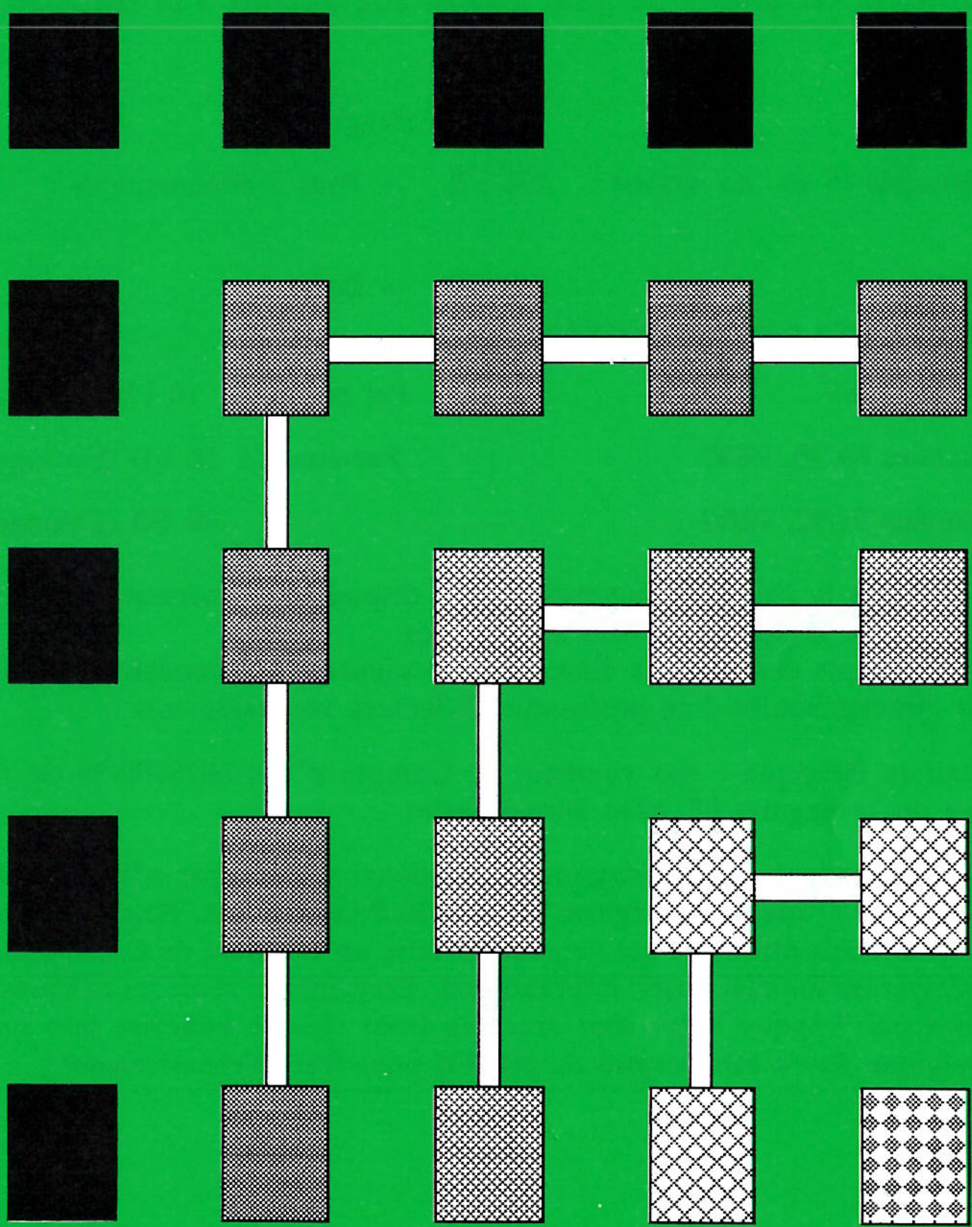
MATH-JEUNES



15e année
Novembre - n°62

Bureau de dépôt: Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, G.Noël, A.Parent, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux
Conception de la couverture : K. Martroye

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Etranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1989 — Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
- Années 89/90, 90/91 — Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
- Années 91/92, 92/93 — 80 FB (Etranger : 160 FB)

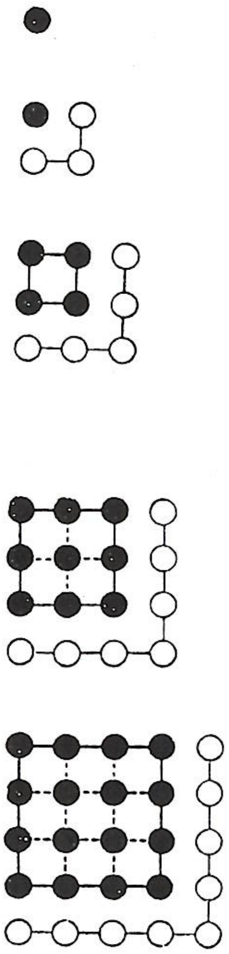
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. Debaille Joelants, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°62 Quinzième année 1993

MATH-JEUNES



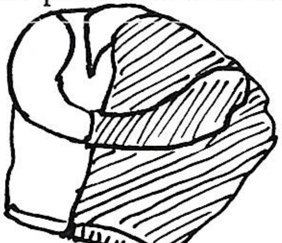
Jeux et Passe-temps (5)

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

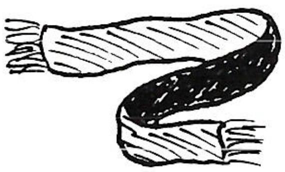
Une étrange aventure

Connaissez-vous Mathieu ?
Mais oui, bien sûr ! C'est le personnage des illustrations de votre revue préférée (*Math-Jeunes* bien entendu).
L'autre soir, il lui est arrivé une bien étrange et un peu ridicule aventure.
Il venait juste de rentrer à la maison et était en train d'enlever son blouson. Il avait déjà retiré son bras d'une manche lorsque la lumière s'est éteinte. Il a donc continué dans le noir et s'est mis à sortir l'autre bras de l'autre manche. Mais ce faisant, il la retourna entièrement, mettant ainsi son envers à l'extérieur et son endroit à l'intérieur.
Afin de ne pas oublier de mettre de l'ordre dès le lendemain dans cette situation cocasse, il glissa une des deux manches dans l'autre puis abandonna le tout sur une chaise pour aller se coucher, l'esprit tout à fait serein.

Le lendemain, il s'est donc retrouvé face à un bien étrange vêtement. Si vous voulez bien y réfléchir un peu, vous serez certainement d'accord pour admettre que son blouson n'avait plus d'endroit ni d'envers.



Si vous préférez, on peut aussi dire que son endroit et son envers ne formaient plus qu'une seule et même face.
Il est facile de vous en convaincre. Il suffit pour cela que vous imaginiez que vous êtes réduit à la taille d'une fourmi et que vous vous promenez sur ce vêtement si étrange. Vous passerez directement du coté doublure à l'autre coté sans nécessairement passer le long d'un bord du blouson. Une autre façon de vous convaincre que le blouson n'avait plus qu'une face est la suivante : je vous invite à réaliser l'expérience avec un de vos blousons puis de le peindre avec une couleur en n'étant arrêté que par les bords. Vous serez bien obligé d'admettre que votre vêtement n'a plus qu'une face, autrement dit, que son intérieur et son extérieur forment une même face.
Je ne suis pas certain que cette dernière suggestion remplira d'aise vos responsables familiaux. Mathieu, quant à lui, était très fier. Il s'imaginait avoir inventé une nouvelle notion : celle d'un objet ne possédant qu'une seule face. Il s'est donc mis à rechercher s'il n'était pas possible de réaliser cette transformation avec un autre objet vestimentaire et il s'est attaqué à ce défi en utilisant sa belle écharpe double face (noire d'un côté et grise de l'autre).
Elle possède bien deux faces puisqu'on ne sait passer du noir au gris sans transiter par un bord.



Je vous invite à imiter Mathieu et à manipuler votre propre écharpe pour voir s'il vous est possible de la transformer en un objet à une seule face.
Dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*, je vous indiquerai comment Mathieu a procédé et à quelles autres manipulations il

s'est livré. Mais je vous rassure quand même tout de suite, il a réalisé ses expériences à l'aide de morceaux de papier de réemploi au lieu de les effectuer sur ses vêtements préférés.

À la prochaine.

Concours « Bulles »

En page 3 de couverture, tu pourras remarquer que MATHIEU n'est plus seul, MATHILDE et MATHUVU l'ont rejoint dans les pages de *Math-Jeunes* pour faire profiter les lecteurs de leurs échanges d'idées. Tu peux, si tu le souhaites, suggérer quelques idées (bonnes de préférences) à ces trois joyeux lurons ; pour ce faire, remplis et envoie-nous une copie des bulles que tu trouveras également en page 3 de couverture.
Le Comité de rédaction récompensera les textes les plus originaux.

Brochure « Olympiades »

Il est enfin paru, ... le troisième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges.
Il comprend 191 pages et 768 questions de tous niveaux, rencontrant la plupart des disciplines de la mathématique. Pour vous le procurer, il suffit de verser la somme de 235 FB (245 FB pour l'étranger) sur le compte

000-0728014-29
S.B.P.M.e.f.
rue de Trazegnies 87 - 6230
Pont-à-Celles

Le tome 1 est épuisé mais il vous est loisible de commander les tomes 2 et 3 ensemble, pour le prix de 360 FB (étranger, 370 FB).

Pour ceux qui aiment raisonner ...

Monique Parker,
Université Libre de Bruxelles

Dans une contrée lointaine vit une communauté de moines raisonneurs. Leur règle est très stricte :

- ils ne peuvent communiquer entre eux d'aucune façon (ni par la parole, ni par signes, ni autrement) ;
- ils ne peuvent voir leur propre image (ni dans un miroir, ni dans une flaque d'eau, ni autrement) ;
- ils se rencontrent une fois par jour autour d'une grande table ronde ;
- le supérieur de la communauté peut leur adresser la parole dans les situations très graves.

Un jour, le supérieur leur adresse le discours suivant :
« Une terrible maladie a frappé certains d'entre vous. Cette maladie se traduit par l'apparition d'une tache noire sur le front. Dès que quelqu'un se sait atteint de la maladie, il doit, pour sauver la communauté, se suicider. »
Tous ces moines sont imbattables en raisonnement logique et savent que leurs compagnons sont tout aussi intelligents qu'eux-mêmes.
Peux-tu déterminer le nombre de jours qu'il faut pour que tous les malades se soient suicidés ?
Donne ta réponse en fonction du nombre N de malades (on sait que $N \geqslant 1$).

Math-Jeunes n°62, 4–7, 1993

Le « grand » théorème de Fermat démontré ?

Michel Ballieu, ALTAÏR, *Université Libre de Bruxelles*

1. Introduction

Vers la fin du mois de juin de cette année (et plus exactement le 23), Andrew J. WILES (40 ans), Professeur à l'Université de Princeton, concluait une série de trois exposés donnés au *Isaac Newton Institute for Mathematical Science* à Cambridge (G.-B.) en annonçant qu'il avait démontré la conjecture de TANIYAMA. Cela provoqua pas mal de remous au sein de la communauté mathématique internationale, alors que le « brave belge fidèle lecteur du "Soir" » se demandait franchement ce qu'il en avait bien à ... de cette affirmation.

Ne nous affolons pas ! ... Pour je ne sais quelle sombre raison, pas mal de gens se sont acharnés à creuser un fossé entre ce qu'ils appellent le « monde des humains » et celui des « mathématiques ». Cela est fort dommage, d'autant plus qu'il est tout à fait possible d'être « humain » et « mathématicien » à la fois. Mais il faut cependant reconnaître qu'il est beaucoup plus aisé de faire comprendre à l'homme de la rue les « retombées » de la découverte, en physique, de la **Bombe Atomique** plutôt que celles de la démonstration, en mathématiques, de la conjecture de TANIYAMA. [1]

Mais qui est donc ce TANIYAMA et quel rapport existe-t-il entre lui et Pierre de FERMAT dont il est question dans le titre de l'article ?

[1] Cette prise de position n'engage évidemment que l'auteur de l'article.

2. Historique

Pierre de FERMAT naît à la mi-août 1601 à Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne). Il y est baptisé le 20. Son père, Dominique Fermat, bourgeois, marchand de cuir était consul de cette ville.

Pierre de FERMAT entame ses premières études à Beaumont chez les Frères Cordeliers puis les poursuit à Toulouse. En 1630, il achète, pour la somme de 43500 livres, un office de commissaire des requêtes du Palais et de conseiller du Roi au Parlement de Toulouse. L'année suivante, il se marie avec sa cousine Louise Le Long, fille d'un conseiller au Parlement. Il meurt à Castres le 9 janvier 1665 au cours d'une session de la Chambre de l'Édit.

En fait, en cette première moitié du dix-septième siècle, l'élite intellectuelle se trouve essentiellement parmi la bourgeoisie. Les fils de nobles, après une instruction de base, se dirigent vers les Académies militaires ; là, on leur enseigne le métier des armes, l'équitation et la danse. Les fils de bourgeois, par contre, complètent leurs « humanités » par des études de droit ou de médecine. Grâce à la fortune amassée par leurs parents (commerce, banque, ...), ils achètent ensuite des charges. Cette précision me semblait nécessaire : FERMAT n'a pas acheté sa charge de juriste parce qu'il était un « incapable » ; c'était une « pratique » de l'époque ...

Une autre caractéristique de ce début de siècle est la décadence des Universités ; en 1612, par exemple, la Faculté de Médecine de Toulouse refuse la création d'une chaire de chirurgie et de pharmacie ! Il faut également signaler le manque d'organisation du monde scientifique ; c'est seulement en 1666 que, grâce à COLBERT, se crée l'Académie des Sciences à Paris. Face à une telle situation, des foyers intellectuels voient le jour, foyers où l'on s'intéresse aussi bien à la poésie qu'à la physique, à l'astronomie, et par la-même, aux mathématiques. FERMAT n'est donc ni un « matheux » égaré parmi les juristes, ni celui que certains historiens des sciences appellent à tort « le Prince des Amateurs ».

Avant 1665, les mathématiciens ne disposaient, pour rendre publics leurs travaux, que des seuls moyens suivants : soit la correspondance avec des « intellectuels scientifiques » reconnus, soit la publication d'un livre. On devine aisément que, du point de vue financier, cette dernière solution était souvent illusoire.

Des hommes eurent donc l'idée de jouer le rôle de « plaque tournante » entre les différents « courants scientifiques » de ce temps. Ils organisèrent une espèce de réseau de communications des idées, en écrivant, en recevant, en faisant circuler des lettres et traités. L'un des plus célèbres « acteurs de la diffusion de la science » à cette époque est le Père Marin MERSENNE (1588-1648), moine de l'ordre des Minimes et ancien condisciple de DESCARTES (1596-1650).

FERMAT fait la connaissance de MERSENNE en 1636 et est très vite reconnu comme l'un des meilleurs géomètres du moment. MERSENNE diffuse ses écrits en Italie (TORRICELLI (1608-1647)), aux Pays-Bas (VAN SCHOOTEN (1615-1660)) où ils serviront notamment à initier HUYGHENS (1629-1695) aux méthodes de détermination des extrema, ... FERMAT fut en correspondance avec les grands esprits de son siècle ; outre MERSENNE, TORRICELLI, VAN SCHOOTEN dont il a été question, on peut encore citer PASCAL (1623-1662), ROBERVAL (1602-1675), DESCARTES (qui ne l'appréciait guère), ...

En arithmétique — qu'on peut qualifier de « théorie des nombres », à partir du moment où on traite de problèmes moins élémentaires — la mode à l'époque était, entre autres choses, de rechercher des solutions entières ou rationnelles d'équations indéterminées. Ce fut l'un des sujets d'intérêt de FERMAT. L'une de ses sources d'inspiration était les *Arithmétiques* de DIOPHANTE (III^e - IV^e apr. J.-C.) dont il possédait la traduction latine de BACHET DE MÉZIRIAC (1581-1638).

Signalons, qu'en l'honneur du Sage grec DIOPHANTE, on appelle « équation diophantienne » toute équation dont on recherche les solutions en nombres entiers.

Il serait maintenant de bon ton d'introduire la « conjecture ? » souvent appelée « Grand Théorème ? » de FERMAT. Il semble que nous pouvons maintenant affirmer, sans guillemets, sans point d'interrogation : **le Grand ou encore Dernier Théorème de Fermat.**

3. Le Théorème de Fermat

Dans l'exemplaire des *Arithmétiques* de DIOPHANTE (traduction de BACHET) que possédait FERMAT, à la page 61, on trouve la question 8 du livre II : « *Résoudre en nombres rationnels l'équation indéterminée* $x^2 + y^2 = a^2$ ». FERMAT a ajouté dans la marge l'annotation suivante : « *Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit, en général, une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.* »

C'est cette annotation qui constitue le GRAND THÉORÈME. En fait, son histoire commence en 1670 quand Samuel FERMAT, fils de Pierre de FERMAT, fait éditer à Toulouse les travaux de son père, ses notes et entre autres celle dont il vient d'être question. En langage plus moderne et plus clair pour les lecteurs de *Math-Jeunes*, voici ce dont il s'agit.

Chacun sait qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (x, y, z) d'entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Par exemple, $(3,4,5)$, $(6,8,10)$, $(9,12,15)$, ... mais aussi $(5,12,13)$, $(8,15,17)$, $(7,24,25)$, ...
En fait, la solution la plus générale de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

qui satisfait les conditions

$$x > 0, \; y > 0, \; z > 0, \; (x, y) = 1, \; 2 \mid x,$$

est

$$x = \lambda(2ab), \; y = \lambda(a^2 - b^2), \; z = \lambda(a^2 + b^2)$$

où a, b sont des entiers de parités différentes et

$$(a, b) = 1, \quad a > b > 0$$

Le Grand Théorème affirme :
$\forall n \geqslant 3$, $x^n + y^n = z^n$ ne possède aucune solution entière autre que des solutions triviales (c'est-à-dire où au moins l'une des trois inconnues x, y ou z est égale à 0).
Dans une lettre à MERSENNE, FERMAT livre sa démonstration pour $n = 4$; elle utilise la méthode dite de « descente infinie » qui repose sur le principe suivant :
si vous me proposez la solution (a, b, c) , je suis capable de trouver une solution (a', b', c') avec $a' < a$. Puisque a, b et c sont supérieurs à 0, il s'ensuit une contradiction. »
Il est peu probable que FERMAT détenait la preuve pour toutes les valeurs de n car en fait, on ne trouve l'énoncé du théorème que dans la marge citée précédemment ; cela n'était pas destiné à être publié. Par contre, il est raisonnable de penser qu'il possédait également la démonstration dans le cas où $n = 3$ mais elle ne fut donnée qu'en 1753 et encore, incomplètement, par EULER (1707-1783).
Entre 1750 et 1850, c'est la période du coup par coup. On remarque que, si on a

$$a^{mn} + b^{mn} = c^{mn}$$

on a aussi

$$(a^m)^n + (b^m)^n = (c^m)^n$$

et, par conséquent, s'il n'y a pas de solution pour l'exposant m, il n'y en aura pas non plus pour les multiples de m. On peut donc se restreindre à rechercher des solutions pour des exposants premiers impairs.
On voit aussi que, si (a, b, c) est solution non triviale, (ka, kb, kc) l'est également, pour tout k supérieur à zéro. On peut donc se limiter aux solutions dites **primitives**, c'est-à-dire où les entiers a, b et c sont premiers entre eux.
Enfin, puisqu'on ne travaille qu'avec des exposants impairs, il revient au même de résoudre l'équation

$$x^n + y^n + z^n = 0 \quad \text{avec} \quad z < 0.$$

En 1850, KUMMER (1810-1893) introduit la notion de *premier régulier* ; c'est tout simplement une « classe » de nombres premiers jouissant de certaines propriétés. Il démontre que si p premier est régulier, alors le Grand Théorème de Fermat est vrai pour l'exposant p. Pendant cent trente ans, ce sera le meilleur résultat concernant ce théorème. Jusqu'en 1987, on avait démontré que le théorème était vrai pour tout p inférieur ou égal à cent cinquante mille.
En 1983, l'allemand FALTINGS démontre la conjecture de MORDELL (1922) qui affirme que, pour $n \geqslant 4$, $x^n + y^n + z^n$ possède un nombre **fini** de solutions primitives. FALTINGS a d'ailleurs obtenu pour cela la Médaille Fields (équivalent du Prix Nobel pour les mathématiques). Entre 1985 et le 23 juin 1993, l'allemand G. FREY suppose le théorème faux pour $p \geqslant 5$. Il considère un triplet de solutions primitives (a, b, c) de $x^p + y^p + z^p = 0$. À partir de là, FREY fabrique ce qu'on appelle une **courbe elliptique** d'équation

$$y^2 = x \cdot (x - a^p) \cdot (x + b^p).$$

Cette courbe a ainsi une équation du troisième degré. En l'étudiant, on arrive très vite à la conclusion qu'elle possède des propriétés beaucoup trop miraculeuses pour pouvoir exister ! Mais cela ne constitue évidemment pas une démonstration. En 1987, l'américain K. RIBET, professeur à Berkeley, démontre le théorème suivant :

Si une telle courbe elliptique existe, alors elle est semistable non modulaire. (1)

C'est ici que je dois arrêter d'expliquer de manière trop précise ce qu'il se passe exactement car les vingt-quatre pages de *Math-Jeunes* sont comme la marge du « bouquin » de FERMAT : trop étroites pour contenir ces explications ...
Or, depuis 1960 environ, on connaissait la conjecture de TANIYAMA-WEIL : *Toute courbe elliptique est modulaire.* Le 23 juin de cette année, Andrew WILES annonce qu'il a démontré partiellement la conjecture de TANIYAMA-WEIL, à savoir :

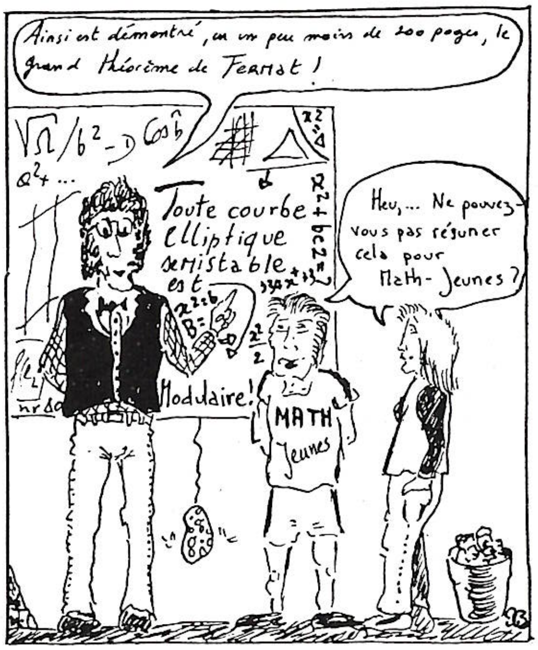
Toute courbe elliptique semistable est modulaire. (2)

On voit tout de suite la contradiction qui existe entre (1) et (2) et, par conséquent, si Andrew WILES ne s'est pas trompé dans ses quelque deux cents pages de démonstration, le Grand Théorème de Fermat est enfin démontré, plus de trois cents ans après son énoncé !...
La démonstration de WILES a d'ores et déjà fait l'objet de pas mal de vérifications. Nous sommes en novembre 1993 et nous pouvons affirmer qu'il y a 99,999... % de chances pour que le Grand Théorème de Fermat soit démontré.

Bibliographie

[1] Carl B. BOYER, Uta C. MERZBACH, *A History of Mathematics*, J. Wiley & sons, 2nd ed., 1989.
[2] G.H. HARDY & E.M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, 5th ed., 1979.
[3] J. HORGAN, *Fermat's MacGuffin*, in Scientific American, September 1993.
[4] R. HURON, *L'aventure mathématique de Fermat*, in Pierre de Fermat, Toulouse et sa région, C.N.R.S., Toulouse, 1966.
[5] K.A. RIBET, *Wiles proves Taniyama's Conjecture ; Fermat's Last Theorem Follows*, in Notices of the A.M.S., Vol. 40, Nr 6, July-August 1993.
[6] Alain VALETTE, Université de Neuchâtel (Suisse), *Le théorème de Fermat est démontré*, Communication faite lors du Congrès annuel de la S.B.P.M., août 1993.

Je tiens à remercier Jean DOYEN, professeur à l'U.L.B., qui a largement contribué à la rédaction de cet article.



G. Delpature. A.R. Binche

FERMAT

De l'intérêt (simple) de l'étude de certaines fonctions élémentaires

D. Justens, *Institut Cooremans*

1. Introduction

À la recherche d'applications utilisables dans le cadre des cours de mathématiques traditionnels, nous nous sommes penchés (une fois encore, diront certains) sur la mathématique financière. Les fonctions hyperboliques décrites par

$$x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (1.1)$$

font généralement l'objet, dans les cours du secondaire, d'études exhaustives dont l'élève peut se demander légitimement si elles sont susceptibles de déboucher sur une quelconque application en univers réel.

Notre propos est d'utiliser la théorie de l'intérêt simple pour construire de tels exemples. On sait (voir [4]) que nous ne portons pas cette théorie aux nues. Elle est mathématiquement incohérente, ne permet pas de résoudre de manière unique des problèmes élémentaires (calcul de taux ou de remboursement) et ne répond pas aux conditions légitimes que l'on doit imposer pour la description de l'évolution d'un capital. Néanmoins, il se trouve que c'est la théorie la plus utilisée et il est amusant de constater empiriquement que les conditions limites (asymptotes) de (1.1) sont parfois dépassées dans le cadre d'exemples réels, conduisant ainsi à des résultats absurdes et ininterprétables.

Rappelons l'équation décrivant l'évolution d'un capital au fil du temps proposée par la théorie de l'intérêt simple. Soit $C(t)$ ce capital à l'instant t et i le taux d'intérêt associé à l'unité de temps choisie. On a :

$$C(t) = C(0) \times (1 + it) \qquad (1.2)$$

Le lecteur intéressé par les autres descriptions peut consulter [1], [3] et [4].

Nous allons présenter les problèmes classiques d'emprunts et de ventes à tempérament par remboursements constants en utilisant (1.2).

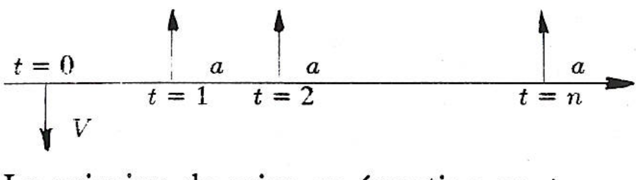
2. Mise en équation en fin de contrat

C'est la façon de procéder qui utilise la relation (1.2) pour des valeurs positives de t (c'est « l'intérêt simple » par opposition à « l'escompte simple » qui l'utilise pour des valeurs négatives de t : voir paragraphe 3).

Le principe de base de toute mise en équation financière est le suivant : « Égalité des flux financiers opposés en tenant compte de l'équation d'évolution ».

Dans le cas qui nous occupe, on égale des flux financiers capitalisés, tous les calculs étant effectués vers le futur. Considérons un emprunt V (ou un achat à tempérament correspondant à ce montant) remboursé par n versements équidistants dans le temps, de montant a. Il est préférable d'utiliser un taux d'intérêt associé à l'unité naturelle de temps du contrat, à savoir « l'interversement ». Ainsi, lorsque les remboursements sont mensuels, il est beaucoup plus simple de mettre le problème en équation avec un taux mensuel.

Graphiquement, les flux sont décrits par :



Le principe de mise en équation en $t = n$ donne :

$$V(1 + ni) = a[1 + (n-1)i] + a[1 + (n-2)i] + \cdots + a[1 + i] + a \qquad (2.1)$$

En regroupant les termes en « i » et en commençant par le dernier dans le membre de droite, on a :

$$\begin{aligned} V + Vni &= na + ai[1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\ &= na + \frac{ai(n-1)n}{2} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

(Pour la somme des n premiers nombres naturels, voir [4]).
On peut utiliser la relation (2.2) pour calculer a (le remboursement) en connaissant V et n et en considérant a comme une fonction de la seule variable économique exogène, le taux d'intérêt exigé i. On comprend le rôle particulier joué par la variable i qui est imposée par l'univers économique face aux paramètres V et n dépendant du choix du consommateur, et qui donc peuvent être limités *ad libitum*.
De (2.2), on tire aisément :

$$\begin{aligned} a &= \frac{V + Vni}{n + \frac{i(n-1)n}{2}} \qquad (2.3) \\ &= \frac{\frac{V}{n} + Vi}{1 + \frac{(n-1)i}{2}} \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Il est intéressant de constater que l'on retrouve en numérateur la relation qui permet de passer du taux de chargement au remboursement (il suffit de remplacer le taux i par un taux de chargement r). Le dénominateur étant ($n > 1$) strictement supérieur à 1, on peut en déduire que travailler avec le taux d'intérêt est toujours plus avantageux pour le client, ce qui explique sans doute pourquoi l'usage du taux de chargement est aussi répandu ...
Comme $V, i \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on constate que a est toujours strictement positif. Rassurons-nous, les conclusions que l'on pourra tirer du modèle ne seront pas toujours aussi réalistes. Intéressons-nous, par exemple, à l'asymptote horizontale. Elle décrit ici l'évolution du remboursement lorsque le taux d'intérêt tend vers $+\infty$. On constate que cette valeur limite est finie et vaut

$$a(+\infty) = \frac{2V}{n-1} \qquad (2.5)$$

Il est étonnant de constater que lorsque l'on exige une rémunération infinie du taux de rentabilité, celle-ci se traduise par des remboursements bornés. Mais là ne s'arrête pas le surréalisme du modèle proposé. On peut, toujours à partir de (2.2), déterminer une approximation du taux d'intérêt en considérant ce dernier comme seule fonction du remboursement a. Les valeurs V et n ont un rôle particulier que nous avons déjà commenté. On obtient facilement :

$$na - V = Vni - \frac{ain(n-1)}{2} \qquad (2.6)$$

(on reconnaît ici, dans le membre de gauche, la somme des charges financières : montant total des remboursements moins montant emprunté : cette valeur est évidemment toujours strictement positive). On en tire :

$$i = \frac{a - \frac{V}{n}}{V - \frac{an(n-1)}{2}} \qquad (2.7)$$

Les conditions naturelles du contrat : $V, n, a \in \mathbb{R}^+$ et $n \times a > V$ ne garantissent nullement la positivité de la solution. On vérifie que (2.7) détermine un taux strictement positif si et seulement si

$$a < \frac{2V}{n-1}$$

On constate enfin que si

$$a \xrightarrow[a < \frac{2V}{n-1}]{} \frac{2V}{n-1}$$

le taux tend vers l'infini. Un remboursement borné conduit donc à une estimation de la rémunération infinie ! Mais il y a mieux : un dépassement du montant limite amène une estimation négative du taux ! On doit alors interpréter cette valeur comme « surinfinie ». Ces considérations ne sont pas uniquement théoriques : un exemple réel présenté au paragraphe 4 illustrera le fait que ces conditions limites sont parfois dépassées dans la vie de tous les jours.

3. Mise en équation en début de contrat

Le moment du calcul étant antérieur à toutes les échéances, on utilise (1.2) pour des valeurs négatives de t. L'équation est ici :

$$\begin{aligned} V &= a(1-i) + a(1-2i) + \cdots + a(1-ni) \\ &= na - \frac{ian(n+1)}{2} \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Comme précédemment, on calcule a comme fonction de i (variable économique extérieure) en supposant V et n constants (et choisis arbitrairement par le client). On obtient :

$$a = \frac{\frac{V}{n}}{1 - \frac{(n+1)i}{2}} \qquad (3.2)$$

Encore une fois, l'asymptote verticale est intéressante. Elle assure en effet que le remboursement a devient infini lorsque i tend vers $\frac{2}{n+1}$. Nous laissons l'interprétation de cette propriété étrange aux soins du lecteur. On calcule tout aussi facilement :

$$i = \frac{a - \frac{V}{n}}{a \times \frac{n+1}{2}} \qquad (3.3)$$

Dans (3.3), l'asymptote horizontale nous donne la limite supérieure du taux (rémunération) lorsque le remboursement devient infini. Il est intuitif de considérer qu'une charge infinie conduit pour un emprunt de montant borné à une mesure de la rémunération également infinie. On voit qu'il n'en est rien dans ce modèle !

4. Exemple et conclusions

On imagine mal que les conditions extrêmes qui viennent d'être étudiées puissent être rencontrées concrètement. On a tort. L'exemple d'Harpagon (voir [2]) est suivi avec succès par maintes firmes de ventes à tempérament par correspondance. On se souvient que l'avare prêtait à son propre fils, par l'intermédiaire de Maître Simon (et sans le savoir), la somme théorique de 15000 livres en ne lui en fournissant réellement que 12000, les remboursements étant calculés bien entendu sur la première somme. En feuilletant les petites annonces des ventes par correspondance, nous sommes tombés sur un micro PC de poche affiché 11395 et vendu pour un acompte de 1710 francs et 15 mensualités de 755. Que le lecteur intéressé se rende dans certain magasin spécialisé dans la vente de ces petites merveilles, il pourra en disposer pour moins de 7000. Le montant emprunté réellement V est donc de $7000 - 1710 = 5290$. On vérifie que la condition

$$a < \frac{2V}{n-1} = \frac{10580}{14} = 755,714$$

n'est vérifiée que tout juste. Pire, nous avons pu trouver le même micro PC pour moins de 5000...

Les usuriers sont toujours vivants, et leurs pratiques n'ont vraiment pas changé depuis l'invention de cette valeur conventionnelle qu'est l'argent. Enfin, pour terminer par une note moins sérieuse, nous ne résistons pas à l'envie de conseiller à tous la lecture du (définitivement) dernier Peyo [5] pour sourire avec bon sens à la solution trouvée par le tout premier « schtroumpf financier » pour pallier les tracas inexorablement liés à la gestion financière et à la possession de l'or.

Bibliographie

[1] J. Bair, R. Hinnion, D. Justens, *Applications économiques au service de la mathématique*, SBPM, 1989.

[2] M. Burnet, *Des équations de Molière ... aux corps finis de Prévert*, Math-Jeunes 59, pp. 51-55, 1993.

[3] G. Cnappelinckx, L. Nysten, P. Meurice, *Algèbre financière*, Bruxelles, De Boeck, 1986, 21e éd.

[4] D. JUSTENS, *Introduction à la mathématique financière*, Bruxelles, De Boeck-Université, 1989, 2e éd.
[5] PEYO, *Le schtroumpf financier*, Lombard, Bruxelles, 1992.

A la recherche des triplets pythagoriciens

Maurice Famelart
Institut Sainte-Claire, Soignies

Tout le monde connaît ces triangles rectangles particuliers dont les trois côtés ont pour mesures des nombres naturels. Citons, par exemple, le célèbre $(5,4,3)$ (le premier nombre est la mesure de l'hypoténuse, les deux autres, les mesures des côtés de l'angle droit), ou encore $(51,45,24)$, $(73,55,48)$, etc.

De tels triplets de nombres sont appelés *triplets pythagoriciens*. Nous allons nous attacher à la recherche de tels triplets.

Trouver un triplet pythagoricien (x,y,z) (x est la mesure de l'hypoténuse, y et z sont les mesures des côtés de l'angle droit) revient à déterminer une solution en nombres naturels de l'équation $x^2 = y^2 + z^2$ (théorème de Pythagore).

Soit (a,b,c) un triplet pythagoricien, et soit $k = \text{pgcd}(a,b,c)$, on peut poser $a = k \cdot p$, $b = k \cdot q$ et $c = k \cdot r$ (p,q,r sont évidemment des nombres naturels premiers entre eux). Comme

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

on a

$$(k \cdot p)^2 = (k \cdot q)^2 + (k \cdot r)^2,$$

ce qui, après simplification, donne :

$$p^2 = q^2 + r^2.$$

(p,q,r) est donc également un triplet pythagoricien dont les composantes sont des nombres naturels premiers entre eux.

Remarquons que les nombres p, q et r sont deux à deux premiers, en effet, si p et q, par exemple, avaient un diviseur commun d :

$$p = d \cdot p' \Rightarrow p^2 = d^2 \cdot p'^2$$
$$q = d \cdot q' \Rightarrow q^2 = d^2 \cdot q'^2$$

Par conséquent,

$$r^2 = p^2 - q^2 = d^2 \cdot p'^2 - d^2 \cdot q'^2 = d^2 \cdot (p'^2 - q'^2).$$

Ce qui prouve que r serait aussi divisible par d ce qui ne peut se produire puisque p, q et r sont premiers entre eux.
Montrons maintenant que p doit être un nombre impair et que les nombres q et r doivent être de parités différentes.

- Si q et r sont pairs, ils ne sont pas premiers entre eux. C'est impossible !

- Si q et r sont impairs, on a $q = 2\alpha + 1$ et $r = 2\beta + 1$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N})$ donc

$$\begin{aligned} p^2 &= q^2 + r^2 \\ &= (2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 \\ &= 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 4\beta^2 + 4\beta + 1 \\ &= 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \end{aligned}$$

  p^2 est donc un nombre pair sans être multiple de 4 ce qui est évidemment impossible car si p est pair, p^2 est un multiple de 4 et si p est impair, p^2 est impair aussi !!

- Si q est pair et r impair, on peut poser $q = 2\alpha$ et $r = 2\beta + 1$, donc

$$\begin{aligned} p^2 &= q^2 + r^2 \\ &= (2\alpha)^2 + (2\beta + 1)^2 \\ &= 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\beta + 1 \\ &= 4(\alpha^2 + \beta^2 + \beta) + 1 \end{aligned}$$

  p^2 est donc un nombre impair et p ne saurait être qu'impair.

- On montre de même que si q est impair et si r est pair alors p est impair.

Pour fixer les idées, on peut supposer que q est impair et r est pair (ce qui ne restreint pas la généralité puisque l'équation de départ est symétrique par rapport à y et à z).
Remarquons que

$$\left.\begin{matrix} p \text{ impair} \\ q \text{ impair} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} p+q \text{ pair} \\ p-q \text{ pair} \end{matrix}\right.$$

$$\frac{p+q}{2} \times \frac{p-q}{2} = \frac{p^2-q^2}{4} = \frac{r^2}{4} = \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Or pgcd $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right) = 1$ car pgcd$(p,q) = 1$ (voir annexe).
Le produit $\frac{p+q}{2} \times \frac{p-q}{2}$ étant un carré parfait, il faut que chaque facteur soit un carré parfait.

$$\frac{p+q}{2} = m^2 \qquad \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = p = m^2 + n^2$$

$$\frac{p-q}{2} = n^2 \qquad \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} = q = m^2 - n^2$$

(avec $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$)

De plus

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 - q^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 \\ &= 4m^2n^2 \end{aligned}$$

$$r = 2mn$$

Ainsi toute solution de l'équation de départ $x^2 = y^2 + z^2$ est un triplet de nombres donné par les relations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= k(m^2 + n^2) \\ y &= k(m^2 - n^2) \\ z &= 2kmn \end{aligned}\right.$$

où $k \in \mathbb{N}$, $m > n$.

8ème CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

Participez à l'événement le plus astucieux de l'année !

Bienvenue dans l'univers des jeux mathématiques !

Nous vous offrons de révéler le (petit) génie qui sommeille en vous ! Car ce questionnaire vous permet de participer au huitième championnat international des jeux mathématiques et logiques, alias l'événement le plus astucieux de l'année!

Tout le monde est concerné : depuis les élèves de 4e primaire jusqu'aux adultes les plus diplômés. Vous souhaitez déterminer votre catégorie? Consultez le tableau ci-dessous. Il vous indique aussi le numéro des problèmes que vous devrez résoudre pour atteindre les demi-finales régionales. Vous n'avez droit qu'à deux erreurs ! Et pour chaque problème, une simple réponse ne suffit pas toujours. Il faut aussi le nombre de solutions (sauf en CM).

Une fois les jeux résolus, photocopiez le bulletin réponse, complétez-le et renvoyez-le **avant le 3 janvier 1994**. A ce stade de l'épreuve, la participation est entièrement gratuite. La qualification et la participation aux demi-finales nécessitent l'adhésion à la FFJM, mais vous pouvez y adhérer dès à présent.

Vous recevez votre convocation ? Oui ? Alors commence une grisante aventure: les demi-finales régionales le 19 mars à 14 heures dans l'une des 100 villes organisatrices dont plusieurs en Belgique.

La finale nationale belge est prévue le 28 mai 1994. Elle est dotée de nombreuses récompenses: calculatrices Hewlett-Packard, chèques CGER, jeux de réflexion Abalone, Pyramis, Quarto ... et de nombreux autres prix.

L'apothéose : la finale internationale à Paris les 2 et 3 septembre où 3.000.000 FB de prix attendent les lauréats. Mais nous savons que là n'est pas la raison première de votre participation.

A VOS MATHS. !

8ème CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

FAIRE DES MATHEMATIQUES AUTREMENT

Qu'est-ce qui fait courir les matheux joueurs? *Pourquoi les écoliers, élèves et étudiants qui s'enfuient devant le problème de mathématique donné en classe accourent-ils dès qu'il s'agit des jeux-problèmes du championnat? Pourquoi n'éprouvent-ils plus peur ou ennui devant les mathématiques lors du championnat? Deux explications ...*

DES ENIGMES FASCINANTES

Le principe des jeux-problèmes du championnat a spécialement été étudié pour leur plaire, même si les ressorts mathématiques sous-tendus sont aussi formateurs que ceux des "vrais" problèmes de mathématiques. En voici la recette:

Pas d'appel aux connaissances:
Les petites énigmes demandent *de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche*, mais pas réellement de connaissances.

Pas de démonstration:
Au risque de déplaire à quelques puristes, ***seul le résultat compte***. Qu'il s'exprime par un nombre, un dessin, une disposition de lettres.

Un habillage humoristique et moderne:
Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. On n'hésite pas à "coller" à l'actualité: élections, restructuration de cartes politiques, inflation ont été les sujets de problèmes des dernières séances du championnat.

Le résultat? Des problèmes plaisants, qui provoquent ***une hiérarchie souvent différente de celle constatée à l'école.*** *Car dans ce championnat, d'autres qualités peuvent s'exprimer: l'imagination, l'intuition, la persévérance.*

FEDERATION FRANCAISE DES JEUX MATHEMATIQUES
Comité de Belgique
BP 157 - 7700 MOUSCRON

QUARTS DE FINALE INDIVIDUELS PAR CORRESPONDANCE

Vous avez jusqu'au 3 janvier 1994 pour résoudre les problèmes de votre catégorie et retourner le bulletin réponse .

Catégorie	Public concerné	Problèmes à résoudre :
CM	Elèves de 4e et 5e primaire	N° 1 à N° 6
C1	Elèves de 6e primaire et 1ère secondaire	N° 3 à N° 9
C2	Elèves de 2e et 3e secondaire	N° 5 à N° 11
L1	Elèves de 4e, 5e et 6e secondaire	N° 5 à N° 14

DÉBUT DE L'ÉPREUVE CM

1 - DROLE DE VOYELLE (coefficient 1)

"L'énoncé de ce problème commence là!". C'est en ces termes que le professeur Levoyou s'adressa un jour à ses jeunes élèves. Le professeur Levoyou était un éminent spécialiste d'une certaine voyelle ; il avait même rédigé une thèse intitulée : *De l'occurence des lettres de l'alphabet dans les fables de Jean de La Fontaine*.

Cette voyelle, on la trouve dans *OUI*, mais pas dans *NON* ; elle est présente dans *PEUT-ETRE*, mais pas dans *JAMAIS*.

Combien de fois, minuscule ou MAJUSCULE, la voyelle en question apparaît-elle dans cet énoncé qui se termine par un point d'interrogation ?

2 - LES PLUVIOMETRES (coefficient 2)

Jonathan Dechien a trouvé deux vieux aquariums de forme cubique dans le grenier de sa grand-mère. Ces deux récipients sont dépourvus de couvercle. Le premier a une hauteur de 30 cm, tandis que la hauteur du second est de 20 cm.

Jonathan dépose ces deux pluviomètres improvisés, vides, au beau milieu du jardin de sa grand-mère. Après une averse diluviene, il y a une hauteur d'eau égale à 24 mm dans le premier récipient.

Quelle est alors en millimètres la hauteur d'eau dans le second récipient ?

Forme de la réponse demandée pour chacune des questions :
Catégorie CM : réponse unique reportée sur la bulletin réponse
Autres catégories : lorsqu'il y a plus d'une réponse, le nombre exact de solutions doit être indiqué et deux réponses données.

DÉBUT DE L'ÉPREUVE POUR LA CATEGORIE C1

3 - BIENTOT L'AN ... 2000 (coefficient 3)

Le premier janvier 1980, Annabelle avait deux fois l'âge de Pascal ; le premier janvier 1990, Annabelle avait 20 ans de plus que Pascal..

Quels sera l' âge d'Annabelle le 1 er janvier 2000 ?

4 - VACANCES POUR CHATS (coefficient 4)

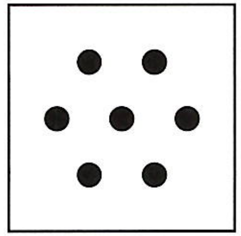
John Beaf tient une pension pour chat à Douglas, chef-lieu de l'île de Man. Il accueille principalement les chats des habitants de l'île, mais aussi ceux de quelques touristes visitant l'île.

Les chats de l'île de Man ont une particularité étonnante : contrairement aux chats du reste du monde, ils n'ont pas de queue ! Un jour, Ross, le jeune fils de John, décide de compter les chats de la pension. Il dénombre 224 oreilles, et seulement 14 queues.

Combien la pension du père de Ross Beaf compte-t-elle de chats originaires de l'île de Man ?

DÉBUT DE L'ÉPREUVE POUR LES CATÉGORIES C2, L1.

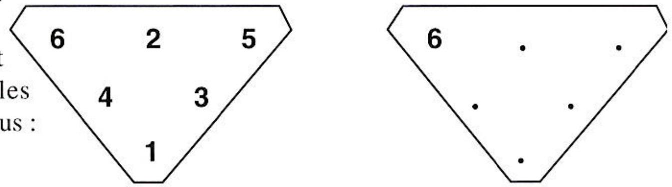
5 - LA TARTE (coefficient 5)



Partagez cette tarte carrée en quatre coups de couteau rectilignes, sans déplacer les morceaux, ni changer de place les cerises, de façon que **chacun des morceaux obtenus contienne exactement une cerise.**

6 - LE TRIANGLE DES DIFFÉRENCES (coefficient 6)

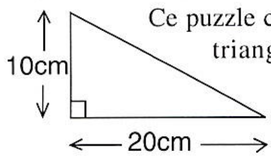
Dans ce triangle, chaque nombre de 1 à 6 a été utilisé. De plus, chaque nombre est égal à la différence entre les deux nombres placés au-dessus : $4 = 6-2$; $3 = 5-2$; $1 = 4-3$.



Trouvez un autre triangle ayant la même propriété, utilisant les nombres de 1 à 6, et où le 6 soit également placé en haut et à gauche.

FIN DE L'ÉPREUVE CM

7 - TRIANGLOMANIA (coefficient 7)

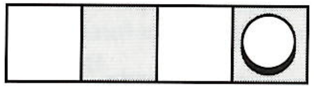


Ce puzzle comporte 20 pièces identiques en forme de triangles rectangles dont les dimensions des côtés de l'angle droit sont 10 cm et 20 cm. En les utilisant toutes, on peut former un grand carré.

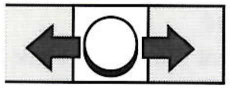
Tracez une des solutions sur le bulletin réponse.

Attention. Le carré dessiné n'est pas à l'échelle du triangle !

8 - MONOMANIE (coefficient 8)



Le monopion est un jeu à un seul joueur, qui se joue sur un damier de 4 cases sur une case, avec un seul pion, placé au départ sur la case la plus à droite. A chaque coup, ce pion



peut être déplacé d'une case, vers la gauche (G), s'il existe une case à gauche de la case où se trouve le pion, ou vers la droite (D), s'il existe une case à droite de celle où se trouve le pion. La seule règle est qu'il est interdit de répéter deux fois consécutivement une même séquence de deux coups ou plus de deux coups.

Par exemple, si j'ai joué G G D D G D , ma partie est terminée, car il m'est impossible de jouer **D** (le pion se trouve dans la case la plus à droite), et en jouant Gauche, j'aurais : G G D **D G D G**, ce que m'interdit la règle du monopion.

Combien de coups, au maximum, comprend une partie de monopion ?

9 - DAT'HEURE (coefficient 9)

Ma montre est à affichage digital. Chaque chiffre est obtenu par une combinaison de 7 segments (voir la formation des chiffres sur la figure 1). La montre peut donner la date ou l'heure, chacune sous la forme de deux nombres à deux chiffres séparés par un point (le premier chiffre pouvant être un zéro). Mais elle peut également afficher les deux simultanément, les chiffres se superposant alors. L'exemple de la figure 2 montre l'affichage simultané obtenu le 1er décembre à 12 heures et 47 minutes.

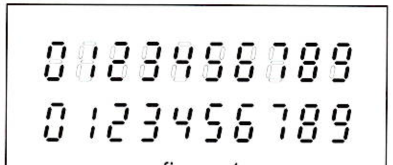


figure 1

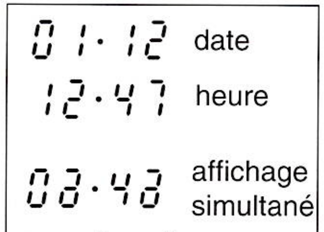


figure 2

Un jour, observant ma montre, je constatai que, sur les huit chiffres de la date et de l'heure, sept étaient différents et que les chiffres 2 et 7 n'apparaissaient pas. Mais en appuyant sur le bouton de l'affichage simultané, j'eus la surprise de lire 8 8 . 8 8 (figure 3).

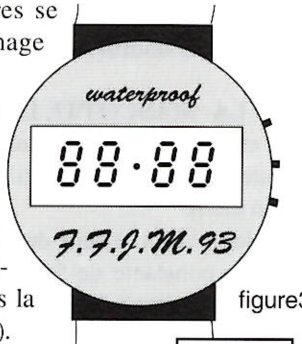


figure3

Pouvez-vous donner le jour et l'heure où se produisit cet évènement ?

FIN DE L'ÉPREUVE C1

10 - LE PRODUIT DES PARESSEUX (coefficient 10)

Quand on lui demande de faire le produit de deux nombres à deux chiffres, le cancre a pris l'habitude de choisir un chiffre de chaque facteur, d'en calculer le produit, et de juxtaposer à ce produit celui des deux chiffres restants. Bien sûr, son résultat est presque toujours faux. Mais aujourd'hui, miracle! il a trouvé le bon résultat!

Ce résultat est un nombre à quatre chiffres qui ne comporte pas de zéros. Retrouvez-le.

MATH-JEUNES
BULLETIN RÉPONSE

à retourner au plus tard le 3/01/94 à FFJM. 1, av Foch. F-94700 Maisons Alfort - FRANCE

Nom : .... Prénom : ....

Adresse complète : ....

.... Tel : ....

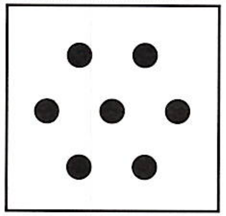
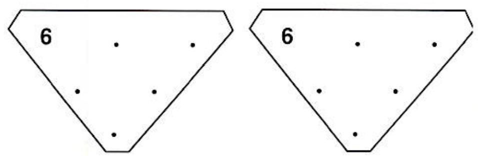
CATEGORIE (impératif) : ☐**CM** ☐**C1** ☐**C2** ☐**L1** ☐**GP** ☐**L2** ☐**HC**

☐ Cochez cette case si vous participez aussi par Minitel

☐ Adhérent FFJM en 1993 : N° FFJM .... Clé : ....

☐ J'adhère pour 1994 et je vire la somme de170F (CM), 320F (C1 et C2), 450F (L1), 500F (L2), 700F (GP et HC).

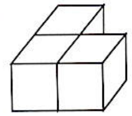
Au compte n° 001-2215663-65 de F.F.J.M. - BP 157 - 7700 Mouscron

N°du	Nombre de solutions	Votre ou vos solutions	Points	Coef.
		Catégorie : CM		
1	**1 solution**	⌊_⌊_⌋ voyelles		
2	**1 solution**	⌊_⌊_⌋ mm		
		Catégories : CM C1		
3	**1 solution**	Annabelle : ⌊_⌊_⌋ ans		
4	**1 solution**	⌊_⌊_⌊_⌋ chats de l'ile de Man		
		Toutes catégories : CM C1 C2 L1		
5	**1 solution**			
6	**CM :1 solution** autres catégories .... **solution (s)**			

N	Nombre de solutions	Votre ou vos solution(s)	Points	Coef.
	Catégories : C1 C2 L1			
7	1 solution demandée			
8	1 solution :	⌊_⌊_⌊_⌋ coups		
9	.... solution(s)	1) jour ⌊_⌊_⌋⌊_⌊_⌋ heure ⌊_⌊_⌋⌊_⌊_⌋ 2) jour ⌊_⌊_⌋⌊_⌊_⌋ heure ⌊_⌊_⌋⌊_⌊_⌋ jour mois heures minutes		
	Catégories : C2 L1			
10	.... solution(s)	résultat : ⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
11	1 solution :	⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ boîtes		
	Catégories : L1			
12	..... solution(s)	1) ⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ 2) ⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
13	1 solution :	⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ cartons		
14	1 solution :	⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ mètres		
		TOTAL		

11 - UNE BOITE DE TRICUBES (coefficient 11)

On appelle "tricube en L" un assemblage de trois cubes élémentaires de volume 1 cm³ chacun formant un L comme sur le dessin ci-contre.



Bernard fait l'inventaire de toutes les boîtes de forme parallélépipèdique dont les trois dimensions sont des nombres entiers de centimètres compris entre 1 et 94.

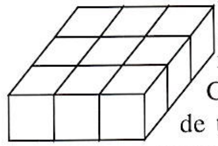


figure 2

Certaines de ces boîtes ne peuvent être complètement remplies à l'aide de tricubes en L : ce sont les "boîtes de Bernard". Il en est ainsi, par exemple de la boîte de la figure 2.

Combien y a-t-il de boîtes de Bernard différentes ?

On considèrera comme identiques des boîtes ayant les mêmes dimensions, quel que soit l'ordre de ces dimensions. On comptera la boîte de l'exemple.

FIN DE L'ÉPREUVE C2

12 - LE MULTIPLE DE L'ANNÉE (coefficient 12)

Par combien faut-il multiplier 1994 pour obtenir un nombre qui s'écrit 1 . 9 . 9 . 4, les points étant remplacés par des chiffres ?

13 - INTERDICTION DE DOUBLER (coefficient 13)

Dominique dispose de 1994 cartons numérotés de 1 à 1994. Elle a décidé de n'en conserver que certains, de sorte que jamais, parmi les numéros des cartons conservés, l'un ne soit le double de l'autre.

Quel est le nombre maximum de cartons que Dominique peut conserver ?

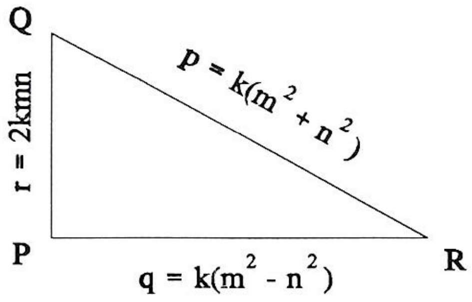
14 - LA MASCOTTE DU RÉGIMENT (coefficient 14)

La chienne Madeleine, mascotte du régiment, défile en accompagnant la fanfare de tête. Cette formation est assimilée à un carré de 9 mètres de côté avançant à la vitesse constante de 4 km/h.

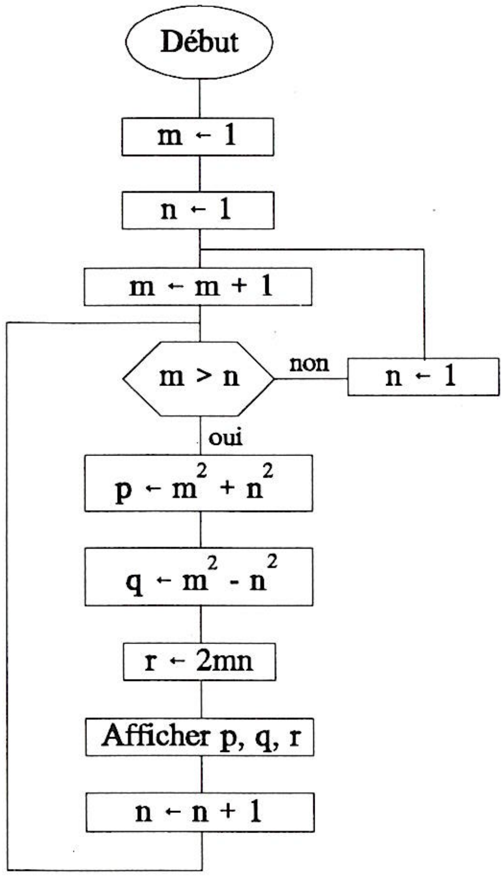
Toujours dans le sens des aiguilles d'une montre, la chienne trotte autour de ce carré à la vitesse constante de 5 km/h. Lorsqu'elle se trouve devant ou derrière le régiment, ele se déplace en ligne droite de façon à passer au ras des pieds des musiciens, sinon, elle longe les côtés du carré.

Pendant que Madeleine fait exactement un tour complet de la fanfare, de combien cette formation avance-t-elle, en mètres ?

FIN DE L'ÉPREUVE L1



Voici l'organigramme permettant de calculer tous les triplets pythagoriciens de manière ininterrompue.



Application numérique :

Choisissons $m = 10$ et $n = 7$, on a donc $p = m^2 + n^2 = 149$, $q = m^2 - n^2 = 51$ et $r = 2mn = 140$. Le triplet est $(149, 140, 51)$.

Annexe :

Montrons que

$$\mathrm{pgcd}(p, q) = 1 \Rightarrow \mathrm{pgcd}\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right) = 1.$$

Démontrons par l'absurde :
Supposons que $\mathrm{pgcd}\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right) = k$ $(k \neq 1)$, il existe alors deux nombres naturels a et b tels que :

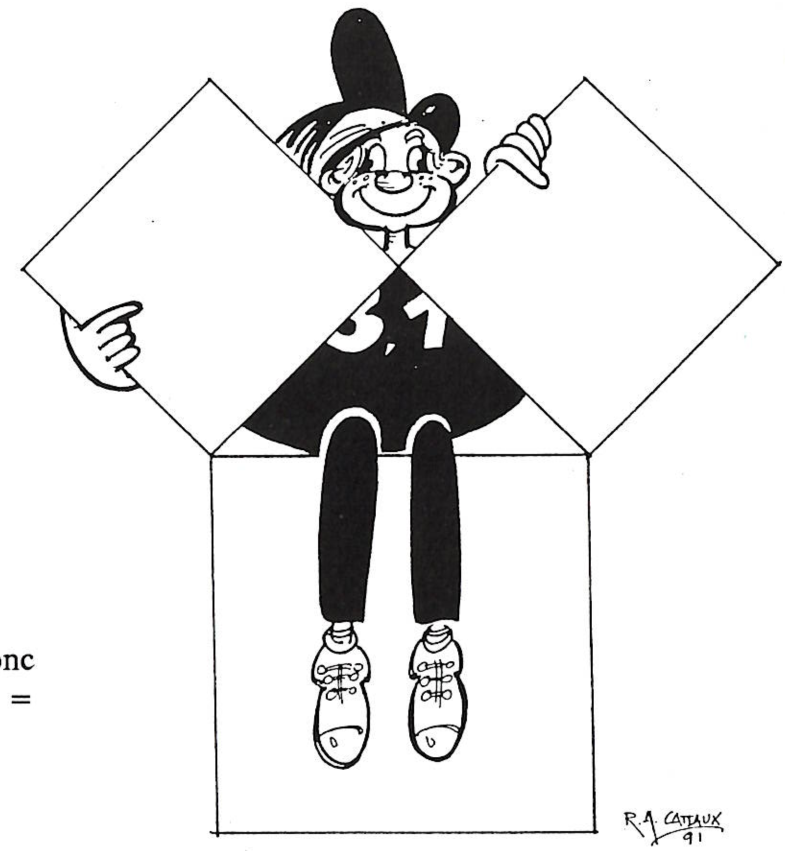
$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} &= ka \\ \frac{p-q}{2} &= kb \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q &= 2ka \\ p - q &= 2kb \end{cases}$$

Additionnons puis soustrayons ces deux égalités membre à membre :

$$\begin{cases} p &= k(a+b) \\ q &= k(a-b) \end{cases}$$

p et q auraient donc un diviseur commun autre que 1, ce qui est absurde !



 Math-Jeunes n°62, 14–14, 1993

Tout est nombre

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

La couverture de *Math-Jeunes* , cette année, présente un « compromis » entre arithmétique et géométrie : les **nombres figurés**, une idée qui semble remonter aux Pythagoriciens dont une des affirmations maîtresses était : « **Tout est nombre** ... »

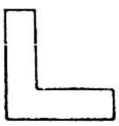
C'est là un beau sujet de dissertation mais, pas si simple, ... Parles-en à ton professeur de « philosophie » (religion ou morale).

Les Pythagoriciens faisaient une première distinction entre nombres *impairs* et nombres *pairs* ; sans doute cela leur venait-il déjà des Égyptiens ou des Babyloniens ... L'une des plus anciennes superstitions voulait que les nombres impairs portent chance, tandis que les nombres pairs, ... Cette tradition se perpétue : on trouve chez SHAKESPEARE (*The Merry Wives of Windsor*, Acte 5, Sc. I) :

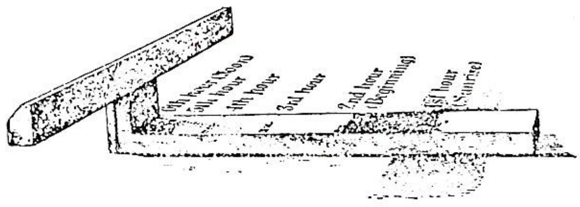
... *I hope good luck lies in odd numbers.* ... *They say there is divinity in odd numbers,* ...

Cela, tout simplement parce que les nombres impairs étaient considérés comme « masculins » alors que les pairs étaient dits « féminins » ... Je ne voudrais surtout pas commettre d'« impair » en m'engageant plus avant dans cette voie ...

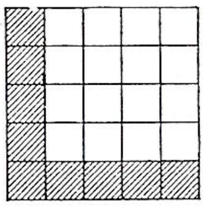
Un nombre impair était aussi appelé *gnomon* (terme emprunté à la géométrie).



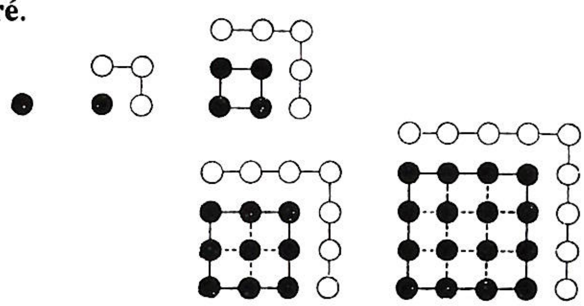
En fait, un *gnomon* est un cadran solaire primitif. Si on oriente cette « forme » vers l'est, le matin et vers l'ouest, l'après-midi, on peut lire les heures sur le bras horizontal ; le principe est le même que celui de l'horloge égyptienne représentée ci-dessous (vue de profil).



La partie hachurée de la figure ci-contre est un *gnomon*. Si n^2 désigne le nombre de « carrés blancs », alors la mesure du *gnomon* est $(2n+1)$ qui est effectivement un nombre impair.



On voit facilement (cf. figure ci-dessous) que la somme des *gnomons* (nombres impairs) consécutifs, à partir de l'unité, est un **carré**.

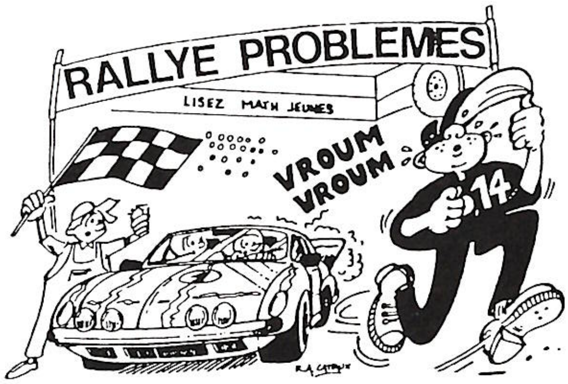


Ceci peut encore s'énoncer :
Tout nombre carré est la somme des nombres impairs consécutifs à partir de l'unité.

$$(n+1)^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n+1)$$

Il y a encore pas mal de « jolies choses » à découvrir concernant les nombres.

À bientôt ...



C. Festraets

Le rallye-problèmes 1993-1994 comportera trois étapes publiées dans les numéros 62, 63 et 64 de *Math-Jeunes*. Dans chaque numéro, vous trouverez des problèmes plus spécialement destinés aux élèves des trois classes inférieures, ils sont numérotés m1, m2, ..., m9 ; tandis que les problèmes destinés aux élèves des classes supérieures sont numérotés M1, M2, ..., M9. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer la solution de n'importe quel problème.

Les solutions des différents problèmes seront rédigées sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final. Veillez à ce que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées et à ce que figures et démonstrations soient sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 15 janvier 1994 à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles. Il ne sera pas tenu compte des envois tardifs.

m1 À une conférence internationale se réunissent quinze délégués en provenance d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Europe.

Chacun de ces quatre continents a envoyé un nombre différent, supérieur ou égal à 1, de délégués. L'Amérique et l'Asie ont un total de six délégués. L'Asie et l'Europe ont un total de sept délégués. Un certain continent a envoyé quatre délégués. Lequel ?

m2 On place les nombres 1, 2, 3, ..., n (n naturel) sur un cercle de manière telle que la différence entre deux nombres consécutifs est au plus deux. Prouver qu'il n'y a qu'une seule disposition possible (à une symétrie près).

m3 On donne un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M situés dans le plan du triangle et tels que les aires des triangles ABM et BCM soient égales.

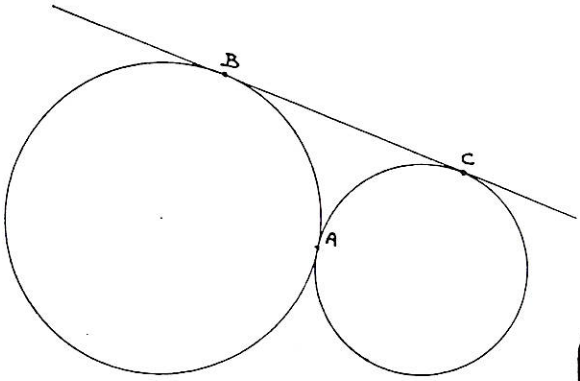
M1 1600 étudiants participent à un examen comportant 15 questions. Le correcteur constate qu'aucun étudiant n'a répondu correctement à deux questions consécutives de cet examen. Démontrer qu'il y a au moins deux étudiants qui ont répondu de la même façon (c'est-à-dire qui ont répondu de manière correcte ou incorrecte aux mêmes questions).

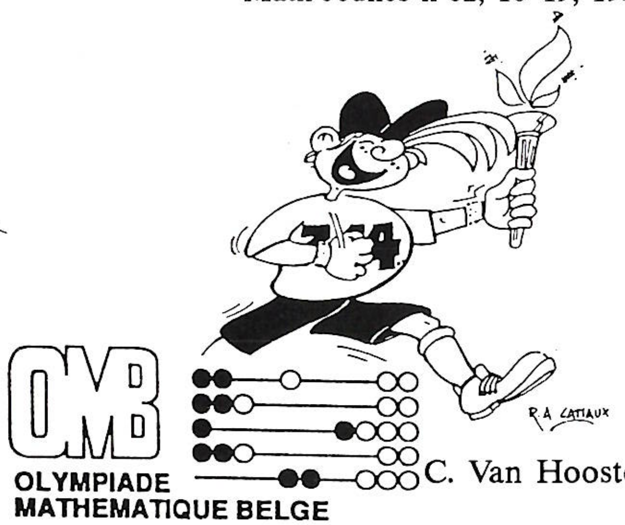
M2 Déterminer tous les naturels n pour lesquels on a

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \times 100^n$$

M3 Deux cercles de rayons R et r sont tangents extérieurement. Une tangente extérieure commune est menée à ces deux cercles, formant avec ceux-ci un triangle curviligne ABC. Quel est le rayon du cercle inscrit à ce triangle ?

Math-Jeunes n°62, 16–19, 1993





Le Gasp

Dans le numéro 59 de *Math-Jeunes*, André Parent nous présentait un jeu dénommé « Gasp ».
Rappelons que ce jeu se joue sur un quadrillage, par exemple 4×4. Sur chaque case de ce quadrillage, on dépose un pion bicolore, face noire au-dessus par exemple. Les faces noires sont ici symbolisées par des « O », les faces blanches par des « X ». Le but du jeu est de retourner tous les pions en respectant la règle suivante : *choisir un pion, retourner tous ses voisins (pas lui-même).*
François Lefebvre, élève de 4è année à l'Athénée Royal M. Bervoets de Mons nous propose une solution en huit coups à ce jeu :

A1–D1–A4–D4–A3–D2–B1–C4

	A	B	C	D
1	O	O	O	O
2	O	O	O	O
3	O	O	O	O
4	O	O	O	O

	A	B	C	D
1	O	X	O	O
2	X	X	O	O
3	O	O	O	O
4	O	O	O	O

	A	B	C	D
1	O	X	X	O
2	X	X	X	X
3	O	O	O	O
4	O	O	O	O

	A	B	C	D
1	O	X	X	O
2	X	X	X	X
3	X	X	O	O
4	O	X	O	O

	A	B	C	D
1	O	X	X	O
2	X	X	X	X
3	X	X	X	X
4	O	X	X	O

	A	B	C	D
1	O	X	X	O
2	O	O	X	X
3	X	O	X	X
4	X	O	X	O

	A	B	C	D
1	O	X	O	X
2	O	O	O	X
3	X	O	O	O
4	X	O	X	O

	A	B	C	D
1	X	X	X	X
2	X	X	X	X
3	X	O	O	O
4	X	O	X	O

	A	B	C	D
1	X	X	X	X
2	X	X	X	X
3	X	X	X	X
4	X	X	X	X

C. Van Hooste

Participer, c'est mieux !

Cher ami, te voilà donc abonné à *Math-Jeunes.* Je t'en félicite. Par ce choix, tu viens en effet de montrer que tu souhaites sortir du groupe de ceux qui font des math par obligation, sans rien de plus. Il reste à démontrer que tu es un passionné. Pour cela, tu dois manifester ta présence. Par exemple, nous envoyer tes commentaires sur les articles qui paraissent dans *Math-Jeunes*, éventuellement écrire toi-même un article, répondre aux différentes invitations que tu vas trouver dans ta revue. Enfin bref, tu dois participer. Participer, c'est nettement mieux que simplement s'abonner.
Comme invitation à participer, il y a le rallye-problèmes. A chaque parution de *Math-Jeunes*, quelques problèmes te seront proposés. Tu renverras alors tes solutions au responsable de cette rubrique. Les meilleures solutions seront publiées. De plus, des prix seront distribués.

Tu peux aussi participer à l'Olympiade de math. Oui, bien sûr, à l'Olympiade Mathématique Belge ! Cette épreuve majeure du calendrier scolaire atteint sa 19ème édition cette année. Tous les ans, son succès grandit ! 760 participants en 1976, 18961 l'an dernier. Alors, pourquoi pas toi ?

Où ? Quand ? Comment ?

L'OMB est un vaste concours ouvert à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de

la première à la sixième année. En fait, il s'agit de deux concours qui se déroulent en parallèle : la « Mini-Olympiade » réservée aux élèves des trois premières années et la « Maxi-Olympiade » destinée à ceux des trois dernières années. L'un et l'autre comportent trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux-mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.
Voici le calendrier de cette 19ème Olympiade Mathématique Belge.

Mercredi 26 janvier 1994 : éliminatoire
Mercredi 2 mars 1994 : demi-finale
Mercredi 20 avril 1994 : finale
Samedi 7 mai 1994 : proclamation

Bien entendu, ton professeur reçoit toutes les informations voulues sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions qui te brûlent les lèvres. Il se fera un plaisir d'y répondre.
Plus loin, tu trouveras quelques problèmes posés antérieurement. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais aussi te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt pouvoir le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Sache qu'une seule d'entre elles est correcte.
Néanmoins, certaines questions n'ont aucune réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[1, 999]$.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème n'hésite pas à le schématiser ; s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es absolument sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 point pour une mauvaise réponse. Jusque là, rien de plus normal. Mais, quand tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois alors deux points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut parfois mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il faut répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Assez parlé ! Voici les questions tant attendues.

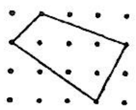
Questions Mini-Olympiade

1. Un avion quitte Hong-Kong le samedi soir à 17h35, heure locale, et arrive à Bruxelles après un vol de 18 heures et 20 minutes.
   Sachant que lorsqu'il est midi à Bruxelles, il est 18 heures le même jour à Hong-Kong, à quelle heure arrive-t-il à Bruxelles (heure de Bruxelles) ?

   (A) Sam. à 23h35 (B) Dim. à 3h55
   (C) Dim. à 5h55 (D) Dim. à 11h55
   (E) Dim. à 17h55

2. Une classe comprenant 20 garçons et 15 filles passe un examen écrit noté sur 100.
   Si la moyenne des notes des garçons est 70 et si la moyenne des notes des filles est 84, quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe ?
   (A) 74 (B) 75 (C) 76 (D) 77 (E) 78

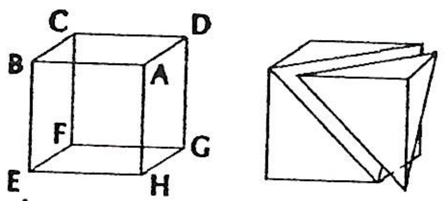
3. Dans une planche, on plante des clous distants d'un centimètre, à la fois dans la direction horizontale et dans la direction verticale. Un élastique est tendu sur quatre de ces clous comme indiqué sur la figure ci-après et forme un quadrilatère.



L'aire de celui-ci en cm^2 est

(A) 4 (B) 4,5 (C) 5 (D) 5,5 (E) 6

4. En chacun des sommets A, C, E, G du cube représenté sur la figure ci-dessous à gauche, on enlève une pyramide dont des arêtes sont les arêtes du cube issues de ce sommet, comme le montre la figure ci-dessous à droite.



Après ces quatre amputations, que reste-t-il du volume V du cube de départ ?
(A) $\frac{1}{6}V$ (B) $\frac{1}{4}V$ (C) $\frac{1}{3}V$
(D) $\frac{1}{2}V$ (E) $\frac{2}{3}V$

5. Une place carrée est délimitée sur trois côtés par une clôture maintenue par 28 poteaux également espacés de 2 m le long du périmètre (chacun des quatre coins comportant un poteau). Quelle est, en m^2, l'aire de la place ?
(sans réponse préformulée)

6. Le petit Robert est parti en vacances pendant n jours. À son retour, voici ce qu'il raconte :
« Il y a eu 7 demi-journées avec de la pluie.
Quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi.
Il y a eu 5 matinées sans pluie.
Il y a eu 6 après-midi sans pluie. »
Que vaut n ?
(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Questions Maxi-Olympiade

1. Combien l'inéquation $|x| + |y| \leq 1000$ admet-elle de solutions (x, y) où x et y sont des entiers ?
(A) 2001993 (B) 2001997
(C) 2001999 (D) 2002001
(E) 2002005

2. Dans certains langages de programmation (comme l'APL), quand il n'y a pas de parenthèses dans une expression algébrique, les opérations sont groupées de droite à gauche. Donc, $a \times b - c$ dans de tels langages signifie la même chose que $a \cdot (b - c)$ dans la notation algébrique ordinaire. Si $a \div b - c + d$ est évalué dans un tel langage, le résultat en notation algébrique ordinaire sera
(A) $\frac{a}{b} - c + d$ (B) $\frac{a}{b} - c - d$
(C) $\frac{d + c - b}{a}$ (D) $\frac{a}{b - c + d}$
(E) $\frac{a}{b - c - d}$

3. Une sphère de rayon r est inscrite dans un cube qui est lui-même inscrit dans une sphère de rayon R.
Alors $r =$
(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$
(D) $\frac{2}{3}R$ (E) $\frac{1}{2}R$

4. Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

(A) Si tu triches, j'abandonne le jeu.
(B) Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.

(C) Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.

(D) Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.

(E) Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

5. Pour augmenter de 44 % la surface d'un cube, on augmente de $x\%$ la longueur de chaque côté. Que vaut x ?

(sans réponse préformulée)

6. Quatre sphères de 10 cm de rayon sont posées sur une table horizontale ; leurs centres forment un carré de 20 cm de côté. Une cinquième sphère de 10 cm de rayon est posée sur les quatre premières.
Quelle est la hauteur (en cm), audessus de la table, du centre de la cinquième sphère ?
(A) $10(\sqrt{2}-1)$ (B) $10\sqrt{2}$
(C) $10(1+\sqrt{2})$ (D) 30
(E) $10(1+\sqrt{3})$

Encore une question

Celle-ci, je te demande, candidat à la Mini ou à la Maxi Olympiade, d'y répondre bien sûr, mais aussi de t'en servir le cas échéant lors des éliminatoires.
Dans un questionnaire à choix multiple, chaque question est proposée avec 5 réponses A, B, C, D, E dont une seule est correcte. Pour l'une des questions, un candidat a remarqué que C implique B (c'est-à-dire que si la réponse C est vraie, B l'est aussi). Il peut en déduire :

(A) que la réponse B est incorrecte

(B) que la réponse C est incorrecte

(C) que les réponses B et C sont incorrectes

(D) que la bonne réponse est soit B, soit C

(E) on ne peut déduire aucune des affirmations ci-dessus

Et une autre encore

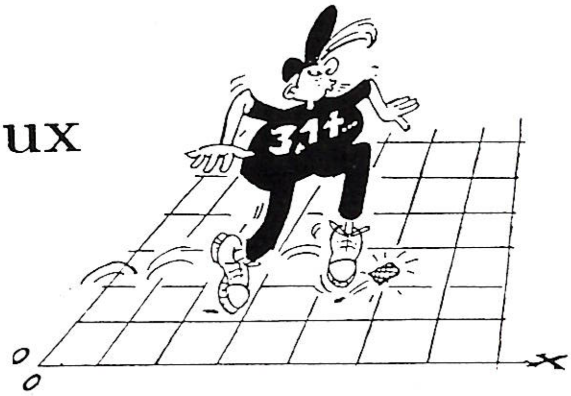
L'âge du capitaine ! Tout le monde en parle et principalement ceux qui n'en savent rien. Mais, pour toi, je peux dévoiler une information extrêmement confidentielle qui va te permettre de progresser dans la résolution de cette énigme. Chut !
Approche et écoute-moi. Je ne répéterai pas. Le produit de l'âge du capitaine, du nombre de ses enfants et de la longueur de son bateau est 32118.
L'âge du capitaine est un nombre entier. La longueur de son bateau est exprimée en pieds (marins) ; c'est aussi un nombre entier. Le capitaine a des fils et des filles, il n'est pas centenaire mais il a plus d'années que d'enfants.
Non seulement, ceci va te permettre de percer le mystère de l'âge du capitaine, mais encore tu vas ainsi connaître le nombre de ses enfants et la longueur de son bateau.

Solutions

Voici les réponses aux questions préparatoires posées en début d'article.
Questions Mini :
1. C / 2. C / 3. E / 4. C / 5. 324 / 6. B
Questions Maxi :
1. D / 2. E / 3. A / 4. B / 5. 20 / 6. C
Encore une question : B
Et encore une autre : 53 ans, 6 enfants, 101 pieds marins.

Math-Jeunes n°62, 20–22, 1993

Jeux

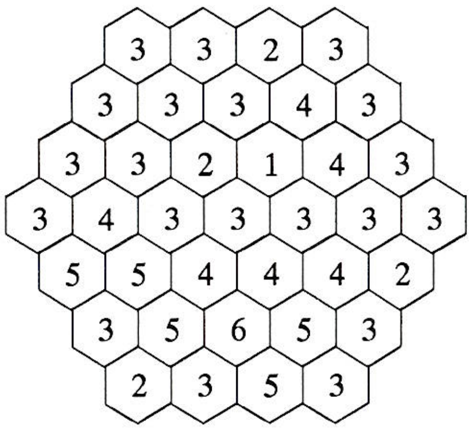


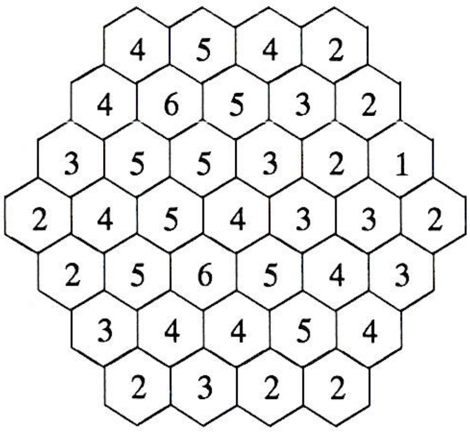
A.Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Rappelons brièvement la règle de ce jeu de décodage :

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, à partir de la grille codée, de retrouver la grille coloriée.





Crypto (par G. Vifquin)

À chaque nombre correspond une lettre. Retrouve-les en répondant aux définitions.

1. Division de la mathématique :

   1 2 3 4 5 6 5 7 8 1 2 3 8

2. Célèbre par son théorème :

   9 10 1 11 12 4 5 2 8

3. Instrument de mesure :

   2 12 9 9 5 2 1 8 13 2

4. Son axiome est bien connu :

   8 13 14 15 3 16 8

5. On en effectue en arithmétique :

   5 9 8 2 12 1 3 5 6 17

6. On les résout en algèbre :

   8 18 13 12 1 3 5 6 17

7. Solide à 20 faces :

   3 14 5 17 12 8 16 2 8

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

67				
		47		
	16			
4				8

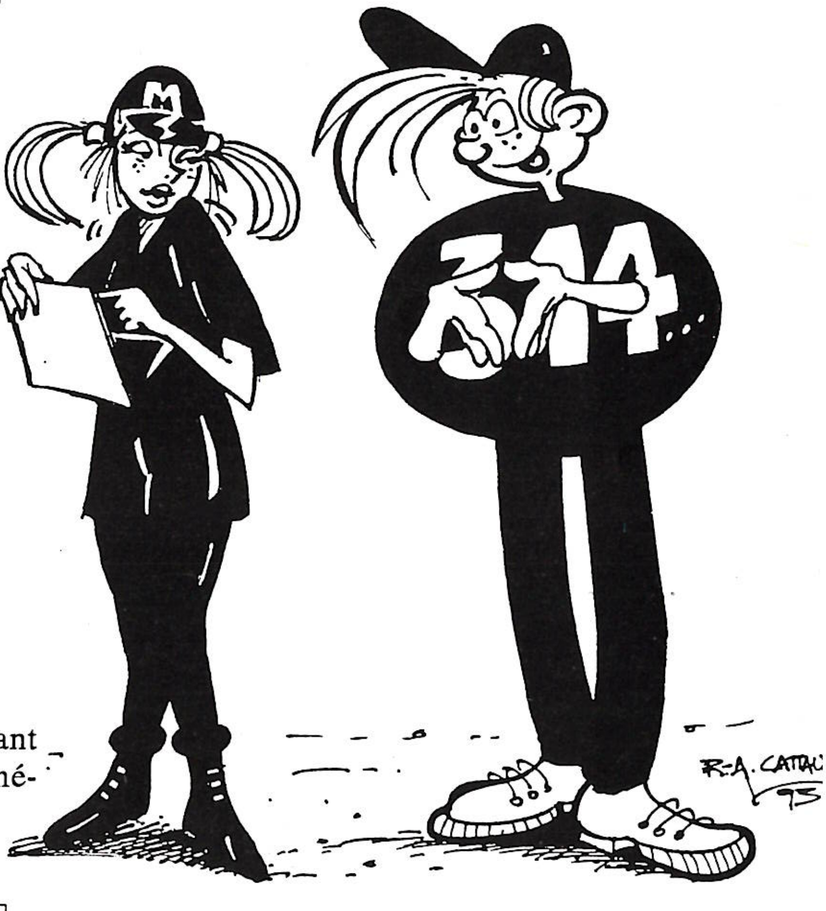
	125			
53				
		25		
25				38

	203			
89				
	32			
44				22

Croix magique (par G. Vifquin)

Compléter par des chiffres pour que la somme des nombres des grandes lignes horizontales et verticales soit 25.
De plus, la somme des nombres des petites lignes horizontales et verticales doit être un nombre de un chiffre.

		7	.		
		.	5		
6	1	.	.	9	.
.	.	.	.	.	3
		2	.		
		.	.		



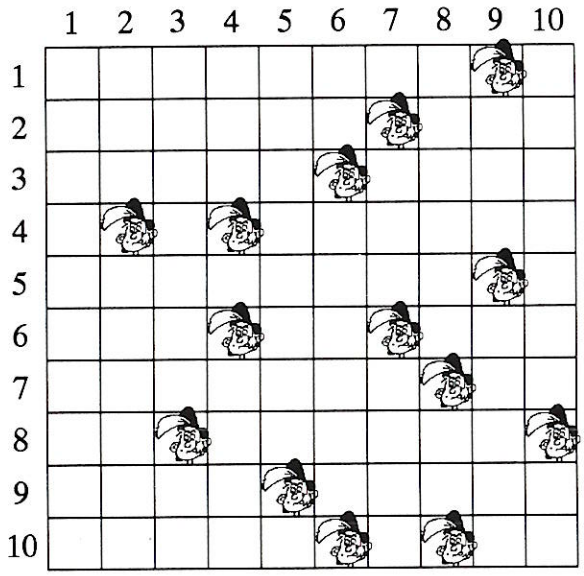
Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	1	2	
7			0
2			9
	8	7	

	8	10	
34			40
3			63
	15	11	

Mots croisés (par G. Vifquin)



Horizontalement
1. Européen
2. Animal – Ans
3. Petit animal – Sentir mauvais
4. Divinité
5. Ensemble de signes
6. Albert l'est – Symbole chimique – Condiment
7. Peut être solaire – Pronom
8. Saint – Donnait de l'air
9. Unique – Plante
10. Crochets – Route nationale

Verticalement
1. Citadelle
2. Vallée en Bretagne – Histoires
3. Étoile de mer – Coutumes
4. Préfixe – Grogne
5. Sport
6. Article contracté – Criera
7. Préposition – Thermales parfois
8. Font les bons plats – À la mode
9. Fréquent en hiver – Aller en justice
10. Déformé – Préposition

Solution au problème des moines raisonneurs

1 Supposons qu'il n'y ait qu'un seul malade. Le premier jour, il voit que personne d'autre n'a une tache sur le front ; il se sait donc malade et se suicide.

2 Supposons qu'il y ait deux malades, A et B. L'un d'entre eux, par exemple A, pense le premier jour : « Si B est le seul malade, il tiendra le raisonnement exposé en (1) et sera donc absent demain ». Le lendemain, A constate que B est encore là et en déduit qu'il y a un second malade qui ne peut être que lui-même. Il se suicide donc. Comme B a tenu le même raisonnement, il faut deux jours pour que les deux malades se suicident.

3 On peut refaire le même raisonnement pour $N = 3, 4, \ldots$ et on se persuade qu'il faut exactement N jours pour que les N malades se suicident. Prouver ce résultat de façon rigoureuse revient à écrire une démonstration par récurrence :

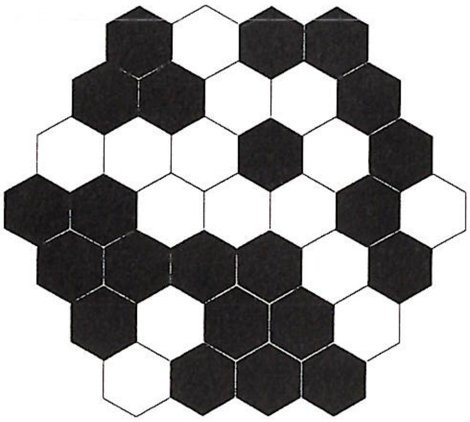
- Le résultat est vrai pour $N = 1$ en vertu de (1).
- S'il est vrai pour $N - 1$, il est aussi vrai pour N :
  En effet, chacun des N malades voit $N - 1$ moines marqués d'une tache au front et songe que s'il n'y a que ces $N - 1$ malades-là, ils disparaîtront dans $N - 1$ jours. Mais le N^e jour, ils sont encore là. Il en déduit donc qu'il y a un N^e malade, à savoir lui-même.

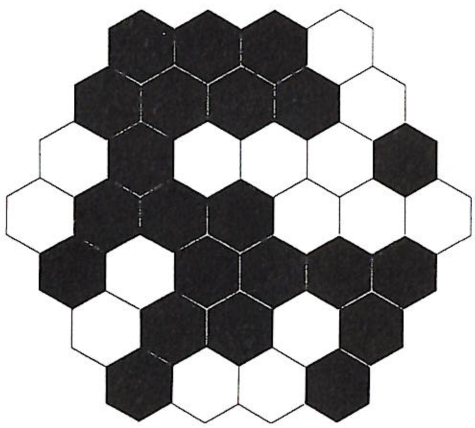
Solutions des jeux

Crypto

A	B	C	D	E	F	G	H	I
12		14	16	8		4	11	3
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
		15	7	6	5	9	18	2
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
17	1	13				10		

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Le mur des nombres

154
67 87
27 40 47
11 16 24 23
4 7 9 15 8

219
94 125
53 41 84
37 16 25 59
25 12 4 21 38

		380		
	177	203		
	89	88	115	
57	32	56	59	
44	13	19	37	22

Mots croisés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	F	R	A	N	C	A	I	S		D
2	O	I	S	E	A	U		A	G	E
3	R	A	T	O	N		P	U	E	R
4	T		E		O	R	A	C	L	E
5	E	C	R	I	T	U	R	E		G
6	R	O	I		A	G		S	E	L
7	E	N	E	R	G	I	E		S	E
8	S	T		A	E	R	A	I	T	
9	S	E	U	L		A	U	N	E	E
10	E	S	S	E	S		X		R	N

Grilles des moyennes

	1	2	
7	4	3	0
2	5	6	9
	8	7	

	8	10	
34	21	25	40
3	17	29	63
	15	11	

Croix magique

		7	2		
		4	5		
6	1	2	1	9	6
3	8	9	2	0	3
		2	7		
		1	8		

Concours « Bulles »

Remplis les bulles ci-dessous (ou une copie) et renvoie-les à la Rédaction. Les meilleures seront publiées et récompensées !!!