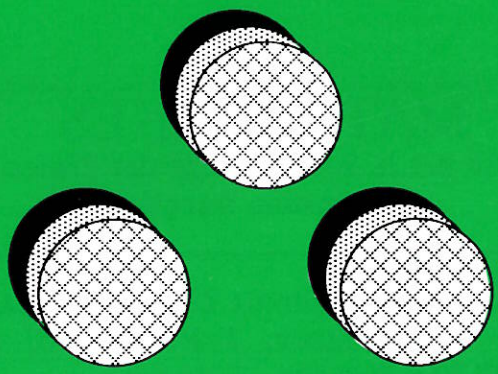
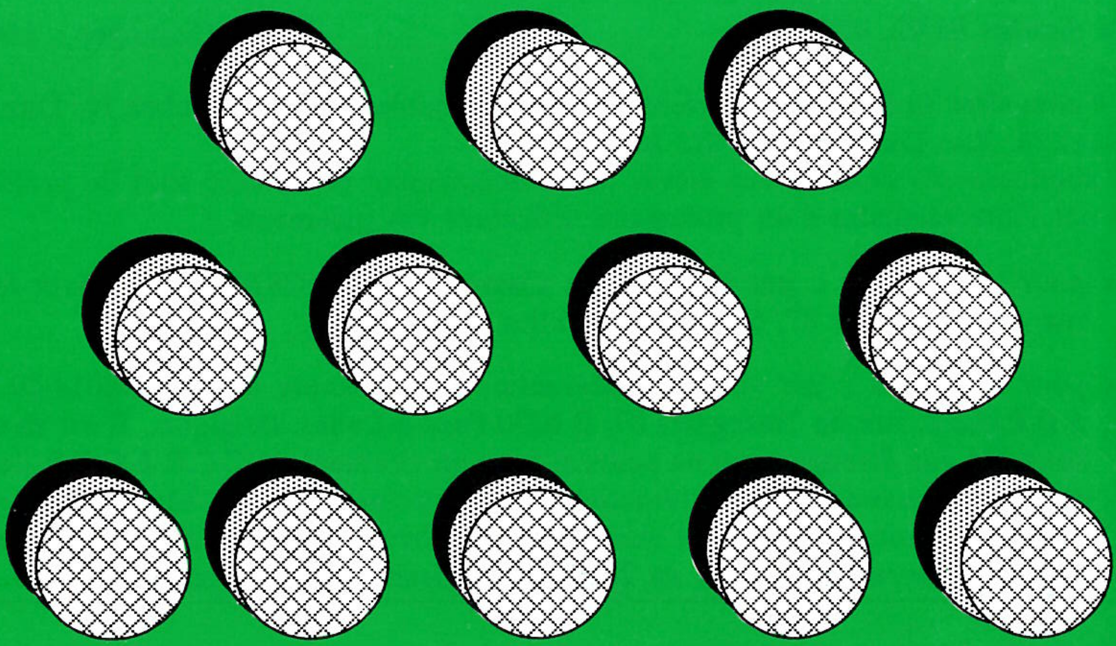


MATH-JEUNES



15e année
Janvier - n°63
Bureau de dépôt: Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX
Conception de la couverture : K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Etranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1989	Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
• Années 89/90, 90/91	Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
• Années 91/92, 92/93	80 FB (Etranger : 160 FB)

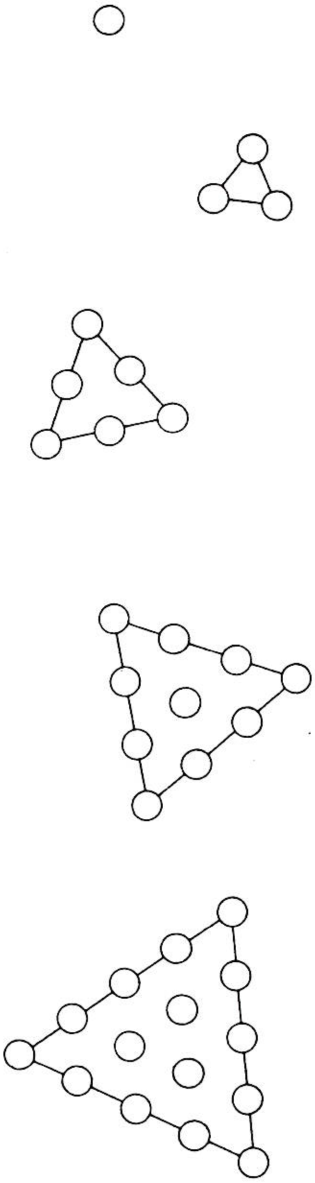
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°63 Quinzième année 1994

Math-Jeunes



Math-Jeunes n°63, 26–26, 1994

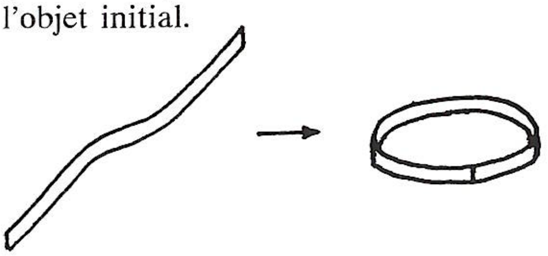
Jeux et Passe-temps (6)

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

Le ruban de Möbius

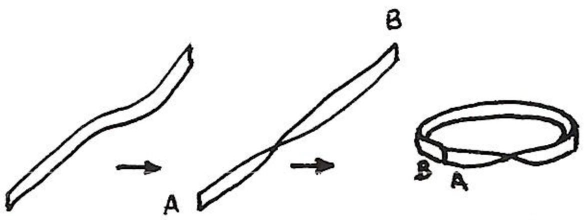
Voici ce que Mathieu a pu trouver à travers ses lectures, ses expériences et ses interrogations, à la suite de l'étrange aventure qui vous a été contée dans le dernier numéro de *Math-Jeunes*.

Si vous découpez une bande de papier et que vous la collez normalement pour en faire un ruban, vous obtenez un objet qui possède toujours deux faces A et B, comme l'objet initial.



La preuve en est qu'il n'est pas possible de colorier tout le ruban sans passer par un bord.

Mais si vous tordez la bande de papier de manière à pouvoir coller la face A en contact avec la face B, vous obtenez un ruban qui n'a plus qu'une seule face. Vous pouvez vous en convaincre en coloriant tout le ruban et en constatant que cela est possible sans plus passer par le bord.



Remarquez au passage que ce dernier ruban ne possède plus qu'un seul bord alors que le ruban ordinaire en possède deux. Si vous êtes sceptique, essayez donc de suivre le bord avec le bout d'un de vos doigts !

Ce ruban que vous pouvez construire donc manipuler facilement est connu sous le nom de **ruban de Möbius**.

Mais il peut encore vous réserver d'autres surprises.

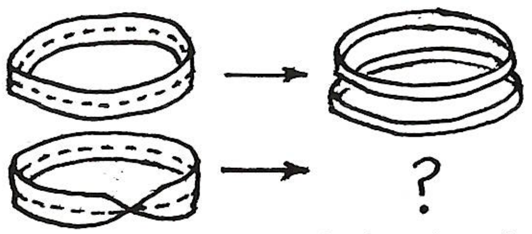
En voici une, découverte par Mathieu. Faites donc comme lui.

Construisez un ruban ordinaire et un ruban de Möbius puis, à l'aide d'une paire de ciseaux, découpez-les « dans le sens de la longueur ». Que croyez-vous qu'il va se passer ?

Ne lisez la suite que lorsque vous aurez réalisé l'expérience.

Je suppose que vous avez découvert ce qui se passe.

Si vous coupez un ruban ordinaire (à deux faces) dans le sens de la longueur, vous obtenez deux rubans ordinaires (à deux faces) eux aussi. Cela semble tout à fait naturel.



Mais si vous découpez, de la même façon, un ruban de Möbius (à une seule face) alors, vous avez la surprise de constater que vous n'obtenez qu'un seul ruban, plus long mais devenu ordinaire puisqu'il possède alors deux faces.

Réaliser cette découpe devant des personnes qui ne sont pas au courant du phénomène vous permet toujours de remporter un joli succès.

Maintenant, je vous propose d'assembler deux rubans et d'éventuellement les découper. Ne vous désolez pas si vous n'obtenez pas de résultat satisfaisant. De toute façon, je vous donnerai des explications supplémentaires dans le prochain numéro.

À bientôt.

Triangles, carrés et aires

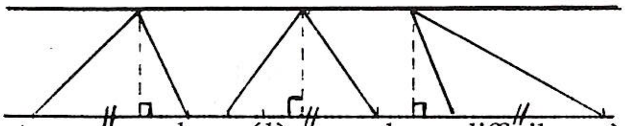
J.-P. Mathieu, *Athénée Royal de Beaumont*

1. Préambule

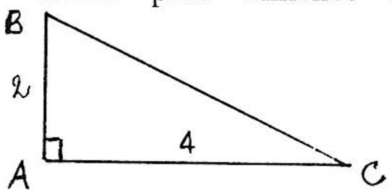
Lors d'une leçon sur les triangles isométriques, un élève lance :

« Si deux triangles ont la même aire, alors ils sont isométriques »

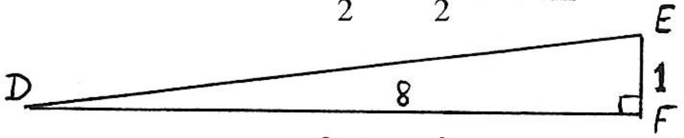
Le professeur, perplexe, dessine alors les schémas suivants :



et, pour les élèves plus difficiles à convaincre :



$$\text{aire de } ABC = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}^2$$



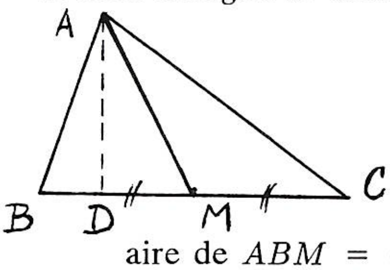
$$\text{aire de } DEF = \frac{8 \cdot 1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

C'est là l'occasion pour le professeur d'exploiter deux situations.

2. Première situation : triangles et aires

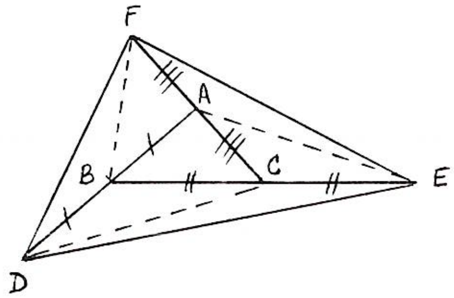
a. Pour débuter, proposons-nous de démontrer :

« Une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire. »



$$\text{aire de } ABM = \frac{|BM| \cdot |AD|}{2} = \frac{|MC| \cdot |AD|}{2} = \text{aire de } ACM$$

b. Considérons ensuite la situation :



Calculons l'aire de DEF en fonction de l'aire de ABC.

Si nous désignons par x l'aire de ABC, il vient :

$$\begin{aligned} & \text{aire de } ABC = \text{aire de } ABF \\ = & \text{ aire de } BFD = \text{aire de } BCD \\ = & \text{ aire de } DCE = \text{aire de } ACE \\ = & \text{ aire de } AFE = x \text{ voir (a)} \end{aligned}$$

Ainsi, aire de $DEF = 7x$.

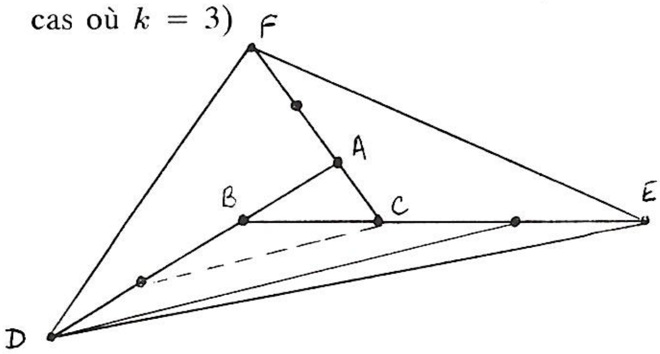
c. Puis un élève propose : *« Si on multiplie la longueur de chaque côté par 3, que devient l'aire de DEF ? »*

Après avoir refait courageusement le dessin, on en arrive à aire de $DEF = 19x$.

À toi de jouer !

d. La suggestion suivante est alors lancée : *« Peut-on trouver l'aire de DEF sans devoir faire le dessin chaque fois ? »* ou encore : *« Si on multiplie la longueur de chaque côté par k, que vaut l'aire de DEF ? »*

On refait alors un dernier dessin (dans le cas où $k = 3$)



Si on multiplie la longueur de chaque côté par

- 2, l'aire BCD vaut x
- 3, l'aire BCD vaut $2x$
- 4, l'aire BCD vaut $3x$
- ...
- k, l'aire BCD vaut $(k-1) \cdot x$

Il en va de même pour les aires de ACE et ABF.

L'aire de BDE vaut donc $k \cdot (k-1) \cdot x$.
Il en va de même des aires de CFE et AFD. Finalement,

$$\text{aire de } DEF = 3k \cdot (k-1) \cdot x + x$$
$$\text{aire de } DEF = (3k^2 - 3k) \cdot x + x$$

$$\boxed{\text{aire de } DEF = (3k^2 - 3k + 1) \cdot x}$$

e. On peut trouver, avec ce qui précède, l'aire de DEF dans n'importe quel cas et sans devoir refaire le dessin.
Par exemple, si $k = 4$, on a :

$$\begin{aligned} \text{aire de } DEF &= (3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) \cdot x \\ = (3 \cdot 16 - 3 \cdot 4 + 1) \cdot x &= (48 - 12 + 1) \cdot x \\ &= 37x \end{aligned}$$

Nous avons ainsi abordé les **polynômes** et illustré l'intérêt qu'il y a de pouvoir en calculer des **valeurs numériques** pour certains réels k. Au passage, nous avons revu les **règles de priorité** (hiérarchie des opérations).
C'est encore à toi de jouer, ami lecteur ...
Nous te proposons de recommencer le même exercice pour les valeurs $k = 2, 3, 4$, afin de retrouver les résultats obtenus plus haut.

f. Le sujet n'est pas encore épuisé ; le professeur relance le débat : « *Par quel naturel doit-on multiplier la longueur de chaque côté du triangle ABC pour que l'aire du triangle DEF soit égale à 61 fois l'aire du triangle ABC ?* »
On peut trouver la solution grâce au dessin mais on peut aussi écrire :

$$\text{aire de } DEF = 61x$$

et, par tâtonnements,

$$\begin{array}{rcl|rcl} (3k^2-3k+1)\cdot x &=& 61x & k^2-k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-20 &=& 0 \\ 3k^2-3k+1 &=& 61 & \left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{81}{4} &=& 0 \\ 3k^2-3k+1-61 &=& 0 & \left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2 &=& 0 \\ 3k^2-3k-60 &=& 0 & \left(k-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right) &=& 0 \\ 3(k^2-k-20) &=& 0 & \left(k+\frac{8}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{10}{2}\right) &=& 0 \\ k^2-k-20 &=& 0 & (k+4)\cdot(k-5) &=& 0 \end{array}$$

$$k + 4 = 0 \text{ ou } k - 5 = 0$$
$$k = -4 \text{ ou } k = 5 \qquad \text{Solution} = \{-4, 5\}$$

Il est évident que la solution -4 est à rejeter et que, seule 5 convient.
Cet article décrit une expérience vécue en classe avec des élèves du degré inférieur. La résolution de cette dernière équation n'est donc pas si simple ; il faut bien sûr « guider » les élèves, mais la richesse des notions rencontrées vaut la peine qu'on s'y attache. Précisons que dans le cadre du cours d'algèbre, un abord préalable des notions de factorisation et de la « règle du produit nul » est indispensable.

Il reste, ami lecteur à fixer quelque peu ces nouvelles « manipulations » grâce à quelques exercices. À toi donc !

Essaie d'appliquer ce que nous venons de faire pour résoudre les équations suivantes :

- $4k^2-4k+1 = 0$
- $9k^2+12k+4 = 0$
- $2k^2-10k+12 = 0$
- $25k^2-30k+9 = 0$
- $k^2+3k+5 = 0$
- $k^2-k+1 = 0$
- $k^2+5k+4 = 0$
- $3k^2-30k+63 = 0$

Dans le prochain *Math-Jeunes*, nous aurons l'occasion d'examiner et de vivre une nouvelle situation ... où apparaissent des carrés plutôt que des triangles. Tu peux d'ores et déjà y réfléchir ... À bientôt ...

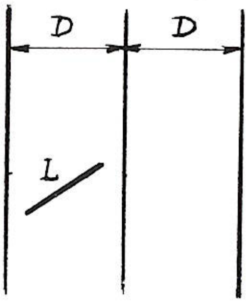
Hasard ... Probabilités

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

Math-Jeunes a proposé (n° 58, Décembre 1992) le problème suivant :

> Une baguette rectiligne est brisée en trois morceaux. Quelle est la probabilité pour que ces trois morceaux forment les côtés d'un triangle ?

dont la solution a été publiée dans la même revue (n° 60, Avril 1993). Cette solution s'inspire d'une approche « géométrique » des probabilités. On peut traiter de la même manière le célèbre et classique problème de « l'aiguille de BUFFON » :



Une table, parfaitement plane et rigoureusement horizontale, est divisée par des droites parallèles tracées à une distance D l'une de l'autre.

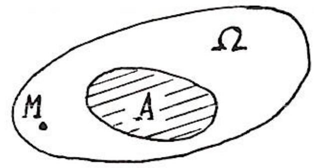
Sur cette table, on jette « au hasard » une aiguille (segment) de longueur $L \leqslant D$.
Montrer que la probabilité que l'aiguille coupe une des droites est donnée par

$$P = \frac{2L}{\pi \cdot D}$$

Avant de passer à une autre question (objet de cet article) dont la solution repose, elle aussi, sur la même technique, indiquons sommairement le fondement de cette dernière.
Il est parfois possible d'étendre le calcul immédiat des probabilités (suivant le « schéma des cas » ([1])) au cas où l'ensemble Ω des événements élémentaires est non dénombrable (comme, par exemple, l'ensemble des points d'un plan situé à l'intérieur d'un certain domaine Ω).

([1]) c'est-à-dire P = rapport du nombre de cas favorables (à la réalisation de l'événement) au nombre de cas possibles.

Supposant que, dans les limites de ce domaine, toutes les positions d'un point M soient équiprobables, la probabilité pour que M se trouve dans un domaine $A \in \Omega$ est égale à :



$$P(A) = P\{M \in A\} = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

où S_A et S_Ω sont les aires respectives des domaines A et Ω.
Cette présentation de la méthode étant faite, passons à la question qui nous occupe aujourd'hui.

1. Énoncé

Une bande magnétique (magnétophone) de longueur $L = 200$ m. comporte deux pistes. Sur la première, se trouve un enregistrement de longueur $\ell_1 = 30$ m. et, sur la seconde, un enregistrement de longueur $\ell_2 = 50$ m. On ignore l'emplacement de ces enregistrements.
Cette bande magnétique est accidentellement endommagée et l'on doit couper un morceau de longueur $\ell_0 = 10$ m. à 80 m. du début de la bande.
Calculer les probabilités des événements suivants :

- $\{A\}$ = aucun enregistrement n'est détruit.
- $\{B\}$ = seul le premier enregistrement est détruit.
- $\{C\}$ = seul le second enregistrement est détruit.
- $\{D\}$ = les deux enregistrements sont détruits.

N.B. La position des enregistrements étant inconnue, on admet que toute position du début de chacun d'eux — qui assure que l'enregistrement est entier – est aussi vraisemblable que n'importe quelle autre.

2. Solution

Désignons respectivement par x et y les abscisses des débuts du premier et du second enregistrement. Pour que chaque enregistrement soit complet (avant toute coupure de la bande), on doit avoir :

$$0 \leqslant x \leqslant 200 - \ell_1 = 170$$

$$\text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 200 - \ell_2 = 150$$

En considérant le couple (x, y) comme la coordonnée d'un point du plan, le domaine Ω des événements élémentaires est ainsi représenté par un rectangle de dimensions $x = 170$ et $y = 150$ (voir figure 1).
La bande magnétique étant amputée d'un morceau de 10 m. (à 80 m. de son début) :

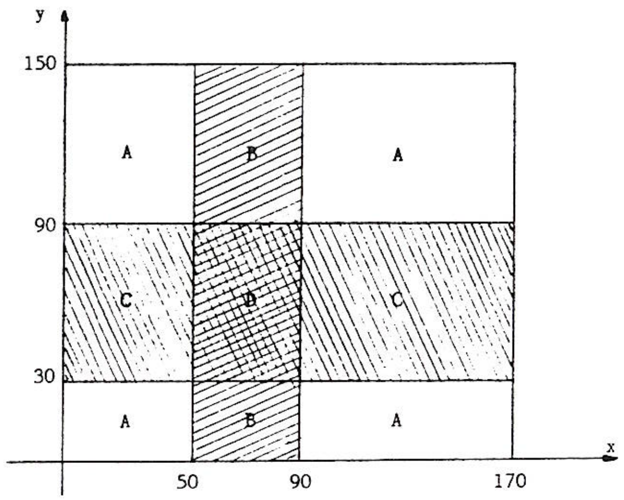


Fig. 1

a. le premier enregistrement (longueur 30 m.) ne sera pas endommagé si $x \leqslant 80 - 30 = 50$ ou si $x \geqslant 80 + 10 = 90$
b. le deuxième enregistrement (longueur 50 m.) ne sera pas endommagé si $y \leqslant 80 - 50 = 30$
ou si $y \geqslant 80 + 10 = 90$

d'où les domaines respectifs des quatre événements (complémentaires) représentés sur la figure 1 ci-dessus.

Passons aux calculs :

$$\begin{aligned} S_\Omega &= 150 \times 170 = 25500 \\ S_A &= 50 \times 30 + 50 \times 60 + 80 \times 30 \\ &\qquad + 80 \times 60 = 11700 \\ S_B &= 40 \times 30 + 40 \times 60 = 3600 \\ S_C &= 50 \times 60 + 80 \times 60 = 7800 \\ S_D &= 40 \times 60 = 2400 \end{aligned}$$

Les probabilités cherchées sont ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= \frac{11700}{25500} = 0,4588 \\ P(B) &= \frac{3600}{25500} = 0,1412 \\ P(C) &= \frac{7800}{25500} = 0,3059 \\ P(D) &= \frac{2400}{25500} = 0,0941 \end{aligned}}$$

La figure 2 présentée ci-après est le résumé de la solution (domaines A, B, C, D correspondant aux quatre événements complémentaires possibles – résultats des calculs d'aires) complétés par les résultats – avec illustration graphique – d'une simulation portant sur quinze mille épreuves. Cette figure a été réalisée par un programme-ordinateur spécialement conçu pour cette question.
À ce propos, les « amateurs » d'informatique pourraient tenter de rédiger un programme de simulation (avec ou sans présentation graphique). La simulation consiste non pas à reproduire le raisonnement de la solution, mais à choisir « au hasard » (function RANDOM du PASCAL ou function RND du BASIC) la position de chaque enregistrement et à décider, ensuite, de l'événement (A, B, C, D) réalisé ...
Bon amusement !

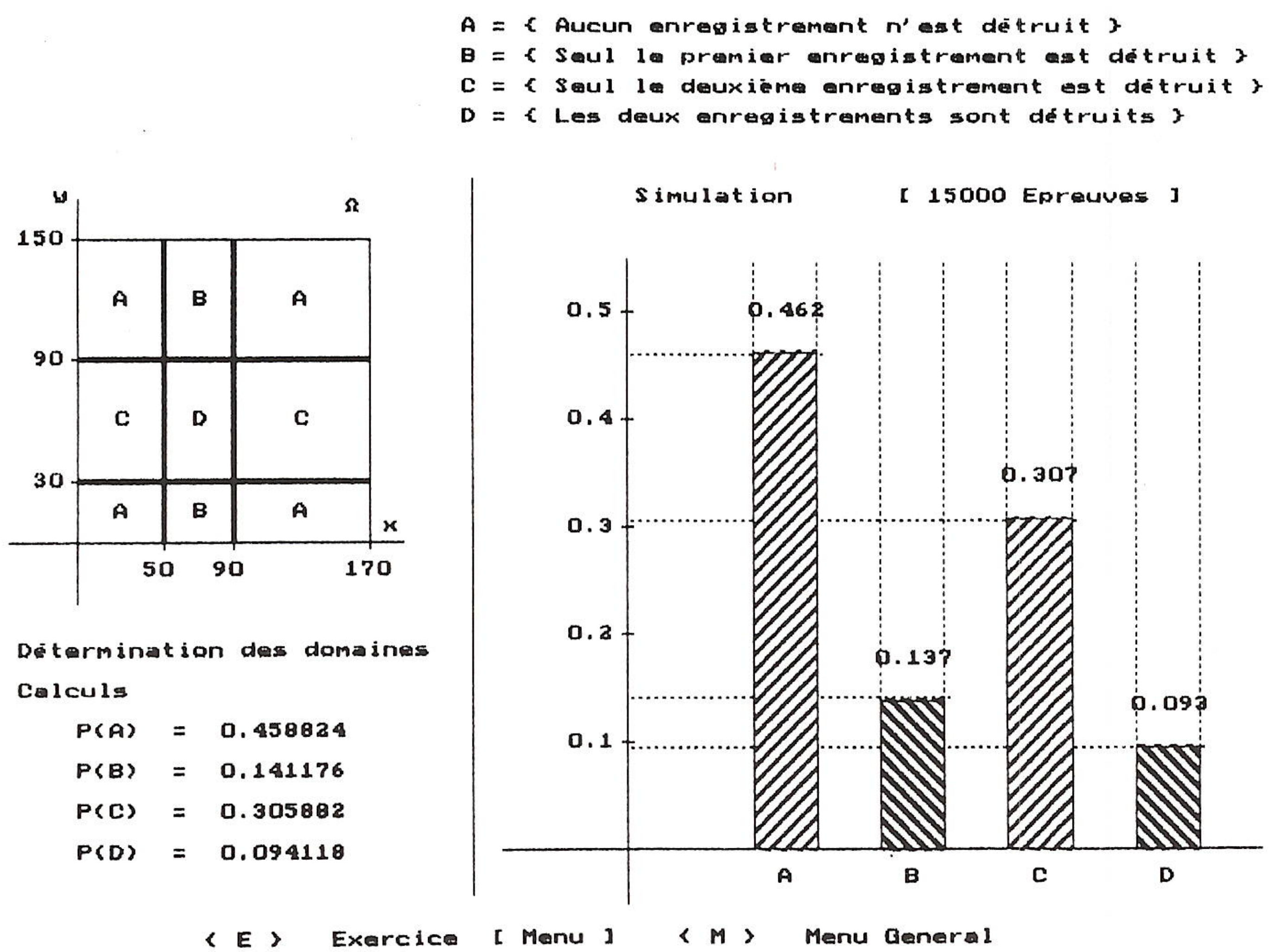

A = { Aucun enregistrement n'est détruit }
B = { Seul le premier enregistrement est détruit }
C = { Seul le deuxième enregistrement est détruit }
D = { Les deux enregistrements sont détruits }
y
Ω
150
90
30
50
90
170
x
A
B
A
C
D
C
A
B
A
Détermination des domaines
Calculs
P(A) = 0.458824
P(B) = 0.141176
P(C) = 0.305882
P(D) = 0.094118
Simulation [15000 Epreuves]
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.462
0.137
0.307
0.093
A
B
C
D
< E > Exercice [Menu] < M > Menu General

Fig. 2

Math-Jeunes n°63, 32–33, 1994

S'entraîner pour les Olympiades de Mathématique en perfectionnant son Anglais

Hector Dujacquier, *École Normale de Braine-le-Comte*

1. Introduction

Les Olympiades mathématiques belges, qui sont organisées annuellement, connaissent un succès de plus en plus grand. Il en est de même dans de nombreux pays étrangers et une Olympiade internationale réunit chaque année les candidats sélectionnés dans ces différents pays. Actuellement, on entend beaucoup parler de concours d'orthographe en français, de tests à choix multiples dans d'autres branches. Pour ma part, je n'ai pas encore oublié les nombreux articles rédigés en anglais, articles que j'ai dû consulter en vue de la rédaction de mon mémoire de licence ; je me rappelle le temps gaspillé à tenter de comprendre ce vocabulaire scientifique que le cours de langues modernes de l'enseignement secondaire que j'ai connu, ignorait à cette époque. Heureusement, un énorme progrès a été réalisé à ce niveau mais, chaque année, lors de la soirée des anciens humanistes de l'école, certains étudiants nous entretiennent des difficultés qu'ils rencontrent lors de l'étude de certains dossiers rédigés en anglais. Il est bon d'y réfléchir et de préparer davantage les élèves à ce type de problème auquel ils n'échapperont pas.

Dès lors, pourquoi ne pas penser à un questionnaire de mathématique rédigé en anglais, une espèce de « test » qui jetterait un pont entre ces deux disciplines ? À l'occasion d'un récent voyage culturel (mais aussi de détente) en Angleterre avec les élèves, il m'a été possible de discuter « école et mathématique » avec les familles d'accueil. Un garçon m'a montré un test qu'il avait subi l'an dernier. De retour en Belgique et replongé dans l'univers inéluctable de la mathématique, je me suis inspiré de ce test et l'ai complété par quelques autres questions relativement simples. Je t'en soumets, ami lecteur, le contenu en espérant susciter chez toi l'envie de préparer les futures Olympiades tout en perfectionnant ton anglais scientifique.

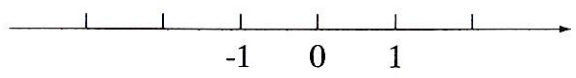
2. Principle

Here are twelve Standard multiple-choice questions ;

- You have to decide which is the best of the choices given and blacken the corresponding space on the answer sheet. You are not obliged to make the whole reasoning and figuring in your head.
- Figures which accompany problems are intended to provide useful information in solving problems. They are drawn as accurately as possible **except** when it is stated in a specific problem that its figure is not drawn to scale. All figures lie in a plan unless otherwise indicated.
- All numbers used are real numbers.

3. The twelve questions

1.



On the number line above, a particle starts at 0 and move a distance of 2 to the right, then from there moves 4 to the left, then 6 to the right, and so on, alternating directions and lengthening each move by 2. At the end of the fifth move, where on the number line will the particle be located ?

A : -8 B : -4 C : 1 D : 6 E : 10

2. If x, y and z are positive integers and if $\frac{x}{y} = 1$ and $(x + y)^2 = z$, which of the following cannot be equal to z ?

A : 4 B : 9 C : 16 D : 36 E : 64

3.

West ______________________ East

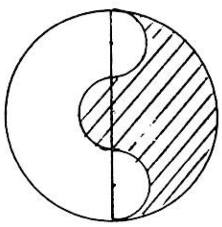
Brighton is located in south-east of England. The town of Worthing is west of Brighton. Hove is east of Worthing, but west of Brighton. Littlehampton is east of Bognor, but west of Hove and Worthing. Assuming all these towns are in the neighbourhood of Brighton, which town is farthest west ?

A : Brighton B : Litttlehampton
C : Worthing D : Hove E : Bognor

4. Mary is twice as old as Nigel. Five years ago she was three times as old as Nigel was then. How old is Nigel now ?

A : 20 B : 15 C : 10 D : 5 E : 25

5. Three equal semicircles are drawn on a diameter of the circle C as shown. If the area of circle C is 9π, then the area of the shaded zone is



A : $\frac{7\pi}{2}$ B : 4π C : $\frac{9\pi}{2}$ D : 5π E : $\frac{11\pi}{2}$

6. If an asterisk between two expressions indicates that the expression on the right exceeds the expression on the left by 1, which of the following is true for all real numbers x ?

(I) $x(x + 2) * (x + 1)^2$
(II) $x^2 * (x + 1)^2$
(III) $\frac{x}{y} * \frac{x + 1}{y + 1}$

A : None B : (I) only C : (II) only D : (III) only E : (I) and (III)

7. If $100 \leqslant k \leqslant 400$ and k is a multiple of 5, 6, 7 and 10, then $k =$

A : 105 B : 150 C : 210 D : 300 E : 350

8. If x is a positive integer and $x^2 + x = n$, which of the following could be the value of n ?

A : 14 B : 15 C : 18 D : 23 E : 30

9. The set P consists of all numbers which are the sum of 3 consecutive prime numbers. For example, the number 109 is in P, since $31 + 37 + 41 = 109$. The least prime number in P is

A : 13 B : 17 C : 19 D : 23 E : 31

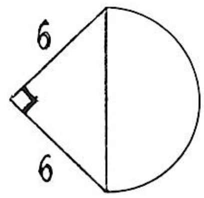
10. If y is some number between 4 and 10, which of the following could be the average of the numbers 2, 5, 6, 8, 9 and y ?

A : 4,3 B : 6,2 C : 7,8 D : 9,1 E : 10

11. For $a \neq 0$, $\frac{a^{x+y}}{a^x} =$

A : $-a^y$ B : a^{1+y} C : $1 + a^y$
D : $\frac{1}{a^{-y}}$ E : $\frac{1}{a^y}$

12. In the figure, the area of the semicircle is



A : 9π B : 18π C : 12π
D : $\frac{9\pi}{2}$ E : 36π

(to be continued)

Math-Jeunes n°63, 34–36, 1994

Que penser des rumeurs autour de la preuve par Wiles du Grand Théorème de Fermat ?

Alain Valette, *Institut de Mathématiques, Chantemerle 20, CH-2007 Neuchâtel - SUISSE*

Depuis début novembre 1993, des rumeurs aussi inquiétantes qu'invérifiables circulent autour de la preuve de WILES de la conjecture de TANIYAMA dans le cas semi-stable, et donc autour du statut du *Grand Théorème de* FERMAT (ce dernier étant conséquence de la conjecture de TANIYAMA, par un théorème de RIBET de 1987 ; voir à ce sujet l'article de Michel BALLIEU dans le n° 62 de *Math-Jeunes*). Ces rumeurs font état d'un trou dans la preuve (mais pas d'une erreur !), trou d'une plus ou moins grande importance selon les sources. Les bruits alarmants prenant de plus en plus d'ampleur, WILES a cru bon de faire une mise au point, par un courrier électronique daté du 5 décembre 1993, qui a été abondamment répercuté dans les milieux mathématiques. Pour bien apprécier ce message, il faut avoir une petite idée de la manière dont les résultats mathématiques sont diffusés.

Quand un mathématicien (qui peut être une mathématicienne) découvre des résultats qu'il croit neufs et intéressants, il rédige un article. Il va en général faire deux choses de cet article. D'abord, il va le faire circuler sous forme de pré-publication (« *preprint* » en anglais), c'est-à-dire qu'il va envoyer des photocopies de l'article à ses collègues experts du même domaine, afin que ceux-ci soient rapidement informés. D'autre part, il va soumettre son article pour publication à l'une des nombreuses revues spécialisées, qui ne publient que des articles de recherche en mathématiques ; les éditeurs de la revue (s'il s'agit d'une revue sérieuse) vont alors demander un avis sur l'article à un relecteur (plus connu sous le vocable anglais de « *referee* »). Celui-ci va devoir apprécier l'article selon au moins quatre types de critères ([1]) :

- L'article est-il mathématiquement correct ?
- Les résultats sont-ils réellement originaux ? (Vu le nombre élevé de mathématiciens actifs de nos jours, et donc la difficulté de se tenir informé de tout ce qui se publie, il arrive qu'on croie, en toute bonne foi, découvrir des résultats qu'on ne fait que re-découvrir ...)
- L'article est-il bien écrit ? (Les résultats sont-ils énoncés avec précision, les calculs bien présentés, les exemples bien choisis ... ?)
- L'article est-il intéressant ? Ceci est évidemment le plus subjectif des critères, lié au fait que les mathématiques ne sont pas faites par des machines (heureusement !) mais par des hommes et des femmes ; les mathématiques sont donc aussi affaire de goût, de mode, d'esthétique, et d'autres impondérables. Il y a néanmoins quelques constantes : un article qui représente une avancée sur un problème ancien sera considéré

([1]) On rappelle que tout article n'engage que son auteur. Ce qui suit est donc l'expression du comportement de l'auteur de ces lignes quand il fait office de *referee*.

comme plus intéressant qu'une contribution technique sur un domaine hyper-spécialisé ([2]). De même, il faut que l'article ne paraisse pas trop facile. Je souscris à ce qu'en disait le grand mathématicien français Jean DIEUDONNÉ, récemment disparu : « *Tout le monde est cependant d'accord sur un point : un travail n'a de considération que s'il représente une certaine dose de matière grise. Les travaux triviaux (axiome + une ou deux conséquences évidentes) sont jetés au panier* ([3]).

Sur la base de son rapport, le *referee* suggère à la revue l'acceptation de l'article, ou l'acceptation modulo retouches, ou le rejet. Pour des raisons évidentes de déontologie, le *referee* garde l'anonymat vis-à-vis de l'auteur de l'article. En cas d'acceptation, la durée entre la soumission de l'article et sa publication oscille entre un et deux ans, selon les revues ; d'où l'importance du système des *preprints* pour garantir une diffusion rapide de l'information.
Revenons à WILES et à sa preuve. WILES n'a toujours pas diffusé son manuscrit (d'une longueur d'environ 200 pages ([4])) sous forme de *preprint*, mais (toutes les rumeurs concordent là-dessus) il l'aurait soumis à l'été 1993 aux « **Inventiones Mathematicae** », une revue allemande unanimement considérée comme l'une des deux meilleures au monde (l'autre étant les « **Annals of Mathematics** », revue américaine). Vu l'importance du manuscrit, à la fois par l'ampleur et la qualité ([5]), les « **Inventiones** » auraient décidé d'envoyer le manuscrit non pas à **un** *referee* comme c'est l'usage, mais à **cinq** (cinq noms circulent, toujours les mêmes) ; de cette manière, tous les domaines des mathématiques utilisés dans la preuve seraient couverts. Il semble aussi que le manuscrit de WILES, tel qu'il l'aurait soumis , était une version préliminaire, et qu'il se soit attelé depuis à la rédaction d'une version montrable en public. En d'autres termes, les cinq *referees* l'aideraient dans son travail de rédaction. Voilà ce sur quoi concordent les différentes rumeurs que j'ai entendues ... et voici maintenant une traduction de la mise au point de WILES qui, comme on dit, « remet les pendules à l'heure » ; WILES y fait allusion à ses exposés de Cambridge, du 23 juin 1993, où il avait annoncé sa preuve de la conjecture de TANIYAMA.
« *Au vu des spéculations sur le statut de mon travail sur la conjecture de* TANIYAMA-SHIMURA *et le Dernier Théorème de* FERMAT,

([2]) Pour donner deux exemples : l'article intitulé « *Le Grand Théorème de Fermat est vrai pour les exposants inférieurs à 150 000* » a plus de chance d'être lu que celui qui s'appelle « *Une preuve par les variables hypercomplexes d'un théorème de type Burkholder-Gundy-Silverstein pour les domaines lipschitziens* »

([3]) Ce n'est malheureusement pas ainsi que cela se passe. Modifier un système d'axiomes, « juste pour voir », sera toujours un moyen bon marché de pondre des articles, et il y aura toujours des revues pas trop sérieuses pour les publier. (Il faudrait quand même songer à protéger nos forêts !) Par exemple, c'est de ce type de perversion qu'à partir de la théorie des groupes sont nés les hyper-groupes, para-groupes, pseudo-groupes, semi-groupes et autres groupoïdes.

([4]) Sans être fréquents, les articles de 100 ou 200 pages ne sont pas exceptionnels. Un des cas les plus connus est le théorème de FEIT-THOMPSON « *Un groupe simple fini non commutatif a un nombre pair d'éléments* » dont la preuve de 255 pages a rempli en 1963 tout un volume du « **Pacific Journal of Mathematics** ».

([5]) Il faut être conscient du fait que, même sans lien avec le *Grand Théorème de* FERMAT, le résultat de WILES aurait attiré l'attention des experts, à défaut de celle du grand public. Les courbes elliptiques sont certaines courbes cubiques planes, d'équation $y^2 = x \cdot (x-a) \cdot (x-b)$ avec a, b rationnels. La conjecture de TANIYAMA affirme que toute courbe elliptique peut s'obtenir à partir d'une construction faisant intervenir l'action du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ (le groupe des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1) sur le demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbf{C} : \Im(z) > 0\}$. C'est le premier pas dans un programme conjectural dit *programme de Langlands* , visant à unifier une partie de la géométrie algébrique et une partie de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ces unifications sont ce qu'il y a de plus fécond dans les mathématiques contemporaines.

je vais donner un bref compte-rendu de la situation. Durant le processus de re-lecture un certain nombre de problèmes ont émergé ; la plupart ont été résolus, mais il y en a un en particulier que je n'ai pas encore réglé. La réduction-clé de (la plupart des cas de) la conjecture de TANIYAMA-SHIMURA *au calcul du groupe de* SELMER *est correcte. Néanmoins le calcul final dans le cas semi-stable d'une borne supérieure précise pour le groupe de* SELMER *(de la représentation carré symétrique associée à une forme modulaire) n'est pas encore complet comme il est. Je crois que je serai capable de finir cela dans un futur proche en utilisant les idées expliquées dans mes exposés de Cambridge.*
Le fait que beaucoup de travail reste à faire sur le manuscrit le rend impropre à la diffusion comme preprint. Dans mon cours à Princeton, qui commence en Février, je donnerai un compte-rendu détaillé de ce travail.
Signé : Andrew Wiles. »

Erratum

Dans l'article **Le « grand » théorème de Fermat démontré ?** par Michel BALLIEU, *Math-Jeunes* n°62, page 6, ligne 22, il convient de corriger une petite erreur sur le plan historique. FERMAT n'a pas donné dans une lettre à MERSENNE la preuve du cas $n = 4$ du *Grand Théorème*. En fait, il a démontré un résultat équivalent au cas $n = 4$ du *Grand Théorème*, résultat qui s'énonce :

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus.

ou encore : *L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers ne peut être un carré parfait.* Et cette preuve se trouve dans ... **une autre marge** de DIOPHANTE (mais celle-là était assez grande ...) Il convient aussi de signaler que c'est par cette démonstration seulement que nous connaissons la méthode de **« descente infinie ».**
Cette preuve est d'ailleurs décortiquée dans l'excellent livre de H. EDWARDS, *Fermat's last theorem, a genetic introduction to number theory.*

La Rédaction remercie très sincèrement Alain VALETTE non seulement pour son article, qui a l'énorme mérite de faire comprendre à nos jeunes amis lecteurs le processus de diffusion et de publication des articles scientifiques en général, mais aussi pour les dernières précisions historiques qu'il nous apporte.
Elle engage les « prof(s) de math. » à insister auprès de leurs élèves afin de les convaincre de ce que le sujet abordé plus haut constitue *l'événement mathématique* de cette fin de vingtième siècle. C'est là l'occasion inespérée de diffuser au sein d'un large public le message suivant : contrairement à ce que beaucoup imaginent à tort, il y a encore pas mal de choses à découvrir en mathématiques. De plus, le *matheux* n'est pas nécessairement le virtuose du calcul numérique ni le « spécialiste de l'alignement de longues colonnes de chiffres » ; si l'apprentissage des mathématiques se fait essentiellement via le « drill » à certaines techniques de calcul, le métier de mathématicien accompli est tout autre chose. La recherche en mathématiques est au moins aussi noble que n'importe quel autre type de recherche, mais il est beaucoup plus difficile de la *« vulgariser »*. Pour ceux, élèves ou prof(s) qui souhaiteraient en savoir plus, je renverrai à l'excellent livre de Jean DIEUDONNÉ — je rassure tout de suite : ce bouquin est tout le contraire d'un manuel de mathématiques au sens généralement admis — *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Éd. Hachette (Coll. Pluriel), 1987.

Tout est nombre (suite)

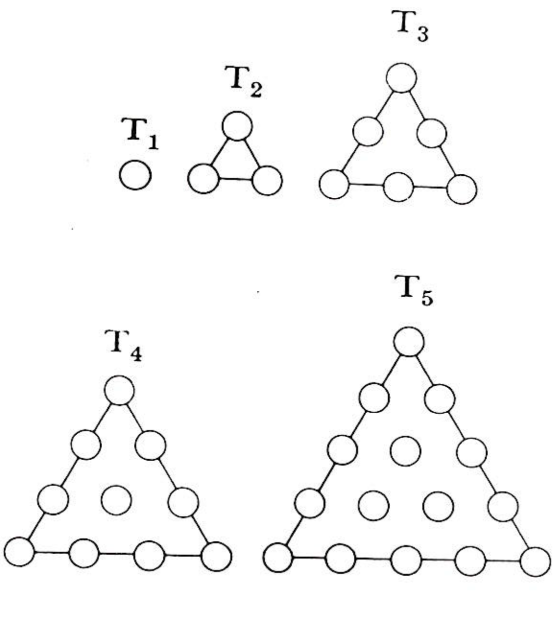
Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Revenons-en donc à la couverture de *Math-Jeunes.* Dans le numéro 62, nous avons eu l'occasion d'aborder les **nombres carrés** sous un autre « angle » ; souviens- toi :

Tout nombre carré est la somme des nombres impairs consécutifs à partir de l'unité.

Je suppose, qu'au vu de la couverture de ce numéro 63, tu t'attends, cher ami lecteur, à ce que je te parle de **nombres triangulaires.** Eh bien ! Tu as entièrement raison. PYTHAGORE aurait (?) remarqué des propriétés de cette « classe » de nombres ...

> On appelle **nombre triangulaire** tout nombre qui est somme d'une certaine quantité de jetons disposés en rangées sur un plan ; la rangée du bas en contient n et chaque rangée en contient un de moins que la rangée située juste en dessous jusqu'à la rangée qui contient exactement un jeton.



Ainsi, le n^e *nombre triangulaire* T_n vaut

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

Offrons-nous une petite démonstration :

$$\begin{aligned} T_n &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\ T_n &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$2T_n = \underbrace{(n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n}$$

$$2T_n = n \cdot (n+1)$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)}$$

Le quatrième nombre triangulaire vaut donc :

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

Ce qui explique le passage suivant que l'on rencontre chez l'auteur grec LUCIEN (2^e siècle apr. J.-C.), dans son œuvre Βίων πρᾶσις, littéralement, *La Vente des Vies* autrement traduit par *La Vie aux Enchères* :

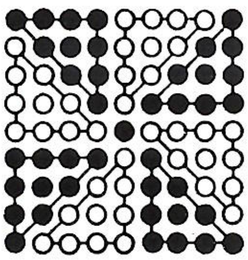
PYTHAGORE. Je vais t'enseigner comment compter.
AGORASTES (le marchant). Je sais compter.
PYTHAGORE. Et comment comptes-tu ?
AGORASTES. Un, deux, trois, quatre ...
PYTHAGORE. Vois-tu ! Ce que tu crois être quatre vaut dix, un triangle parfait, ce qui constitue le lien entre nous.

Pour bien saisir le sens de cette dernière réplique, il faut savoir que les PYTHAGORICIENS constituaient un cercle relativement fermé. À l'époque, on ne communiquait pas les connaissances à n'importe qui. Les membres de cette espèce de « secte » devaient garder secrètes leurs découvertes ; ils ne pouvaient les dévoiler qu'aux autres membres de l'« École ». Pour se reconnaître entre eux, ils utilisaient des « symboles », des « signes » et notamment le triangle équilatéral et le pentagramme.

Je t'avais annoncé, dans le numéro précédent, qu'il y avait pas mal de « jolies choses » à découvrir concernant les nombres. En voici quelques-unes que tu apprécieras — du moins, je l'espère.

Dans le *περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν* ou *Traité des nombres polygones* de DIOPHANTE D'ALEXANDRIE (mathématicien qui vécut au troisième siècle de notre ère), on trouve, comme cas particulier d'une proposition, le résultat qui suit :

L'octuple de tout nombre triangulaire augmenté de 1 est un carré.



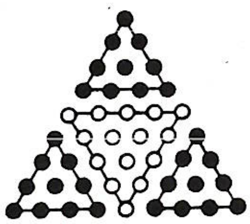
qu'on peut encore écrire :

$$8 \times T_n + 1 = (2n+1)^2 \quad \text{ou}$$

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$$

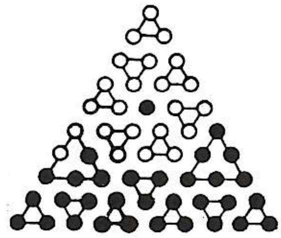
On a aussi :

$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$



ou encore :

$$14T_2 + 2T_3 + 1 = T_{10}$$



Démontre ces deux résultats formellement !!!

Et puis ... Continuons ! Je ne résiste pas au plaisir de profiter de ces nombres triangulaires pour te parler de **fractions continues**.

> On appelle **fraction continue finie** toute expression du type
>
> $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}}$$
>
> ce qu'on note encore :
>
> $$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

> a_0 s'appelle **première réduite**
>
> $a_0 + \frac{1}{a_1}$ s'appelle **deuxième réduite**
>
> $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$ s'appelle **troisième réduite**
>
> ...

Si on suppose que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$ et que tous les a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sont entiers, on parle de **fraction continue simple**.

On peut montrer que

> *toute fraction continue simple finie*
>
> $$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$
>
> *représente un nombre rationnel* et que *tout nombre rationnel peut être représenté par une fraction continue simple finie.*

Pour transformer un nombre rationnel en fraction continue simple finie, on utilise l'**algorithme d'Euclide** (celui qui permet de rechercher le PGCD — rappelle-toi ou ... interroge ton prof. de math. !) Ce procédé porte aussi le nom d'**anthyphérèse**, du verbe grec *ἀνθυφαιρεῖν* qui signifie **soustraire de manière répétée.**

Par exemple,

$$\frac{75}{13} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{3}}} \qquad \text{car}$$

$$\begin{aligned}
75 &= \underline{5} \times 13 + 10 \quad (75\text{-}13\text{-}13\text{-}13\text{-}13\text{-}13=10)\\
13 &= \underline{1} \times 10 + 3 \quad (13\text{-}10 = 3)\\
10 &= \underline{3} \times 3 + 1 \quad (10\text{-}3\text{-}3\text{-}3=1)\\
3 &= \underline{3} \times 1 = 0 \quad (3\text{-}1\text{-}1\text{-}1=0)
\end{aligned}$$

Il est encore possible de montrer que

> *1. Tout nombre irrationnel s'exprime d'une et d'une seule manière comme fraction continue simple infinie.*
> *2. Toute fraction continue simple infinie périodique représente une racine irrationnelle d'une équation quadratique à coefficients entiers.*

Par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

Essayons d'exprimer $\sqrt{2} - 1$ sous la forme $\frac{1}{x}$: Il vient :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$$

Ainsi,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}}$$

Les réduites successives sont donc :

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots$$

Nous en arrivons, pour terminer, à un très beau résultat qui n'est malheureusement pas simple à démontrer :

> *Les seuls nombres qui sont à la fois* **triangulaires** *et* **carrés** *sont du type*
>
> $$b^2 \cdot c^2$$
>
> *où $\frac{b}{c}$ est une quelconque réduite de la fraction continue qui représente $\sqrt{2}$*

En vertu de ce que nous avons dit plus haut, ces nombres sont :

$$1,\ 36 = 3^2 \cdot 2^2,\ 1225 = 7^2 \cdot 5^2,$$
$$41616 = 17^2 \cdot 12^2,\ \ldots$$

Bibliographie :

[1] W.W. Rouse BALL and H.S.M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publ. Inc., New York, 1987.

[2] Albert H. BEILER, *Recreations in the Theory of Numbers, (the Queen of Mathematics entertains)*, Dover Publ. Inc, New York, 1966.

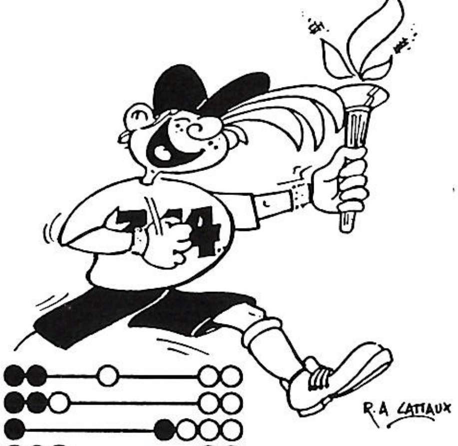
[3] DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, *Les six Livres arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*, trad. Paul VER EECKE, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1959.

[4] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[5] Edouard LUCAS, *Récréations mathématiques* (4 vol.), Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1979.

[6] Ivor THOMAS, *Greek Mathematical Works* (2 vol.), Loeb Classical Library, Great Britain, 1991.

 Math-Jeunes n°63, 40–42, 1994



OMB
OLYMPIADE
MATHEMATIQUE BELGE

C. Van Hooste

Ouvre ton (nouvel) agenda à la date du 26 janvier.
Qu'y vois-tu ?
OMB Eliminatoires 14 heures.
Et oui, la première épreuve des olympiades est toute proche.
Il serait peut-être donc intéressant de s'y préparer.

Pour cela, je te rappelle de quelle façon tu devras répondre au questionnaire et je soumets une nouvelle série de petits problèmes posés lors d'olympiades précédentes.

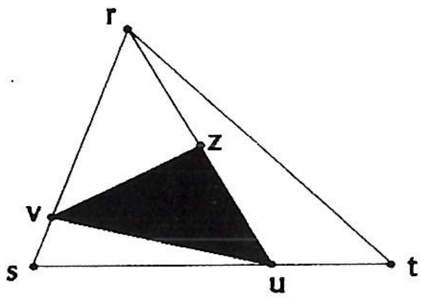
- Pour la majorité des questions, on te propose cinq réponses dont une seule est correcte. Il faut alors indiquer la lettre (A, B, C, D ou E) correspondant à la bonne réponse.

- Pour les autres questions, il n'y a pas de réponse préformulée. Dans ce cas, la réponse est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0..999]. C'est alors ce nombre qu'il faut indiquer.

- Il faut répondre à cinq questions au moins.

Questions Mini-Olympiades

1. Tout dans la proportion (1987)
L'aire du triangle rst vaut 90 cm^2. La longueur de $[su]$ est le double de celle de $[ut]$ et la longueur de $[sv]$ est le quart de celle de $[vr]$. Enfin, z est le milieu de $[ru]$.
Que vaut l'aire du triangle uvz ?



(A) 18 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 27 cm^2 (E) 30 cm^2

2. Si peu (1987)
Le Petit Prince, qui mesure 1,2 mètre, se promène le long de l'équateur de sa planète. Sa tête décrit donc un cercle plus grand que celui décrit par ses pieds. Quelle est approximativement la différence de longueur (en mètres) entre ces deux cercles ?

(A) $1,2 \times 3,14$ (B) $(1,2)^2 \times 3,14$ (C) $1,2 \times 6,28$ (D) $(1,2)^2 \times 6,28$
(E) Il manque le rayon de la planète pour pouvoir répondre.

3. Le côté impair (1986)
Dans la rue de la Gare, du côté des numéros impairs, une maison porte le numéro 87. Si la numération commençait à l'autre extrémité de la rue, elle aurait le numéro 69.
Le nombre de maisons du côté impair est

(A) 78 (B) 79 (C) 80 (D) 154 (E) 156

4. Élémentaire, mon cher Watson (1983)
En Italie, au seizième siècle, il n'y avait que deux familles de fabricants de coffrets : Bellini et ses fils d'une part, Cellini et ses fils d'autre part. Chaque fois que Bellini ou un de ses fils avaient terminé un coffret, ils y gravaient une inscription vraie. Cellini et ses fils, eux, gravaient sur leurs coffrets une inscription fausse. Un coffret porte l'inscription : « Ce coffret n'a pas été fait par un des fils de Bellini ». Qui a fabriqué ce coffret ?

(A) Bellini (B) Cellini (C) Un fils de Bellini (D) Un fils de Cellini (E) Les données ne sont pas suffisantes pour répondre à la question.

5. Rationnels multiformes (1986)
Combien y a-t-il de nombres rationnels de la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers et $1 \leqslant b \leqslant 6$, compris entre 0,1 et 0,9 ?

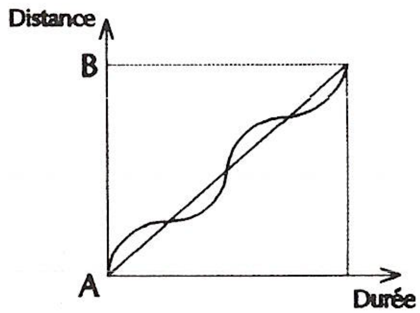
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) Une infinité

6. Au pays des kangourous (1986)
On suppose que les pas, les sauts et les bonds sont des unités de longueur bien déterminées.
Si b pas valent c sauts, si d bonds valent e pas et si f bonds valent g mètres, combien un mètre vaut-il de sauts ?

(A) $\frac{bdg}{cef}$ (B) $\frac{cdf}{beg}$ (C) $\frac{cdg}{bef}$ (D) $\frac{cef}{bdg}$ (E) $\frac{ceg}{bdf}$

Questions Maxi-Olympiades

1. Ligne courbe, parcours rectiligne (1986)
Deux coureurs à pied X et Y quittent en même temps une ville A et se rendent à une ville B par une route rectiligne. Leur course est caractérisée par les graphiques ci-contre (graphique de X : trait rectiligne ; graphique de Y : trait sinueux). Laquelle des affirmations suivantes est-elle nécessairement vraie ?



(A) X est toujours devant Y
(B) Y court toujours plus vite que X
(C) Y parcourt AB en allant d'un côté à l'autre de la route
(D) X court à vitesse constante
(E) X arrive le premier en B

2. Allô ! Pythagore ? Ici, Archimède ! (1987)
Une balle flottait sur un lac, lorsque le lac gela. Sans rompre la glace, on a ôté la balle, qui a laissé un trou de 24 cm de diamètre à la surface et de 8 cm de profondeur.
Quel est le rayon de la balle, en centimètres ?

(A) 8 (B) 12 (C) 13 (D) $8\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{6}$

3. Deux amis et un seul vélo (1985)
Deux amis B et C ne disposent que d'un seul vélo. B part en vélo, avec une vitesse V, pendant X kilomètres, puis abandonne le vélo dans le fossé et continue à pied à la vitesse v ($v < V$). C part en même temps que B, mais à pied et à vitesse v. Il trouve le vélo, l'enfourche et roule à la vitesse V jusqu'à ce qu'il rattrape B.
Les deux amis se sont alors déplacés avec une vitesse moyenne de

(A) v (B) V (C) $\frac{1}{2}(v+V)$ (D) $\frac{2vV}{v+V}$
(E) $\sqrt{vV}$

4. Partie entière (1982)
Si x est un nombre réel, on désigne par $[x]$ le plus grand entier inférieur (ou égal) à x.
Quels que soient les nombres réels x et y, $[x]+[y]$ est égal à

(A) $[x+y]$ (B) $[x+y]-1$
(C) $[x+y]$ ou $[x+y]-1$
(D) $[x+y]$ ou $[x+y]+1$
(E) $[x+y]-1$ ou $[x+y]+1$

5. Entre les extrêmes (1991)
Posons, pour x, y, z nombres réels quelconques,

$$u=\max\{\min\{x,y\},\min\{y,z\},\min\{z,x\}\}$$
$$v=\min\{\max\{x,y\},\max\{y,z\},\max\{z,x\}\}$$

Alors, $u-v$ est toujours égal à

(A) 0 (B) $\min\{x,y,z\}$
(C) $\max\{x,y,z\}$
(D) $\max\{y,\min\{x,z\}\}$ (E) y

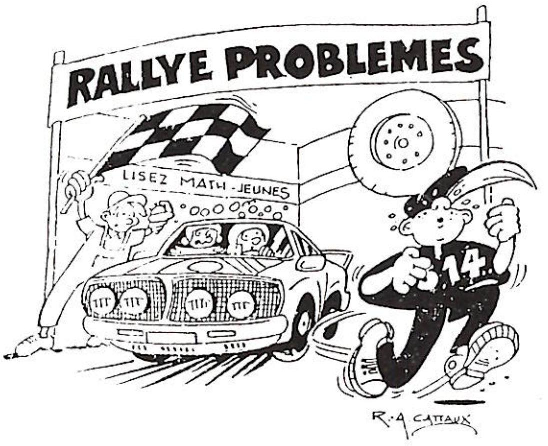
6. Une petite bille (1984)
Dans une boîte cubique dont les arêtes mesurent 4 cm, on place 8 billes de 2 cm de diamètre et, au centre de la boîte, une petite bille tangente à chacune des 8 autres.
Quel est, en centimètres le rayon de la petite bille centrale ?

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponses

Mini : 1 C / 2 C / 3 B / 4 A / 5 B / 6 D
Maxi : 1 D / 2 C / 3 C / 4 C / 5 A / 6 A

Marie Dagonnier de St-Symphorien, élève de 2E à l'A.R.M. Bervoets nous envoie les « Bulles » suivantes :



C. Festraëts

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1993-1994 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent.
Rappelons que les trois premiers problèmes concernent (en principe) les élèves des trois classes inférieures et les trois derniers, les élèves des trois classes supérieures. Pour espérer figurer dans le classement final, il est nécessaire de répondre à au moins un problème de chacune des étapes (numéros 62, 63 et 64) de *Math-Jeunes*).
Présentez soigneusement vos solutions, chaque problème étant rédigé sur une ou plusieurs feuilles séparées et chaque feuille comportant vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.
Envoyez vos solutions à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 15 mars 1994.

m4 Un homme désire être logé dans une auberge. Il n'a pas d'argent, mais il possède une chaîne formée de sept maillons de métal précieux.

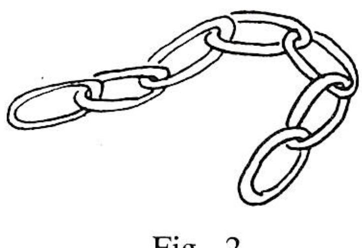


Fig. 2

Avec l'aubergiste, il conclut un accord : pour chaque journée, il donnera un maillon de sa chaîne. Quel est le nombre minimum de maillons qu'il lui faudra couper pour qu'il puisse payer chaque jour et rester une semaine dans l'auberge ?

m5 Sur un échiquier (carré de 64 cases), un cavalier se déplace de la manière suivante :

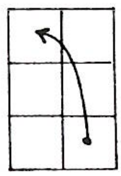


Fig. 3

il a le droit de sauter d'une case à une case diagonalement opposée dans un rectangle de dimensions 3×2, et ce, dans toute direction.

Est-il possible qu'un cavalier se déplace à partir du coin supérieur droit et aboutisse au coin inférieur gauche après être passé une et une seule fois par chaque case de l'échiquier ?

m6 Par le centre d'un triangle équilatéral, on mène une droite ℓ parallèle à l'un des côtés. Sur ℓ et à l'intérieur du triangle, on prend un point M. Démontrer que la distance de M au côté du triangle parallèle à ℓ est la moyenne arithmétique des distances de M aux deux autres côtés.

M4 Même énoncé que **m4**, mais la chaîne comporte 2 000 maillons et l'homme reste 2 000 jours dans l'auberge.

M5 Démontrer que le produit de quatre entiers strictement positifs et consécutifs ne peut être ni un carré parfait, ni un cube parfait.

M6

1. Démontrer que, dans un triangle quelconque, les médianes peuvent être utilisées pour construire un (autre) triangle.
2. On donne un triangle T_1 d'aire S. Avec les médianes de T_1, on

construit un triangle T_2. Avec les médianes de T_2, on construit un triangle T_3. Et ainsi de suite. Trouver la somme totale des aires de tous ces triangles.

Solutions des problèmes proposés dans le numéro 62

m1 Désignons le nombre de délégués par Af pour l'Afrique, Am pour l'Amérique, As pour l'Asie et Eu pour l'Europe.

On sait que

$Am+Af+As+Eu=15$, $Am+As=6$, $As+Eu=7$,

que, Af, Am, As, Eu sont deux à deux distincts et que l'un d'eux est égal à 4.

1. Si $Am=4$, alors $As=2$, $Eu=5$ et $Af=15-(4+2+5)=4$, solution à rejeter car $Am=Af=4$.
2. Si $Eu=4$, alors $As=3$ et $Am=3$, solution à rejeter car $As=Am=3$.
3. Si $Af=4$, alors $As+Am+Eu=11$; la seule solution possible du système

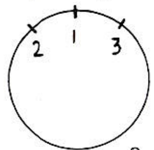
$$\begin{cases} Am+As &= 6 \\ As+Eu &= 7 \\ As+Am+Eu &= 11 \end{cases}$$

est $As=2$, $Eu=5$, $Am=4$, à rejeter car $Af=Am=4$.

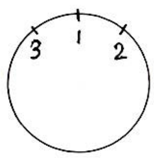
4. Si $As=4$, alors $Am=2$, $Eu=3$ et $Af=15-(4+2+3)=6$.

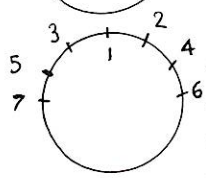
Cette solution vérifie toutes les conditions. C'est donc l'Asie qui a envoyé 4 délégués.

m2 Plaçons le 1 sur le cercle. À sa droite et à sa gauche, on ne peut placer que le 2 et le 3.



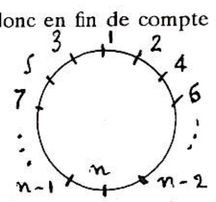
ou

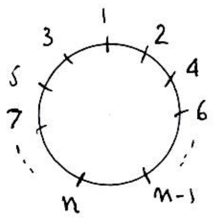




Ces deux solutions étant symétriques, ne gardons que la première. À la droite du 2, on ne peut placer que le 4 ; tout autre nombre est trop grand. Dès lors, à la gauche du 3 doit venir le 5. À la droite du 4, on ne peut placer que le 6 ; tout autre nombre est trop grand. Dès lors, à la gauche du 5 doit venir le 7.

Et ainsi de suite. Remarquons que, dans chaque cas, la différence entre les deux derniers nombres placés vaut 1. On obtiendra donc en fin de compte :





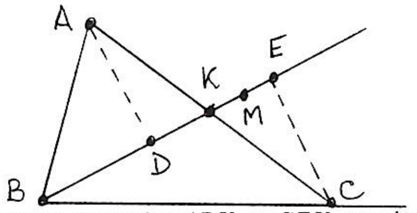
selon que n est pair ou impair.

m3 Soit M un point tel que les triangles AMB et CMB ont même aire. Ces triangles ont un côté commun $[MB]$; ils ont donc même aire si et seulement si les hauteurs $[AD]$ et $[CE]$ menées respectivement de A et de C ont même longueur :

$$\text{aire } AMB = \tfrac{1}{2}|BM|\cdot|AD|,$$
$$\text{aire } CMB = \tfrac{1}{2}|BM|\cdot|CE|.$$

Ou bien M est situé à l'intérieur de l'angle formé par les demi-droites $[BA$ et $[BC$, ou bien M est situé à l'extérieur de cet angle (ou bien M est en B et, dans ce cas, les deux aires sont nulles).

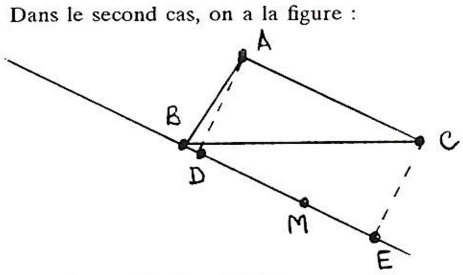
Dans le premier cas, on a la figure :



Les triangles rectangles ADK et CEK sont isométriques, car $|AD|=|CE|$ et les angles sont égaux deux à deux. D'où $|KA|=|KC|$ et M est sur la médiane issue de C. Réciproquement, tout point M de la demi-droite $[BK$ médiane de $[AC]$ est un point de l'ensemble cherché. En effet, les triangles rectangles ADK et CEK sont isométriques car $|AK|=|CK|$ et les angles sont égaux deux à deux. D'où $|AD|=|CE|$ et dès lors,

$$\text{aire } AMB = \text{aire } CMB$$

Dans le second cas, on a la figure :



Dans le quadrilatère $ACED$, on a :

$$|AD|=|CE|,\ AD\perp BM,\ CE\perp BM,$$

donc ce quadrilatère est un rectangle et BM est parallèle à AC. Réciproquement, tout point M de la droite menée par B parallèlement à AC est un point de l'ensemble cherché car BM est parallèle à AC, donc $|AD|=|CE|$ et

$$\text{aire } AMB = \text{aire } CMB.$$

L'ensemble cherché est la réunion de la demi-droite $[BK$ médiane de $[AC]$ et de la droite issue de B et parallèle à AC.

M1 Notons 1 une bonne réponse et 0 une mauvaise réponse. Pour les 15 questions posées, la copie d'un élève sera représentée par une suite de 0 et de 1 du type :

0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1

où ne figurent jamais deux chiffres 1 consécutifs car aucun étudiant n'a répondu correctement à deux questions consécutives.

Combien existe-t-il de suites différentes de ce type ?

Si l'examen ne comportait qu'une seule question, il n'y aurait que deux copies différentes possibles : 1 ou 0.

Si l'examen comportait deux questions, il y aurait trois copies différentes : 1 0, 0 1 et 0 0.

Déterminons par récurrence le nombre E_n de copies différentes lorsque l'examen comporte n questions.

Posons $E_n = X + Y$ où X désigne le nombre de copies où la dernière réponse est notée 0 et Y le nombre de copies où la dernière réponse est notée 1.

Considérons les X copies du premier type ; enlevons la dernière réponse (notée 0) ; on obtient toutes les copies possibles pour un examen de $(n-1)$ questions, donc $X = E_{n-1}$.

Considérons les Y copies du second type. Remarquons que l'avant-dernière réponse ne peut être notée 1, sinon on aurait deux réponses correctes consécutives. Donc, dans toutes ces copies, les deux dernières réponses sont notées 0 1. Enlevons les deux dernières réponses, il nous reste toutes les copies possibles pour un examen à $(n-2)$ questions ; ainsi, $Y = E_{n-2}$.

On obtient ainsi la relation $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$.

En partant de $E_1 = 2$, $E_2 = 3$, on trouve successivement

$$E_3 = 5, E_4 = 8, E_5 = 13, E_6 = 21, \ldots, E_{14} = 987, E_{15} = 1\,597$$

(Ceci ne te rappelle-t-il rien ? Discutes-en avec ton professeur de mathématiques !)

Par conséquent, sur les 1 600 examens, il y a au plus 1 597 copies différentes et donc il y a au moins deux étudiants qui ont répondu de la même façon.

M2 $99^n = (100-1)^n = 100^n - C_n^1 100^{n-1} + C_n^2 100^{n-2} + \cdots + (-1)^n$

$$101^n = (100+1)^n = 100^n + C_n^1 100^{n-1} + C_n^2 100^{n-2} + \cdots + 1$$

d'où $99^n + 101^n = 2 \times 100^n + 2 \times C_n^2 100^{n-2} + 2 \times C_n^4 100^{n-4} + \cdots$

$$99^n + 101^n > \tfrac{51}{25} \cdot 100^n \iff 2C_n^2 100^{n-2} + 2C_n^4 100^{n-4} + \cdots > \tfrac{1}{25} 100^n$$

$$\iff C_n^2 (0{,}01)^2 + C_n^4 (0{,}01)^4 + \cdots > \tfrac{1}{50} \quad (1)$$

Déterminons la plus petite valeur de n telle que

$$C_2^n\,(0{,}01)^2 > \tfrac{1}{50} \quad (2)$$

On doit avoir

$$\frac{n(n-1)}{2} > \frac{10\,000}{50} = 200$$

$$n(n-1) > 400$$

ce qui est vérifié pour $n \geqslant 21$.

$n=21$ vérifie l'inégalité (2), donc aussi l'inégalité (1). Montrons maintenant que pour $n=20$, l'inégalité (1) n'est pas vérifiée. Comme le premier membre de (1) est une fonction croissante de n, si (1) n'est pas vérifiée pour $n=20$, (1) ne sera pas vérifiée pour $n<20$ et 21 sera alors la plus petite valeur de n demandée.

$$C_{20}^2 (0{,}01)^2 + C_{20}^4 (0{,}01)^4 + \cdots$$

$$= \tfrac{20 \cdot 19}{2} \cdot (0{,}01)^2 \cdot \left(1 + \tfrac{18 \cdot 17}{3 \cdot 4} \cdot (0{,}01)^2 + \tfrac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot (0{,}01)^4 + \cdots\right) =$$

$$190(0{,}01)^2\left[1 + \tfrac{18 \cdot 17}{3 \cdot 4}(0{,}01)^2\left(1 + \tfrac{16 \cdot 15}{5 \cdot 6}(0{,}01)^2 + \tfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}(0{,}01)^4 + \cdots\right)\right]$$

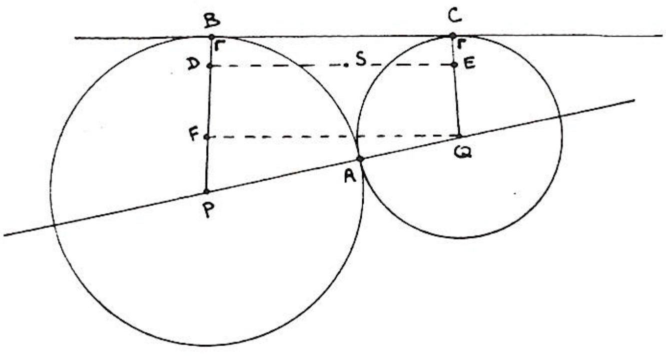
$$< 190(0{,}01)^2\left[1 + \tfrac{51}{2}(0{,}01)^2\left(1 + 4^2(0{,}01)^2 + 4^4(0{,}01)^4 + \cdots\right)\right]$$

$$< 190(0{,}01)^2\left[1 + \tfrac{51}{2} \cdot (0{,}01)^2 \cdot \frac{1-(0{,}04)^{18}}{1-(0{,}04)^2}\right]$$

$$< 190(0{,}01)^2\left[1 + \tfrac{51}{2} \cdot \frac{1}{100^2 - 4^2}\right] = 0{,}01904\ldots < 0{,}02 = \tfrac{1}{50}.$$

M3 Soit x le rayon du cercle inscrit dans le triangle curviligne ABC.

Menons, par le centre S de ce cercle, la droite DE et menons par le centre Q du cercle de rayon r, la droite QF, toutes deux parallèles à BC. Avec les notations de la figure, on a :



$$|SD|^2 = |SP|^2 - |PD|^2 = (R+x)^2 + (R-x)^2 = 4Rx$$

$$|SE|^2 = |SQ|^2 - |QE|^2 = (r+x)^2 + (r-x)^2 = 4rx$$

D'où $\quad |DE| = |SD| + |SE| = 2\left(\sqrt{Rx} + \sqrt{rx}\right)$

D'autre part, $\quad |DE| = |FQ| \quad$ et

$$|FQ|^2 = |PQ|^2 - |PF|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$$

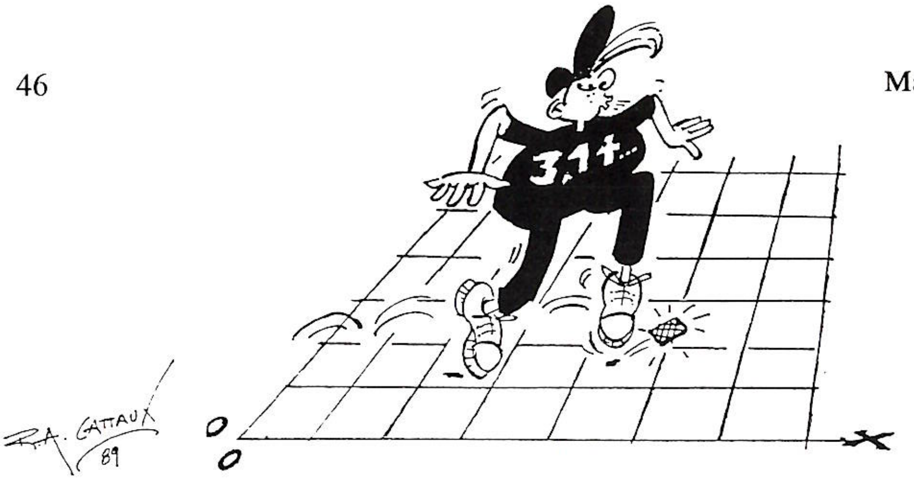
On obtient donc :

$$2 \cdot \left(\sqrt{Rx} + \sqrt{rx}\right) = 2\sqrt{Rr}$$

et finalement,

$$x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$$

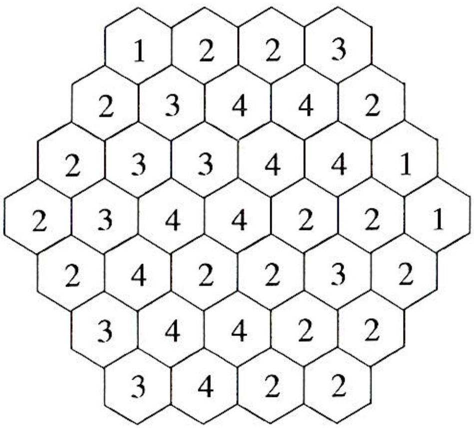
Math-Jeunes n°63, 46–48, 1994

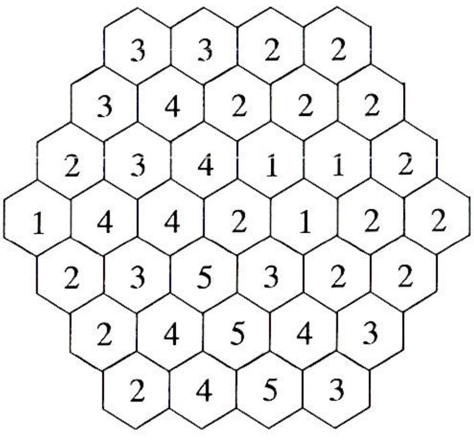


Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Rappelons brièvement la règle de ce jeu de décodage :

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, à partir de la grille codée, de retrouver la grille coloriée.

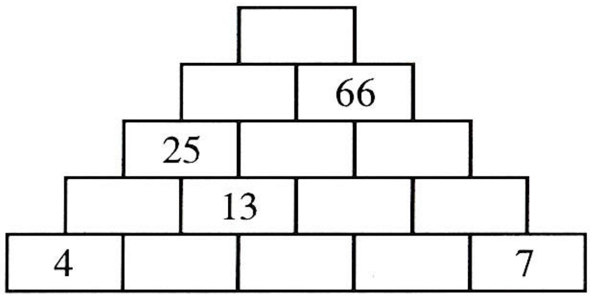


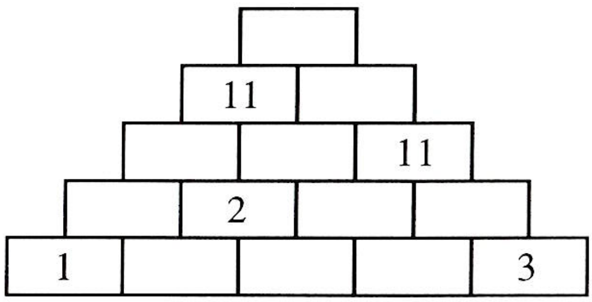


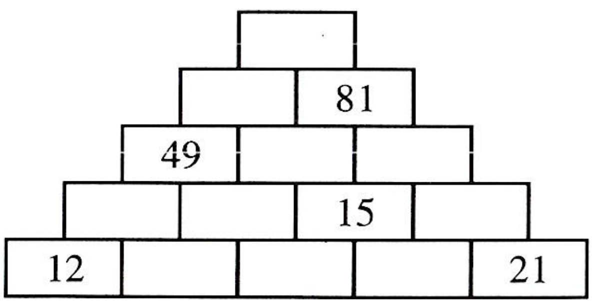
A.Parent

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.







Grilles des moyennes

Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.

	2	1	
7			1
21			6
	1	3	

	3	5	
21			31
1			45
	11	3	

Croix magique

Compléter par des chiffres pour que la somme des nombres des grandes lignes horizontales et verticales soit 20.
De plus, la somme des nombres des petites lignes horizontales et verticales doit être un nombre de un chiffre.

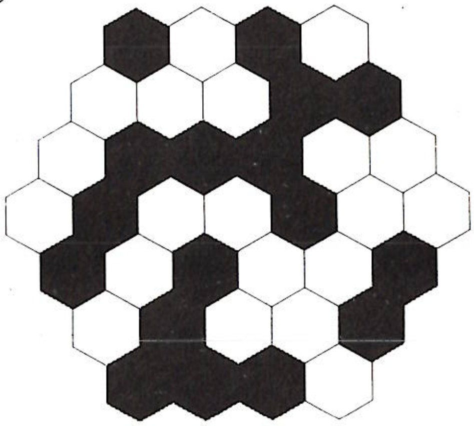
		7	.		
		.	5		
6	1	.	.	7	.
.	.	.	.	.	3
		2	.		
		.	.		

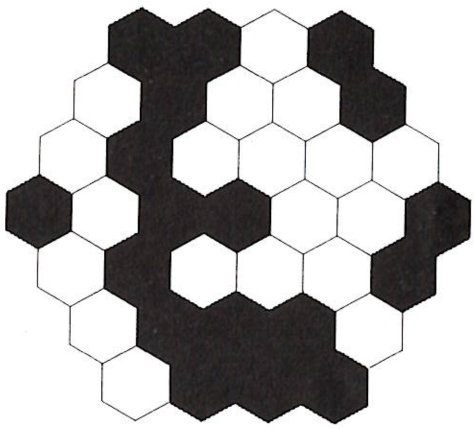
Problème hindou (Maurice KRAITCHIK)

Trois personnes jouent à un jeu pour lequel le perdant de chaque partie double l'avoir de ses deux adversaires.
Le jeu semble honnête (peut-être même trop ...) car, à l'issue de trois parties, chacun a perdu exactement une fois et se retrouve avec 24 FB. en poche !!! Combien chaque joueur possédait-il au départ ?

Solution des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Le mur des nombres

121
55 66
25 30 36
12 13 17 19
4 8 5 12 7

28				
11	17			
5	6	11		
3	2	4	7	
1	2	0	4	3

167				
86	81			
49	37	44		
27	22	15	29	
12	15	7	8	21

Grilles des moyennes

	2	1	
7	5	3	1
21	8	5	6
	1	3	

	3	5	
21	13	17	31
1	11	19	45
	11	3	

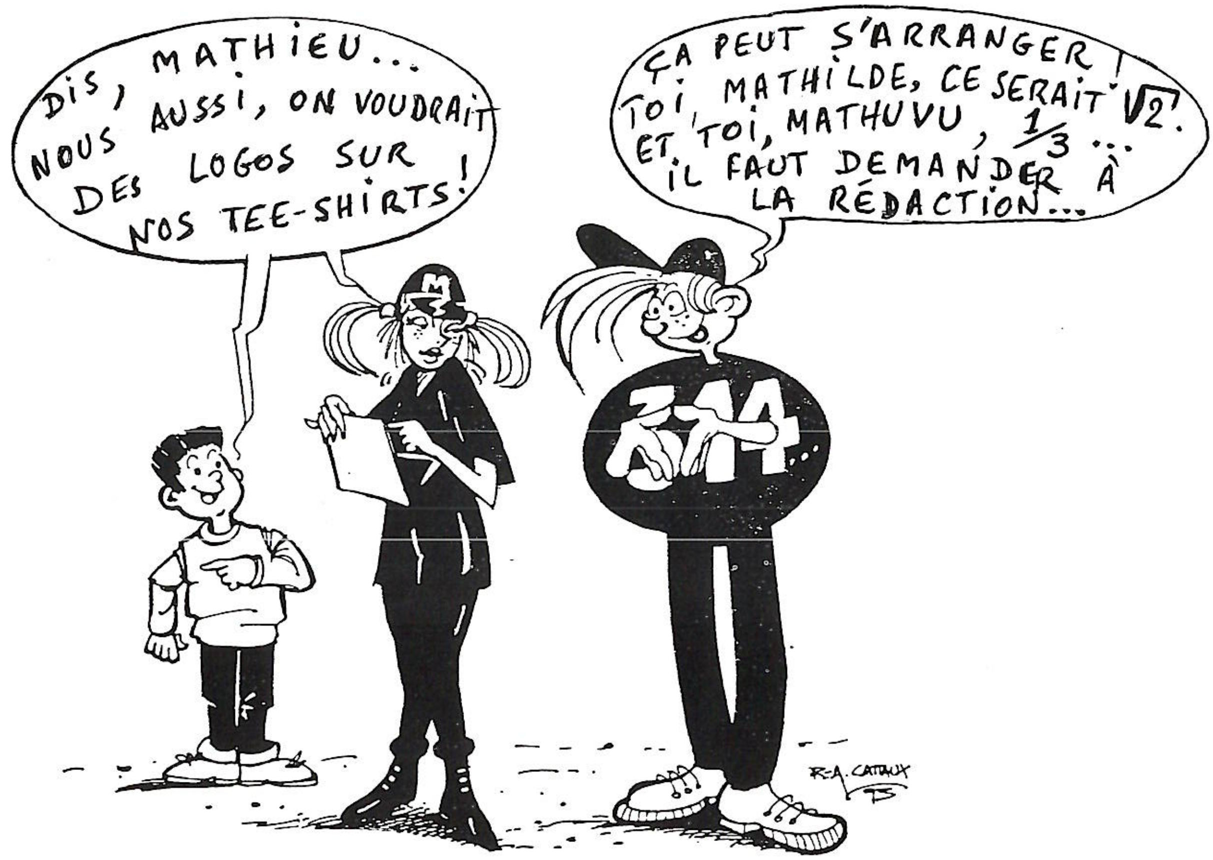
Croix magique

		7	0		
		2	5		
6	1	0	2	7	4
1	6	5	5	0	3
		2	5		
		4	3		

Jeu hindou

La solution est 39 FB. 21 FB. 12FB.

C'est encore Marie Dagonnier qui nous fait parvenir les « Bulles » suivantes :



Concours « Bulles »

Remplis les bulles ci-dessous (ou une copie) et renvoie-les à la Rédaction. Les meilleures seront publiées et récompensées !!!