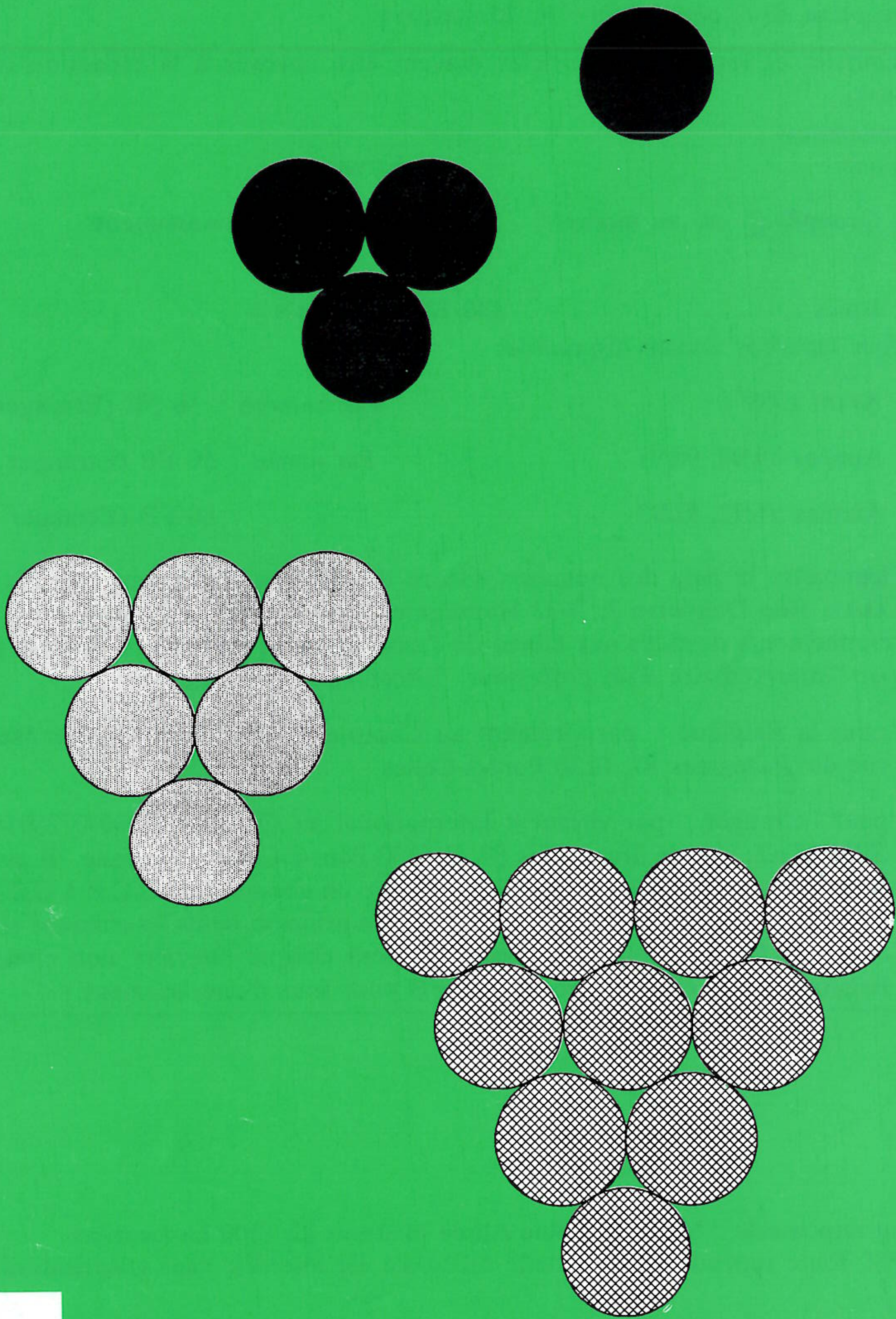
# MATH-JEUNES



15e année
Mai — n° 65
Bureau de dépôt: Mons X

# MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

*Rédaction, administration :* Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.
*Comité de Rédaction :* M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, G.NOËL, A.PARENT, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
*Illustrations :* R.A.CATTAUX
*Conception de la couverture :* K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

*Abonnements :*

| Belgique : | | Etranger : | |
|---|---|---|---|
| • Groupés (5 ex. au moins) : | 100 FB | • Pour 5 abonnements : | 1000 FB |
| • Isolés : | 140 FB | • Isolés : | 280 FB |

*Anciens numéros encore disponibles :*

| | |
|---|---|
| • Avant 1989 | Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB) |
| • Années 89/90, 90/91 | Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB) |
| • Années 91/92, 92/93 | 80 FB (Etranger : 160 FB) |

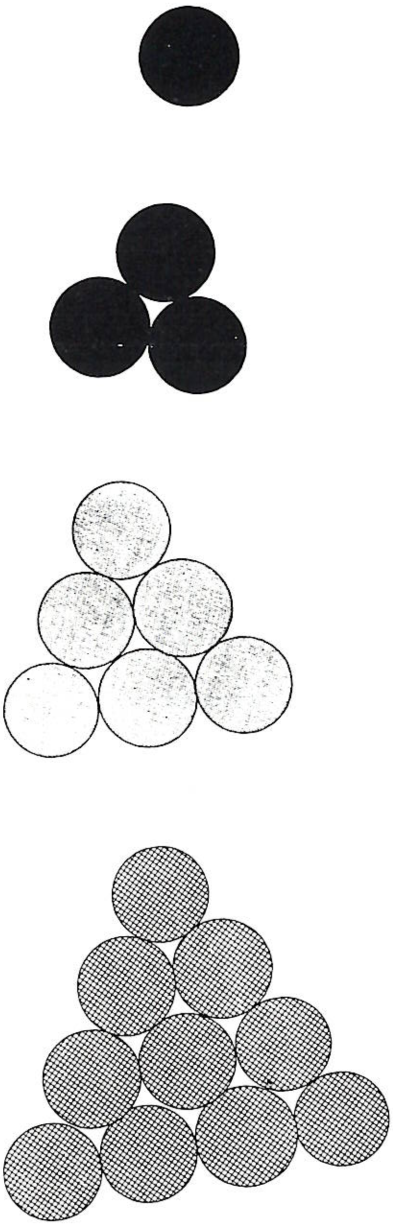
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser chez N. DEBAILLE JOELANTS, Rue Delpierre 2, 7022 Harmignies.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°65 Quinzième année 1994

# Math-Jeunes



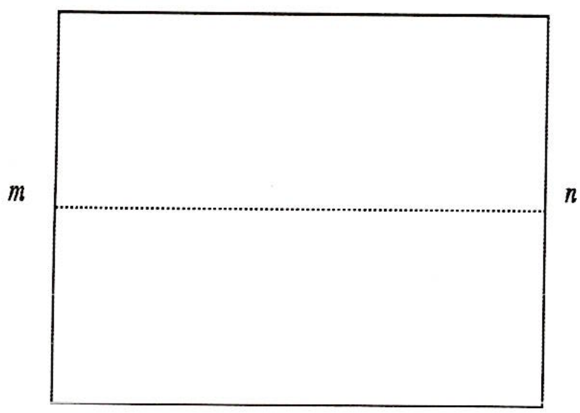
Math-Jeunes n°65, 74–75, 1994

# Jeux et Passe-temps (8)

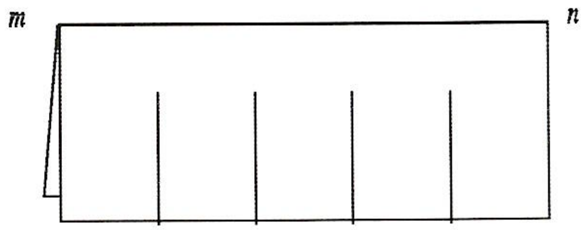
C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

Voici maintenant, et pour terminer cette série d'articles sur des jeux et des passe-temps, deux autres manipulations d'une banale feuille de papier, qui vous permettront de remporter au moins un succès de curiosité. La première manipulation va vous donner un moyen de fabriquer facilement une guirlande décorative. Elle transforme, par exemple, une feuille de format A4 (c'est à dire d'environ 29.7 cm × 21 cm), en une guirlande qui peut avoir plusieurs mètres de longueur. Suivez le mode d'emploi ci-dessous et vous constaterez le résultat. De plus, en observant de près le déploiement de la guirlande, vous comprendrez pourquoi elle peut devenir très longue.

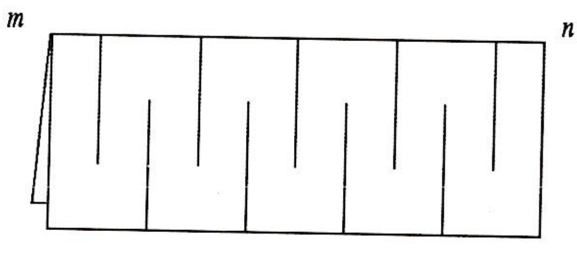
Prenez donc une feuille de papier d'un format rectangulaire (A4 par exemple). Pliez-la selon sa plus longue médiane.



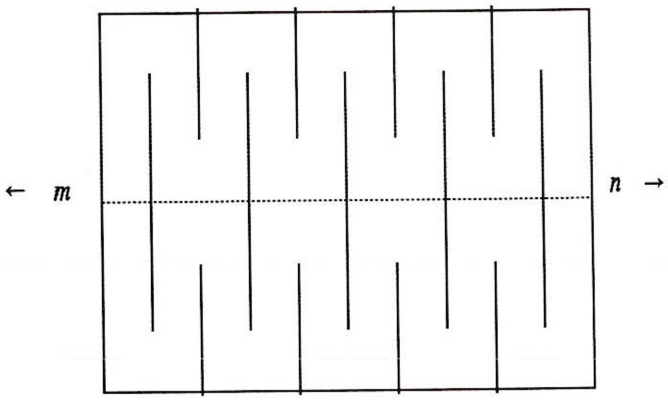

Découpez, du côté opposé au pli et en entaillant les deux épaisseurs en même temps, une série de languettes comme si vous formiez les dents d'un peigne (vous devez donc vous arrêter à environ 1 cm du pli). Les traits de ciseaux ne doivent pas être trop rapprochés les uns des autres (voir figure).



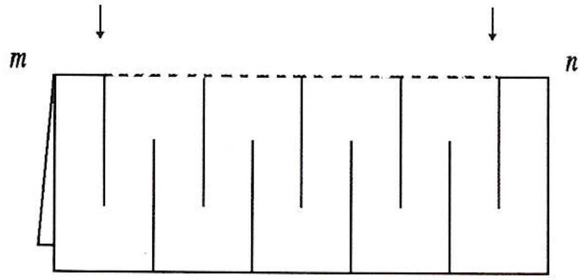

Vous recommencez de semblables découpes du côté du pli cette fois et toujours en découpant les deux épaisseurs en même temps. Veillez bien à situer ces découpes entre celles réalisées précédemment.




Vous dépliez alors la feuille de manière à lui redonner son format primitif. En écartant les deux petits côtés de la feuille l'un de l'autre, vous obtenez une guirlande d'autant plus longue que vous avez réalisé de fines languettes.

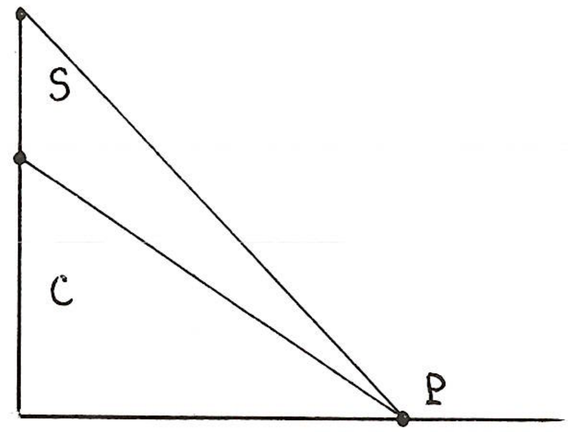



Observez bien la guirlande que vous avez construite, elle est formée de sortes d'anneaux (pas nécessairement circulaires) fermés notamment par le pli que vous avez réalisé au début de la construction. Si vous découpez le papier selon le pli de tous les anneaux, à l'exception du premier et du dernier, vous obtenez, au départ de la petite feuille, un très grand anneau de papier dans lequel vous pouvez faire passer de grands objets et certainement des personnes. Voyez sur le croquis ci-dessous, où découper (pointillé) pour obtenir l'effet désiré.

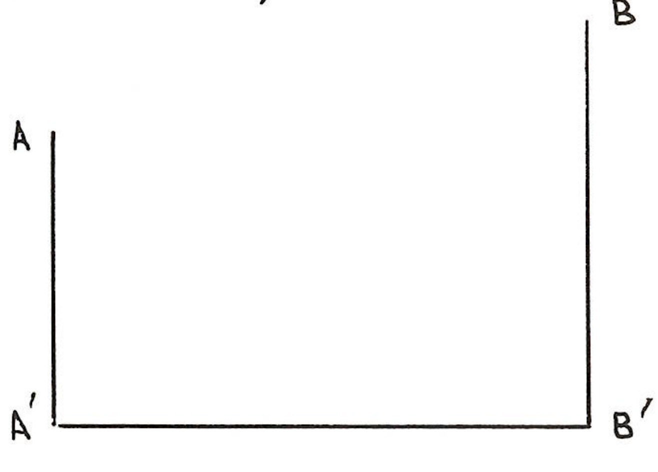



Je pense que maintenant, vous ne résisterez pas au plaisir de parier que vous êtes capable de faire passer votre professeur de mathématique dans un trou découpé dans une feuille A4 ! Bon succès.

# Deux problèmes proposés par M. Berckmans de Waterloo




Une statue de 6 m est posée sur une colonne de 10 m. À quelle distance de la colonne doit-on se placer pour voir la statue sous un angle maximum ?



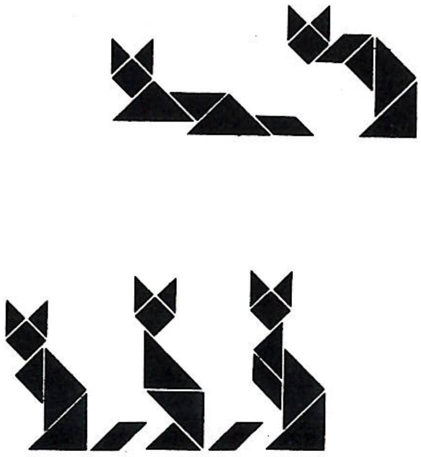

Les murs $A'A$ et $B'B$ de ma prison sont si hauts que je ne vois guère le ciel.
En quel point du segment $[A'B']$ puis-je voir le ciel sous un angle maximum ?

Math-Jeunes n°65, 76–76, 1994

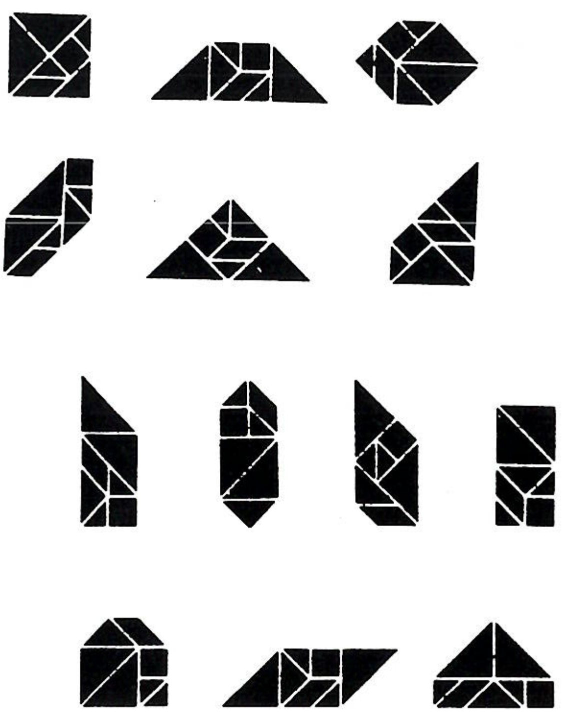
# Détente (suite)

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

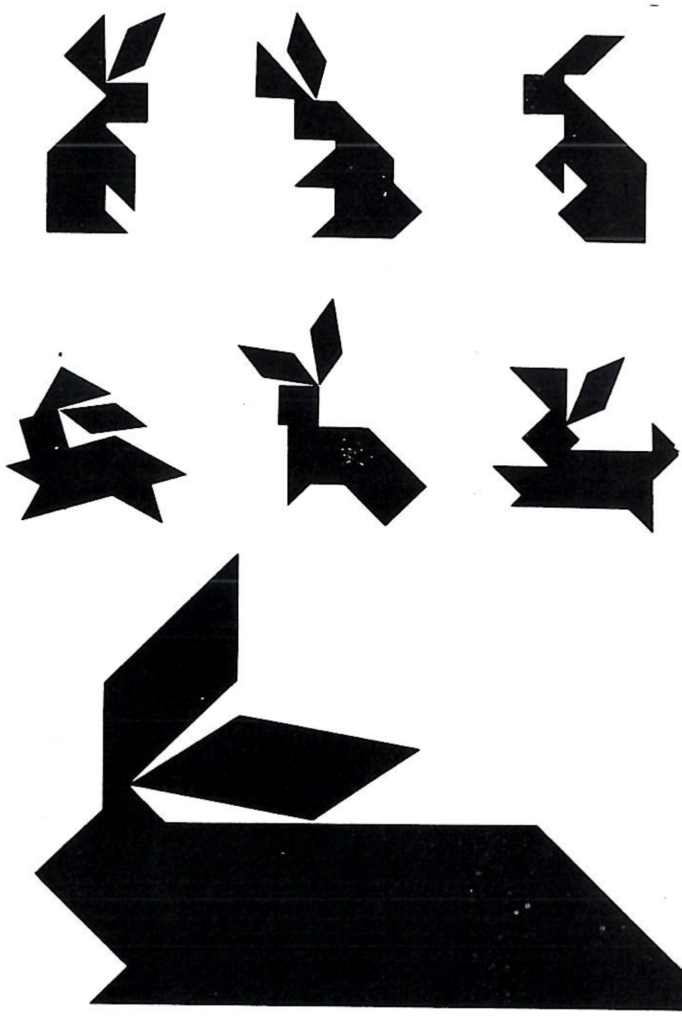
*La Rédaction espère que tu t'es bien amusé avec ton « Tangram ». Voici tout d'abord les solutions au problème des « chats » :*



*À propos de la convexité (on dit qu'une figure est convexe si, deux points quelconques étant choisis à l'intérieur de la figure, le segment qui joint ces deux points est tout entier contenu dans la figure), nous te présentons ci-dessous les treize seuls Tangrams convexes :*



*Essaie de les réaliser ... Enfin, pour terminer, voici de quoi t'occuper encore un peu en tentant de composer les Tangrams suivants :*



*Tu trouveras les solutions en pages « Jeux ».*

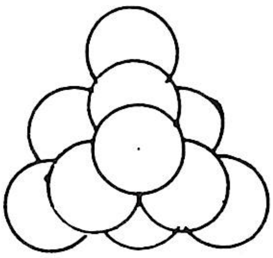
*Si tu désires en savoir plus, voici un ouvrage de référence :*
*Tangram by Joost Elffers, Penguin Books, 1976.*

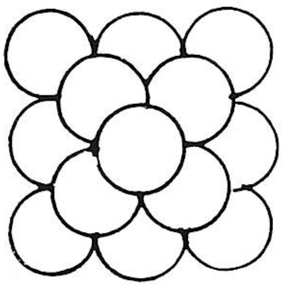
Math-Jeunes n°65, 77–79, 1994


# Tout est nombre (suite)

André Paternottre, *Inst. Techn. & Comm. de Boussu*

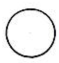
Tu te souviens bien sûr encore des **nombres carrés** et des **nombres triangulaires** introduits dans les numéros 62 et 63 de *Math-Jeunes* dont la définition est rappelée dans le dernier numéro.
Imagine maintenant qu'on **empile** des nombres carrés ou triangulaires consécutifs en couches successives de manière à créer des **nombres pyramidaux carrés** ou **triangulaires** selon qu'on démarre avec une base carrée ou triangulaire ... Examinons ces nouveaux nombres d'un peu plus près ...





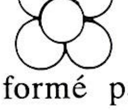
## Les nombres pyramidaux carrés

Le premier de ces nombres vaut 1 et on le note $PC_1 = 1^2 = 1$.



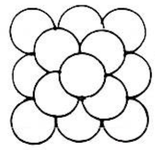
Le deuxième s'obtient en empilant la « balle de tennis » précédente sur un carré formé de quatre « balles de tennis » accolées. On obtient ainsi un ensemble stable de cinq « balles de tennis ». On le note $PC_2$. Il vaut

$$PC_2 = PC_1 + 4 = 1^2 + 2^2 = 5$$



Le troisième est formé par l'assemblage précédent déposé sur un carré de neuf balles accolées. Cela donne un ensemble stable de quatorze balles.

$$PC_3 = PC_2 + 9 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$



La visualisation de chacun des $PC_n$ successifs n'est pas chose aisée ! Nous te conseillons de « jouer » avec de vraies balles. Tu verras alors facilement (si tu ne l'as pas déjà deviné) que

$$PC_n = PC_{n-1} + C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

Il est bien évident que $PC_n$ et $C_n$ désignent respectivement le **pyramidal carré** et le **carré** de rang $n$.
Ainsi, le $n^e$ **nombre pyramidal carré** est la somme des carrés des $n$ premiers nombres naturels non nuls. Pour calculer cette somme, tu peux utiliser une formule que, normalement, tu dois bien connaître :

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

dans laquelle tu donnes à $x$ les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, n$

pour $x=0$, on a : $1^3 = 0^3 + 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 1$
pour $x=1$, on a : $2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$
pour $x=2$, on a : $3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$
$\vdots$
pour $x=n$, on a : $(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$

Additionnons membre à membre les $(n+1)$ égalités qui précèdent, il vient :

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)\cdot 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2 &= \tfrac{1}{3}[(n+1)^3-3(1+2+\cdots+n)-(n+1)]\\ &= \tfrac{1}{3}[(n+1)^3-3\tfrac{1}{2}n(n+1)-(n+1)]\\ &= \tfrac{1}{3}(n+1)[(n+1)^2-\tfrac{3}{2}n-1]\\ &= \tfrac{1}{3}(n+1)(n^2+\tfrac{n}{2})\\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

Le $n^e$ **nombre pyramidal carré** est donc

$$PC_n = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

Remarque que $PC_n$ est nécessairement un nombre naturel. Peux-tu dès lors démontrer que le produit $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ est toujours divisible par 6 lorsque $n$ est naturel ? La suite des nombres pyramidaux carrés est

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots$$

Je te propose également de démontrer quelques propriétés des nombres $PC_n$ :

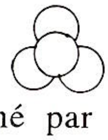
1. $PC_n - PC_{n-1} = n^2$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{PC_n}{PC_{n-1}} = 1$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} PC_i = \dfrac{1}{12}i(i+1)^2(i+2)$

## Les nombres pyramidaux triangulaires

Le premier de ces nombres vaut 1 ; on le note $PT_1 = 1$.

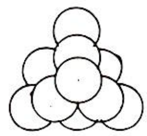
Le deuxième s'obtient en empilant la « balle de tennis » précédente sur un triangle formé de trois « balles de tennis » accolées. On obtient ainsi un ensemble stable de quatre « balles de tennis », qu'on note $PT_2$. On a :

$$PT_2 = PT_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$



Le troisième est formé par l'assemblage précédent déposé sur un triangle de six balles accolées. Cela donne un ensemble stable de dix balles.

$$PT_3 = PT_2 + 6 = 1 + 3 + 6 = 10$$



La visualisation de chacun des $PT_n$ successifs n'est pas non plus chose aisée ! « Joue » donc encore avec de vraies balles. Tu verras alors facilement (si tu ne l'as pas déjà deviné) que

$$PT_n = PT_{n-1} + T_n = PT_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

Il est bien évident que $PT_n$ et $T_n$ désignent respectivement le **pyramidal triangulaire** et le **triangulaire** de rang $n$.
Dans la dernière égalité, appelée *formule de récurrence*, donnons successivement à $n$ les valeurs $1, 2, \cdots, n$. Il vient alors, si on pose $PT_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}PT_1 &= PT_0 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\\ PT_2 &= PT_1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\\ &\vdots\\ PT_n &= PT_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces $n$ égalités, nous obtenons :

$$PT_n = 0+\frac{1}{2}(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1))$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}PT_n &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i+1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left[(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)\right]\\ &= \frac{1}{12}n(n+1)\left[(2n+1)+3\right]\\ PT_n &= \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\end{aligned}$$

Est-il clair pour toi que le produit

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

est toujours divisible par 6, lorsque $n$ est naturel ?
Ainsi, le $n^e$ nombre pyramidal triangulaire vaut le sixième du produit des trois nombres naturels consécutifs croissants à partir de $n$.
La suite des nombres pyramidaux triangulaires vaut donc

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, \ldots$$

Je te propose de démontrer quelques propriétés des nombres pyramidaux :

1. $PT_n - PT_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1)$
2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{PT_n}{PT_{n-1}} = 1$
3. $\sum_{i=1}^{n} PT_i = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$
4. $\frac{\sum_{i=1}^{n} PT_i}{PT_n} = \frac{n+3}{4}$
5. $PC_n - PT_n = \frac{1}{6}n(n^2-1)$
6. $PC_n + PT_n = \frac{1}{2}n(n+1)^2$
7. $PC_n^2 - PT_n^2 = \frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)^3$
8. $1 \leqslant \frac{PC_n}{PT_n} < 2$
9. si $\frac{PC_n}{PT_n} = \frac{5}{3}$ alors $n = ?$

## Existe-t-il des relations entre les nombres pyramidaux carrés et les nombres pyramidaux triangulaires ?

- Observe le tableau suivant :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $PC_n$ | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | $\cdots$ | $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ |
| $PT_n$ | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | $\cdots$ | $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ |

Dans les deuxième et troisième lignes, trois nombres disposés comme

$$\begin{array}{c|c} & c \\ \hline a & b \end{array}$$

sont tels que $a + b = c$. Autrement dit,

$$PC_n = PT_{n-1} + PT_n$$

**La somme de deux nombres pyramidaux triangulaires consécutifs est un nombre pyramidal carré !**

- D'autre part,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{PC_n}{PT_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2$$

Dès lors, si $n$ est grand, on a l'approximation

$$PC_n \approx 2 \times PT_n$$

Calculons l'erreur $\varepsilon$ commise en assimilant le rapport $\frac{PC_n}{PT_n}$ au nombre 2.

$$\frac{PC_N}{PT_N} = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} < 2 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Dès lors,

$$\varepsilon = 2 - \frac{PC_n}{PT_n} = \frac{3}{n+2}$$

On aura ainsi

$$\varepsilon < 10^{-k} \ (k \in \mathbb{N}) \text{ ssi } n > 3 \cdot 10^k - 2$$

c'est-à-dire que $\varepsilon < 0,1$ dès que $n > 28$.

Peut-être découvriras-tu d'autres propriétés des nombres pyramidaux ou même d'autres suites de nombres aux propriétés intéressantes. Dans ce cas, envoie-les à *Math-Jeunes*. Au plaisir de te lire, ... j'espère.

Math-Jeunes n°65, 80–81, 1994

# Une question de probabilités ...

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

**On casse une barre, de longueur $L$, en trois morceaux. Quelle est la probabilité que deux de ces morceaux soient plus petits qu'une longueur donnée $a$ ?**

Nous adopterons, dans la solution proposée plus loin, la même démarche « géométrique » que celle utilisée dans le « Problème de la baguette » (*Math-Jeunes* n° 60, avril 1993) et dans le « Problème de la bande magnétique » (*Math-Jeunes* n° 63, janvier 1994).

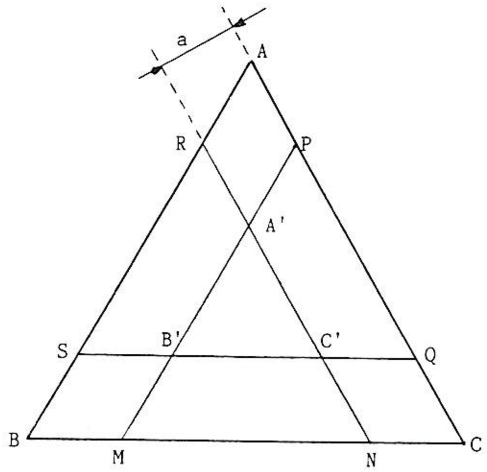
Pour utiliser cette méthode géométrique, il faut se souvenir de la propriété géométrique suivante du triangle équilatéral :

> La somme des distances d'un point $M$, pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral, aux côtés de ce dernier est constante et égale à la hauteur du triangle. [1]

Dès lors, considérant un triangle équilatéral de hauteur $L$, chaque point pris à l'intérieur du triangle représente une manière possible de briser la barre donnée en trois morceaux. Nous dirons qu'un point est favorable (respectivement défavorable) selon qu'il représente un cas favorable (respectivement défavorable) à l'événement. Dans ce cas, un point est favorable si ses distances à deux côtés du triangle sont inférieures à $a$.

Dans tout ce qui suit, la longueur de la barre (c'est-à-dire la hauteur du triangle) est prise, sans nuire à la généralité, comme unité de longueur.

1. Menons entre chaque sommet et le côté opposé une parallèle à ce côté à une distance $a$. Il y a **cinq** cas à envisager (selon la valeur de $a$) : chaque cas conduit à une figure différente. Ci-dessous, la figure correspondant au premier cas. [2]




Il importe d'examiner chacune de ces figures pour déterminer les domaines des points favorables et, ensuite de faire le rapport des aires de ces domaines à l'aire du triangle équilatéral.

Premier cas : $0 < a < \frac{1}{3}$
La figure est composée de :
trois losanges
trois trapèzes
un triangle intérieur.

Deuxième cas : $a = \frac{1}{3}$
La figure est composée de :
trois losanges
trois triangles.

Troisième cas : $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$
La figure est composée de :
trois pentagones
trois triangles
un triangle central.

Quatrième cas : $a = \frac{1}{2}$
La figure est composée de :
quatre triangles isométriques.

[1] En désignant le triangle par $ABC$, une démonstration simple (qui vous est demandée !) s'appuie sur la considération des aires des triangles $AMB$, $BMC$, $CMA$ et $ABC$.

[2] Le lecteur est invité à dessiner les figures correspondant aux cas 2 à 5 en n'oubliant pas que $a$ est la distance entre chaque côté du triangle équilatéral et une parallèle à ce côté.

Cinquième cas : $\frac{1}{2} < a < 1$
La figure est composée de :
trois triangles
un hexagone.

## 2. Calculs

Trois remarques avant de détailler les calculs :

1° Il est rappelé que la hauteur du triangle équilatéral est prise comme unité.

2° On peut ne considérer que **trois** cas (au lieu des **cinq** envisagés ci-dessus) en remarquant que les cas (2) et (4) constituent des « cas frontières » entre respectivement les cas (1) et (3), (3) et (5).

3° « Le rapport des aires de deux triangles équilatéraux est égal au rapport des carrés de leurs hauteurs ». [3]

Premier cas : $0 < a \leqslant \frac{1}{3}$

Points favorables : 3 losanges tels que $ARA'P$ ou 6 triangles équilatéraux tels que $A'RP$ dont la hauteur est égale à $a$.

Tenant compte de la remarque (3°) ci-dessus, il vient immédiatement :

$$\boxed{\text{Prob.} = 6a^2}$$

Deuxième cas : $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$

Points défavorables : 3 triangles équilatéraux tels que $A'QS$ dont la hauteur est égale à $1 - 2a$.

Toujours à l'aide de la remarque (3°) **et** en utilisant les probabilités complémentaires, on a :

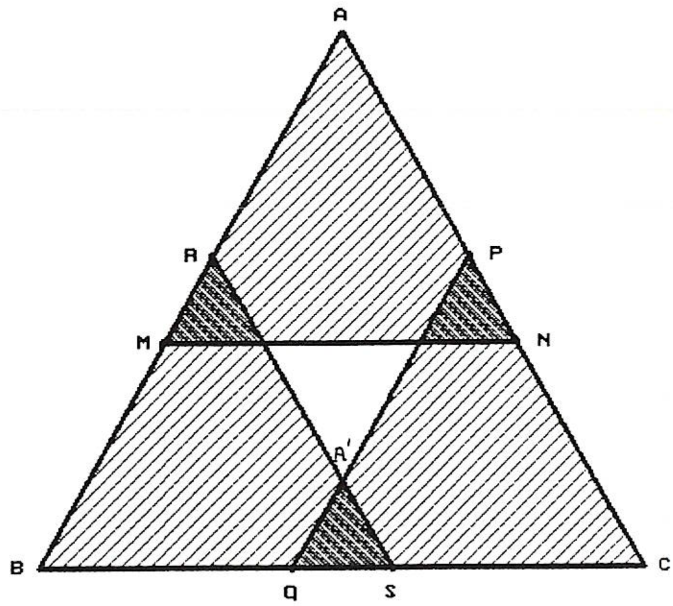
$$\boxed{\text{Prob.} = 1 - 3 \cdot (1 - 2a)^2}$$

Troisième cas : $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$

$$\boxed{\text{Prob.} = 1}$$

$\longrightarrow$ Les formules qui « encadrent » les cas $a = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$ conduisent aux mêmes résultats aux bornes.

([3]) Encore une démonstration (très facile) qui vous est demandée !




Exemple d'une figure produite par le programme – ordinateur
$$\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$$

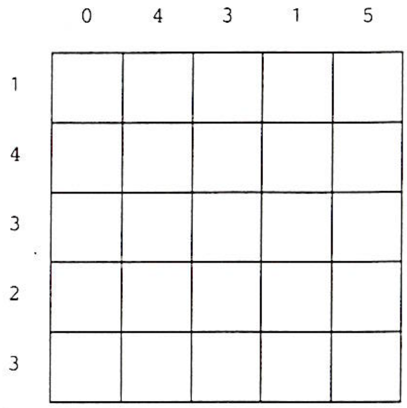
Vous disposez maintenant de tous les éléments — et même de la solution — vous permettant d'aborder cette question dans tous ses détails : démontrer les propriétés géométriques utilisées, établir les figures manquantes, vérifier les formules proposées et démontrer, par le calcul, que les courbes qui représentent les variations de la probabilité (en fonction de $a$) se « raccordent » parfaitement aux bornes $a = \dfrac{1}{3}$ et $a = \dfrac{1}{2}$.

Math-Jeunes n°65, 82–83, 1994

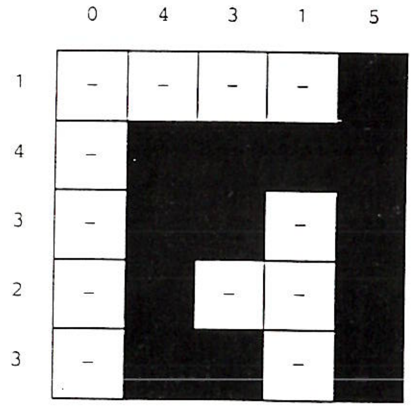
# La boîte noire

André Parent, *Lycée de Mouscron*

La grille ci-dessous représente une boîte dans laquelle est placée une pièce formée de carrés.
Le but du jeu consiste à découvrir la forme de cette pièce en décodant les informations numériques données.

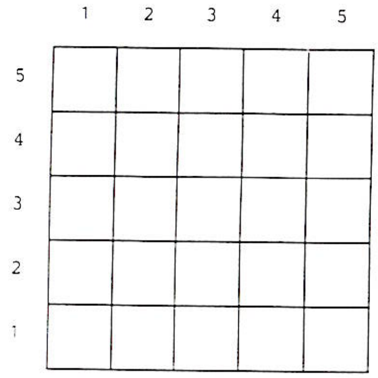



Les nombres écrits au-dessus indiquent le nombre de cases noires par colonne.
Les nombres écrits à gauche indiquent le nombre de cases noires par rangée.
La forme cachée dans la boîte est représentée ci-dessous.

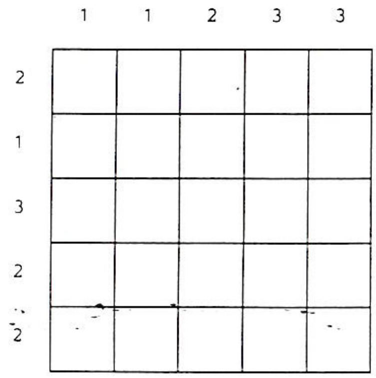



Si tu éprouves des difficultés, remarque que 0 signifie qu'il n'y a pas de carrés noirs dans la ligne considérée, et qu'un 5 te permet de noircir toute la ligne envisagée.
Tu peux aussi mettre un tiret « – », dans les cases certainement non noires.
Nous te proposons de découvrir les pièces cachées dans les boîtes suivantes.

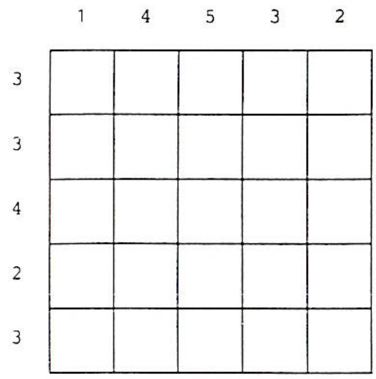
I.




II.

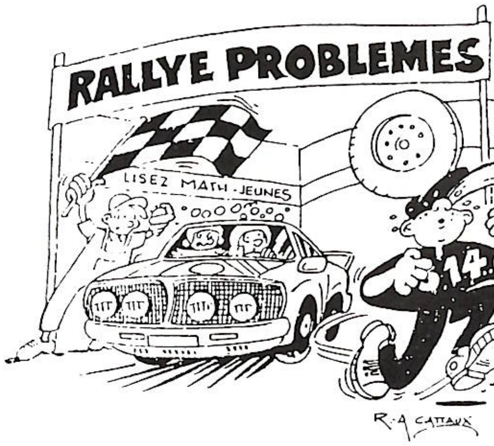



III.



Math-Jeunes n°65, 83–85, 1994

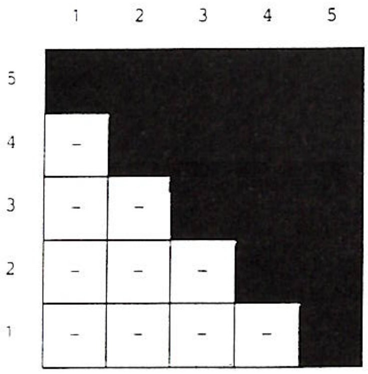




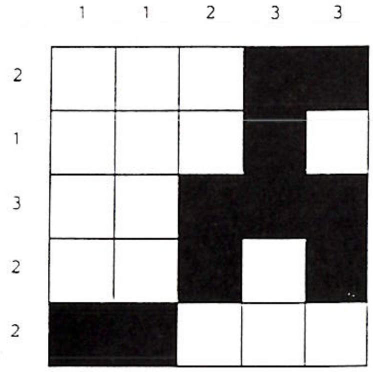

C. Festraets

Solutions :

I.

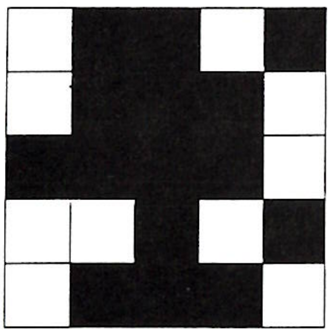


II.



Il arrive que la pièce soit constituée de plusieurs morceaux et qu'il existe parfois plusieurs solutions à un même codage.

III.



*Article réalisé par les élèves de Première accueil du Lycée de Mouscron dans le cadre d'une participation à l'EXPOMATH.94 en mai 94 dans cette même ville. Il est aussi l'aboutissement d'un projet concrétisé par une stagiaire durant trois semaines dans cette classe :*

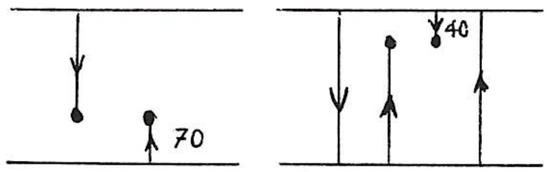
AMIOUR Olivier, AOUICHE Thomas, ASSADI Olfa, COËTTE Céline, DELCROIX Cédric, DESCHEEMAEKER Dimitri, LATRACHE Hanen, SAMYN Cindy, SAMYN Rita, SAMYN Sylvia, SPICY David, VAN NEDER Frédéric, VANACKER Jennifer, VANDERSTEENE Laëtitia.

Stagiaire : DEFREYNE Françoise

Titulaire : PARENT André.

## Solutions des problèmes proposés dans le n°64

**m7**




Lors du premier croisement, les deux bateaux ensemble ont parcouru exactement la largeur de la rivière et lors du second croisement, ils ont parcouru ensemble trois fois la largeur de la rivière. Comme leurs vitesses sont constantes, il leur faut donc trois fois plus de temps pour atteindre le point du second croisement que pour atteindre le point du premier croisement.

Pour ceux qui préfèrent les (longs) calculs :

soit $x$ la largeur de la rivière, $v_1$ la vitesse du premier ferry, $v_2$ la vitesse du second ferry, $t_1$ le temps mis pour arriver au premier point de croisement et $t_2$ le temps mis pour arriver au second point de croisement.

$$\begin{cases} 70 & = v_1 t_1 \\ x - 70 & = v_2 t_1 \end{cases}$$

$$x = v_1 t_1 + v_2 t_1 = (v_1 + v_2) t_1$$

$$\begin{cases} x + 40 = v_1 t_2 \\ 2x - 40 = v_2 t_2 \end{cases}$$

$$3x = v_1 t_2 + v_2 t_2 = (v_1 + v_2) t_2$$

D'où $t_2 = 3t_1$.

Le premier ferry a parcouru 70 m en $t_1$ et $(x + 40)$ m en $t_2$, donc

$x + 40 = 3 \cdot 70$ ou $x = 170$.

La largeur de la rivière est de 170 m.

**m8** Soit $abababl = (xyz)^3$. On a donc

$$1010101 < abababl < 9999991$$

$$100^3 < abababl < 216^3$$

et donc $x = 1$ ou $x = 2$.

Le nombre donné est impair, donc $xyz$ est aussi impair, son chiffre des unités peut être 1, 3, 5, 7 ou 9 ; mais $1^3 = 1$, $3^3 = 27$, $5^3 = 125$, $7^3 = 343$ et $9^3 = 729$. Il faut donc que $z = 1$ puisque $(xyz)^3$ se termine par 1.

Remarquons que la somme des chiffres de $abababl$, est un multiple de 3 plus 1 ($abababl \in 3\mathbb{N} + 1$). Dès lors $xyz$ est aussi un multiple de 3 plus 1 (un multiple de 3 élevé au cube donne un multiple de 3 et un multiple de 3 plus 2 élevé au cube donne un multiple de 3 plus $2^3 = 8$, c'est-à-dire un multiple de 3 plus 2).

Les seules possibilités pour $xyz$ sont alors

$$121 \text{ et } 121^3 = 1771561$$

$$151 \text{ et } 151^3 = 3442951$$

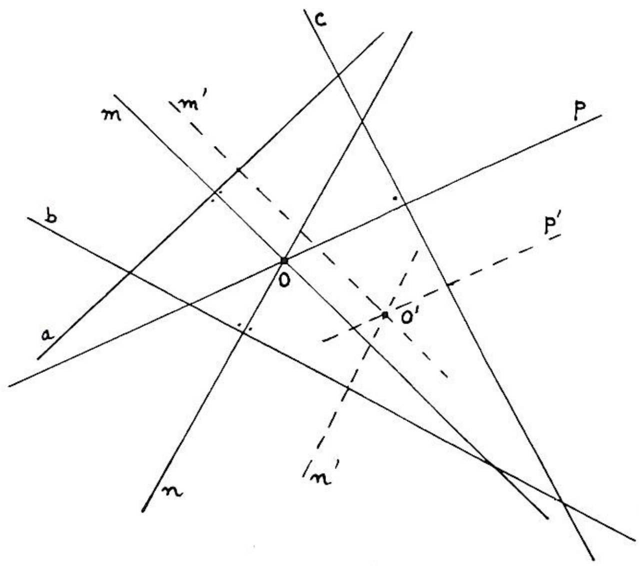
$$181 \text{ et } 181^3 = 5929741$$

$$211 \text{ et } 211^3 = 9393931$$

$$(241 > 216)$$

D'où $xyz = 211$ et $abababl = 9393931$.

**m9**




Soient $m$, $n$, $p$, trois droites concourantes et $O$ leur point d'intersection. Menons des droites $a$, $b$, $c$, respectivement perpendiculaires à $m$, $n$, $p$. Puisque $m$, $n$ et $p$ ne sont pas deux à deux parallèles, $a$, $b$, $c$ ne le sont pas non plus et donc déterminent un triangle $A'B'C'$.

Soient $m'$, $n'$, $p'$ les médiatrices de ce triangle et $O'$ leur point d'intersection. La translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{O'O}$ applique $m'$ sur $m$, $n'$ sur $n$ et $p'$ sur $p$. Donc cette translation applique le triangle $A'B'C'$ de médiatrices $m'$, $n'$, $p'$ sur un triangle $ABC$ de médiatrices $m$, $n$, $p$.

**M7** Si $n = p = 0$, alors $m = 0$.

Si un seul des entiers $n$, $p$ est nul, alors

soit $n = 0$ et $\sqrt{3} = -\dfrac{m}{p}$,

soit $p = 0$ et $\sqrt{2} = -\dfrac{m}{n}$,

ce qui est impossible (la racine carrée d'un entier non carré parfait n'est pas un rationnel). Si $n \neq 0 \neq p$, alors

$$\begin{aligned} m^2 &= (n\sqrt{2} + p\sqrt{3})^2 \\ &= 2n^2 + 3p^2 + 2np\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \sqrt{6} = m\frac{m^2 - 2n^2 - 3p^2}{2np}$$

ce qui est impossible.

Remarque : nous nous basons sur le fait que, si $a$ est un entier non carré parfait, alors il n'existe pas d'entiers $b$ et $c$ tels que $\sqrt{a} = \frac{b}{c}$ ; démontrons cette propriété.

Supposons que $\sqrt{a} = \frac{b}{c}$, avec $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ et $c \neq 1$ (si $c = 1$, alors $a$ est un carré parfait).

En outre, on peut toujours supposer que la fraction $\frac{b}{c}$ a été simplifiée et donc que $b$ et $c$ sont premiers entre eux. En élevant au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{a} = \frac{b}{c}$, on obtient $a = \frac{b^2}{c^2}$ ou encore $ac^2 = b^2$.

Soit $p$ un nombre premier qui divise $c^2$ ; $p$ est un diviseur de $c$.

$p$ divise le premier membre de l'égalité, donc divise le second membre, et si $p$ divise $b^2$, il divise $b$.

$b$ et $c$ ont ainsi un même diviseur premier $p$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que $b$ et $c$ sont premiers entre eux.

**M8** On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$
D'où $\log 2 + \log b + \log c + \log\cos A = \log(b^2 + c^2 - a^2)$.
Et dans le calcul incorrect de l'élève, on a
$\log 2 + \log b + \log c + \log\cos A = 2\log b + 2\log c - 2\log a$.
Pour que ceci conduise à un résultat correct, il faut que

$$\begin{aligned} \log(b^2 + c^2 - a^2) &= \\ 2\log b + 2\log c - 2\log a & \\ &= \log\left(\frac{bc}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

Il faut donc que le triangle satisfasse à la condition

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$$

ou encore

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 - b^2c^2 = 0$$

$$b^2(a^2 - c^2) + a^2(c^2 - a^2) = 0$$

$$(a^2 - c^2)(b^2 - a^2) = 0$$

d'où $a = c$ ou $a = b$.

Le triangle $ABC$ doit donc être isocèle, soit avec $a = c$, soit avec $a = b$, ou encore être équilatéral avec $a = b = c$.

**M9** Il suffit de compter le nombre de cercles à l'intérieur desquels une région est située. Selon que ce nombre est pair ou impair, cette région sera coloriée en rouge ou en bleu.

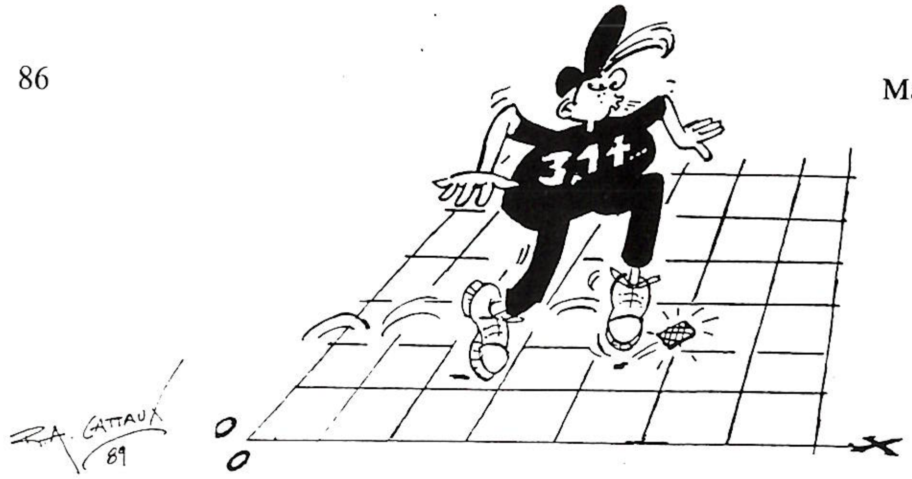
En effet, soient $A$ et $B$ deux régions adjacentes. Leurs deux frontières ont en commun un arc de cercle $C$.

Enlevons cet arc pour n'obtenir qu'une seule région que nous désignerons par $A \cup B$.

$A \cup B$ est située à l'intérieur d'un certain nombre de cercles, soit $n$ cercles. Donc les régions $A$ et $B$ prises séparément sont chacune à l'intérieur de ces $n$ cercles.

Replaçons l'arc de cercle $C$. Une seule des deux régions $A$ ou $B$ est à l'intérieur du cercle $C$, supposons que ce soit $A$. Dans ce cas, $A$ est à l'intérieur de $(n + 1)$ cercles et $B$ est à l'intérieur de $n$ cercles. $A$ et $B$ seront donc coloriées avec des couleurs différentes.

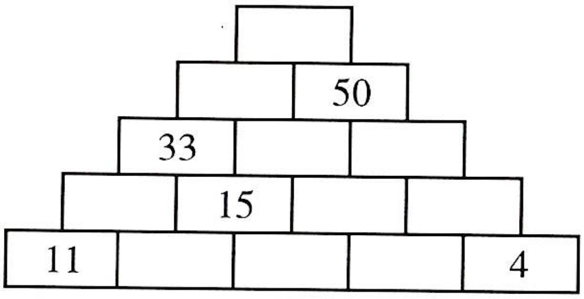
Math-Jeunes n°65, 86–88, 1994

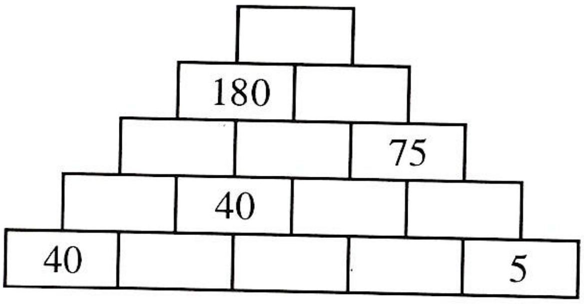


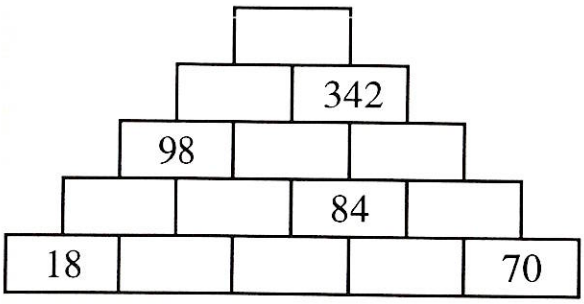
A. Parent

## Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

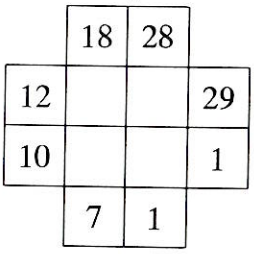


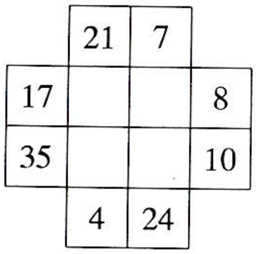




## Grilles des moyennes

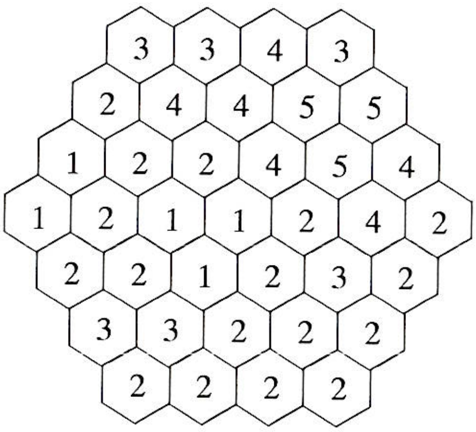
Complète les grilles ci-dessous en inscrivant dans chaque case vide la moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes.




## Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



**Solutions des jeux du n° 64**

## Le mur des nombres

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 201 | | | | |
| | | | 105 | | 96 | | | |
| | | 48 | | 57 | | 39 | | |
| | 18 | | 30 | | 27 | | 12 | |
| 7 | | 11 | | 19 | | 8 | | 4 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 197 | | | | |
| | | | 110 | | 87 | | | |
| | | 61 | | 49 | | 38 | | |
| | 32 | | 29 | | 20 | | 18 | |
| 11 | | 21 | | 8 | | 12 | | 6 |

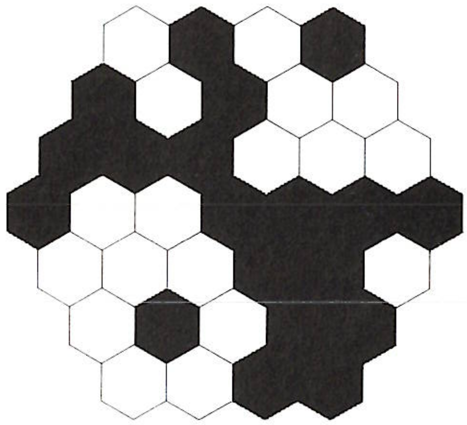
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 410 | | | | |
| | | | 222 | | 188 | | | |
| | | 114 | | 108 | | 80 | | |
| | 49 | | 65 | | 43 | | 37 | |
| 8 | | 41 | | 24 | | 19 | | 18 |

## Grilles des moyennes

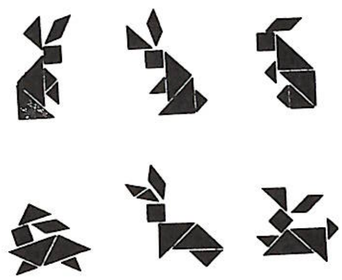
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | |
| 41 | 19 | 13 | 17 |
| 23 | 19 | 11 | 5 |
| | 23 | 7 | |

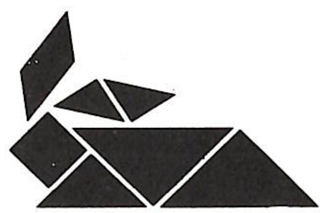
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 42 | |
| 10 | 15 | 30 | 38 |
| 3 | 12 | 25 | 34 |
| | 5 | 24 | |

## Jeu de l'hexagone et de la marguerite



**Solutions des Tangrams du n° 65**





**Solutions des jeux du n° 65**

## Le mur des nombres

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 111 | | |
| | 61 | | 50 | |
| 33 | | 28 | | 22 |
| 18 | 15 | | 13 | 9 |
| 11 | 7 | 8 | 5 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 345 | | |
| | 180 | | 165 | |
| 90 | | 90 | | 75 |
| 50 | 40 | | 50 | 25 |
| 40 | 10 | 30 | 20 | 5 |

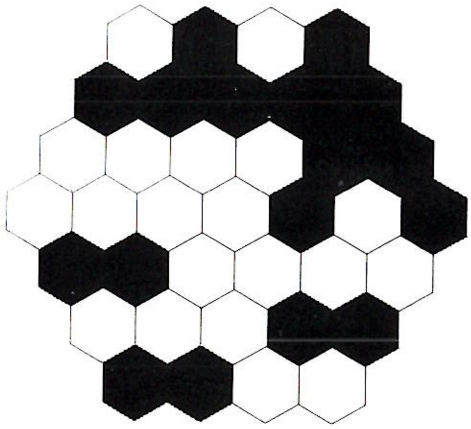
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 584 | | |
| | 242 | | 342 | |
| 98 | | 144 | | 198 |
| 38 | 60 | | 84 | 114 |
| 18 | 20 | 40 | 44 | 70 |

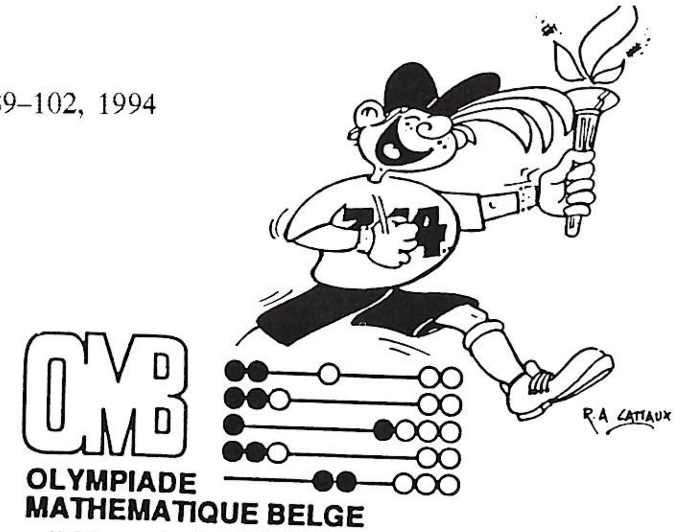
## Grilles des moyennes

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 18 | 28 | |
| 12 | 15 | 20 | 29 |
| 10 | 10 | 8 | 1 |
| | 7 | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 21 | 7 | |
| 17 | 17 | 12 | 8 |
| 35 | 18 | 16 | 10 |
| | 4 | 24 | |

## Jeu de l'hexagone et de la marguerite






C. Van Hooste

Cette année encore, l'Olympiade Mathématique Belge a recueilli un magnifique succès. En effet, à l'occasion de la dixneuvième édition de cette épreuve, vous avez été très nombreux, chers lecteurs, à montrer votre intérêt pour le « sport » mathématique. Je tiens à vous en féliciter et escompte bien que votre passion pour les problèmes, les équations, les nombres, les carrés, les cercles, ... puisse durer indéfiniment. Le mercredi 26 janvier, vous étiez 18 675 à participer aux éliminatoires ; parmi les plus tenaces d'entre vous, 2 183 ont été retenus pour les demi-finales du 2 mars.

Ci-après, ami lecteur, tu trouveras les solutions de quelques-unes des questions posées lors des éliminatoires et des demi-finales mini et Maxi. Si tu n'y trouves pas ce que tu cherches ou si tu possèdes une solution meilleure ou simplement différente, tu peux nous écrire. Nous t'enverrons des solutions commentées concernant les problèmes que tu ne parviendrais pas à résoudre malgré tous tes efforts. Nous publierons éventuellement les solutions que tu nous proposeras.

En attendant, je te souhaite une lecture enrichissante de ton dernier *Math-Jeunes* de cette année scolaire, un mois de juin fructueux et de bonnes vacances. Rendez-vous à la rentrée !

# Eliminatoires MINI

**Question 12** Une histoire de fractions

Appelons $x$ le nombre de pages du premier tome. Le nombre de pages du second tome est alors $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$.

La partie lue comprend $x + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x\right) = 2x$ pages.

De la sorte, la proportion de l'œuvre que j'ai lue est égale à

$$\frac{2x}{x + \frac{3}{2}x} = \frac{4}{5}.$$

**Réponse : D**

**Question 13** Développement d'un polyèdre

Nous supposons que $rstu$ est un carré.

Les triangles $uar$ et $ubt$ sont rectangles en $u$ (cf. fig. 1). Lorsqu'on (re)construit le solide à partir de son développement, les segments $[ua]$ et $[ub]$ coïncident et déterminent une arête perpendiculaire à la fois à $ur$ et à $ut$, donc perpendiculaire au plan $rstu$.

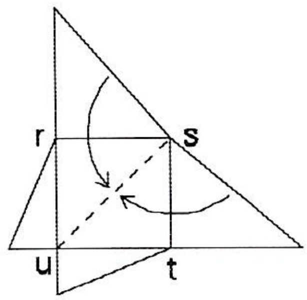



**Fig. 1 : Développement du solide**

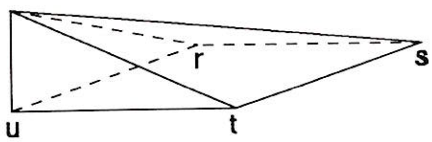



**Fig. 2**

Dès lors, la projection dans le plan $rstu$ de l'arête issue de la coïncidence des segments

$[sc]$ et $[sd]$ ne peut être que la diagonale $[us]$ du quadrilatère $rstu$.
Sur la figure 2, tu peux voir ce solide en perspective. Il s'agit d'une pyramide à base carrée.
**Réponse : B**

As-tu déjà observé des clôtures séparant des prairies ? Quel est le procédé utilisé pour obtenir et maintenir la verticalité des premier et dernier piquets ?

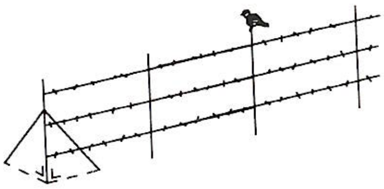


**Fig. 3**

La fig. 3 représente une clôture. Qu'a-t-on ajouté au dernier piquet pour le stabiliser ? Comment doit-on réaliser cet assemblage pour que ce piquet soit vertical ?
A présent, découvre le critère pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan :
« Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si ... »

**Question 21** Cercle inscrit et cercles exinscrits à un triangle

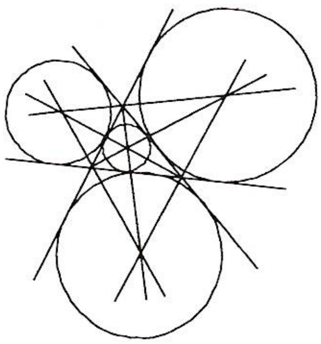


**Fig. 4**

Il y a quatre points situés à égale distance des trois droites comprenant les côtés d'un triangle : le centre du cercle inscrit et les centres des trois cercles exinscrits à ce triangle. Le cercle inscrit a pour centre le point commun aux bissectrices intérieures du triangle. Chaque cercle exinscrit a pour centre le point commun à la bissectrice intérieure issue d'un des sommets du triangle et aux bissectrices extérieures issues des deux autres sommets (cf. fig. 4).

**Réponse : C**

**Question 24** Le pendule

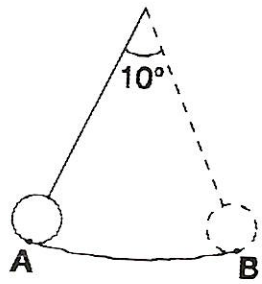



**Fig. 5**

Toutes les secondes (durée d'une demi-période), l'extrémité du pendule parcourt une fois l'arc $\overset{\frown}{AB}$, $A$ et $B$ représentant ses positions extrêmes (cf. fig. 5).

Mais, quelle est la longueur de cet arc $\overset{\frown}{AB}$ ?

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est intercepté par un angle au centre de 10°. Si l'angle au centre valait 180°, il intercepterait un arc égal à un demi-cercle ; celui-ci aurait comme longueur $\pi$ mètres (car le rayon mesure 1 mètre).
Pour un angle au centre de 10°, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté est alors 18 fois plus petit et mesure donc $\frac{\pi}{18}$ mètres.
En 24 heures, l'extrémité du pendule parcourt ainsi

$$24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{\pi}{18} = 4800 \cdot \pi \simeq 15\,000 \text{ mètres.}$$

**Réponse : C**

**Question 28** Dessine-moi la Terre
Si la Terre était un cube, la plus grande distance (que l'on pourrait parcourir tout en restant sur sa surface) entre deux de ses

points serait celle qui sépare deux sommets opposés : $A$ et $B$, par exemple (cf. fig. 6).

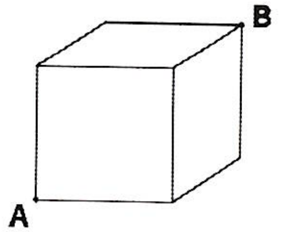



**Fig. 6 : La Terre**

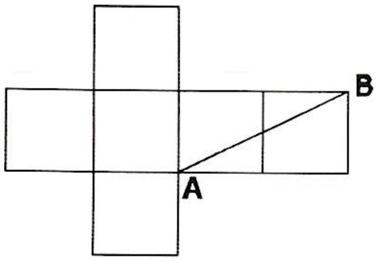



**Fig. 7 : Son développement**

Évaluons cette distance.

Sur le développement du cube (la « carte » géographique de la Terre), le trajet le plus court pour se rendre de $A$ en $B$ est le segment $[AB]$. Et celui-ci est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 10 000 km et 20 000 km. Par conséquent, la plus grande distance entre deux points de la Terre vaut

$$\sqrt{10\,000^2 + 20\,000^2} = 10\,000\sqrt{5} =$$

22 361 km

**Réponse : B**

**Question 30** Ombres d'un cube

Contentons-nous de constater que tous les polygones proposés peuvent être images d'un cube plein par une projection parallèle, excepté le parallélogramme plein non rectangle.

Mais, « c'est quoi çà, une projection parallèle ? »

En fait, la projection parallèle sur un plan $\pi$ selon la direction déterminée par une droite $d$ (non parallèle au plan $\pi$) est la transformation de l'espace pour laquelle l'image d'un point $P$ quelconque est le point $P'$ commun au plan $\pi$ et à la droite qui comprend $P$ et qui est parallèle à $d$ (cf. fig. 8).

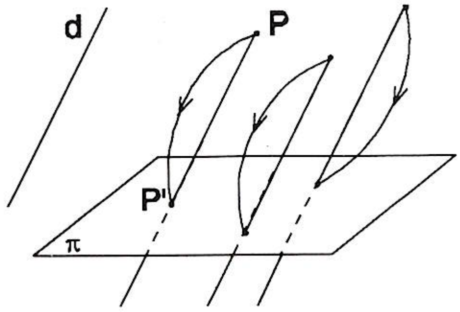



**Fig. 8**

**Projection sur le plan $\pi$ parallèlement à la droite $d$**

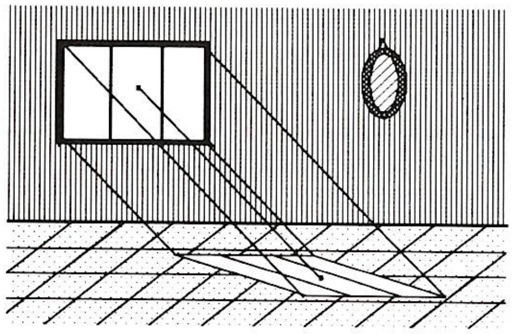


**Fig. 9**

**Projection parallèle créée par les rayons du soleil**

« Que dis-tu ? »

Évidemment, cette définition peut paraître ardue à comprendre. Considère alors le soleil. Chaque point opaque de l'espace (un tout petit objet assimilable à un point : une mouche, par exemple) a une ombre sur le sol. Cette ombre est l'image de ce point (sur le sol) par la projection dont la direction est fixée par le soleil (cf. fig. 8). Comme le soleil est très éloigné de nous (environ 150 000 000 km), nous pouvons admettre que tous les rayons qu'il nous envoie sont parallèles, donc que toutes les droites projetantes sont parallèles. Ainsi, le soleil nous fournit, non seulement lumière et chaleur, mais aussi un exemple concret de projection parallèle.

Considérons un cube posé sur le sol.

Les figures 10, 11, 12 et 13 montrent l'ombre de ce cube pour des directions différentes des rayons du soleil :

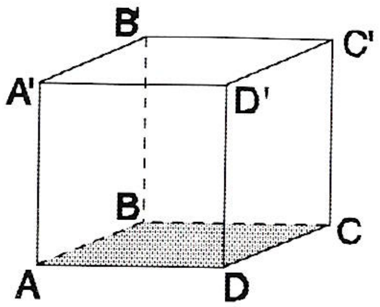



Fig. 10

**Soleil au zénith, rayons verticaux parallèles à $AA'$. Ombre : carré plein**

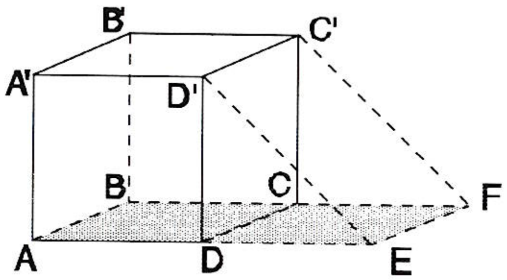



Fig. 11

**Soleil à 45° au-dessus de l'horizon. Rayons parallèles à $A'D$. Ombre :rectangle plein non carré.**

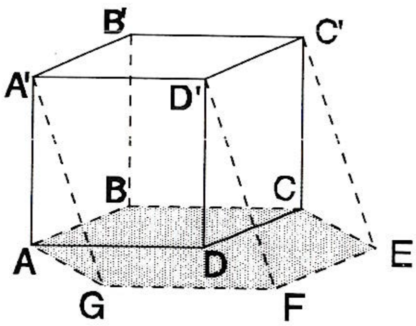



Fig. 12

**Soleil à 45° au-dessus de l'horizon. Rayons parallèles à $A'G$ (avec le triangle $AA'G$ isocèle). Ombre : hexagone régulier.**

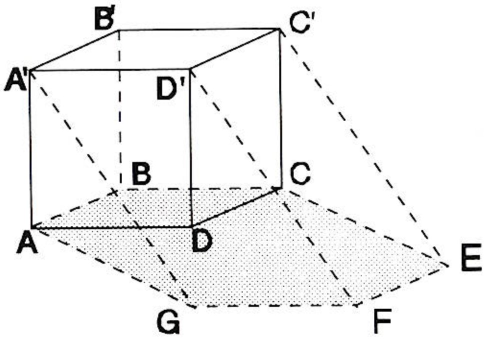



Fig. 13

**Soleil à 30° au-dessus de l'horizon. Rayons parallèles à $A'G$ (mais le triangle $AA'G$ non isocèle). Ombre : hexagone plein non régulier.**

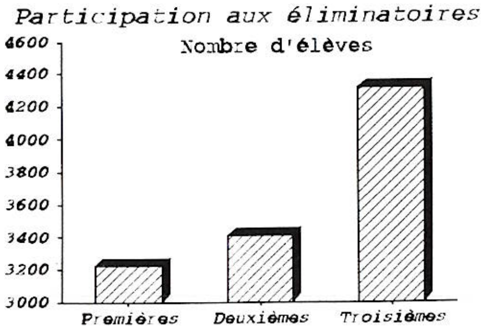
Pour que l'ombre puisse être un quadrilatère, il faut que les rayons du soleil soient parallèles à une face verticale du cube, la face $AA'D'D$ par exemple. Comme le carré sur lequel repose le cube est toujours une partie de l'ombre, il est facile de voir qu'alors l'ombre ne peut être qu'un rectangle plein.

**Réponse : C**

## Grille des réponses correctes

| Q | R | Q | R | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | 11 | 11 | 21 | C |
| 2 | A | 12 | D | 22 | D |
| 3 | A | 13 | B | 23 | A |
| 4 | B | 14 | B | 24 | C |
| 5 | D | 15 | C | 25 | A |
| 6 | 1 | 16 | B | 26 | D |
| 7 | C | 17 | E | 27 | B |
| 8 | D | 18 | D | 28 | B |
| 9 | 37 | 19 | 24 | 29 | D |
| 10 | A | 20 | E | 30 | C |

Statistiques




| Niveau | Nombre élèves | Scores min | max | moyen |
|---|---|---|---|---|
| 1ères | 3 222 | 0 | 111 | 61,7 |
| 2èmes | 3 409 | 0 | 135 | 68,8 |
| 3èmes | 4 313 | 20 | 141 | 77,0 |

## Eliminatoires MAXI

**Question 3** Développement d'un polyèdre

Voir la question 13 des MINI éliminatoires.

**Question 4** Le plus petit côté

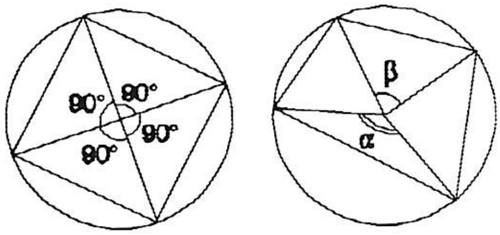



**Fig. 1**

Si un carré est inscrit dans un cercle, tous les angles au centre interceptant un côté ont la même amplitude : 90°. Alors forcément, pour tout autre quadrilatère inscrit dans un cercle (cf. fig. 1), au moins un des angles au centre interceptant un côté est plus grand que 90° ($\alpha$, par exemple) et au moins un autre est plus petit que 90° ($\beta$ par exemple).

Or, plus un angle au centre est grand, plus la corde qu'il intercepte est grande. – Il serait certainement intéressant de démontrer cette propriété. – Par conséquent, la plus grande longueur que puisse avoir le plus petit côté d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est atteinte si et seulement si ce quadrilatère est un carré. Cette longueur maximum, égale au côté du carré, vaut $\sqrt{2}$ lorsque ce carré est inscrit dans un cercle de rayon 1.

**Réponse : B**

**Question 8** Fonctions composées

En ne se servant que de la fonction $g$ par exemple, nous pouvons déjà créer une infinité de fonctions composées :

$$\begin{aligned} g \circ g &: x \to x - 2 \\ g \circ g \circ g &: x \to x - 3 \\ &\vdots \\ \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fonctions}} &: x \to x - n \end{aligned}$$

**Réponse : E**

**Question 11**

Le bon nombre de photocopies

Si nous posons

$$M = \begin{cases} 2m & \text{si } m \text{ est pair} \\ 2m+1 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$N = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n+1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

de sorte que $\lfloor \frac{M}{2} \rfloor = m$ et $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor = n$.

Calculons le nombre de photocopies $p$ nécessaires selon que les nombres $N$ et $M$ sont pairs ou impairs.

a) $M$ pair et $N$ impair.

C'est le cas idéal car il n'y a alors aucune « perte » : tout ce qui est photocopié est utile.

$$\begin{aligned} p &= \frac{N - M + 1}{2} = \frac{2n + 1 - 2m + 1}{2} \\ &= n - m + 1 \end{aligned}$$

b) $M$ et $N$ pairs.

Les photocopies vont s'étendre de la page $M$ à la page $(N+1)$, la dernière page étant photocopiée inutilement.

$$p = \frac{N+1-M+1}{2} = \frac{2n-2m+2}{2}$$
$$= n-m+1$$

c) $M$ et $N$ impairs.
Cette fois, les photocopies s'étendent de la page $(M-1)$ à la page $N$, la première page étant photocopiée inutilement.

$$p = \frac{N-(M-1)+1}{2}$$
$$= \frac{(2n+1)-(2m+1)+2}{2}$$
$$= n-m+1$$

d) $M$ impair et $N$ pair.
Dans ce cas, il est nécessaire de photocopier de la page $(M-1)$ à la page $(N+1)$, les première et dernière pages étant reproduites inutilement.

$$p = \frac{(N+1)-(M-1)+1}{2}$$
$$= \frac{2n-(2m+1)+3}{2}$$
$$= n-m+1$$

Dans tous les cas, le nombre de photocopies est

$$p = n-m+1 = \left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor + 1.$$

**Réponse : D**

**Question 16** Repères

Soient $A$ et $B$ deux points donnés.

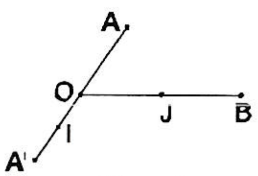



**Fig. 2**

Considérons un point $O$ n'appartenant pas à la droite $AB$ (cf. fig. 2).
Appelons respectivement $A'$, $I$, $J$, le symétrique de $A$ par rapport à $O$, le milieu de $[OA']$ et le milieu de $[OB]$.

Alors, dans le repère $(O, I, J)$, les points $A$ et $B$ ont respectivement pour coordonnée $(-2, 0)$ et $(0, 2)$.
Comme $O$ a été choisi arbitrairement, il y a un infinité de repères possibles répondant à la question.

**Réponse : D**

**Question 21** Figures semblables

Montrons que deux paraboles sont toujours semblables. Soient deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il existe toujours une isométrie $i$, par exemple une translation suivie d'une rotation, telle que l'image de $\mathcal{P}'$ soit une parabole $\mathcal{P}"$ ayant le même sommet et le même axe que $\mathcal{P}'$ (cf. fig. 3).

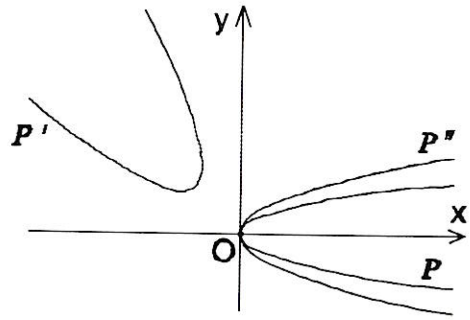



**Fig. 3**

Choisissons alors le repère du plan de telle manière que les équations de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ soient

$$\begin{cases} \mathcal{P} \equiv y^2 = ax \\ \mathcal{P}" \equiv y^2 = bx \end{cases}$$

où $a$ et $b$ sont des réels non nuls.
Cela étant, considérons l'homothétie $h$ de centre $O$ et de rapport $\frac{b}{a}$. Elle applique un point quelconque $P(x, y)$ sur un point $P"(x", y")$ tel que

$$\overrightarrow{OP"} = \frac{b}{a} \cdot \overrightarrow{OP},$$

donc tel que

$$\begin{cases} x" = \dfrac{b}{a}x \\ y" = \dfrac{b}{a}y \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} P(x,y) \in \mathcal{P} & \Leftrightarrow y^2 = ax \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}y''\right)^2 = a\left(\frac{a}{b}x''\right) \\ & \Leftrightarrow y''^2 = bx'' \\ & \Leftrightarrow P''(x'',y'') \in \mathcal{P}'' \end{cases}$$

Ceci montre que $\mathcal{P}''$ est l'image de $\mathcal{P}$ par l'homothétie $h$.
En définitive, la similitude $i^{-1} \circ h$ applique $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ :

$$\mathcal{P} \xrightarrow{h} \mathcal{P}'' \underset{i^{-1}}{\overset{i}{\leftrightarrows}} \mathcal{P}'$$

Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont donc semblables.
**Réponse : C**
**Question 23** Isométries de l'espace

Remarquons que tous les solides représentés, excepté (E), ont un plan de symétrie qui comprend les centres des petits cubes qui constituent ces solides.
Venons-en alors à des notions plus générales.
a) Considérons un solide $S$ qui admet un plan de symétrie $\alpha$ ainsi qu'un retournement $i$ (isométrie différente d'un déplacement) qui applique ce solide $S$ sur un solide $S'$.
Alors, $i \circ s_\alpha$ est la composée de deux retournements, donc un déplacement, qui applique $S$ sur $S'$ aussi :

$$S \xrightarrow{s_\alpha} S \xrightarrow{i} S'$$

Ainsi, tout solide admettant un plan de symétrie possède, pour tout retournement, une image qui est également image par un certain déplacement.
b) Considérons à présent un solide $T$ n'admettant aucun plan de symétrie. Soient un retournement $i$ et un déplacement $d$ qui appliquent le solide $T$ sur un solide $T'$. Le déplacement réciproque de $d$ applique alors $T'$ sur $T$ de sorte que nous avons

$$T \xrightarrow{i} T' \xrightarrow{d^{-1}} T$$

Comme $d^{-1} \circ i$ est la composée d'un déplacement et d'un retournement, $d^{-1} \circ i$ est un retournement. Or, un retournement qui applique un solide sur lui-même est nécessairement une symétrie par rapport à un plan. Donc, $d^{-1} \circ i$ est une symétrie par rapport à un plan. Dès lors, $T$ admet un plan de symétrie, ce qui est contraire à notre hypothèse.
En conséquence, un solide qui n'a pas de plan de symétrie ne peut avoir une même image par un déplacement et par un retournement.

Les considérations a et b ci-dessus nous amènent à affirmer que seul le solide (E) répond à la question.
**Réponse : E**
**Question 28** Un cube caché

Le triangle $bsd$ est isocèle. En effet, comme $|ab| = |ad|$, les triangles rectangles $asb$ et $asd$ sont isométriques. D'où, $|sb| = |sd|$.

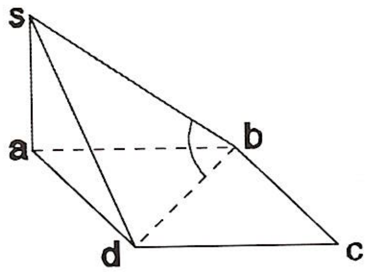



**Fig. 4**

De plus, l'angle $\widehat{bsd}$ vaut 60°, par hypothèse. Il s'ensuit que le triangle $bsd$ est équilatéral. Ainsi, $|sb| = |bd|$.
Cela étant, les triangles rectangles $abd$ et $abs$ sont à leur tour isométriques. D'où, $|as| = |ab|$.
A ce stade, remarquons que $a$, $b$, $c$, $d$ et $s$ sont cinq sommets d'un même cube dont le carré $abcd$ est une face.
Dans ce cube, $[bd]$ et $[cs]$ sont respectivement une diagonale de face et une diagonale du cube. En appliquant alors le théorème de Pythagore, il est aisé de trouver

$$\begin{aligned} |bd| &= |ab| \cdot \sqrt{2} \\ |cs| &= |ab| \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{|cs|}{|bd|} = \frac{\sqrt{3}\cdot|ab|}{\sqrt{2}\cdot|ab|} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

**Réponse : C**

**Question 29** Aire d'un polygone

Commençons par déterminer la portion du plan formée des points $P(x,y)$ tels que

$$|x| + |y| + |x+y| \leqslant 2. \qquad \text{(E)}$$

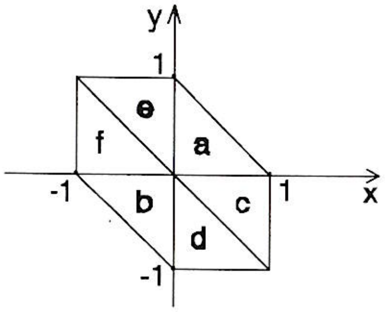



**Fig. 5**

Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff x + y \leqslant 1.$$

La portion du plan correspondante est le triangle $a$.
Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff x + y \geqslant -1.$$

La portion du plan correspondante est le triangle $b$.
Si $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ et $x+y \geqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff x \leqslant 1.$$

La portion du plan correspondante est le triangle $c$.
Si $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ et $x+y \leqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff y \geqslant -1.$$

La portion du plan correspondante est le triangle $d$.
Si $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x+y \geqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff y \leqslant 1.$$

La portion du plan correspondante est le triangle $e$.
Si $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$, alors

$$\text{(E)} \iff x \geqslant -1.$$

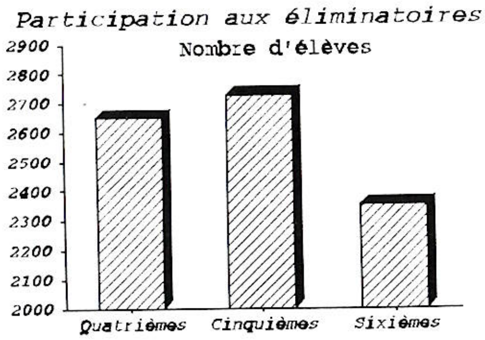
La portion du plan correspondante est le triangle $f$.
La portion du plan déterminée par les points $P(x,y)$ qui vérifient (E) est la réunion des six triangles trouvés ci-dessus. L'aire de chacun de ces triangles vaut $\frac{1}{2}$ ; l'aire totale vaut alors 3.

**Réponse : B**

## Grille des réponses correctes

| Q | R | Q | R | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | 11 | D | 21 | C |
| 2 | C | 12 | B | 22 | B |
| 3 | B | 13 | C | 23 | E |
| 4 | B | 14 | A | 24 | A |
| 5 | B | 15 | B | 25 | D |
| 6 | 514 | 16 | D | 26 | C |
| 7 | D | 17 | A | 27 | 60 |
| 8 | E | 18 | B | 28 | C |
| 9 | C | 19 | 106 | 29 | B |
| 10 | C | 20 | 496 | 30 | C |

## Statistiques




| Niveau | Nombre élèves | Scores min | Scores max | Scores moyen |
|---|---|---|---|---|
| 4èmes | 2 651 | 0 | 121 | 61,7 |
| 5èmes | 2 728 | 20 | 133 | 68,8 |
| 6èmes | 2 353 | 25 | 140 | 77,0 |

# Demi-finale MINI

**Question 13** Au bord de la piscine

Il est peut-être nécessaire de lire plusieurs fois l'énoncé pour bien comprendre la situation : les planches sont disposées verticalement ! Peu importe leur longueur ; seule leur largeur joue un rôle (cf. fig. 1).

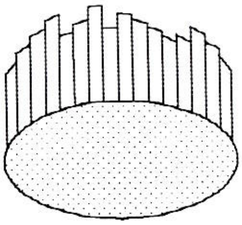


**Fig. 1 : Palissade au bord de la piscine**

Si on agrandit le rayon d'un cercle d'un mètre, celui-ci s'allonge de $2\pi$ mètres et, cela, quel que soit le rayon du cercle de départ.
Comme $\frac{2\pi}{0,2} \approx 31,4$, il faudra prévoir trente-deux planches supplémentaires.

**Réponse : E**

**Question 20** Thalès, à vos parallèles !

Pour calculer $|op'|$, utilisons le théorème de Thalès.
De

$$\frac{|op'|}{|op|} = \frac{|p'q'|}{|pq|}$$

nous tirons

$$|op'| = |op \cdot \frac{|p'q'|}{|pq|}| = 25 \cdot \frac{48}{15} = 80$$

Par ailleurs, comme les triangles $opp'$ et $oss'$ ont leurs côtés deux à deux parallèles, ils sont semblables. Par conséquent, les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles, autrement dit, dans un même rapport. Or, le périmètre d'un triangle est la somme des longueurs de ses côtés. Par suite, si deux triangles sont semblables, leurs périmètres sont dans le même rapport que leurs côtés homologues. – Il conviendrait que tu précises un peu plus la démonstration de cette propriété. – Ainsi, nous avons

$$\frac{\text{périmètre } oss'}{\text{périmètre } oqq'} = \frac{|os'|}{|oq'|}$$

d'où, nous dégageons

$$\begin{aligned}\text{périmètre } oss' &= \text{périmètre } opp' \cdot \frac{|os'|}{|oq'|} \\ &= 178 \cdot \frac{208}{128} = 321,75\end{aligned}$$

**Réponse : B**

**Question 22** Quadrilatère inscrit

Un quadrilatère inscrit dans un cercle dont les diagonales sont perpendiculaires et ont la même longueur n'est pas nécessairement un carré (cf. fig. 2).
Ainsi, les réponses (A), (B) et (E) proposées doivent être rejetées.

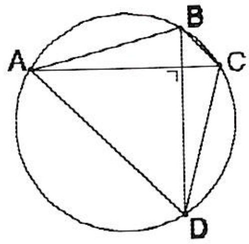



**Fig. 2**

**Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires et ont la même longueur.**

Un quadrilatère inscrit dont les diagonales se coupent en leur milieu n'est pas nécessairement un carré non plus (cf. fig. 3).

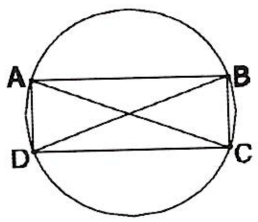



**Fig. 3**

**Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu.**

La réponse (C) proposée doit donc être éliminée aussi.
Ainsi, il ne reste plus qu'une seule réponse possible : (D).
Prouvons qu'il s'agit bien de la réponse correcte. Un quadrilatère $ABCD$ inscrit dont les diagonales sont perpendiculaires en leur milieu $M$ est un carré (cf. fig. 4).
Notons d'abord que ce quadrilatère est un parallélogramme puisqu'il possède un centre de symétrie $M$. En outre, parmi

les parallélogrammes, seuls les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires.

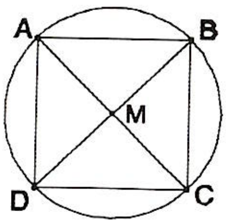



**Fig. 4**

**Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont perpendiculaires en leur milieu.**

Enfin, remarquons qu'un losange non carré ne peut être inscrit dans un cercle. Par conséquent, $ABCD$ est bien un carré.

**Réponse : D**

**Question 23**

Polygones réguliers isopérimètres

Désignons par $12p$ le périmètre du carré, du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier.

Calculons l'aire de chacun de ces polygones. La mesure du côté du carré est $3p$ et son aire

$$C = (3p)^2 = 9p^2$$

La mesure du côté du triangle équilatéral est $4p$.

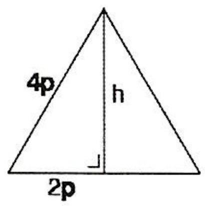



**Fig. 5**

Sa hauteur $h$ s'obtient par le théorème de Pythagore (cf. fig. 5) :

$$h^2 = (4p)^2 - (2p)^2 = 12p^2$$
$$h = 2\sqrt{3}p$$

Ainsi, son aire est

$$T = \frac{1}{2} \cdot 4p \cdot 2\sqrt{3}p = 4\sqrt{3}p^2.$$

L'hexagone régulier est constitué de six triangles équilatéraux dont les côtés ont pour mesure $2p$. Comme ces triangles ont des côtés deux fois plus petits que ceux du triangle précédent, leur aire est quatre fois plus petite que celle de ce triangle. Par conséquent, l'aire de l'hexagone est

$$H = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}p^2}{4} = 6\sqrt{3}p^2.$$

Comme $4\sqrt{3} < 9 < 6\sqrt{3}$, nous avons finalement $T < C < H$.

**Réponse : D**

**Plus loin ...**

De deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a la plus grande aire est celui qui a le plus de côtés.

Mieux, tous les polygones (réguliers ou non) isopérimètres ont une aire moindre que celle du disque isopérimètre.

## Référence

A. DALLE et C. DE WAELE, *Géométrie plane*, (ré)édité par De Boeck-Wesmael.

Le livre IV (p. 247-292) de cet ouvrage exceptionnel est entièrement consacré à l'étude des polygones réguliers et du cercle en tant que cas limite de polygones.

**Question 24**

Deux carrés qui se chevauchent

Si nous additionnons les aires des carrés $klmn$ et $pqrs$, nous obtenons l'aire du polygone $kspqlmn$ augmentée de l'aire du triangle $klr$, compté deux fois. Ainsi, nous avons

$$\text{aire } kspqlmn = \text{aire } klmn + \text{aire } rspq - \text{aire } klr$$

Comme les carrés $klmn$ et $pqrs$ sont isométriques et comme le triangle $klr$ équivaut à un quart du carré $klmn$, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} &\text{aire } kspqlmn \\ &= 2 \cdot \text{aire } klmn - \frac{1}{4} \cdot \text{aire } klmn \\ &= \frac{7}{4} \cdot \text{aire } klmn \\ &= \frac{7}{4} \cdot 100 \\ &= 175. \end{aligned}$$

**Réponse : 175**

**Question 26** 1994

Remarquons que le dernier chiffre des puissances successives de 2 se reproduit périodiquement :

| Puissances de 2 | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dernier chiffre | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | ... |

La période du cycle est 4. Autrement dit, chaque fois que l'exposant augmente de 4, le dernier chiffre reprend la même valeur. Ainsi, si nous retranchons de 1994 le plus grand multiple de 4 inférieur à ce nombre, soit 1992, nous obtenons deux puissances de 2 qui ont le même dernier chiffre : $2^{1994}$ et $2^{1994-1992} = 2^2$ ont le même dernier chiffre. Ce dernier chiffre est 4.

Comme $2^{1994}$ et 1994 se terminent tous deux par 4, le dernier chiffre de leur différence est 0.

**Réponse : A**

**Je retiens ...**

Quel que soit le naturel $a$, le dernier chiffre (ou les deux derniers chiffres ou les trois derniers chiffres ou ...) des puissances successives de $a$ se reprodui(sen)t périodiquement. Par exemple, les deux derniers chiffres des puissances successives de 4 sont 04, 16, 64, 56, 24, 96, 84, 36, 44, 76, 04, 16, ...

La période du cycle est ici égale à 8.

**Question 30** Reste-t-il quelque chose ?

Appelons $c$ le côté du cube.

Toutes les pyramides enlevées ont le même volume.

Calculons le volume $V$ de l'une d'elles, par exemple $bacf$. Nous avons

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} \cdot |ba| \cdot \text{aire } bcf \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot |ba| \cdot \tfrac{1}{2} \cdot |bc| \cdot |bf| \end{aligned}$$

Le volume total enlevé vaut donc

$$4V = 4 \cdot \frac{1}{6}c^3 = \frac{2}{3}c^3$$

ce qui équivaut aux deux tiers du volume du cube. Il reste donc le tiers du volume du cube après avoir ôté les quatre pyramides.

Mais, au fond, quelle est la forme de la partie restante ?

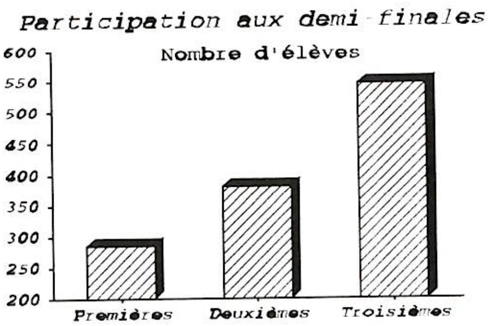
C'est tout simple : il s'agit du tétraèdre $acfh$, tétraèdre régulier car, toutes ses arêtes étant des diagonales du cube, ont la même longueur.

**Réponse : D**

## Grille des réponses correctes

| Q | R | Q | R | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B | 11 | D | 21 | D |
| 2 | C | 12 | D | 22 | D |
| 3 | A | 13 | E | 23 | D |
| 4 | B | 14 | C | 24 | 175 |
| 5 | E | 15 | B | 25 | D |
| 6 | 300 | 16 | B | 26 | A |
| 7 | 107 | 17 | C | 27 | D |
| 8 | E | 18 | D | 28 | B |
| 9 | D | 19 | B | 29 | 88 |
| 10 | A | 20 | B | 30 | D |

## Statistiques




| Niveau | Nombre élèves | Scores | | |
|---|---|---|---|---|
| | | min | max | moyen |
| 1ères | 285 | 40 | 98 | 74,9 |
| 2èmes | 381 | 45 | 108 | 80,0 |
| 3èmes | 546 | 41 | 136 | 87,4 |

## Demi-finale MAXI

**Question 2** Aire inconnue

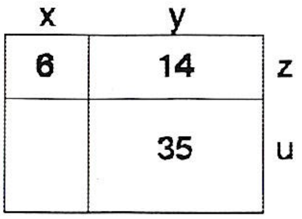



**Fig. 1**

En utilisant les notations de la figure 1, nous avons

$$\begin{cases} xz &= 6 \\ yz &= 14 \\ yu &= 35 \end{cases}$$

Nous en tirons

$$xu = \frac{xz \cdot yu}{yz} = \frac{6 \cdot 35}{14} = 15$$

**Réponse : B**

**Question 7**

Deux carrés qui se chevauchent

Voir la question 24 de la mini demi-finale.

**Réponse : E**

**Question 21** Contre-exemples

Un énoncé étant proposé, un *contre-exemple* est un exemple qui montre que cet énoncé est faux. Ainsi, l'énoncé « Tous les entiers positifs impairs sont des nombres premiers » est faux car 9 est bien un nombre entier positif, mais il n'est pas premier. Le nombre 9 est un contre-exemple pour cet énoncé.
Ici, nous devons déterminer le nombre d'entiers $n$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé mais n'en respectant pas la thèse ; donc le nombre d'entiers $n$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. $n$ est un entier positif impair
2. la somme des chiffres de $n$ vaut 4
3. aucun des chiffres de $n$ n'est 0
4. $n$ n'est pas un nombre premier

Dressons d'abord la liste des entiers positifs qui vérifient les propriétés (2) et (3) :
1111, 112, 121, 211, 13, 31, 22, 4.
Eliminant ceux qui ne vérifient pas la propriété (1), il reste :
1111, 121, 211, 13, 31.
Parmi ces nombres, seuls 1111 et 121, divisibles par 11, satisfont à la propriété (4). Ce sont les contre-exemples pour l'énoncé proposé.

**Réponse : C**

**Question 25** Valeur absolue

Du fait de la présence de $|x|$, nous allons envisager deux cas selon que $x$ est strictement positif ou strictement négatif.
Si $x > 0$, alors le système donné s'écrit

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ xy + x^3 &= 0 \end{cases}$$

Comme $x$ n'est pas nul, la seconde équation est équivalente à $y = -x^2$.
En substituant dans la première, nous obtenons $x^2 - x + 3 = 0$.
Cette équation n'a pas de solution réelle car son discriminant $\Delta$ (ou son réalisant $\rho$) est strictement négatif.
Par conséquent, le système proposé n'a pas de solution dans laquelle $x$ est strictement positif.
Si $x < 0$, alors le système donné s'écrit

$$\begin{cases} -x + y &= 3 \\ -xy + x^3 &= 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, la première équation livre directement la réponse à la question posée : $x - y = -3$.
Mais, pour accepter cette réponse, il faut encore montrer que le système admet au moins une solution pour laquelle $x$ est strictement positif.

$$\begin{cases} -x + y &= 3 \\ -y + x^2 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= x^2 \\ x^2 - x + 3 &= 0 \end{cases}$$

Ce système possède manifestement deux solutions car le discriminant $\Delta$ (ou réalisant $\rho$) de la seconde équation est strictement positif. L'une de ces solutions est strictement positive puisque leur produit $\left(\frac{c}{a}\right)$ vaut

-3. En conséquence, le résultat trouvé plus haut est définitivement acquis.

**Réponse : A**

**Question 26** Pavage

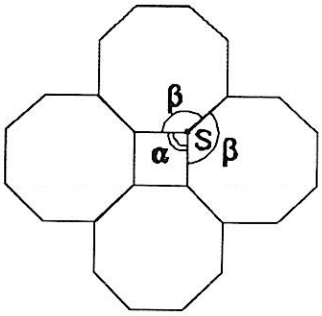



**Fig. 2**

En un point tel que $S$, l'angle complet (360°) est la somme d'un angle intérieur $\alpha$ du polygone central et de deux angles intérieurs $\beta$ des polygones périphériques (cf. fig. 2).

$$\alpha + 2\beta = 360°$$

Comme chaque angle intérieur d'un polygone régulier à $k$ côtés mesure $\frac{(k-2)\cdot 180°}{k}$, l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{(m-2)\cdot 180°}{m} + \frac{2(n-2)\cdot 180°}{n} = 360°$$

ou, après simplification par 180°,

$$\frac{m-2}{m} + \frac{2(n-2)}{n} = 2$$

De là, on tire successivement

$$1 - \frac{2}{m} + 2 - \frac{4}{n} = 2$$
$$\frac{4}{n} = 1 - \frac{2}{m}$$
$$n = \frac{4m}{m-2}$$

Pour $m = 10$, nous obtenons $n = 5$.

**Réponse : A**

**Question 29** Angle d'un radian

Soit $o$ le centre du cercle (cf. fig. 3 ).

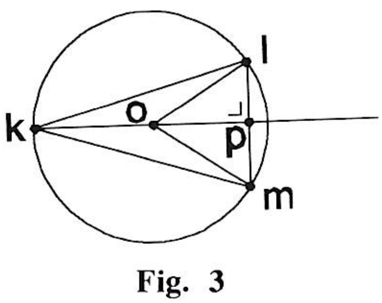



**Fig. 3**

Le diamètre perpendiculaire à la corde $[m\ell]$ coupe celle-ci en son milieu $p$. Ce diamètre est donc une médiatrice du triangle $k\ell m$. Mais, $k\ell m$ est un triangle isocèle de base $[\ell m]$. Par conséquent, la médiatrice $po$ est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{\ell km}$.
Comme l'angle au centre $\widehat{\ell om}$ intercepte un arc de même longueur que le rayon du cercle, cet angle mesure un radian. Il s'ensuit que l'angle inscrit $\widehat{\ell km}$ qui intercepte le même arc que $\widehat{\ell om}$ mesure $\frac{1}{2}$ radian. Alors, $\widehat{pk\ell}$, moitié de $\widehat{\ell km}$, vaut $\frac{1}{4}$ radian.
Dans le triangle $pk\ell$, rectangle en $p$, nous avons

$$\begin{aligned} |p\ell| &= |k\ell|\cdot \sin \widehat{pk\ell} \\ &= |k\ell|\cdot \sin \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où

$$|m\ell| = 2|p\ell| = 2|k\ell|\cdot \sin \tfrac{1}{4}$$

et, finalement,

$$\frac{|k\ell|}{|\ell m|} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{cosec}\tfrac{1}{4}$$

**Réponse : A**

**Question 30** 1994

Si nous observons attentivement un dé à six faces, nous constatons que la somme des points de deux faces opposées vaut toujours 7. Autrement dit, si un dé marque $k$ ($1 \leqslant k \leqslant 6$), alors la face cachée indique $7 - k$.
Cela étant, si la somme des points marqués par $n$ dés vaut $S$, la somme des points des faces cachées vaut $7n - S$. En effet, si les $n$ dés marquent respectivement $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ($1 \leqslant k_i \leqslant 6$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$), alors $S = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ et la somme des points des faces cachées vaut

$$\begin{aligned} &(7-k_1) + (7-k_2) + \cdots + (7-k_n) \\ &= 7n - (k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \\ &= 7n - S \end{aligned}$$

Considérons à présent le phénomène aléatoire qui consiste à jeter $n$ dés.
D'après ce qui précède, la probabilité d'obtenir une somme des points égale à $S$ vaut la

probabilité d'obtenir une somme des points égale à $7n - S$.
Mais, la plus grande valeur possible de la somme des points est $6n$. Par suite, pour que la somme des points puisse être égale à 1994, il faut que $1994 < 6n$ donc que $n \leqslant \frac{1994}{6} \approx 332,3$.
Par conséquent, le nombre $n$ de dés est au minimum égal à 333.
Lorsqu'il y a 333 dés, nous avons

$$\begin{aligned} &p(\text{somme} = 1994) \\ &\quad = p(\text{somme} = 7 \cdot 333 - 1\,994) \\ &\quad = p(\text{somme} = 337) \end{aligned}$$

Pour conclure que 337 est la plus petite valeur de $S$ telle que $p(\text{somme} = 1994) = p(\text{somme} = S)$, il faut encore prouver que $S$ ne peut être égal à 333, 334, 335 ou 336. Plus précisément, il faut montrer que $S$ ne peut valoir

- 333, 334, 335 ou 336 pour 333 dés ;
- 334, 335 ou 336 pour 334 dés ;
- 335 ou 336 pour 335 dés ;
- 336 pour 336 dés.

Notant $p(k, n)$, la probabilité d'obtenir une somme égale à $k$ pour $n$ dés, nous avons

$$\begin{aligned} p(1994, 333) &= p(337, 333) \\ p(1994, 334) &= p(344, 334) \\ p(1994, 335) &= p(351, 335) \\ p(1994, 336) &= p(358, 336) \end{aligned}$$

Je te laisse alors, ami lecteur, le soin de vérifier que

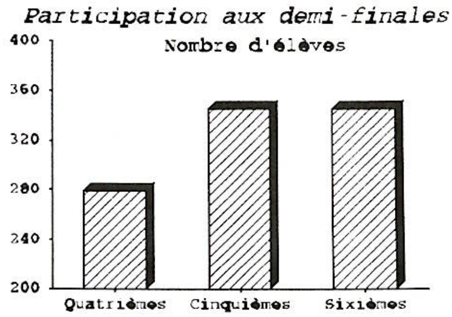
- $p(333, 333) < p(334, 333) < p(335, 333) < p(336, 333) < p(337, 333)$
- $p(334, 334) < p(335, 334) < p(336, 334) < p(344, 334)$
- $p(335, 335) < p(336, 335) < p(351, 335)$
- $p(336, 336) < p(358, 336)$

**Réponse : C**

## Grille des réponses correctes

| Q | R | Q | R | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C | 11 | D | 21 | C |
| 2 | B | 12 | D | 22 | C |
| 3 | B | 13 | B | 23 | E |
| 4 | A | 14 | B | 24 | C |
| 5 | E | 15 | B | 25 | A |
| 6 | A | 16 | B | 26 | A |
| 7 | E | 17 | D | 27 | D |
| 8 | C | 18 | C | 28 | C |
| 9 | D | 19 | C | 29 | A |
| 10 | B | 20 | B | 30 | C |

## Statistiques

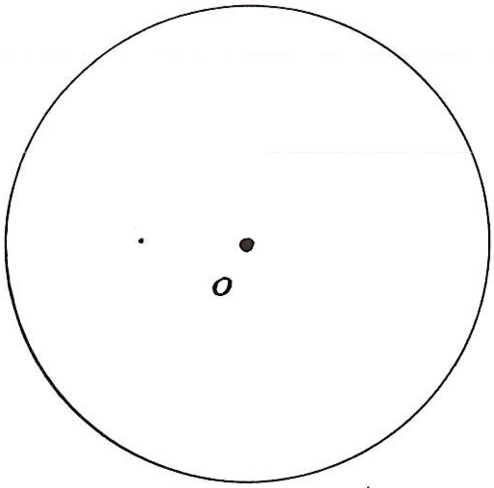


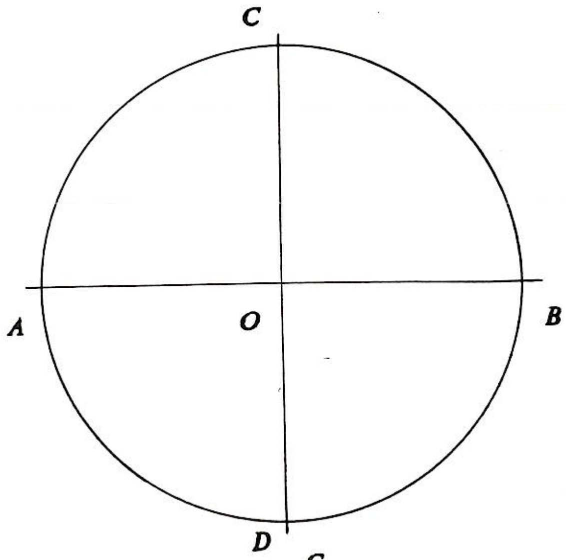

| Niveau | Nombre élèves | Scores min | Scores max | Scores moyen |
|---|---|---|---|---|
| 4èmes | 279 | 61 | 135 | 88,4 |
| 5èmes | 346 | 53 | 139 | 92,1 |
| 6èmes | 346 | 65 | 145 | 99,1 |

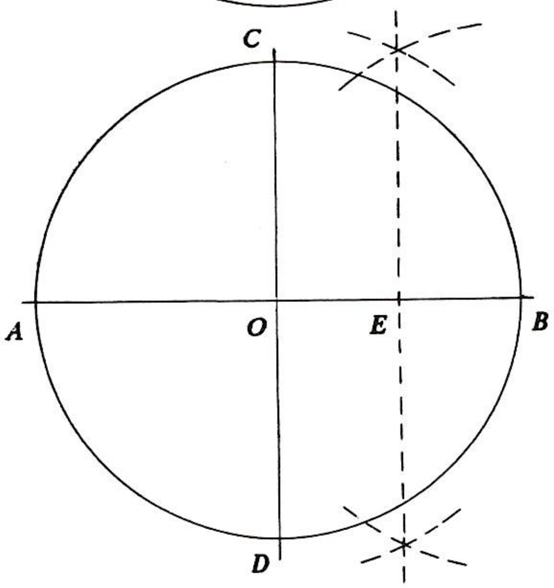
Math-Jeunes n°65, 103–103, 1994 

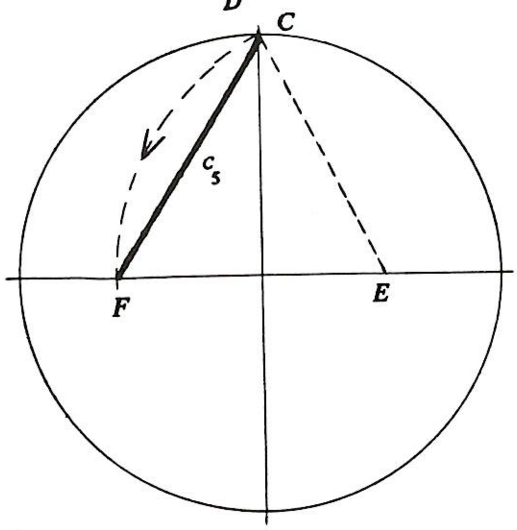
# Construction du pentagone

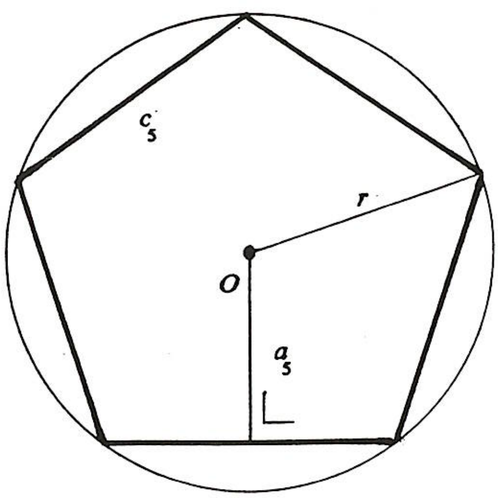
Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*




$c_5$ est le côté du pentagone régulier

$a_5$ s'appelle apothème

Vérifie que $\dfrac{2a_5}{r} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ce rapport s'appelle nombre d'or et est désigné par $\phi$ ou $\tau$.


Ces bulles nous sont envoyées par : Patrick HOEBEKE de l'Athénée Royal de Rösrath

## Publications de la SBPMef

La SBPMef est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, elle édite notamment ta revue *Math-Jeunes* et organise l'*Olympiade Mathématique Belge*. Elle publie également des brochures que tu peux facilement te procurer en versant la somme indiquée au compte :

**000-0728014-29**
SBPMef
rue de Trazegnies, 87 – 6230 Pont-à-Celles

Tu seras peut-être intéressé par :

- le « troisième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges », il comprend l'ensemble des questions posées entre 1988-1993, il coûte 235 FB (245 FB pour l'étranger).
  Le tome 1 est épuisé mais il t'est loisible de commander les tomes 2 (1982-1987) et 3 ensemble pour le prix de 360 FB (370 FB pour l'étranger)

- « Mathématiques et sports », dans cet ouvrage, J. BAIR montre les nombreuses applications des mathématiques dans le monde des sports, les étudiants et les membres de la SBPMef peuvent l'acquérir au prix de 200 FB (230 FB pour l'étranger)


LES PROF. DE MATH. ONT DÉCIDÉ DE LUTTER CONTRE L'ÉCHEC SCOLAIRE — !
À L'AVENIR, ... ILS CORRIGERONT LES COPIES AVANT DE POSER LES QUESTIONS !
3.14...
R.-A. CATTAUX
CL. VILLERS


3.14...
R.-A. CATTAUX