{3}$.



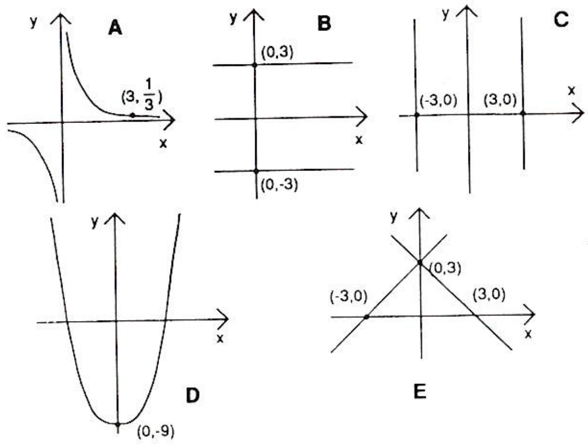

10. Lors d'un triple saut, la longueur du deuxième bond vaut les $\frac{9}{10}$ de la longueur du premier ; la longueur du troisième vaut les $\frac{8}{10}$ de la longueur du deuxième. Quelle est la longueur du premier saut si la longueur totale du triple saut est de 18,34 m ?

(A) 6,9 m (B) 7 m (C) 7,1 m (D) 7,2 m
(E) 7,3 m

11. Si $x^2 - y^2 = 24$, $x - y = 8$ et $y = z - x$, alors $z$ vaut

(A) $-16$ ; (B) 16 ; (C) 12 ; (D) 3 ;
(E) $-3$.

12. Quel graphique représente l'ensemble des points $(x, y)$ solutions de l'équation $y = (x+3)(x-3)$ ?




13. Les rayons de 3 disques d'aire non nulle grandissent de 2 cm en 2 cm. Si l'aire du plus grand disque vaut la somme des aires des deux autres, alors le rayon du disque moyen mesure

(A) 2 cm ; (B) 4 cm ; (C) 8 cm ;
(D) 10 cm ; (E) 16 cm.

14. Quel est le nombre total de chiffres (en comptant les répétitions) dans l'écriture décimale du produit $2^{26} \times 5^{19}$ ?

(A) 19 (B) 21 (C) 22 (D) 26 (E) 45

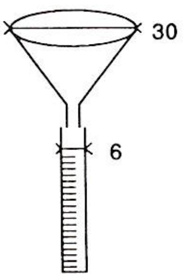
15. Dans l'espace euclidien tridimensionnel, appelons *jonction* toute réunion d'au moins deux segments de longueur unité ayant tous le point $o$ comme une de leurs extrémités, et deux à deux soit perpendiculaires soit opposés.
Combien existe-t-il de jonctions deux à deux non isométriques ?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

16. On note $m \uparrow n$ le nombre $m$ à la puissance $n^n$. Alors $(2 \uparrow 2) \uparrow 2$ vaut

(A) 8 ; (B) 16 ; (C) 256 ; (D) 65 536 ; (E) un nombre supérieur à 100 000.

17. L'ouverture de l'entonnoir d'un pluviomètre a un diamètre de 30 cm. L'eau recueillie au cours d'une averse s'écoule dans un tube dont le diamètre vaut 6 cm.




Si l'eau s'élève dans l'éprouvette à une hauteur de 30 cm, quelle est la hauteur d'eau tombée durant cette averse ?

(A) 30 mm ; (B) 3 mm ; (C) 15 mm ; (D) 1,5 mm ; (E) 12 mm.

18. *(Sans réponse préformulée)* Posons $a \otimes b = a + b - 3$ et $a \oplus b = 3ab$. Que vaut alors $(2 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 6)$ ?

19. Le taux de T.V.A. sur les voitures passe de 25% à 19,5%. Par rapport à l'ancien prix de vente, l'acheteur réalise une économie de

(A) 2% ; (B) 3,6% ; (C) 4,4% ; (D) 5,5% ; (E) 10%.

20. Le nombre réel 0,246464646... vaut aussi

(A) $\frac{244}{1010}$ ; (B) $\frac{24}{99}$ ; (C) $\frac{122}{495}$ ; (D) $\frac{46}{99}$ (E) $\frac{64}{49}$.

21. *(Sans réponse préformulée)* Dans un triangle $abc$ rectangle en $a$, si $|ab| = 15$ et $|ac| = 20$, quelle est la mesure de la hauteur issue de $a$ ?

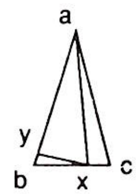
22. La moyenne arithmétique de 5 nombres vaut 5400. Si chaque nombre augmente de 100, de combien augmente leur moyenne arithmétique ?

23. Quel est le centième chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du quotient de 3 par 7 ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

24. *(Sans réponse préformulée)* On considère le triangle équilatéral $abc$ et les points $p$, $q$, $r$ respectivement sur $[ab]$, $[bc]$ et $[ca]$ tels que $|ap| = |bq| = |cr| = \frac{1}{3}|ab|$. Déterminer le rapport des aires des triangles $abc$ et $pqr$.

25. Sur la figure, $|ab| = |ac|$, l'angle $\widehat{cax}$ vaut 20° et $|ax| = |ay|$. La mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{bxy}$ est




(A) 8 ; (B) 9 ; (C) 10 ; (D) 12,5 ; (E) 20.

26. Si $6x + 5y = 4$, $6x + 2y = 7$ et $9x + 6y = k$, que vaut $k$ ?

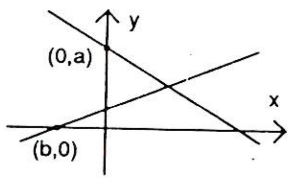
(A) 11 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $-1$ (E) $\frac{15}{2}$

27. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
Dans le plan, si deux triangles isométriques sont situés de part et d'autre d'un côté commun, l'un n'est jamais l'image de l'autre par
(A) une symétrie orthogonale ;
(B) une symétrie centrale ;

(C) une rotation ;
(D) une translation ;
(E) une translation suivie d'une symétrie centrale.

28. Si les deux droites ont respectivement pour équations $x + 2y = 8$ et $y = x + 1$, alors $a$ et $b$ valent respectivement

(A) 4 et 1,5 ; (B) 2,4 et $-1,5$ ; (C) 8 et $-1$ ; (D) 2 et 3 ; (E) 4 et $-1$.




29. Combien de naturels inférieurs à 100 sont tels que les restes de leurs divisions par 2, par 3 et par 5 valent tous 1 ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

30. Géraldine, sur sa bicyclette, roule à la vitesse constante de 24 km/h. Cindy commence à courir au moment où Géraldine passe à sa hauteur. Laquelle des deux arrivera la première 100 mètres plus loin, si Cindy parcourt ces 100 mètres en 14 secondes ?
(A) Géraldine, avec 17,14 m d'avance sur Cindy.
(B) Géraldine, avec 1,714 m d'avance sur Cindy.
(C) Elles arrivent en même temps.
(D) Cindy, avec 6,66 m d'avance sur Géraldine.
(E) Cindy, avec 7,14 m d'avance sur Géraldine.

## Réponses

### Question 1 / réponse D

L'aire d'un carré de côté $c$ vaut $c^2$.
L'aire d'un carré de côté $2c$ vaut $4c^2$ ; elle est donc quatre fois plus grande que celle du premier carré.

### Question 2 / réponse D

Soit $V$ le volume du bol.
Soient $x$, $y$ et $z$ les volumes de lait absorbés respectivement par le chien, le chat et le hérisson en une minute.
Les données permettent d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+y) &= V \\ 3(y+z) &= V \\ 2(x+z) &= V \end{cases}$$

D'où on tire successivement

$$\begin{cases} x+y &= \frac{2V}{3} \\ y+z &= \frac{V}{3} \\ x+z &= \frac{V}{2} \end{cases}$$

$$2(x+y+z) = \frac{3V}{2}$$

ou

$$x+y+z = \frac{3}{4}V$$

Ainsi, le chien, le chat et le hérisson vident les trois quarts du bol en une minute ; ils leur faut donc 1 minute et 20 secondes pour vider l'entièreté du bol.

### Question 3 / réponse C

Le point $a'$ étant le milieu de $[bc]$, la base $[a'c]$ du triangle $ga'c$ vaut la moitié de la base $[bc]$ du triangle $gbc$ (cf fig. 1). Par contre, ils ont la même hauteur. De là, il vient

$$\frac{\text{aire } ga'c}{\text{aire } gbc} = \frac{1}{2}.$$

Les triangles $abc$ et $gbc$ ont la même base $[bc]$, mais la hauteur de $abc$ est triple de celle de $gbc$. En effet, $g$ se trouve aux deux tiers de $[aa']$ à partir de $a$. Dès lors, en invoquant le théorème de Thalès, on peut affirmer que la distance de $g$ à $bc$ est égale au tiers de la distance de $a$ à $bc$.

Ainsi, on a

$$\frac{\text{aire } gbc}{\text{aire } abc} = \frac{1}{3}.$$

D'où, finalement

$$\frac{\text{aire } ga'c}{\text{aire } abc} = \frac{\text{aire } ga'c}{\text{aire } gbc} \cdot \frac{\text{aire } gbc}{\text{aire } abc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

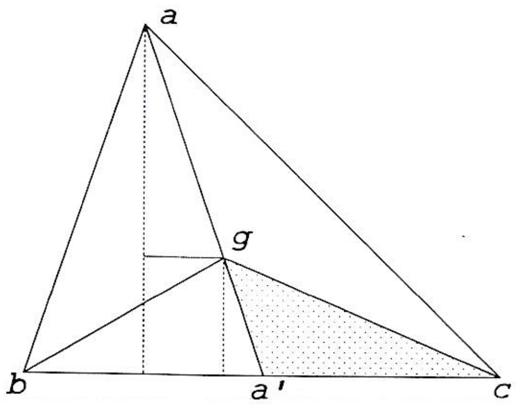



Fig. 1

## Question 4 / réponse C

Comme $a \neq 0$, $x = \dfrac{y}{a}$ est équivalent à $ax = y$ et à $ax + b = y + b$.

## Question 5 / réponse A

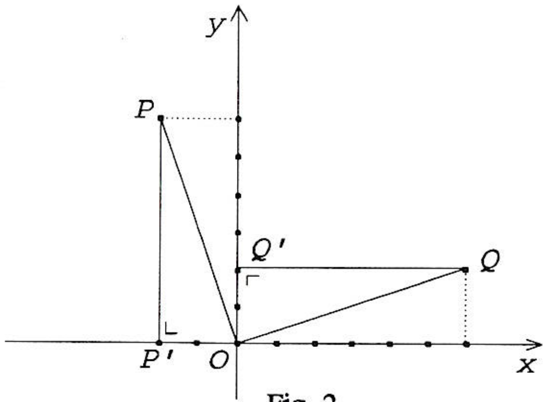



Fig. 2

Appelons $P$ le point de coordonnée $(-2, 6)$ et $P'$ sa projection orthogonale sur l'axe $Ox$ (cf fig. 2). La rotation de centre $O$ et d'angle $90^\circ$ applique le triangle $OPP'$ sur le triangle $OQQ'$ (situé dans le premier quadrant) tel que $Q'$ appartienne à l'axe $Oy$, que $QQ'$ soit parallèle à l'axe $Ox$, que $|OQ'| = 2$ et que $|QQ'| = 6$. L'image de $P$ est alors le point $Q$ de coordonnée (2,6).

## Question 6 / réponse : 17

Pendant que $A$ fait un tour complet, soit 25 km, $B$ ne parcourt que

$$\frac{25 \times 188}{200} = 23,5 \text{ km}.$$

$A$ « gagne » donc 1,5 km sur $B$ à chaque tour. Dès lors, $A$ doit accomplir $\dfrac{25}{1,5} = \dfrac{250}{15} = \dfrac{50}{3} = 16,666\ldots$ tours pour rejoindre $B$. Ils seront donc à nouveau côte à côte au cours du 17ème tour (que $A$ effectuera après avoir franchi la ligne de départ en même temps que $B$).

## Question 7 / réponse D

Numérotons les lignes et les colonnes du quadrillage (cf fig. 3).
Désignons par

- $k(i, j)$, où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la case qui se trouve à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne ;

- $C(i, j)$ le nombre de chemins obéissant aux deux règles énoncées et conduisant de la case $A = k(1, 1)$ à la case $k(i, j)$.

Il va de soi que $C(1, j) = 1$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et que $C(i, 1) = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Autrement dit, il n'existe qu'un seul chemin qui conduit de $A$ à une case de la première ligne ou de la première colonne.

De plus, les chemins qui aboutissent à la case $k(i, j)$, où $i > 1$ et $j > 1$, passent soit par la case $k(i-1, j)$, soit par la case $k(i, j-1)$ de sorte que

$$C(i, j) = C(i-1, j) + C(i, j-1).$$

Cette relation permet de proche en proche d'obtenir le nombre de chemins qui aboutissent en $B = k(5, 4)$. Dans le quadrillage de la figure 3, on place d'abord le nombre 1 dans chacune des cases de la première ligne et de la première colonne ; puis on remplit successivement les lignes et les colonnes suivantes en plaçant dans chaque case la somme des nombres des cases adjacentes de gauche et du dessous. Par exemple, $C(4, 3) = C(3, 3) + C(4, 2) = 6 + 4 = 10$.
Par ce procédé, on obtient $C(5, 4) = 35$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Fig. 3**

### Question 8 / réponse E

Dans le produit $20 \times 19 \times \cdots \times 2 \times 1$, il y a quatre multiples de 5 et au moins quatre multiples de 2. Par suite, ce produit est divisible par 10000. Il se termine donc par 0000.

### Question 9 / réponse B

L'homothétie de centre $E$ et de rapport 2 applique le cône $ECD$ sur le cône $EAB$. Or, toute homothétie multiplie le volume d'un corps par le cube de la valeur absolue de son rapport. Le cône $EAB$ a donc un volume huit fois plus grand que celui du cône $ECD$. De là, on déduit que le tronc de cône $ABCD$ a un volume sept fois plus grand que celui du cône $ECD$. Autrement dit, on a

$$\frac{\text{aire } ABCD}{\text{aire } ECD} = 7$$

### Question 10 / réponse B

Soit $x$ la longueur du premier bond. On doit avoir

$$x + 0,9x + 0,9 \cdot 0,8x = 18,34$$

La résolution de cette équation donne $x = 7$. Le premier bond a donc une longueur de 7 m.

### Question 11 / réponse D

On a

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 8z$$

Donc, $8z = 24$ et $z = 3$.

### Question 12 / réponse D

Le graphique représentant l'ensemble des solutions de l'équation

$$y = (x - 3)(x + 3)$$

doit comprendre le point de coordonnée $(0, -9)$. Seul le graphique (D) satisfait à cette condition.

### Question 13 / réponse C

Soit $r$ le rayon du disque moyen. On doit avoir

$$\pi(r + 2)^2 = \pi(r - 2)^2 - \pi r^2$$

Après avoir développé les carrés et simplifié l'équation, on obtient

$$r^2 - 8r = 0$$

dont la seule solution acceptable est 8. Ainsi, le rayon du disque moyen mesure 8 cm.

### Question 14 / réponse C

On a $2^{26} \times 5^{19} = 2^7 \times 10^{19} = 128 \times 10^{19}$. L'écriture décimale de ce produit comprend 22 chiffres dont 19 zéros.

### Question 15 / réponse A

Dans un repère orthonormé de l'espace, considérons les points $i(1, 0, 0)$, $j(0, 1, 0)$, $k(0, 0, 1)$, $i'(-1, 0, 0)$, $j'(0, -1, 0)$ et $k'(0, 0, -1)$.
Les jonctions, deux à deux non isométriques, pourraient être

$$[oi] \cup [oj],\ [oi] \cup [oi'],$$
$$[oi] \cup [oj] \cup [ok],\ [oi] \cup [oj] \cup [oj'],$$
$$[oi] \cup [oj] \cup [ok] \cup [ok'],$$
$$[oi] \cup [oi'] \cup [oj] \cup [oj'],$$
$$[oi] \cup [oj] \cup [oj'] \cup [ok] \cup [ok'] \text{ et}$$
$$[oi] \cup [oi'] \cup [oj] \cup [oj'] \cup [ok] \cup [ok'].$$

Il y en a huit. On ne peut en trouver d'autres non isométriques à celles-ci.

### Question 16 / réponse D

On a $(2 \uparrow 2) \uparrow 2 = 2^{2^2} \uparrow 2 = 2^4 \uparrow 2$
$= 16 \uparrow 2 = 16^{2^2} = 16^4 = 65536$.

**Question 17 / réponse E**

Le pluviomètre recueille l'eau qui tombe sur une surface dont l'aire vaut celle d'un disque ayant 30 cm de diamètre. Par contre, le réservoir de ce pluviomètre, de forme cylindrique, a pour base un disque ayant 6 cm de diamètre. L'eau est donc stockée sur une surface dont l'aire est 25 fois plus petite que celle de la surface de réception (l'aire d'un disque est proportionnelle au carré du rayon). La hauteur d'eau tombée est, par conséquent, 25 fois moindre que la hauteur de l'eau dans le réservoir. Ainsi, elle vaut 12 mm.

**Question 18 / réponse : 60**

On a $(2 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 6) = (2+5-3) \oplus (2+6-3)$ $= 4 \oplus 5 = 3 \times 4 \times 5 = 60$.

**Question 19 / réponse C**

Soit $p$ le prix hors T.V.A. de la voiture.
L'ancien prix de vente T.V.A. comprise était alors $1,25p$ tandis que le nouveau est $1,195p$. Le bénéfice réalisé par l'acheteur est donc $0,055p$. Par conséquent, le pourcentage que ce gain représente par rapport à l'ancien prix de vente est

$$\frac{0,055p}{1,25p} = \frac{55}{1250} = \frac{44}{1000} = 4,4\%.$$

**Question 20 / réponse C**

Posons $x = 0,2464646\ldots$ et $y = 0,464646\ldots$. On a

$$10x = 2 + y \quad \text{et} \quad 100y = 46 + y.$$

D'où

$$y = \frac{46}{99} \quad \text{et} \quad x = \frac{2 + \frac{46}{99}}{10} = \frac{244}{990} = \frac{122}{495}.$$

**Question 21 / réponse : 12**

Appelons respectivement $a$, $b$, $c$ et $h$ les mesures de l'hypoténuse, des côtés de l'angle droit et de la hauteur issue de $a$ dans le triangle $abc$.
En calculant l'aire du triangle rectangle de deux manières différentes (mais utilisant la même formule: la moitié du produit d'une base par la hauteur correspondante), on obtient

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \quad \text{ou} \quad h = \frac{bc}{a}.$$

Par le théorème de Pythagore, on trouve $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. D'où

$$h = \frac{15 \times 20}{25} = 12.$$

**Question 22 / réponse C**

Si chacun des 5 nombres augmente de 100, leur somme augmente de 500. Leur moyenne augmente alors de $\frac{500}{5} = 100$.
**Remarque** On peut généraliser cette propriété. Si chaque nombre d'une « série » statistique (suite finie de nombres qui proviennent en général d'une expérience et sont susceptibles d'un traitement statistique) augmente de $k$ ($k \in \mathbb{R}$), alors leur moyenne augmente aussi de $k$.

**Question 23 / réponse D**

Le nombre $\frac{3}{7}$ est rationnel. Il s'ensuit que son écriture décimale est périodique :

$$\frac{3}{7} = 0,\overbrace{428571}\overbrace{428571}\ldots$$

La longueur de la période étant égale à 6, la 100ème décimale est égale à la 4ème décimale (puisque 4 est le reste de la divison euclidienne de 100 par 6) ; cette décimale est donc 5.

**Question 24 / réponse : 3**

Soit $a'$ le milieu du côté $[bc]$ (cf fig. 4).
Considérons l'homothétie $h$ de centre $b$ qui applique $a$ sur $p$.
L'image de $a'$ par $h$ est $q$. En effet, on a

$$|bq| = \frac{1}{3}|bc| = \frac{1}{3} \times 2|ba'| = \frac{2}{3}|ba'| \text{ et}$$

$$|bp| = |ba| - |ap| = |ba| - \frac{1}{3}|ba| = \frac{2}{3}|ba|.$$

En outre, ceci montre que le rapport de l'homothétie $h$ vaut $\frac{2}{3}$.
Or, les homothéties multiplient les aires par le carré de leur rapport. On a donc

$$\text{aire } bpq = \left(\tfrac{2}{9}\right)^2 \text{ aire } baa'$$
$$= \tfrac{4}{9} \times \tfrac{1}{2} \text{ aire } abc = \tfrac{2}{9} \text{ aire } abc.$$

Comme les triangles $apr$, $bqp$ et $crq$ sont isométriques, on peut exprimer l'aire du triangle $pqr$ en fonction de l'aire du triangle $abc$ :

$$\text{aire } pqr = \text{ aire } abc - 3 \times \text{ aire } bpq$$
$$= \text{ aire } abc - 3 \times \tfrac{2}{9} \text{ aire } abc = \tfrac{1}{3} \text{ aire } abc.$$

D'où, il vient

$$\frac{\text{aire } abc}{\text{aire } pqr} = 3.$$

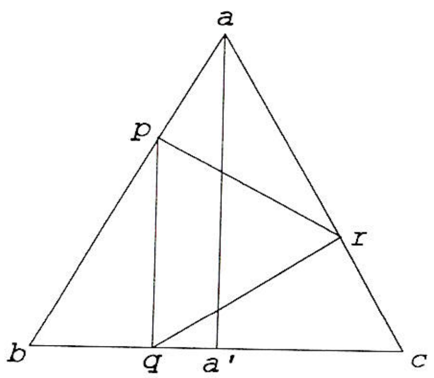



**Fig. 4**

## Question 25 / réponse C

Partons du fait que la somme des angles $\widehat{x_1}$, $\widehat{x_2}$ et $\widehat{x_3}$ vaut 180° (cf fig. 5).
Le triangle $axy$ étant isocèle, $\widehat{x_2}$ et $\widehat{y_1}$ ont la même amplitude. Par ailleurs, $\widehat{x_3}$ peut être exprimé en fonction des autres angles du triangle $axc$.
Ainsi, on a successivement

$$\widehat{x_1} + \widehat{x_2} + \widehat{x_3} = 180^\circ$$
$$\widehat{x_1} + \widehat{y_1} + (180^\circ - 20^\circ - \widehat{c}) = 180^\circ$$
$$\widehat{x_1} + \widehat{y_1} - \widehat{c} = 20^\circ .$$

L'angle $\widehat{y_1}$ est extérieur au triangle $bxy$ ; par conséquent, il vaut la somme des angles intérieurs non adjacents de ce triangle. En outre, le triangle $abc$ étant isocèle, les angles $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ ont la même amplitude. En tenant compte de cela et repartant de l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\widehat{x_1} + (\widehat{b} + \widehat{x_1}) - \widehat{b} = 20^\circ$$
$$2\widehat{x_1} = 20^\circ$$
$$\widehat{x_1} = 10^\circ .$$

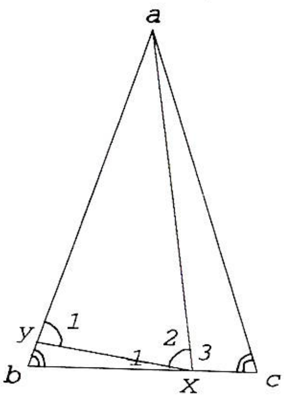



**Fig. 5**

## Question 26 / réponse E

$$k = 9x + 6y = (6x + 5y) + \frac{1}{2}(6x + 2y)$$
$$= 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

## Question 27 / réponse D

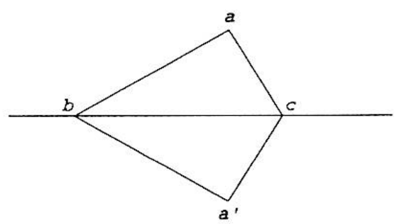



**Fig. 6a**

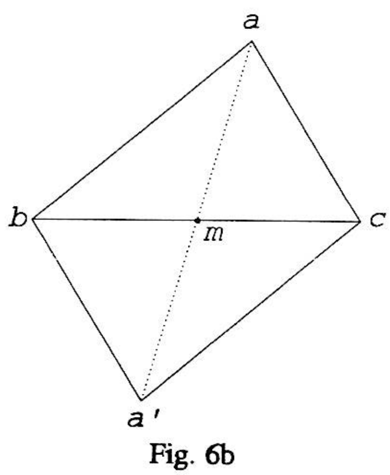



**Fig. 6b**

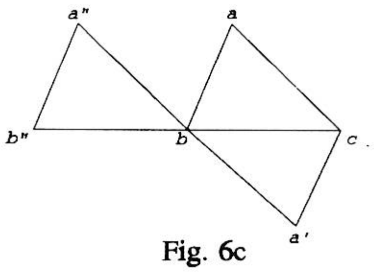



Fig. 6c

Les affirmations (A), (B), (C) et (E) sont fausses. Les figures 6a, 6b et 6c nous le montrent clairement. A cet égard, notons qu'une symétrie centrale est une rotation de 180°. Seule l'affirmation (D) est vraie : deux triangles isométriques $abc$ et $a'bc$ **situés de part et d'autre d'un côté commun** ne peuvent en effet être image l'un de l'autre par une translation. Seule la translation nulle pourrait conserver le côté commun $[bc]$ ; mais alors tous les points seraient fixes et $a'$ ne pourrait être l'image de $a$ !

## Question 28 / réponse E

La droite d'équation $x + 2y = 8$ coupe l'axe $Oy$ au point de coordonnée $(0,4)$ tandis que la droite d'équation $y = x + 1$ coupe l'axe $Ox$ au point de coordonnée $(-1, 0)$. Donc, $a$ et $b$ valent respectivement $4$ et $-1$.

## Question 29 / réponse D

Soit $N$ un nombre naturel vérifiant les conditions énoncées : lorsqu'on divise $N$ par 2, 3 ou 5, le reste vaut 1. Autrement dit, $N - 1$ doit être divisible par 2, 3 et 5, donc par 30. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$N - 1 = 30k$$

ou

$$N = 30k + 1.$$

Pour $k$ égal à 0, 1, 2 ou 3, $N$ est inférieur à 100. Il y a ainsi 4 nombres naturels qui satisfont aux conditions.

## Question 30 / réponse D

Nous savons que Cindy parcourt ces 100 m en 14 s. Calculons la distance $d$ franchie par Géraldine en 14 s :

$$d = \frac{24000}{3600} \times 14 = \frac{280}{3} \approx 93,66 \text{ m}$$

Il apparaît clairement que Cindy arrive la première au bout des 100 m et que son avance sur Géraldine est à ce moment de 6,66 m.

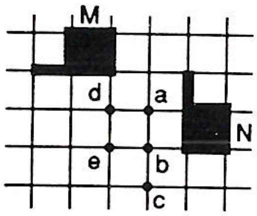
 Math-Jeunes n° 61, 110–119, 1993

# Maxi éliminatoire

## Questions

1. Le centre de la rotation qui applique le motif $M$ sur le motif $N$ est le point

(A) $a$ ; (B) $b$ ; (C) $c$ ; (D) $d$ ; (E) $e$.




2. Admettons que, dans une population donnée, une célébrité est une personne connue de toute autre personne, mais ne connaissant aucune autre personne. Le nombre de célébrités dans une population quelconque de 100 personnes est

(A) toujours 0 ; (B) toujours 1 ;
(C) parfois 0, parfois 1 ;
(D) parfois 0, parfois 100 ;
(E) parfois 1, parfois 2.

3. Quel est le plus petit nombre naturel qui soit non nul, multiple de 90 et cube parfait ?

(A) 90 (B) 125 (C) 300 (D) 27 000
(E) 243 000

4. Si, sur une liste électorale, le nombre de représentants d'un sexe ne peut dépasser le double du nombre de représentants de l'autre sexe, nécessairement
(A) toute liste comporte au moins autant d'hommes que de femmes ;
(B) toute liste comporte au moins 30% d'hommes ;
(C) toute liste comporte au moins 40% de femmes ;
(D) aucune liste ne comporte moins de 50% de représentants d'un même sexe ;
(E) aucune liste ne comporte plus de 50% de représentants d'un même sexe.

5. *(Sans réponse préformulée)* Un marchand réduit un prix de 50%. Par après, il applique une nouvelle réduction de 60%. Si la réduction totale est alors de $n$%, que vaut $n$ ?

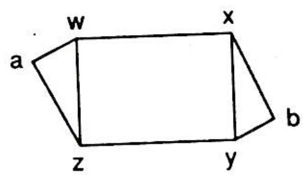
6. Si la fonction $f$ applique le nombre entier $x$ sur $f(x) = -3x+1$, la fonction réciproque $f^{-1}$ applique $x$ sur $f^{-1}(x) =$

(A) $3x-1$ ; (B) $\frac{1}{3}x-1$ ; (C) $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ;
(D) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ; (E) une autre réponse.

7. Si $k$, $\ell$, $m$, $n$ sont les sommets consécutifs d'un rectangle, la composée $s_n \circ s_m \circ s_\ell \circ s_k$ des quatre symétries centrales de centres respectifs $n$, $m$, $\ell$, $k$ est
(A) la translation de vecteur $\overrightarrow{km}$ ;
(B) la symétrie orthogonale d'axe $km$ ;
(C) la symétrie centrale par rapport au centre du rectangle ;
(D) la transformation identique ;
(E) une symétrie glissée.

8. Dans la figure, $wxyz$ est un rectangle, $waz$ est un triangle rectangle en $a$ et $b$ est le symétrique du point $a$ par rapport au point d'intersection des diagonales du rectangle $wxyz$. Si $p$ est le point d'intersection des droites $aw$ et $bx$, le triangle $apb$ est nécessairement

(A) acutangle ; (B) rectangle ;
(C) équilatéral ; (D) isocèle ;
(E) isocèle et rectangle.



9. Le mobile 1 parcourt 50 kilomètres en 2 heures et trente minutes ; le mobile 2 parcourt 200 mètres en 30 secondes ; le mobile 3 parcourt 300 mètres en 1 minute ; le mobile 4 parcourt 1000 mètres en 3 minutes.
Quels sont les deux mobiles qui ont la même vitesse moyenne ?

(A) 1 et 2 (B) 2 et 3 (C) 1 et 4 (D) 2 et 4 (E) 3 et 4

10. Sur les 30 élèves d'une classe, 16 jouent d'un instrument ; quatre de ceux-ci sont des garçons. Si 60% des filles de la classe jouent d'un instrument, le pourcentage des garçons de la classe qui ne jouent d'aucun instrument est

(A) 25% ; (B) 40% ; (C) 50% ; (D) 60% ; (E) 80%.

11. Dans le triangle $abc$, rectangle en $c$, les côtés $[ac]$ et $[bc]$ de l'angle droit mesurent respectivement 3 cm et 4 cm. Lorsque le triangle tourne autour de la droite $ab$, il engendre un solide de volume $V_1$. En tournant autour de $bc$, ce triangle engendre un solide de volume $V_2$. En tournant autour de $ac$, il engendre un solide de volume $V_3$. Alors

(A) $V_1 = V_2 = V_3$ ; (B) $V_1 < V_2 < V_3$ ; (C) $V_1 > V_2 > V_3$ ; (D) $V_1 > V_2$ et $V_2 = V_3$ ; (E) $V_1^2 = V_2^2 + V_3^2$

12. *(Sans réponse préformulée)* Que vaut le reste de la division de $\left(\left((x-1)^2-1\right)^3-1\right)^2$ par $x-1$ ?

13. Les âges (nombres entiers d'années) des quatre enfants d'une famille ont un produit égal à 126 et une somme égale à 19. Quel est l'âge de l'aîné ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) une autre réponse

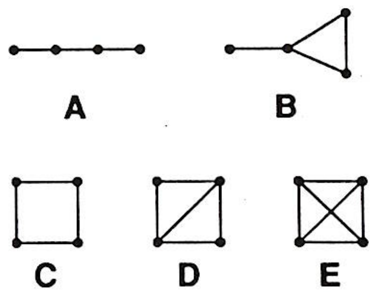
14. Sur l'ensemble $S$ des sommets d'un pentagone régulier, une loi notée $\perp$ est définie par

- $p \perp q$ est, pour $p \neq q$, le sommet du pentagone situé sur la médiatrice de $[pq]$ ;
- $p \perp p = p$.

Laquelle des propriétés suivantes, où $p, q \in S$, n'est pas toujours satisfaite ?

(A) $p \perp q = q \perp p$
(B) $p \perp (q \perp r) = (p \perp q) \perp r$
(C) $p \perp (q \perp p) = p \perp (p \perp q)$
(D) $(q \perp r) \perp (q \perp r) = q \perp r$
(E) $(p \perp p) \perp q = q \perp p$

15. Etant donnés, sur la droite réelle, 4 intervalles fermés de longueur 1, un réseau est formé en représentant chaque intervalle par un nœud et en reliant deux nœuds lorsque les intervalles qu'ils représentent se coupent. Lequel des réseaux suivants ne sera jamais obtenu ainsi ?




16. Un carton est découpé en $n$ carrés. Alors $n$ doit être différent de

(A) 5 ; (B) 7 ; (C) 9 ; (D) 11 ; (E) 13.

17. Soit $p \in ]0, 15[$. Le minimum de l'expression

$$|x-p| + |x-15| + |x-p-15|,$$

où $x$ est un nombre quelconque, vaut

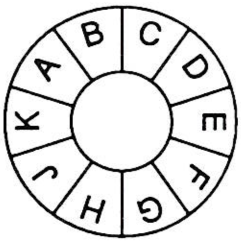
(A) 5 ; (B) 10 ; (C) 14 ; (D) 15 ; (E) 20.

18. Si $a$, $b$, $c$, $d$ sont des nombres strictement positifs, distincts et tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, lequel des nombres suivants est toujours extérieur à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ ?

(A) $\frac{a+c}{b+d}$ (B) $\sqrt{\frac{ac}{bd}}$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$
(D) $\frac{2ac}{bc+ad}$ (E) $\frac{ad+bc}{bd}$

19. $KGB$ est le secret d'un coffre (dont la serrure est figurée ci-contre), c'est-à-dire : le coffre s'ouvre dès que les touches marquées $K$, $G$ et $B$ sont enfoncées dans un ordre quelconque. Le mécanisme du coffre peut être modifié de sorte que le secret soit n'importe quel assemblage d'au moins une et d'au plus neuf lettres non répétées, prises parmi celles de la figure. En plus du secret déjà pris ($KGB$), combien cela fait-il de secrets ?

(A) 88 (B) 99 (C) 1021 (D) 1022
(E) 1024




20. Deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ de nombres sont définies par $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ et, pour $n > 1$,

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \qquad y_{n+1} = x_n + y_n.$$

Le rapport $\frac{x_n}{y_n}$ tend vers une des valeurs suivantes. Laquelle ?

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $1,5$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $1,41$
(E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

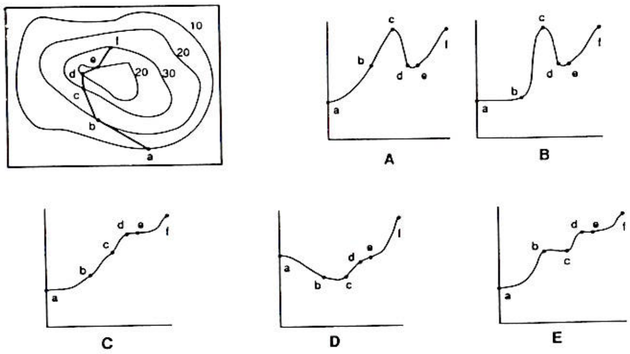
21. Quel est le plus grand nombre de facteurs polynomiaux (non triviaux) en lesquels se factorise

$$a^8 + a^4b^4 + b^8,$$

si seulement des coefficients réels sont admis ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8
(E) un autre nombre

22. La carte indique l'altitude en mètres de courbes de niveau. Un promeneur effectue le trajet représenté par $abcdef$, avec $|ab| = 1,5$ cm, $|bc| = 0,7$ cm, $|cd| = 0,5$ cm, $|de| = 0,4$ cm et $|ef| = 1$ cm. Le relief de ce trajet (hauteur en fonction de la distance horizontale) ressemble plus à




23. *(Sans réponse préformulée)* Sur chaque arête d'un octaèdre, prenons les deux points qui divisent l'arête en trois parties isométriques. Combien de faces possède le polyèdre convexe dont les 24 points ainsi obtenus sont les sommets ?

24. Les sommets d'un quadrilatère convexe $p, q, r, s$ sont situés sur un cercle de diamètre $[ps]$. Ses côtés $[pq]$ et $[qr]$ mesurent 3, tandis que le rayon du cercle vaut $2,5$. Quelle est la longueur de $[rs]$ ?

(A) $0,25\sqrt{31}$ (B) $1,4$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}-1$
(E) $1,45$

25. Les quatre sommets d'un carré sont situés sur l'ellipse d'équation (dans un repère orthonormé) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} = 1$. Alors la longueur d'un côté du carré vaut

(A) $2,4$ ; (B) $2,4\sqrt{2}$ ; (C) $4,8$ ; (D) $5$ ;
(E) une autre valeur.

26. $\frac{1-2+2^2-2^3+\cdots-2^{1991}+2^{1992}}{1+2^{1993}} =$

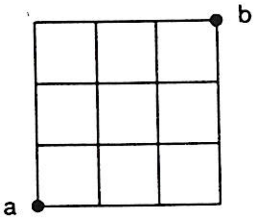
(A) $-1$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $3$

27. Deux nageurs partent en même temps des largeurs opposées d'une piscine de 50 m de long. Pendant 8 minutes, ils nagent parallèlement à la longueur du bassin, l'un à la vitesse de 0,3 m/s, l'autre à la vitesse de 0,8 m/s. Combien de fois se croisent-ils (nageant en sens opposés) ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

28. Sur la figure, pour se rendre de $a$ en $b$, seuls des déplacements vers la droite ou vers le haut le long d'un segment tracé sont permis. En chaque sommet, toutes les possibilités sont équiprobables. Quelle est la probabilité de se rendre de $a$ en $b$ en suivant uniquement le bord du carré ?

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{16}$




29. Si $a$ est l'angle dont $x$ est une mesure en degrés, la dérivée de la fonction qui applique $x$ sur le cosinus de $a$ est, pour $x = 1$, plus proche de

(A) $0,0003$ ; (B) $-0,0003$ ;
(C) $-0,9999$ ; (D) $-0,0175$ ; (E) $-1,5$.

30. *(Sans réponse préformulée)* J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 119 ans. Quel est mon âge ? (Tous les âges sont ici des nombres entiers).

## Réponses

**Question 1 / réponse E**

Il s'agit d'une rotation de centre $e$ et d'amplitude 90°.

**Question 2 / réponse C**

Consulte la question 2 de la MINI éliminatoire.

**Question 3 / réponse D**

Consulte la question 10 de la MINI éliminatoire.

**Question 4 / réponse B**

Appelons $x$ le nombre de représentants de l'un des deux sexes et $y$ le nombre de représentants de l'autre sexe. On doit avoir

$$x \leqslant 2y.$$

De là, il vient

$$x + y \leqslant 3y \quad \text{ou} \quad y \geqslant \frac{x+y}{3}$$

Ainsi, toute liste doit comporter au moins un tiers d'hommes et un tiers de femmes.

**Question 5 / réponse : 80**

Consulte la question 19 de la MINI éliminatoire.

**Question 6 / réponse C**

La fonction $f$ applique l'entier $n$ sur l'entier

$$m = -3n + 1.$$

Sa fonction réciproque applique alors l'entier $m$ (multiple de 3 plus 1) sur

$$n = \frac{1-n}{3} = -\frac{n}{3} + \frac{1}{3}.$$

Il s'agit donc de la fonction qui applique $x$ sur $f^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

**Je retiens.** Dans le présent contexte, ainsi que dans d'autres domaines de la mathématique, la notation $f^{-1}$ ne désigne pas une puissance d'un point de vue algébrique (c'est-à-dire le nombre inverse). Ici, $f^{-1}$ désigne l'inverse (ou la réciproque) de la fonction (injective) $f$ pour le produit de composition des fonctions; il s'agit d'une fonction telle que

$$f^{-1} \circ f = 1,$$

où 1 représente la fonction identique (qui à $x$ associe $x$).

### Question 7 / réponse D

La composée de deux symétries centrales est une translation :

$$s_b \circ s_a = t_{\overrightarrow{2ab}}.$$

La composée de deux translations est une translation :

$$t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}.$$

Sachant cela, on a

$$s_n \circ s_m \circ s_\ell \circ s_k = t_{\overrightarrow{2mn}} \circ t_{\overrightarrow{2k\ell}} = t_{\overrightarrow{0}} = 1_\pi$$

où $1_\pi$ désigne la transformation identique.

### Question 8 / réponse B

La droite $by$ est l'image de $aw$ par la symétrie dont le centre $c$ (cf fig. 1) est le point commun aux diagonales du rectangle. Comme les droites $by$ et $bx$ sont perpendiculaires, les droites $aw$ et $bx$ le sont aussi. Dès lors, le triangle $apb$ est rectangle en $p$.
Pour que ce triangle soit isocèle, il faut que $\widehat{wac}$ soit un angle de 45° . Or, lorsque $a$ se déplace sur le demi-cercle de diamètre $wz$, extérieur au rectangle $xyzw$, l'angle $\widehat{wac}$ change d'amplitude. Par conséquent, le triangle $apb$ n'est pas toujours isocèle.

### Question 9 / réponse C

Consulte la question 27 de la MINI éliminatoire.

### Question 10 / réponse D

Un diagramme – que l'on remplit de proche en proche – donne la répartition des élèves selon deux critères : garçon ou fille d'une part, musicien ou non d'autre part (cf fig. 2). Il y a 6 garçons sur 10 qui ne jouent d'aucun instrument, donc 60% d'entre eux.

### Question 11 / réponse B

En tournant autour d'un des côtés de l'angle droit, un triangle rectangle engendre un cône. Lorsqu'il tourne autour de l'hypoténuse, il engendre alors un solide constitué de deux cônes accolés ayant la même base (cf fig. 3a et 3b).
Le volume $V$ d'un cône est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

où $r$ et $h$ sont respectivement les mesures du rayon de la base et de la hauteur.

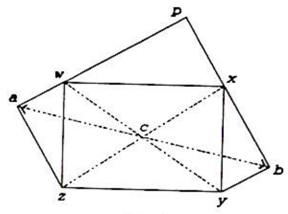


Fig. 1

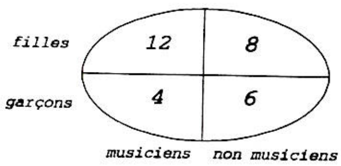


Fig. 2 : Répartition des 30 élèves.

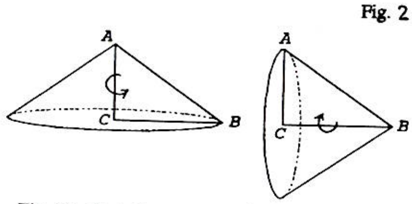


Fig. 3a : Rotations autour de AC et de BC.

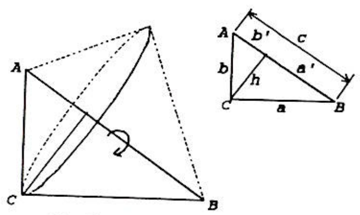


Fig. 3b : Rotation autour de AB.

Posons $a = |BC|$, $b = |AC|$ et $c = |AB|$.
Désignons par $h$ la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse et par $a'$ et $b'$ les mesures des projections orthogonales des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.
En calculant de deux manières différentes l'aire du triangle $ABC$, on obtient

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\ ;$$

donc

$$h \cdot c = a \cdot b.$$

Cela étant, nous avons

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b^2$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b$$

et

$$\begin{aligned} V_1 &= \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot a' + \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot b' \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(a'+b') \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot c \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot a\cdot b. \end{aligned}$$

Comme $h < b < a$ ($h$ étant la plus courte distance entre le point $C$ et un point de l'hypoténuse), on a

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot h < \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot b < \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot a\ ;$$

d'où nous tirons finalement $V_1 < V_2 < V_3$.

### Question 12 / réponse : 4

D'après la loi du reste – apprise dans le chapitre de la division d'un polynôme quelconque par $(x-a)$ – il suffit de remplacer $x$ par 1 ; le reste est donc

$$\left(\left((1-1)^2-1\right)^3-1\right)^2 = 4.$$

### Question 13 / réponse D

Ecrivons toutes les décompositions possibles de 126 en produit de quatre facteurs et, pour chacune de celles-ci, calculons la somme des quatre facteurs :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1\cdot1\cdot1\cdot126$ | 129 | $1\cdot1\cdot9\cdot14$ | 25 |
| $1\cdot1\cdot2\cdot63$ | 67 | $1\cdot2\cdot3\cdot21$ | 27 |
| $1\cdot1\cdot3\cdot42$ | 47 | $1\cdot2\cdot7\cdot9$ | 19 |
| $1\cdot1\cdot6\cdot21$ | 29 | $1\cdot3\cdot3\cdot14$ | 21 |
| $1\cdot1\cdot7\cdot18$ | 27 | $1\cdot3\cdot6\cdot7$ | 17 |

Dans un seul cas, la somme est égale à 19. Les quatre enfants sont alors âgés de 1, 2, 7 et 9 ans.

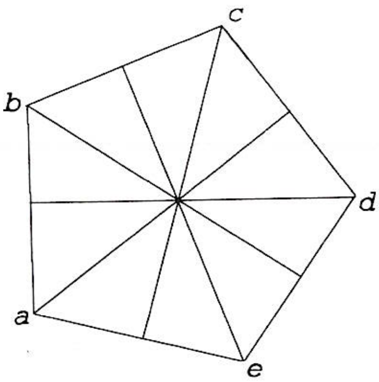
### Question 14 / réponse B

La proposition (A) $p \perp q = q \perp p$ est vraie. En effet, si $p \neq q$, alors $[pq]$ et $[qp]$ ont la même médiatrice.
De ce fait les propositions (C) et (E) sont également vraies.
Comme $p \perp p = p$, la proposition (D) est forcément vraie.
En définitive, seule la proposition (B) pourrait être fausse.

Montrons-le en donnant un contre-exemple de cette proposition. Dans un pentagone régulier abcde (cf fig. 4), nous avons

$$a \perp (b \perp c) = a \perp e = c$$

$$\text{et}\quad (a \perp b) \perp c = d \perp c = a.$$




$a \perp b = d$
$a \perp c = b$
$a \perp d = e$
$a \perp e = c$
$b \perp c = e$
$b \perp d = c$
$b \perp e = a$
$c \perp d = a$
$c \perp e = d$
$d \perp e = b$

**Fig. 4 : La loi $\perp$ définie sur l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.**

### Question 15 / réponse C

Les réseaux (A), (B), (D) et (E) sont réalisables. En voici, pour chacun d'eux, un exemple.

(A) $[0,1], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right], \left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right], [2,3]$

(B) $[0,1], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right], \left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right], \left[\frac{9}{8},\frac{17}{8}\right]$

(D) $[0,1], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right], \left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right], \left[\frac{3}{8},\frac{11}{8}\right]$

(E) $[0,1], \left[\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right], \left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

Seul le réseau (C) n'est pas réalisable (cf fig. 5).
Soient $I = [a, a+1]$, $J = [b, b+1]$, $K = [c, c+1]$ et $L = [d, d+1]$ les quatre intervalles qui constitueraient un réseau de type (C).
Supposons $a < b$ (ce qui n'est pas une restriction).
On doit avoir $I \cap J \neq \emptyset$ (1), $J \cap K \neq \emptyset$ (2), $K \cap L \neq \emptyset$ (3), $L \cap I \neq \emptyset$ (4), $I \cap K = \emptyset$ (5) et $J \cap L = \emptyset$ (6).

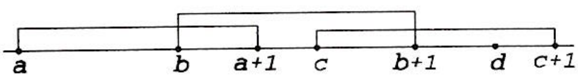



**Fig. 5**

De (1), on tire $a < b \leqslant a+1$.
De (2) et (5), il vient alors $a+1 < c \leqslant b+1$.
De (3) et (5), on déduit ensuite $b+1 < d \leqslant c+1$.

Il s'ensuit que $a + 1 < c \leqslant b + 1 < d$. Dès lors, la condition (4) ne peut être respectée.

### Question 16 / réponse A

Pour $n$ égal à 7, 9, 11 ou 13, un carton carré peut être découpé en $n$ carrés (cf fig. 6a, 6b, 6c et 6d).

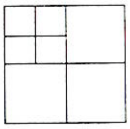


Fig. 6a

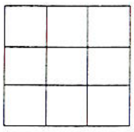


Fig. 6b

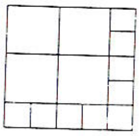


Fig. 6c

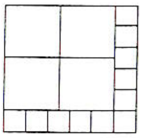


Fig. 6d

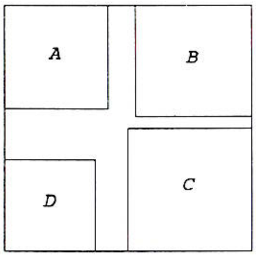


Fig. 7a : Tout découpage nécessite au moins quatre carrés.

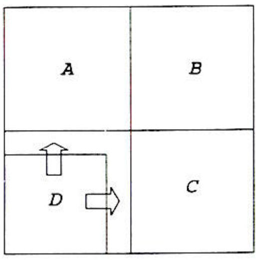


Fig. 7b : Lorsque D vient se coller à C, le couloir entre D et A disparait !

Par contre, on ne peut pas découper un carré en 5 carrés.
Essayons de le montrer. Dans tout découpage, un carré doit occuper chaque coin du carré à découper (cf fig. 7a). Cela fait 4 carrés. Si ces quatre carrés ne se touchent pas, des « couloirs » se créent entre eux, formant un cinquième morceau qui n'est pas un carré. Si nous éliminons deux de ces couloirs, par exemple ceux qui séparent les carrés $A$ et $B$ d'une part, $B$ et $C$ d'autre part, nous sommes contraints de donner les mêmes dimensions aux carrés $A$, $B$ et $C$ (cf fig. 7b). Mais alors, lorsqu'on tente d'éliminer un troisième couloir, comme celui qui sépare $C$ et $D$, le dernier couloir disparaît de lui- même, de sorte que le découpage se réduit à quatre carrés.
**Remarque** : un découpage en $n$ carrés d'un carré donné est possible pour tout naturel $n \geqslant 4$, excepté pour $n = 5$.

### Question 17 / réponse D

Comme la valeur absolue de la somme ou de la différence de deux réels est inférieure à la somme des valeurs absolues de ces réels, on a

$$|x-p| + |x-15| + |x-p-15| \geqslant |x-15| + |(x-p)-(x-p-15)| = |x-15| + 15 \geqslant 15.$$

Ainsi, 15 est un minorant de l'expression donnée. Pour $x = 15$, l'expression vaut

$$|15-p| + |p| = 15 - p + p = 15$$

en tenant compte que $p \in ]0, 15[$.
Le minorant 15 étant égal à l'une des valeurs de l'expression donnée, ce minorant en est le minimum.

### Question 18 / réponse E

Notons que les réponses proposées en B, C et D représentent respectivement les moyennes géométrique, arithmétique et harmonique des nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ strictement positifs. Ces nombres sont donc nécessairement intérieurs à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$.
D'autre part, de $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on tire $a \cdot d < b \cdot c$ ; d'où, il vient

$$a \cdot (b+d) - b \cdot (a+c) = a \cdot d - b \cdot c < 0$$

et

$$(a+c) \cdot d - (b+d) \cdot c = a \cdot d - b \cdot c < 0.$$

De là, on déduit que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Ceci montre que la réponse proposée en A est à rejeter.
Par ailleurs, on a

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{c}{d}\ ;$$

donc $\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ est extérieur à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$.

### Question 19 / réponse C

Compter le nombre d'assemblages possibles, non ordonnés, d'au plus 10 lettres non répétées, en ce y compris l'assemblage vide, revient à déterminer le nombre de parties d'un ensemble à

10 éléments. Il y en a exactement $2^{10}$. Déduisons l'assemblage vide, l'assemblage $KGB$ et l'assemblage comprenant les 10 lettres, il reste alors tous les assemblages autorisés. Il y en donc 1021.

### Question 20 / réponse C

Appelons $\lambda$ la limite cherchée. Nous avons

$$\begin{aligned}\lambda = \lim \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} &= \lim \frac{x_n+2y_n}{x_n+y_n} \\ &= \frac{\lim \frac{x_n}{y_n}+2}{\lim \frac{x_n}{y_n}+1} = \frac{\lambda+2}{\lambda+1}\end{aligned}$$

D'où, on tire $\lambda^2 = 2$. Et finalement, $\lambda = \sqrt{2}$ car $\lambda$ est la limite d'une suite de nombres positifs.

### Question 21 / réponse C

On a $a^8 + a^4b^4 + b^8$
$= (a^4 + b^4)^2 - 2a^4b^4$
$= (a^4 - a^2b^2 + b^4)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
$= ((a^2 - b^2)^2 - 3a^2b^2)\,((a^2 + b^2)^2 - a^2b^2)$
qui se décompose en les quatre facteurs $(a^2 - \sqrt{3}ab + b^2)$, $(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2)$, $(a^2 - ab + b^2)$ et $(a^2 + ab + b^2)$.
Ces quatre facteurs sont indécomposables car leurs discriminants sont strictement négatifs.

### Question 22 / réponse A

Consulte la question 29 de la MINI éliminatoire.

### Question 23 / réponse : 14

Rien ne s'oppose à ce qu'on utilise un octaèdre régulier pour effectuer le décompte des faces du polyèdre convexe construit au départ de cet octaèdre. La figure 8 montre une moitié du polyèdre dont les sommets sont les 24 points décrits. On y voit des faces hexagonales et d'autres ayant la forme d'un quadrilatère. Précisons. A chaque sommet et à chaque face de l'octaèdre, correspondent respectivement une face quadrangulaire et une face hexagonale du dit polyèdre. Comme l'octaèdre compte 6 sommets et huit faces, le polyèdre qui en dérive a 14 faces.

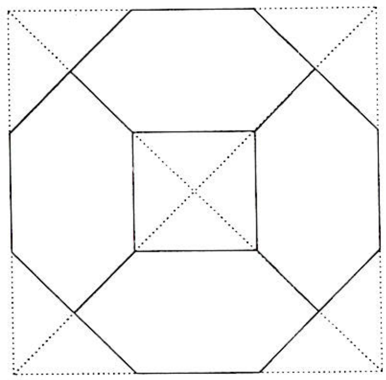


**Fig. 8**

### Question 24 / réponse B

Traçons le diamètre $[qq']$ (cf fig. 9).
Les segments $[pq]$ et $[sq']$ ont naturellement la même longueur. Dès lors, $qrsq'$ est un trapèze isocèle. Comme la droite $pr$ est perpendiculaire à la droite $rs$, elle l'est aussi à la droite $qq'$.
Désignons par $t$ le point commun aux droites $pr$ et $qq'$.
De ce qui précède, on déduit que $|rs| = |qq'| - 2|qt|$. Or, le triangle $qrq'$ est rectangle en $r$ et $[rt]$ en est la hauteur relative à l'hypoténuse. De ce fait, on a

$$|qr|^2 = |qq'| \cdot |qt|.$$

D'où, on tire $|qt| = \frac{9}{5}$ et, ensuite,
$|rs| = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$.

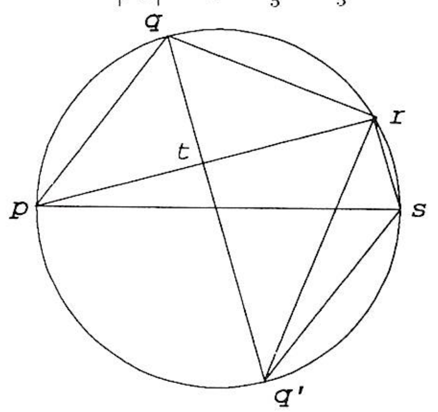



**Fig. 9**

### Question 25 / réponse C

Les sommets du carré sont les points communs à l'ellipse et à l'une ou l'autre des bissectrices des axes de coordonnées (cf fig. 10).
Soit $A$ le sommet du carré situé dans le premier quadrant. Sa coordonnée est solution du

système

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y = x \end{cases}$$

En susbtituant $x$ à $y$ dans l'équation du second degré, on obtient

$$x^2 = \frac{9 \cdot 16}{25} \ ;$$

d'où $x = \pm\frac{12}{5}$. La coordonnée de $A$ est donc $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

La longueur du côté du carré valant deux fois l'abscisse de $A$, cette longueur est égale à $\frac{24}{5} = 4,8$.

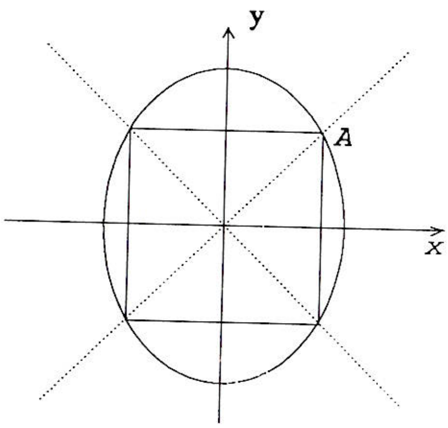



**Fig. 10**

## Question 26 / réponse B

Par un quotient remarquable connu, on a

$$\frac{1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{1991} + 2^{1992}}{1 + 2^{1993}} = \frac{1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{1991} + 2^{1992}}{(1+2)(1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{1991} + 2^{1992})} = \frac{1}{3}.$$

## Question 27 / réponse B

Traitons le problème (cf fig. 11) à l'aide d'un graphique indiquant la position en fonction du temps.

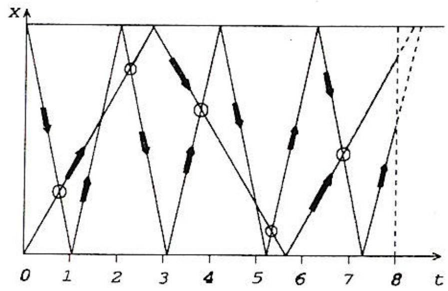



**Fig. 11 : Les deux nageurs se rencontrent cinq fois.**

Ce graphique montre que les nageurs se croisent 5 fois.

## Question 28 / réponse C

En chaque sommet, la probabilité de choisir un des deux tronçons possibles vaut $\frac{1}{2}$. Dès lors, la probabilité, en allant de $a$ en $b$, de passer par $c$, $d$, $e$ (cf fig. 12), vaut respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Ainsi, la probabilité de passer par $e$ pour aller de $a$ en $b$ vaut $\frac{1}{8}$. De même, la probabilité de passer par $f$ pour aller de $a$ en $b$ vaut aussi $\frac{1}{8}$. Il s'ensuit que la probabilité d'aller de $a$ en $b$ en suivant uniquement le bord du carré vaut $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

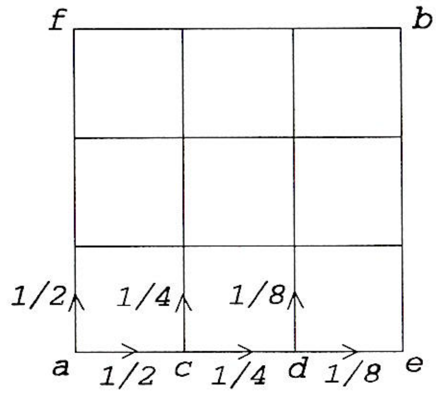



**Fig. 12**

## Question 29 / réponse B

Il s'agit de calculer approximativement

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi\times x}{180}\right)'_{x=1} &= \left(-\frac{\pi}{180}\times\sin\frac{\pi\times x}{180}\right)_{x=1} \\ &= -\frac{\pi}{180}\times\sin\frac{\pi}{180}\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{180}$ est petit, on a

$$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx \frac{3}{180} = \frac{1}{60}.$$

Ainsi, on obtient

$$\left(\cos\frac{\pi \times x}{180}\right)'_{x=1} \approx -\frac{1}{3600} \approx -0,0003.$$

**Question 30 / réponse : 51**

Désignons respectivement par $x$ et $y$, mon âge et votre âge.
Utilisons une ligne du temps pour schématiser le problème (cf fig. 13).

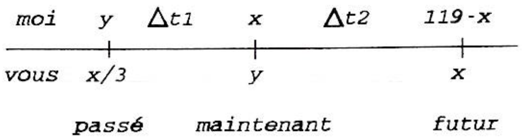



**Fig. 13**

En tenant compte que nous vieillissons tous d'un même nombre d'années simultanément, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{cases} x - y = y - \frac{x}{3} & (\Delta t1) \\ (119 - x) - x = x - y & (\Delta t2) \end{cases}$$

La solution de ce système est (51,34). J'ai donc 51 ans.

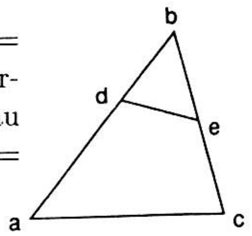
# Maxi demi-finale

## Questions

1. Pour $a$, $b$ et $c$ nombres entiers, posons $\boxed{a, b, c}$ égal à $a^b - b^c + c^a$. Alors $\boxed{1, -1, 2}$ vaut

   (A) $-4$ (B) $-2$ (C) 0 (D) 2 (E) 4

2. Dans le triangle $abc$, $\widehat{a} = 55°$, $\widehat{c} = 75°$, $d$ appartient au côté $[ab]$ et $e$ au côté $[bc]$. Si de plus $|db| = |be|$, alors $\widehat{bed}$ mesure




   (A) 50° (B) 55° (C) 60° (D) 65° (E) 70°

3. $\dfrac{15^{30}}{45^{15}} =$

   (A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ (B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ (C) 1 (D) $3^{15}$ (E) $5^{15}$

4. L'opération $\circ$ est définie par $x \circ y = 4x - 3y + xy$, pour $x$ et $y$ nombres réels. Combien de nombres réels $y$ vérifient $3 \circ y = 12$ ?

   (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) plus de 4

5. L'an dernier, un vélo coûtait 160 dollars et un casque 40 dollars. Cette année, le prix de la bicyclette à augmenté de 5% et celui du casque de 10%. Le pourcentage d'augmentation du prix combiné du vélo et du casque est

   (A) 6% ; (B) 7% ; (C) 7,5% ; (D) 8% ; (E) 15%.

6. $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} =$

(A) $\sqrt{2}$ ; (B) 16 ; (C) 32 ; (D) $12^{2/3}$ ; (E) $512,5$.

7. Le symbole $R_k$ désigne le nombre entier dont l'écriture décimale est une suite de $k$ chiffres 1. Par exemple, $R_3 = 111$, $R_5 = 11\ 111$, etc. La division de $R_{24}$ par $R_4$ donne un résultat $Q = \dfrac{R_{24}}{R_4}$ qui est un entier dont l'écriture décimale est une suite de chiffres tous égaux à 0 ou 1. Le nombre de zéros dans l'écriture décimale de $Q$ est

(A) 10 ; (B) 11 ; (C) 12 ; (D) 13 ; (E) 15.

8. Soient $C_1$ et $C_2$ deux cercles tangents de rayon 1, situés dans un même plan. Combien de cercles de rayon 3 de ce plan sont tangents à la fois à $C_1$ et $C_2$ ?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

9. Le pays $A$ représente $c\%$ de la population mondiale et possède $d\%$ de la fortune mondiale. Le pays $B$ représente $\epsilon\%$ de la population mondiale et possède $f\%$ de la fortune mondiale. Supposons que la fortune de $A$ soit répartie uniformément entre ses habitants, et que la fortune de $B$ soit répartie uniformément entre ses habitants. Trouvez le rapport entre la fortune d'un citoyen de $A$ et la fortune d'un citoyen de $B$.

(A) $\dfrac{cd}{ef}$ (B) $\dfrac{c\epsilon}{df}$ (C) $\dfrac{cf}{d\epsilon}$ (D) $\dfrac{d\epsilon}{cf}$ (E) $\dfrac{df}{c\epsilon}$

10. Soit $r$ le nombre obtenu quand à la fois la base et l'exposant sont triplés dans $a^b$, où $a > 0$ et $b > 0$. Si $r$ est égal au produit de $a^b$ et $x^b$, où $x > 0$, alors $x$ vaut

(A) 3 ; (B) $3a^2$ ; (C) $27a^2$ ; (D) $2a^{3b}$ ; (E) $3a^{2b}$.

11. Si $\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$, combien de chiffres comprend l'écriture décimale de $x$ ?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 13

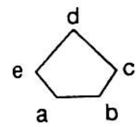
12. Si $f(2x) = \dfrac{2}{2+x}$ pour tout $x$ tel que $x > 0$, alors $2f(x)$ vaut

(A) $\dfrac{2}{1+x}$ ; (B) $\dfrac{2}{2+x}$ ; (C) $\dfrac{4}{1+x}$ ; (D) $\dfrac{4}{2+x}$ ; (E) $\dfrac{8}{4+x}$.

13. Un carré de périmètre 20 est inscrit dans un carré de périmètre 28. Quelle est la plus grande distance entre un sommet du carré intérieur et un sommet du carré extérieur ?

(A) $\sqrt{58}$ (B) $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ (C) 8 (D) $\sqrt{65}$ (E) $5\sqrt{3}$

14. Le pentagone convexe $abcde$ vérifie $\widehat{a} = \widehat{b} = 120°$, $|ea| = |ab| = |bc| = 2$ et $|cd| = |de| = 4$. Que vaut l'aire de $abcde$ ?




(A) 10 (B) $7\sqrt{3}$ (C) 15 (D) $9\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{5}$

15. Pour combien de valeurs de $n$ les angles intérieurs d'un polygone régulier à $n$ côtés mesurent un nombre entier de degrés ?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

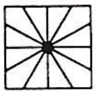
16. Considérons la suite non décroissante de nombres naturels

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

dans laquelle le nombre naturel $n$ apparaît $n$ fois. Le reste de la division du 1993ème terme par 5 est

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3 ; (E) 4.

17. Annie a peint une cible sur une montre carrée en reliant au centre les positions des heures (voir figure). Si $t$ est l'aire d'une des huit régions triangulaires comme celle entre 12 heures et 1 heure, et $q$ est l'aire d'une des quatre régions situées aux coins comme celle entre 1 heure et 2 heures, alors $\frac{q}{t}$ vaut



(A) $2\sqrt{3}-2$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2

18. Alain et Bernard ont pris leur nouveau travail le même jour. D'après le contrat, Alain a trois jours de travail suivis d'un jour de repos. Bernard a sept jours de travail suivis de trois jours de repos. Combien de jours parmi les mille premiers sont de repos pour Alain et Bernard en même temps ?

(A) 48 (B) 50 (C) 72 (D) 75 (E) 100

19. Combien de couples $(m, n)$ de nombres naturels non nuls sont solutions de $\dfrac{4}{m}+\dfrac{2}{n}=1$ ?

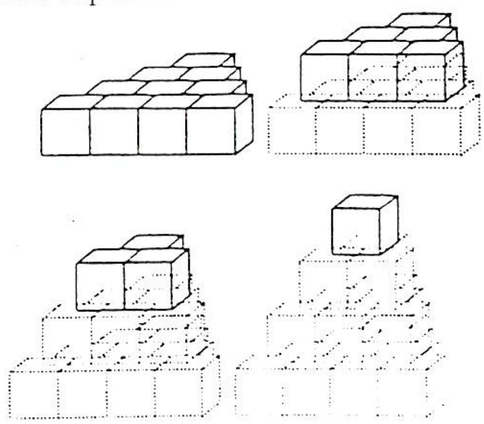
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) plus de 4

20. Considérons l'équation $10z^2-3iz-k=0$, où $z$ est une inconnue complexe et $i^2=-1$. Laquelle des assertions suivantes est vraie ?
(A) Pour tous les nombres réels strictement positifs $k$, les deux racines sont imaginaires pures.
(B) Pour tous les nombres réels strictement négatifs $k$, les deux racines sont imaginaires pures.
(C) Pour tous les nombres imaginaires purs $k$, les deux racines sont réelles et rationnelles.
(D) Pour tous les nombres imaginaires purs $k$, les deux racines sont réelles et irrationnelles.
(E) Pour tout nombre complexe $k$, aucune racine n'est réelle.

21. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ une suite arithmétique finie avec $a_4+a_7+a_{10}=17$ et
$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=77$.
Si $a_k=13$, il faut $k$ égal à

(A) 16 ; (B) 18 ; (C) 20 ; (D) 22 ; (E) 24.

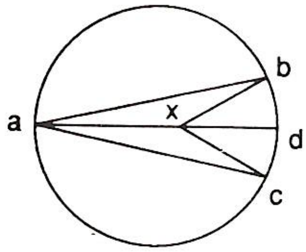
22. Vingt blocs cubiques sont disposés comme sur la figure : 10 selon un schéma triangulaire ; puis 6 selon une couche triangulaire, posée centrée au-dessus de la couche précédente ; ensuite, 3 selon une couche triangulaire centrée au-dessus de la couche précédente ; et enfin, 1 bloc est centré au-dessus de la couche précédente. Les blocs de la couche inférieure sont numérotés de 1 à 10 dans un certain ordre. Chaque bloc des couches 2, 3 et 4 reçoit le nombre qui est la somme des nombres des trois blocs sur lesquels il repose. Trouver le plus petit nombre qu'il est ainsi possible d'assigner au bloc supérieur.



(A) 55 (B) 83 (C) 114 (D) 137 (E) 144

23. Les points $a$, $b$, $c$ et $d$ sont sur un cercle de diamètre 1, et $x$ est sur le diamètre $[ad]$. Si $|bx|=|cx|$ et $3\widehat{bac}=\widehat{bxc}=36^\circ$, alors $|ax|$ vaut

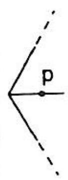
(A) $\dfrac{\cos 6^\circ \cos 12^\circ}{\cos 18^\circ}$ (B) $\dfrac{\cos 6^\circ \sin 12^\circ}{\sin 18^\circ}$
(C) $\dfrac{\cos 6^\circ \sin 12^\circ}{\cos 18^\circ}$ (D) $\dfrac{\sin 6^\circ \sin 12^\circ}{\sin 18^\circ}$
(E) $\dfrac{\sin 6^\circ \sin 12^\circ}{\cos 18^\circ}$




24. Une boîte contient 3 pièces brillantes et 4 pièces mates. Une par une, les pièces sont extraites au hasard de la boîte sans être remplacées. Si la probabilité qu'il faudra plus de quatre tirages pour que la troisième pièce brillante apparaisse est la fraction réduite $\frac{a}{b}$, alors $a + b$ vaut

(A) 11 (B) 20 (C) 35 (D) 58 (E) 66

25. Soit $S$ l'ensemble des points de deux demi-droites formant un secteur angulaire de mesure 120°, et soit $p$ un point fixe dans ce secteur et sur la bissectrice de ce secteur. Considérons tous les triangles équilatéraux distincts $pqr$ avec $q$ et $r$ appartenant à $S$ (les points $q$ et $r$ peuvent être sur la même demi-droite ; échanger les noms de $q$ et de $r$ ne crée pas un nouveau triangle). Le nombre de ces triangles est




(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 15
(E) supérieur à 15

26. Trouvez la plus grande valeur atteinte par la fonction $f$, si

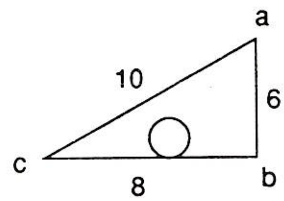
$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}$$

pour $x$ nombre réel quelconque.

(A) $\sqrt{7} - 1$ (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4
(E) $\sqrt{55} - \sqrt{5}$

27. Les côtés du triangle $abc$ mesurent respectivement 6, 8 et 10. Un cercle de rayon 1 roule autour de l'intérieur du triangle $abc$ en restant toujours tangent à au moins un côté du triangle. Lorsque le centre $p$ du cercle revient à sa position de départ, quelle distance a-t-il parcourue ?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 17




28. Dans le plan coordonné, combien de triangles (d'aire non nulle) ont tous leurs sommets de coordonnées $(x, y)$, avec $x$ et $y$ entiers satisfaisant $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$ ?

(A) 496 (B) 500 (C) 512 (D) 516 (E) 560

29. Lequel des ensembles suivants n'est jamais formé des mesures des diagonales externes d'un prisme rectangulaire droit (une boîte) ? (Une *diagonale externe* est une diagonale de l'une des faces du prisme).

30. Etant donné $0 \leqslant x_0 < 1$, soit

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1} & \text{si } 2x_{n-1} < 1, \\ 2x_{n-1} - 1 & \text{si } 2x_{n-1} \geqslant 1, \end{cases}$$

pour tout entier $n > 0$. Pour combien de $x_0$ est-il vrai que $x_0 = x_5$ ?

(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 31 (E) une infinité

## Réponses

### Question 1 / réponse D

$\boxed{1,-1,2} = 1^{-1} - (-1)^2 + 2^1 = 1 - 1 + 2 = 2.$

**Question 2 / réponse D**

Dans le triangle $bde$ isocèle, l'angle $\widehat{b}$ a pour supplément le double de l'angle $\widehat{e}$ :

$$2\widehat{e} = 180^\circ - \widehat{b} = \widehat{a} + \widehat{c} = 130^\circ .$$

D'où, $\widehat{e} = 65^\circ$ . Somme toute, $\widehat{e}$ est la moyenne des angles à la base du triangle $abc$.

**Question 3 / réponse E**

$$\frac{15^{30}}{45^{15}} = \frac{3^{30} \cdot 5^{30}}{(3^2)^{15} \cdot (^{15}} = 5^{15}$$

**Question 4 / réponse E**

$$3 \circ y = 12 \Leftrightarrow 12 - 3y + 3y = 12 \Leftrightarrow 0y = 0$$

**Question 5 / réponse A**

L'an dernier, le prix combiné du vélo et du casque était 200 F. Cette année, ce prix a augmenté globalement de 12 F. Cela fait donc une progression de 6%.

**Question 6 / réponse B**

$$\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} = \sqrt{\frac{4^{10}(2^{10} + 1)}{2^{12}(1 + 2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 16$$

**Question 7 / réponse E**

$$R_{24} = \underbrace{\overbrace{1111}\,\overbrace{1111}\ldots\overbrace{1111}}_{6 \text{ groupes}}$$
$$= \overbrace{1111} \cdot (10^{20} + 10^{16} + 10^{12} + 10^8 + 10^4 + 1)$$
$$= R_4 \cdot 100010001000100010001$$

D'où, $Q = 100010001000100010001$. L'écriture décimale du nombre $Q$ comporte 5 groupes de 3 zéros, donc 15 zéros.

**Question 8 / réponse D**

Il y a six cercles de rayon 3 tangents aux cercles donnés $C_1$ et $C_2$ (cf fig. 1) :

- $C_1'$ et $C_2'$ pour lesquels $C_1$ et $C_2$ sont tangents l'un intérieurement et l'autre extérieurement ;
- $C_1''$ et $C_2''$ pour lesquels $C_1$ et $C_2$ sont tangents intérieurement ;
- $C_1'''$ et $C_2'''$ pour lesquels $C_1$ et $C_2$ sont tangents extérieurement.

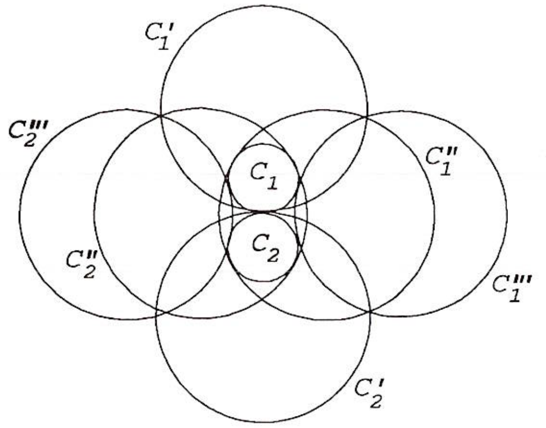



**Fig. 1**

**Question 9 / réponse D**

Appelons $P$ le nombre d'habitants du globe et $F$ le montant de la fortune mondiale.
La fortune d'un citoyen du pays $A$ est

$$\frac{d \cdot \frac{F}{100}}{c \cdot \frac{P}{100}} = \frac{dF}{cP}.$$

La fortune d'un citoyen du pays $B$ est

$$\frac{f \cdot \frac{F}{100}}{e \cdot \frac{P}{100}} = \frac{fF}{eP}.$$

Le rapport entre leurs fortunes vaut donc

$$r = \frac{dF}{cP} \cdot \frac{eP}{fF} = \frac{de}{cf}.$$

**Question 10 / réponse C**

On doit avoir $r = (3a)^{3b} = a^b \cdot x^b$.
Comme $a$, $b$ et $x$ sont strictement positifs, on déduit de cette égalité successivement

$$(3a)^3 = ax \quad \text{et} \quad x = 27a^2.$$

**Question 11 / réponse A**

L'égalité

$$\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$$

est successivement équivalente à

$$\log_2(\log_2(x)) = 2^2$$
$$\log_2(x) = 2^4$$
$$x = 2^{16}$$

Dès lors, le nombre $x$ est égal à 65536 et son écriture décimale comprend cinq chiffres.

**Question 12 / réponse E**

$$2f(x) = 2 \cdot \frac{2}{2+\frac{x}{2}} = \frac{8}{4+x}$$

**Question 13 / réponse D**

Soient les carrés $abcd$ et $pqrs$, le second étant inscrit dans le premier (cf fig. 2). Posons $x = |bq|$ et $y = |qc|$.
Le sommet du carré $abcd$ le plus éloigné de $p$ est $c$ pour autant que $y > x$.
La plus grande distance d'un sommet du carré intérieur à un sommet du carré extérieur est donc

$$|pc| = \sqrt{(x+y)^2 + y^2}$$

avec

$$x^2 + y^2 = 25,\ x + y = 7 \text{ et } y > x.$$

De ces conditions, on tire successivement

$$(7-y)^2 + y^2 = 25 \text{ et } y > \tfrac{7}{2}$$
$$y^2 - 7y + 12 = 0 \text{ et } y > \tfrac{7}{2}$$
$$y = 4.$$

D'où, il vient $|pc| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$.

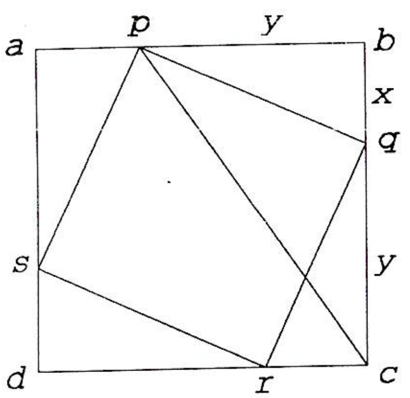



**Fig. 2**

**Question 14 / réponse B**

Traçons les prolongements des côtés $[ea]$ et $[cb]$ jusqu'à leur point commun $p$ (cf fig. 3). Les angles à la base du triangle $pab$ mesurent 60°. Dès lors, ce triangle est équilatéral. Il s'ensuit que le triangle $pec$ est lui-même équilatéral, ainsi que le triangle $dec$. L'aire du pentagone donné est alors équivalente à la somme des aires des triangles équilatéraux $pec$ et $dec$ de côtés 4, diminuée de l'aire du triangle équilatéral $pab$ de côté 2.
Or, l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c$ vaut

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot c \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{4}c^2\sqrt{3}$$

Donc, l'aire du pentagone $abcde$ vaut

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

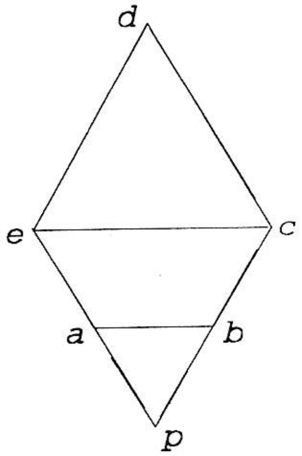



**Fig. 3**

**Question 15 / réponse B**

Considérons un polygone régulier convexe à $n$ côtés.
Soient $\alpha$ et $\beta$ les mesures respectives d'un angle au centre interceptant un côté et d'un angle intérieur de ce polygone.
Ces mesures sont liées par $\beta = 180^\circ - \alpha$, de sorte que $\beta$ est entier si et seulement si $\alpha$ est lui-même entier.
Mais, pour être entier, $\alpha$ doit être choisi parmi les diviseurs de 360, excepté 180 et 360 trop grands. Comme $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, ce nombre 360 admet $4 \cdot 3 \cdot 2$ diviseurs, c'est-à-dire 24 diviseurs. Enlevons 180 et 360, il en reste 22 qui conviennent.

Pour conclure, il y a donc 22 polygones réguliers convexes dont les angles intérieurs ont une mesure en degrés égale à un nombre entier.
**A lire :** *Math-Jeunes* n° 59, pp 56-60, *Ne dites plus Jules et Jim* ... Dans cet article, on traite du nombre de diviseurs d'un naturel.

**Question 16 / réponse D**

Si nous écrivons les termes de la suite jusqu'au dernier terme égal à $n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), nous aurons écrit $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ termes. Pour atteindre le 1993ᵉ terme, il faut donc que

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geqslant 1993.$$

D'où, on tire, $n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{15945}}{2}$, soit $n \geqslant 62,6\ldots$
Ainsi, le 1993ᵉ est 63. Le reste de la division de celui-ci par 5 est 3.

**Question 17 / réponse A**

Evaluons l'aire $t$ du triangle $oab$ (cf fig. 4).
Soit $c$ le côté du carré. On a

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c^2\sqrt{3}}{24}$$

L'aire d'un quart de la cible vaut $2t + q$. D'où, il vient

$$q = \frac{c^2}{4} - 2t = \frac{(3-\sqrt{3})c^2}{12}$$

De là, on obtient finalement

$$\frac{q}{t} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{24}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

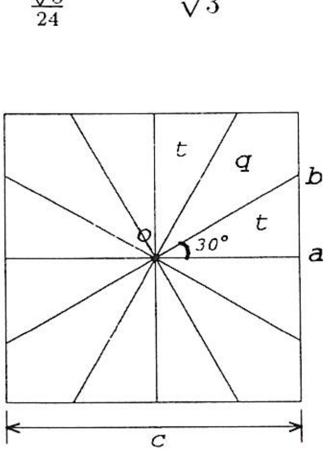


**Fig. 4**

**Question 18 / réponse E**

Le problème peut être traité graphiquement :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alain | T | T | T | r | T | T | T | r | T | T | T | r | T | T | T | r | T | ... |
| Bernard | T | T | T | T | T | T | T | r | r | r | T | T | T | T | T | T | T | ... |

où les symboles T et r précisent respectivement les jours de travail et de repos.
La suite des jours de travail et de repos reprend de manière périodique tous les 20 jours simultanément pour Alain et Bernard. Sur une telle période, ils sont au repos en même temps pendant 2 jours, soit un dixième du temps. Dès lors, ils seront au repos ensemble 100 jours sur les 1000 premiers.

**Question 19 / réponse E**

Remarquons d'abord que chacune des fractions $\frac{4}{m}$ et $\frac{2}{n}$ doit être strictement inférieure à 1. On doit donc avoir $m > 4$ et $n > 2$.
Essayons cas par cas les entiers $m$ supérieurs à 4 en calculant la valeur correspondante de $n$ :
Pour $m = 5$ et $m = 6$, on trouve respectivement $n = 10$ et $n = 6$.
Pour $m = 7$, il n'y a pas d'entier $n$ possible.
Pour $m = 8$, on obtient $n = 4$.
Pour $m = 9$, $m = 10$ et $m = 11$, ne correspond aucune valeur entière de $n$.
Pour $m = 12$, on obtient $n = 3$.
Pour $m > 12$, on devrait avoir $n < 3$, ce qui n'est pas possible d'après la remarque initiale.
Il y donc exactement 4 couples d'entiers qui satisfont à l'équation.

**Question 20 / réponse B**

Les solutions de l'équation proposée (1) sont $\dfrac{3i \pm u}{20}$ où $u$ est une solution de l'équation

$$u^2 = 40k - 9. \qquad (2)$$

L'assertion (A) est fausse. Pour $k = 1$, les solutions de l'équation (2) sont $\pm\sqrt{31}$ et celles de l'équation (1) ont alors une partie réelle non nulle.
L'assertion (B) est vraie. Si $k$ est un réel strictement négatif, $40k - 9$ est lui-même un réel strictement négatif. Les solutions de l'équation (2) sont alors des nombres imaginaires purs. Il

en est de même pour l'équation (1).
Les assertions (C) et (D) sont fausses. Pour $k = i$, les solutions de l'équation (2) sont $\pm(4+5i)$ et celles de l'équation (1) sont alors complexes.
L'assertion (E) est fausse. Pour $k = 0$, l'une des solutions de l'équation (1) est 0.

## Question 21 / réponse B

Une somme de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à $n$ fois le terme central de cette somme lorsque $n$ est impair.
Dès lors, des égalités proposées, on tire

$$3a_7 = 17 \quad \text{et} \quad 11a_9 = 77.$$

Par suite, $a_7 = \dfrac{17}{3}$ et $a_9 = 7$. L'écart entre ces deux termes étant le double de la raison, la raison est $r = \dfrac{1}{2}\cdot(7 - \dfrac{17}{3}) = \dfrac{2}{3}$.
A présent, un terme quelconque de la suite peut être calculé par

$$a_k = a_9 + (k-9)\cdot\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad a_k = 1 - \frac{2}{3}\cdot k$$

Pour $a_k = 13$, il vient de cette relation $k = 18$.

## Question 22 / réponse C

Nommons $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ les nombres affectés aux blocs de la première couche ; $B_1, B_2, \ldots, B_6$ et $C_1, C_2, C_3$ ceux associés respectivement aux blocs de la deuxième et de la troisième couches; $D_1$ celui associé à l'unique bloc de la dernière couche (cf fig. 5).

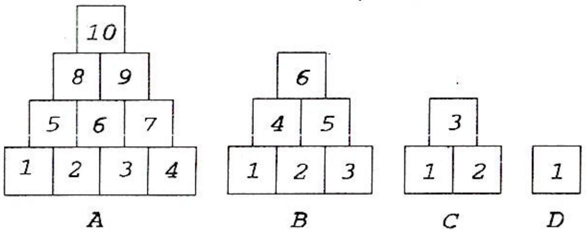



**Fig. 5 : Numérotation des blocs des différentes couches.**

On doit avoir

$$\begin{aligned}
D_1 &= C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (B_1 + B_2 + B_4) + (B_2 + B_3 + B_5) + (B_4 + B_5 + B_6) \\
&= (B_1 + B_3 + B_6) + 2\cdot(B_2 + B_4 + B_5) \\
&= ((A_1 + A_2 + A_5) + (A_3 + A_4 + A_7) \\
&\quad + (A_8 + A_9 + A_{10})) + 2((A_2 + A_3 + A_6) \\
&\quad + (A_5 + A_6 + A_8) + (A_6 + A_7 + A_9)) \\
&= (A_1 + A_4 + A_{10}) + 3(A_2 + A_3 + A_5 + A_7 + A_8 + A_9) + 6A_6
\end{aligned}$$

Pour que $D_1$ soit le plus petit possible, il faut attribuer les plus petits entiers aux blocs qui correspondent aux plus grands coefficients dans la somme ci-dessus, soit tout d'abord 1 au bloc $A_6$, puis 2, 3, 4, 5, 6 et 7 aux blocs $A_2$, $A_3$, $A_5$, $A_7$, $A_8$ et $A_9$ ; enfin, 8, 9 et 10 aux blocs $A_1$, $A_4$, $A_{10}$.
Alors, le nombre associé à $D_1$ vaut $(8+9+10) + 3\cdot(2+3+4+5+6+7) + 6\cdot 1 = 114$.

## Question 23 / réponse B

Le triangle $bad$ est rectangle en $b$; d'où, il vient

$$|ab| = |ad|\cdot\cos\widehat{bad} = \cos 6^\circ .$$

Dans le triangle $abx$, l'angle de sommet $x$ est le supplément de l'angle $\widehat{bxd}$ ; cet angle vaut donc $162^\circ$ . Par suite, l'angle de sommet $b$ vaut alors $12^\circ$ . Appliquons la règle des sinus dans ce triangle :

$$\frac{|ax|}{\sin 12^\circ} = \frac{|ab|}{\sin 162^\circ}$$

Ainsi, on obtient

$$|ax| = \frac{|ab|\sin 12^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 12^\circ\ \cos 6^\circ}{\sin 18^\circ}$$

## Question 24 / réponse E

S'il faut plus de 4 tirages pour que la troisième pièce brillante apparaisse, cela traduit le fait qu'en 4 tirages sont apparues au plus 2 pièces brillantes. La probabilité $p$ pour que cela se passe ainsi peut être déterminée par référence à l'événement contraire, celui pour lequel les trois pièces brillantes apparaissent en 4 tirages. On a donc

$$p = 1 - 4\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} = \frac{31}{35}$$

La fraction obtenue étant irréductible, on a

$$a = 31,\ b = 35 \text{ et } a + b = 66.$$

### Question 25 / réponse E

Soit $s$ l'origine commune des deux demi-droites dont la réunion est $S$.
Nommons $A$ et $A'$ ces demi-droites (cf fig. 6).

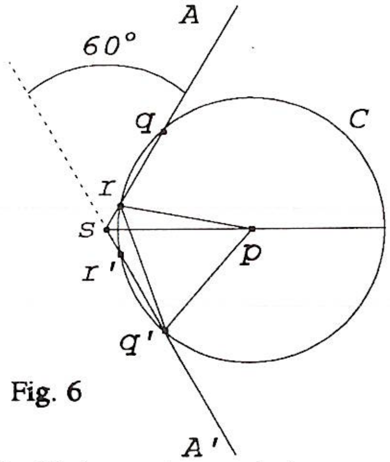



Fig. 6

Traçons un cercle $C$ de centre $p$ et de rayon $r$ tel que

$$\text{dist }(p, A) < r < |ps|.$$

Manifestement, il y a une infinité de façons de choisir ce rayon en restant dans les limites prescrites.
Ce cercle coupe la demi-droite $A$ en $q$ et en $r$ ainsi que la demi-droite $A'$ en $q'$ et en $r'$. Comme $sp$ est un axe de symétrie de la figure, on choisira les noms des points de telle sorte que $|sq| = |sq'|$ et $|sr| = |sr'|$.
Cela étant, considérons la rotation de centre $p$ et d'angle 60° (orienté trigonométriquement).
L'image par cette rotation de la droite qui contient $A$ est la droite qui contient $A'$ parce que ces droites sont équidistantes de $p$ et que l'angle formé par $A$ et le prolongement de $A'$ vaut 60° . Par ailleurs, le cercle $C$ est fixe pour cette rotation. Il s'ensuit que les points communs à $A$ et au cercle $C$ ont pour images les points communs à $A'$ et à ce même cercle $C$. Ainsi, l'image de $r$ est $q'$ et l'image de $q$ est $r'$.
L'angle de sommet $p$ du triangle $pqr'$ vaut donc l'angle de la rotation, c'est-à-dire 60° . Par ailleurs, ce triangle est isocèle. Dès lors, il est nécessairement équilatéral.
Nous venons de montrer que, pour tout cercle $C$ dont le rayon est choisi de manière arbitraire dans des limites fixées, nous pouvions trouver un triangle équilatéral dont les sommets sont le point $p$ et deux points de $S$. Cette construction admet donc une infinité de solutions.

### Question 26 / réponse C

La fonction $f$ peut être écrite sous une autre forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48} \\ &= \sqrt{x(8-x)} - \sqrt{(8-x)(x-6)} \\ &= \sqrt{8-x} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{x-6}) \\ &= \frac{6 \cdot \sqrt{8-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-6}} \end{aligned}$$

Cette transformation n'altère en rien le domaine de définition de cette fonction qui est l'intervalle $[6, 8]$.
Les fonctions $y = x$ et $y = x - 6$ sont strictement croissantes ; par contre la fonction $y = 8 - x$ est strictement décroissante. Il s'ensuit que le numérateur de $f(x)$ est strictement décroissant et son dénominateur strictement croissant. Par conséquent, $f(x)$ est une fonction strictement décroissante. Sa valeur maximale correspond donc à la plus petite valeur autorisée pour $x$, c'est-à-dire 6.
Ainsi, la plus petite valeur de $f(x)$ est

$$f(6) = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

### Question 27 / réponse B

Le centre du cercle parcourt un triangle $a'b'c'$ dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle $abc$ (cf fig. 7). Il existe alors une homothétie $h$ qui applique $abc$ sur $a'b'c'$.
Comme le centre du cercle se trouve toujours à la distance 1 du côté sur lequel il roule, chacun des sommets du triangle $a'b'c'$ est équidistant de deux des côtés du triangle $abc$ ; par exemple, $a'$ est à la distance 1 de $[ab]$ et de $[ac]$. Il s'ensuit que les traces $aa'$, $bb'$ et $cc'$ de l'homothétie $h$ sont les bissectrices intérieures du triangle $abc$. Par conséquent, le centre de cette homothétie est le centre $I$ du cercle inscrit dans le triangle $abc$.

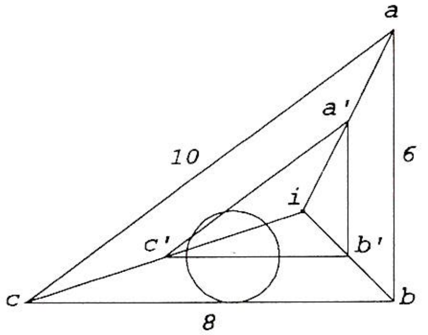



**Fig. 7 : Le centre du cercle parcourt les côtés du triangle a'b'c'.**

Remarquons aussi que les mesures des longueurs des côtés du triangle $abc$ forment un triplet pythagoricien. De ce fait, le triangle $abc$ est rectangle.
L'aire $S$ d'un triangle se calcule, entre autres, en multipliant le périmètre $p$ par le rayon $r$ du cercle inscrit :

$$S = p \cdot r.$$

Comme le triangle $abc$ est rectangle, son aire vaut aussi la moitié du produit des mesures des côtés de l'angle droit :

$$S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

Quant, à son périmètre, il vaut

$$p = 6 + 8 + 10 = 24.$$

Cela étant, le rayon du cercle inscrit vaut

$$\frac{24}{12} = 2.$$

Déterminons à présent le rapport de l'homothétie $h$, en considérant les distances du centre $I$ de l'homothétie aux côtés :

$$r = \frac{\text{dist}(I, a'b')}{\text{dist}(I, ab)} = \frac{1}{2}$$

Nous sommes maintenant à même de trouver la périmètre du triangle $a'b'c'$, en nous basant sur le fait que les homothéties multiplient les longueurs par la valeur absolue de leur rapport : ce périmètre est la moitié de celui du triangle $abc$, soit 12. C'est la distance parcourue par le centre du cercle qui roule.

## Question 28 / réponse D

Un triangle est déterminé par trois points non alignés.
Il y a donc autant de triangles qu'il y a de façons de choisir 3 points non alignés parmi les 16 points autorisés (cf fig. 8). Aussi, doivent être exclues tous les situations où les 3 points choisis appartiendraient à une même ligne verticale, horizontale ou oblique. Or, il y 10 lignes de ce type comprenant chacune 4 des 16 points (4 verticales, 4 horizontales et 2 obliques) plus encore 4 autres lignes obliques comprenant chacune 3 des 16 points.
Par conséquent, le nombre de triangles est égal à

$$C_{16}^4 - 10C_4^3 - 4C_3^3 = 560 - 40 - 4 = 516$$

ce qu'on note encore

$$\binom{16}{4} - 10 \cdot \binom{4}{3} - 4 \cdot \binom{3}{3} = 560 - 40 - 4 = 516$$

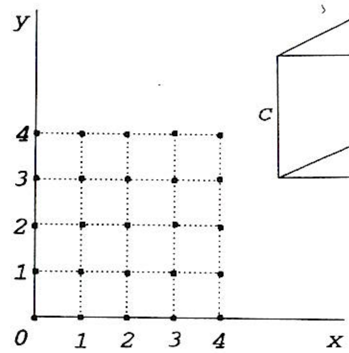



**Fig. 8**

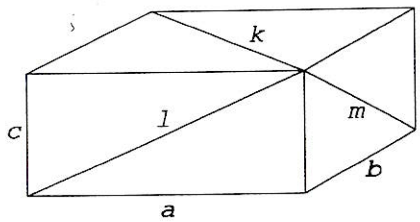



**Fig. 9**

## Question 29 / réponse B

Désignons par $a$, $b$ et $c$ les mesures des côtés du parallélipipède rectangle avec $a \geqslant b \geqslant c$ (cf fig. 9). Désignons encore par $k$, $\ell$ et $m$ les mesures des diagonales des faces de ce parallélipipède avec $k \geqslant \ell \geqslant m$.
Par application du théorème de Pythagore, on doit avoir

$$k^2 = a^2 + b^2,\ \ell^2 = a^2 + c^2$$
$$m^2 = b^2 + c^2.$$

Exprimons alors $a^2$, $b^2$ et $c^2$ en fonction de $k^2$, $\ell^2$ et $m^2$ :

$$a^2 = \frac{\ell^2 + k^2 - m^2}{2}$$
$$b^2 = \frac{k^2 + m^2 - \ell^2}{2}$$
$$c^2 = \frac{\ell^2 + m^2 - k^2}{2}$$

Dès lors, pour que $\ell$, $m$ et $k$ puissent être les mesures des diagonales externes d'un parallélipipède rectangle, il faut que

$$m^2 < \ell^2 + k^2\,, \quad \ell^2 < k^2 + m^2$$
$$k^2 < \ell^2 + m^2.$$

Autrement dit, il faut que le carré de la mesure de chacune des diagonales externes soit strictement inférieur à la somme des carrés des mesures des deux autres.

Seuls les nombres de l'ensemble (B) ne vérifient pas cette condition car

$$7^2 > 4^2 + 5^2.$$

### Question 30 / réponse D

Vu la définition de la suite des nombres $x_n$, on a successivement

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 - k_1 \\ x_2 &= 2(2x_0 - k_1) - k_2 \\ &= 2^2x_0 - 2k_1 - k_2 \\ &\vdots \\ x_5 &= 2^5x_0 - 2^4k_1 - 2^3k_é - 2^2k_3 - 2k_4 - k_5 \end{aligned}$$

chaque nombre $k_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ est soit égal à 0 ou soit égal à 1.

L'égalité $x_0 = x_5$ est alors vérifiée pour

$$x_0 = \frac{2^4k_1 + 2^3k_2 + 2^2k_3 + 2k_4 + k_5}{2^5 - 1}$$

Comme chacun des 5 coefficients $k_i$ peut prendre deux valeurs différentes (0 ou 1), l'expression composant le numérateur de $x_0$ engendre tous les nombres entiers de 0 à 31. On reconnaît ici le principe de formation des nombres en base 2. Ainsi, $x_0$ vérifie l'égalité proposée et la condition $0 \leqslant x_0 < 1$ si $x_0$ est égal à l'une des fractions suivantes :

$$\frac{0}{31}, \frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \ldots, \frac{30}{31}$$

Par conséquent, $x_0$ peut prendre 31 valeurs différentes.

# Finales et lauréats

## Lauréats de la Mini Olympiade

### Premiers prix

1. MACQ J.-F., (3è), Coll. St Joseph, Chimay
2. GOOR Th., (2è),Inst. St Bon. Parnasse, Bxl
3. HONLET Jean, (3è), St Quirin, Huy

### Deuxièmes prix

4. DELVENNE J.-C., (2è), Inst. Ste Marie, Arlon
5. LEMAUR Gh., (3è), Coll. Ste Marie, St Ghislain
6. DENOËL Vincent, (3è), Inst. N.D., Jupille
7. NGUYEN Xuan Hien, (3è), A.R., Spa
8. BECCO Christophe, (3è), Saint Louis, Liège
9. LEE Eung-Joo, (3è), Coll. St Hubert, Bxl

### Troisièmes prix

10. VANDENBUSSCHE Eric, (2è), A.R. Uccle I, Bxl
11. FONTAINE P.-Jean, (3è), Inst. St Boniface, Bxl
12. DEMANET Laurent, (3è), St Joseph, Carlsbourg
13. VAN AUBEL Xavier, (3è), Coll. St Pierre, Jette
14. FLORINS C., (3è), Inst. St Guibert, Gembloux
15. MASSON Saji, (3è), A.R., Rösrath
16. PERLITSCHKE C., (3è), Inst. Jean XXIII, Rochefort
17. SOYEZ Grégory, (3è), Coll. N-D, Kain

### Quatrièmes prix

18. VAN DEN BORREN C., (3è), Inst. St Boniface, Bxl
19. CUCHET O., (2è), Inst. St Joseph, La Louvière
20. DE LOPHEM Harold, (3è), Coll. St Hubert, Bxl
21. DEHAYE Paul-Olivier, (1è), Ath. Catteau, Bxl
22. GATTI Frédéric, (3è), Ath. Blum, Bxl
23. STALON V., (3è), Coll. N.D. Bon Secours, Binche
24. GARROOD W., (2è), British School, Tervuren
25. SZCZUDLIK K., (3è), Ecole Européenne, Lux.
26. BALLIEU Nicolas, (3è), Ath. E. Solvay, Charleroi

### Prix spéciaux

GOOR Thomas, (2è), Inst. St Boniface, Bxl
DELVENNE J.-Charles, (2è), Inst. Ste Marie, Arlon
VANDENBUSSCHE Eric, (2è), A.R. Uccle I, Bxl
CUCHET Olivier, (2è), Inst. St Joseph, La Louvière
DEHAYE Paul-Olivier, (1è), Ath. Catteau, Bxl
GARROOD William, (2è), British School, Tervuren

BACLIN Laurence, (2è), Coll. St Michel, Gosselies
BAES Michel, (2è), Séminaire, Floreffe
MARGUE Robert, (2è), Athénée, Luxembourg
SCHOENAERS C., (2è), Sacré-Cœur de Lindthout, Bxl
WAUTHOZ Nicolas, (1è), Ath. Blum, Bxl
LEVIE Jérôme, (1è), Inst N-D, Loverval
VITRY Véronique, (1è), Inst. N-D, Charleroi

### Prix Willy VANHAMME

Ce prix est décerné à GOOR Thomas, élève de 2è à l'Institut Saint Boniface de Bruxelles, pour l'originalité de ses réponses.

### Ont également participé à cette finale

DESSAUVAGES C., (3è), Inst. N-D Bon.Esp., Br.-le-C.
ENOMOTO Akari, (3è), Lycée Français, Bxl
ZUYDERHOFF Damien, (3è), Coll. St Michel, Bxl
CHAPON Ingrid, (3è), Inst. N.D. Bon Accueil, Beaumont
VAN OVERMEIRE K., Inst. N-D, Marche-en-Famenne
DILLIES Jimmy, (3è), A.R., Comines
DELFOSSE Christophe, (2è), Inst. St Guibert, Gembloux
RAUCH Daniel, (3è), Ath. Maïmonide, Bxl
VAN DAMME J.-Ph., (3è), Coll. St Michel, Gosselies
FRANÇOIS Cédric, (3è), Coll. St Joseph, Chimay
WAUTELET Xavier, (3è), Inst. N-D, Fleurus
D'HAUDT Vincent, (2è), Coll. du Sartay, Embourg
HUYGENS Davis, Coll. St Pierre, Bxl
RASKIN François, (2è), Séminaire St Joseph, Bastogne
VERMEYLEN Hans, (2è), A.R., Waterloo
ABSIL Olivier, (3è), A.R. Verviers I
VANDENBERGHE G., (3è), Inst. St Guibert, Gembloux
ZULIANI Arnaud, (2è), Coll. St Henri, Comines
CAMAUER Godefroy, (3è), Coll. St Michel, Bxl
VANDERVELDE Laure, (2è), Coll. St Michel, Bxl
VIGIER Antoine, (1è), Lycée Français, Bxl
DANDELOT Philippe, (2è), Inst. St Julien Parnasse, Bxl
WEBER Christian, (2è), Lycée Classique, Diekirch
BEN HATIT Sami, (1è), Lycée E. Jacqmain, Bxl
CASTAGNE Camille, (1è), Ath. Catteau, Bxl
GUZY Nicolas, (1è), Coll. Ste Marie, Mouscron
HERMANS Céline, (2è), Ath. A. Max, Bxl
REQUIER Chr., (3è), Petit Séminaire St Roch, Ferrières

## Lauréats de la Maxi Olympiade

### Premiers prix

1. BOURGEOIS Frédéric, (6è), Coll. St Michel, Bxl
2. BEMELMANS X., (5è), Coll. St François-X., Verviers

### Deuxièmes prix

3. NORGUET Jean-Pierre, (6è), Ath. Catteau, Bxl
4. HAINAUT Xavier, (5è), Inst. N-D, Arlon
5. LANNEAU B., (6è), Coll. Sacré-Cœur, Charleroi
6. SMETS Didier, (6è), Inst. St Joseph, Châtelet
7. THAYSE Michel, (6è), Coll. Don Bosco, Bxl

### Troisièmes prix

8. FRANKENNE D., (6è), Coll. St Joseph, Chênée
9. JANSSENS Eric, (6è), A.R., Nivelles
10. VAN HOOF Bernard, (4è), Coll. St Pierre, Bxl
11. BERGER Laurent, (5è), Ecole Européenne, Lux.
12. BROWAEYS Patrick, (4è), A.R. Mons I
13. MONDEREN Dominique, (6è), Coll. St Pierre, Bxl
14. LOUVEAUX Quentin, (5è), Coll. N-D, Wavre

### Quatrièmes prix

15. ABSIL P.-Antoine, (6è), A.R. T. Lorrain, Verviers
16. GIACCHETTA S., (6è), Coll. St Quirin, Huy
17. WIELEMANS X., (6è), Coll. Card. Mercier, Br.-l'Alleud
18. DUVIVIER Christian, (6è), Ath. Bockstael, Bxl
19. STORINI L., (5è), Lyc. de Garçons, Esch/Alzette
20. DUFLOT Marc, (6è), Coll. du Sartay, Embourg
21. VAN TUYKOM Alex, (6è), Coll. St Pierre, Bxl
22. MASSA C.-H., (5è), Coll. St F. Xavier, Verviers
23. NOSBUSCH Yves, (5è), Lyc. de Garçons, Lux.
24. DEVILLERS Alice, (5è), A.R., Waterloo
25. VAN ELEWIJCK V., (5è), Ath. A. Max, Bxl

### Prix spéciaux

BEMELMANS Xavier, (5è), Coll. St François, Verviers
HAINAUT Xavier, (5è), Inst. N-D, Arlon
VAN HOOF Bernard, (4è), Coll. St Pierre, Bxl
BERGER Laurent, (5è), Ecole Européenne, Luxembourg
BROWAEYS Patrick, (4è), A.R. Mons I
LOUVEAUX Quentin, (5è), Coll. N-D, Wavre
STORONI Laurent, (5è), Lyc. de Garçons, Esch/Alzette
MASSA C.-Henri, (5è), Coll. St F. Xavier, Verviers
NOSBUSCH Yves, (5è), Lycée de Garçons, Luxembourg
DEVILLERS Alice, (5è), A.R., Waterloo
VAN ELEWIJCK Véronique, (5è), Ath. A. Max, Bxl
WAHL Nathalie, (5è), Coll. St Hubert, Bxl
DECROIX Peggy, (5è), A.R. Riva Bella, Braine-l'Alleud
SEBBE Raphaël, (4è), Inst. des Ursulines, Mons
LEROY Sébastien, (4è), Inst. St Boniface-Parnasse, Bxl
DANDOY Alexandre, (4è), Coll. Don Bosco, Bxl

MAURER Yves, (4è), Lycée de Garçons, Esch-sur-Alzette
SCHURINS Thomas, (4è), Inst. Notre-Dame, Loverval
SLEEWAEGEN Jacques, (4è), Coll. St Pierre, Bxl
WEINACHTER Michel, (4è), Lyc. de Garçons, Esch/Alzette
PEREIRA Olivier, (4è), N-D des Champs, Bxl
DEVILLERS Alice, (5è), A.R., Waterloo
VAN ELEWIJCK Véronique, (5è), Ath. A. Max, Bxl

### Ont également participé à la finale

BOILEAU David, (6è), Lycée Jacqmain, Bxl
COLIN Jean-François, Petit Séminaire St Roch, Theux
DEMARTEAU Jean, (6è), Inst. St Louis, Namur
AJDLER Arnaud, (6è), Ath. Maïmonide, Bxl
DRAPPIER J.-Charles, (6è), Inst. St J.-Baptiste, Wavre
PARY François-Bruno, (6è), Lycée Français, Bxl
DELANNAY Damien, (6è), Lycée Martin V, LLN
SHIN Jonathan, (6è), Ath. Catteau, Bxl
GRIMEE Samuel, (5è), Coll. St Quirin, Huy
BENIMEDOURENE David, (5è), A.R., Virton
CLAUS Isabelle, (5è), Lycée Jacqmain, Bxl
FRANCART Régis, (6è), Coll. N-D, Wavre
MOURUE Geoffrey, (6è), Coll. Sacré-Cœur, Charleroi
CLAISSE Nicolas, (6è), A.R., Virton
DAL Sylvain, (5è), Coll. N.D. de la Tombe, Kain
WIELEMANS Maximilien, (5è), Coll. St Pierre, Bxl
SSHARES Laurent, Lycée Classique, Diekirch
MOONS Benoit, (5è), Coll. St Augustin, Enghien
SMETZ Jean, (5è), Coll. St Quirin, Huy
VANHOVE Miguel, (6è), Coll. St Vincent, Soignies
WITTMAN Valérie, (6è), Inst. St Boniface-Parnasse, Bxl
PINCHART Laurent, (4è), A.R. Bervoets, Mons
BRICHET Gaëtan, (5è), Coll. St Barthélémy, Liège
LEVY Marc, (4è), Lycée Daschbeek, Bxl
DRYMAEL Luc, (6è), Ath. Catteau, Bxl
CATTEAU David, (5è), Ath. Catteau, Bxl
TILMANT Patrick, (6è), Inst. St Joseph, Châtelet
WEBER Stéphane, (5è), Coll. St Joseph, Chimay
DE MENTEN Sébastien, (5è), Ec. Abbatiale, Maredsous

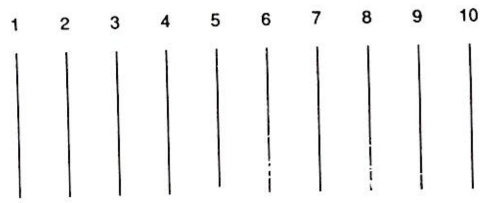
# Questions de la finale

## Mini finale

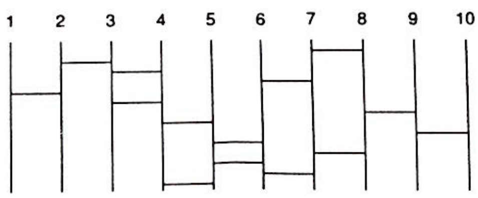
1. La suite des opérations suivantes conduit-elle toujours au même résultat ? Si oui, quel est ce résultat ?
(a) Ecrire (en base 10) un nombre entier naturel de trois chiffres non nuls et deux à deux distincts.
(b) Créer un deuxième nombre en écrivant les trois chiffres du nombre précédent dans l'ordre inverse.
(c) Retrancher le plus petit nombre du plus grand et déterminer ainsi un nombre.
(d) Ecrire les chiffres de ce dernier nombre dans l'ordre inverse en vue de former un nombre.
(e) Additionner ces deux derniers nombres pour obtenir le résultat.

2. Sur un segment de longueur $a + b$ sont construits deux carrés juxtaposés de côtés respectifs $a$ et $b$. Disséquer la réunion de ces deux carrés (pleins) et réassembler les morceaux pour former un carré unique dont l'aire égale $a^2 + b^2$.

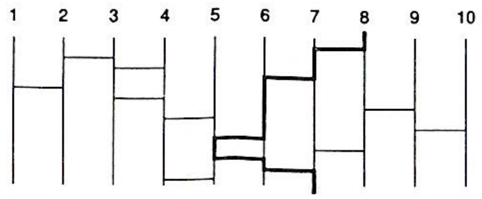
3. Dix enfants japonais occupent les dix places de leur classe. Lorsqu'est venu le jour de changer de place, ils procèdent de la manière suivante. Sur une seule feuille de papier, ils tracent d'abord dix traits verticaux de même longueur, à la même hauteur et inscrivent un nom au-dessus de chaque trait. Pour simplifier l'écriture, désignons les noms par $1, 2, \ldots, 10$ :




Ensuite, ils ajoutent au hasard un nombre quelconque de barres horizontales, chacune joignant deux traits adjacents, et cela de telle sorte que deux barres ne soient jamais à la même hauteur. Par exemple,




Tout élève détermine sa nouvelle place en traçant un chemin partant de son nom, empruntant des traits verticaux toujours en descendant, et **chacune** des barres horizontales rencontrées : l'extrémité inférieure atteinte indique de quel élève il doit prendre la place (éventuellement, il ne bougera pas). Sur notre exemple,




l'élève 8 occupera la place qui était celle de 7.

(a) Est-il certain que, pour tout choix de barres horizontales, deux élèves ne se verront jamais attribuer la même nouvelle place ?

(b) Toute permutation des places peut-elle être ainsi obtenue (c'est-à-dire par un choix approprié des barres horizontales) ?

(c) Quel est le plus petit nombre naturel $n$ tel que toute permutation des 10 places puisse être obtenue par choix d'au plus $n$ barres horizontales ?

4. Démontrer qu'une droite partageant un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

## Maxi finale

1. Voir question n° 3 de la finale MINI, la première figure n'étant pas donnée.

2. Quels sont les nombres entiers qui sont à la fois carrés d'un nombre entier $n$ strictement positif et égaux à une somme de $n$ nombres entiers consécutifs ?

3. Deux cyclistes roulent à la même vitesse $v$ égale à 30 km/h sur une longue route plate, séparés par une distance $d$ égale à 100 m. A un endroit de cette route se trouve un signal lumineux qui alterne des phases vertes de durée 30 s et des phases rouges de durée 30 s. L'instant où le premier cycliste arrive à la hauteur du feu est uniformément aléatoire sur une période, c'est-à-dire : la probabilité qu'il arrive au plus $t$ secondes après que le feu est passé au vert vaut $\frac{t}{60}$, si $0 \leqslant t \leqslant 60$. Discuter quel sera l'écart $e$ entre les deux cyclistes lorsqu'ils auront tous les deux franchi le signal ; en moyenne, leur distance aura-t-elle diminué, augmenté ?

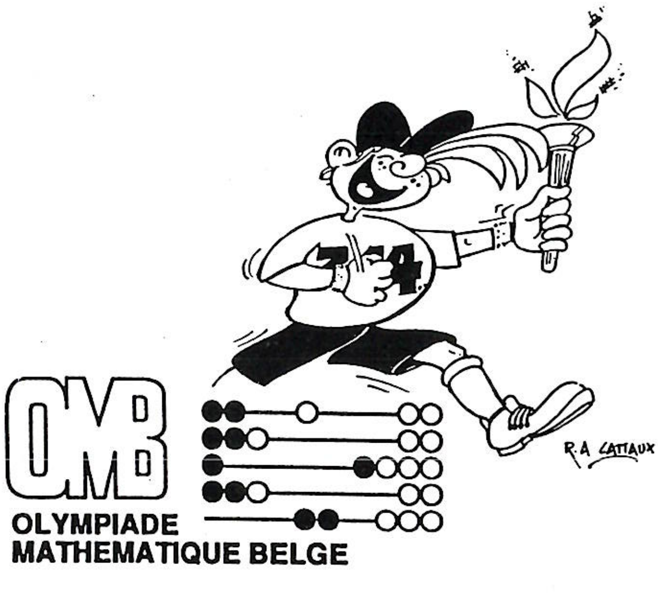
4. Dans le plan, soit $C$ un triangle plein ou un parallélogramme plein. Nous dirons qu'un demi-plan $D$ privilégie $C$ si l'aire de l'intersection de $D$ et $C$ vaut au moins sept huitièmes de l'aire de $C$ :

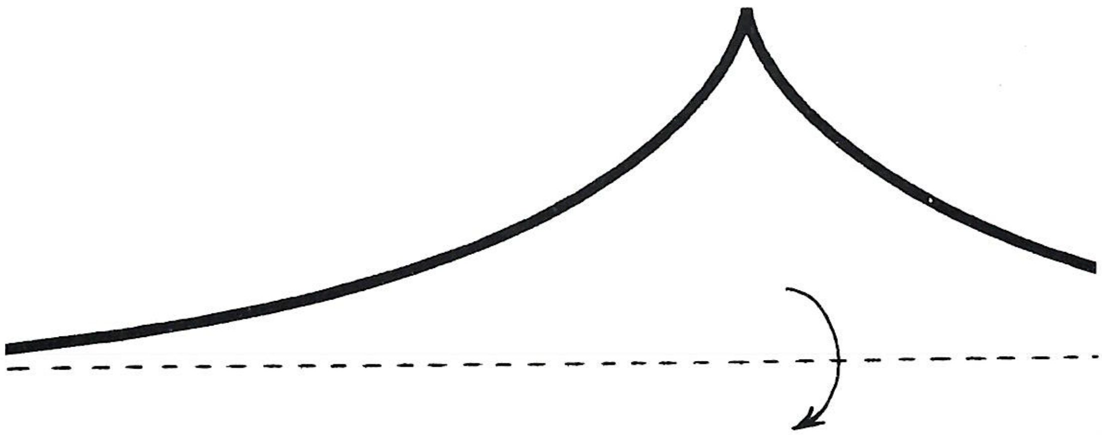
$$\text{aire}(D \cap C) \geqslant \frac{7}{8}\text{aire}(C)$$

Si $D_1$ et $D_2$ sont deux demi-plans qui privilégient $C$, en est-il de même de tout demi-plan $D$ contenant l'intersection $D_1 \cap D_2$, lorsque

(a) $C$ est un triangle plein ?

(b) $C$ est un parallélogramme plein ?





La courbe représentée ci-dessus porte le nom de TRACTRICE ou ÉQUITANGENTIELLE. Elle fut étudiée en détail en 1692 par HUYGENS mais aussi par LEIBNIZ, Johann BERNOULLI et bien d'autres.
La droite en pointillé est sa *directrice*. Etant donnée une telle droite directrice, la TRACTRICE est le lieu des points $M$ tels que le segment tangent à la courbe, compris entre ce point $M$ et la droite directrice a une longueur constante $a$.

Les équations paramétriques de la TRACTRICE sont alors : $\begin{cases} x = a\cos t + a\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ y = a\sin t \end{cases}$

Si on fait tourner la TRACTRICE autour de sa directrice, qui est également son *asymptote*, la rotation engendre la surface que tu peux contempler ci-dessous et sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, surface qui porte le nom de PSEUDOSPHÈRE.

Il existe en effet une analogie profonde entre la sphère et cette surface ; notamment une « espèce de propriété complémentaire » concernant la somme des angles intérieurs des triangles « sphériques » que l'on peut dessiner sur ces surfaces.
La PSEUDOSPHÈRE joue aussi un rôle non négligeable en géométrie non euclidienne, en particulier, en géométrie de LOBATCHEVSKI ; mais cela, c'est une autre histoire ... Tu peux toujours en parler à ton professeur de mathématiques.

La Rédaction de *Math-Jeunes* te souhaite une fructueuse session d'examens suivie, bien entendu, de vacances ensoleillées ...

A bientôt ...