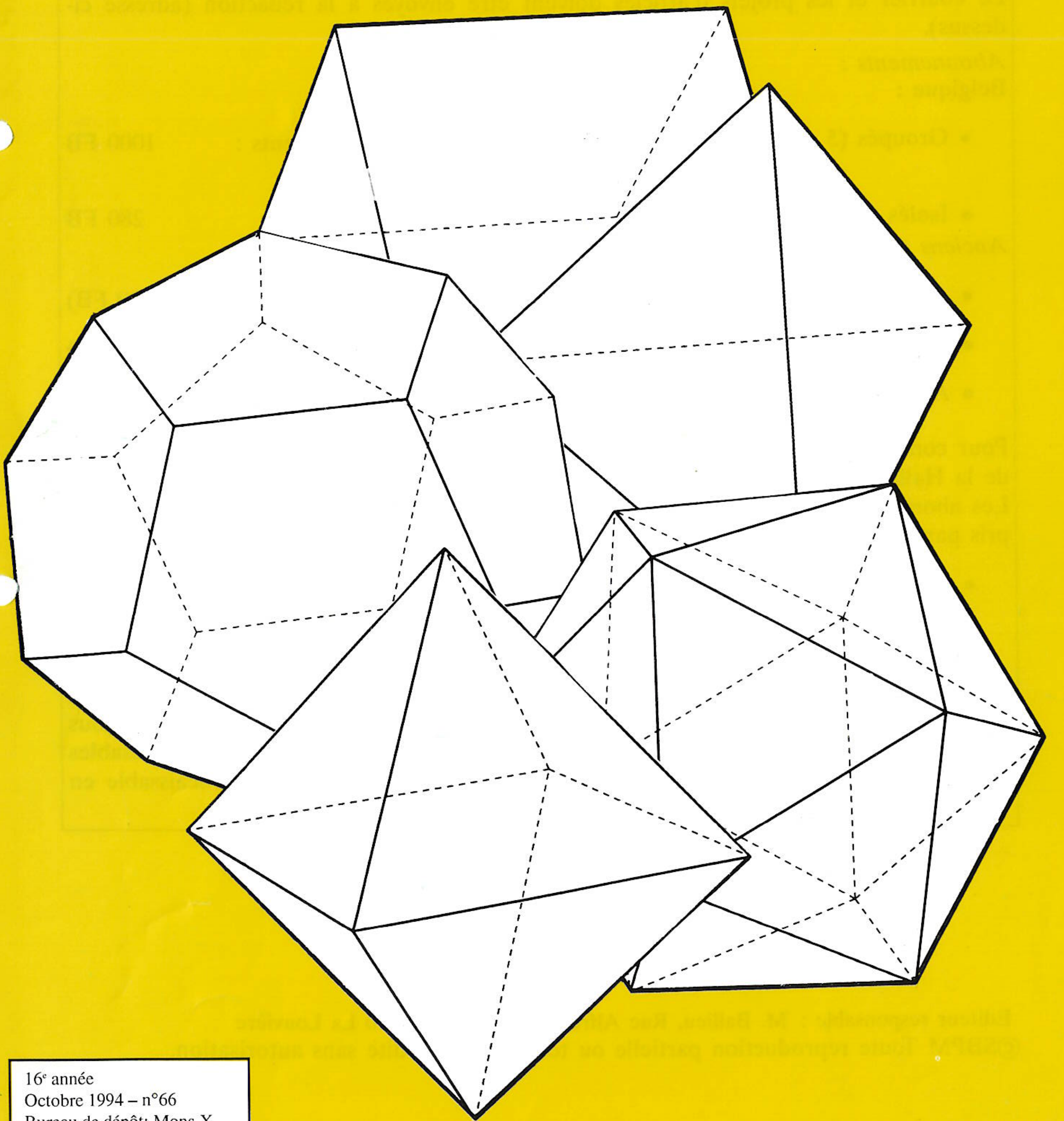
MATH-JEUNES



16e année
Octobre 1994 – n°66
Bureau de dépôt: Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, G.NOËL, A.PARENT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX
Conception de la couverture : K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse cidessus).

Abonnements :

Belgique :		Etranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1990	Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
• Années 90/91, 91/92	Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
• Années 92/93, 93/94	80 FB (Etranger : 160 FB)

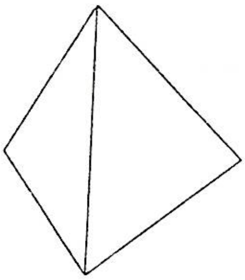
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

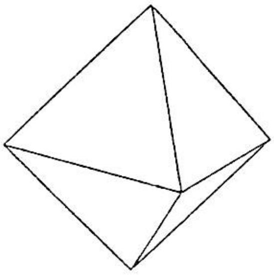
- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

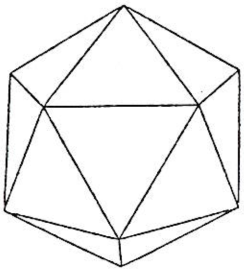
Editeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

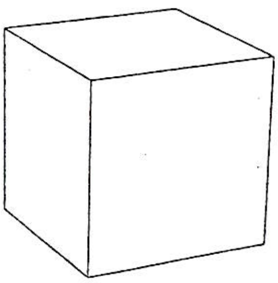
N°66 Seizième année 1994

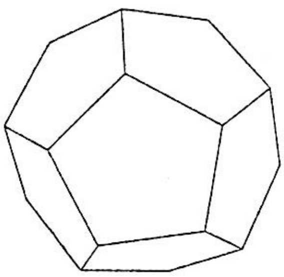
Math-Jeunes











Math-Jeunes n°66, 2–4, 1994

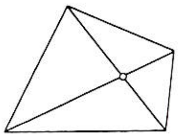
Compter dans un polygone convexe

Jean Michel Slowik, *Lycée Robespierre d'Arras*

Premier problème : Dans un polygone convexe à n côtés, quel est le nombre *maximum* de points déterminés par toutes les diagonales à *l'intérieur* du polygone ?

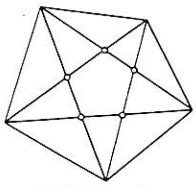
Soit $P(n)$ ce nombre

- $n = 4$



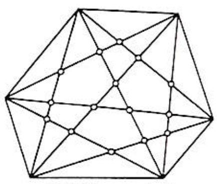
on compte $P(4) = 1$

- $n = 5$



on compte $P(5) = 5$

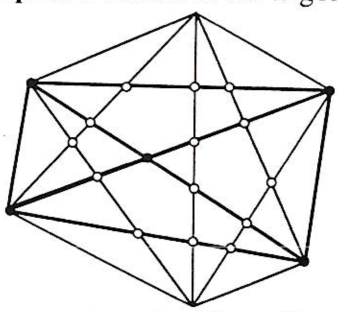
- $n = 6$



on compte $P(6) = 15$

Comment compter les points ?

Chaque point est le point de concours de deux diagonales. Ce point est donc déterminé par le choix de **quatre** sommets du n-gone convexe.



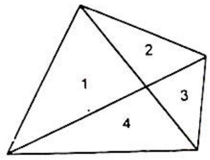
Ils sont au nombre de $C_n^4 = \binom{n}{4}$, soit

$$P(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Second problème : Dans un polygone convexe à n côtés, quel est le nombre *maximum* de régions déterminées par toutes les diagonales à *l'intérieur* du polygone ?

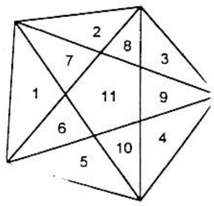
On notera $R(n)$ ce nombre

- $n = 4$



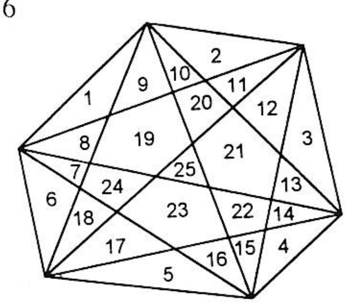
on compte $R(4) = 4$

- $n = 5$



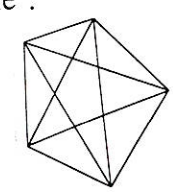
on compte $R(5) = 11$

- $n = 6$

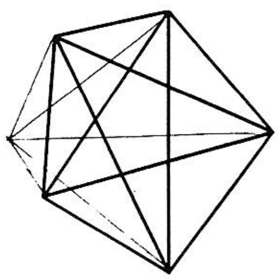


on compte $R(6) = 25$

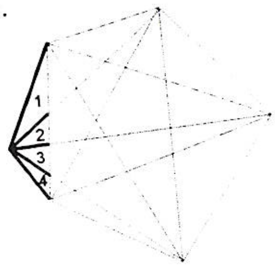
Attaquons-nous au problème et racontons un peu la construction de $n = 6$ à partir de $n = 5$. Soit la figure du 5-gone :



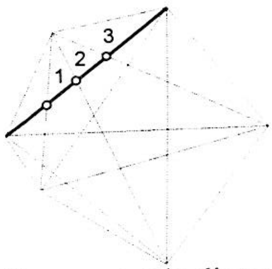
Il existe $R(5)$ régions intérieures et $P(5)$ points. Ajoutons un nouveau point ; $n = 6$:



Il apparaît trois nouvelles diagonales et un côté ; celui joignant les deux côtés adjacents devient une diagonale.



À l'extérieur du 5-gone apparaissent **4** nouvelles régions. Et à l'intérieur ? En comptant les points nouveaux, on trouve $P(6)-P(5)$. Chacun de ces points se situe nécessairement sur une des trois nouvelles diagonales.



Examinons la figure : sur la diagonale, les trois nouveaux points définissent trois segments, à l'intérieur du 5-gone. Chaque segment est une nouvelle *séparation* pour une ancienne région.

Moralité : chaque nouveau point amène une nouvelle région.

Les nouvelles régions sont au nombre de $P(6)-P(5)$ et leur nombre total vaut donc

$R(5) + P(6) - P(5) + 4 = 11 + 15 - 5 + 4 = 25$

Tout va bien ! Le compte est bon !

Maintenant, si vous avez compris la technique, c'est une « rigolade » de la reproduire à l'ordre $n-1$ pour l'ordre n.

Le cas n

On part d'un $(n-1)$-gone convexe auquel on ajoute un n^e point, pour former un n-gone convexe.

Ce n^e sommet détermine $(n-3)$ diagonales (car on a retiré les deux côtés du n-gone). Ces $(n-3)$ diagonales déterminent $(n-2)$ régions nouvelles extérieures au $(n-1)$-gone initial comme pour $n = 6$. Et à l'intérieur ? Il apparaît $P(n) - P(n-1)$ points nouveaux qui sont autant de régions nouvelles comme pour $n = 6$. Cela fait $P(n) - P(n-1)$ régions intérieures nouvelles. On a en tout :

$$R(n) = R(n-1) + P(n) - P(n-1) + n - 2$$

On peut écrire :

$$\begin{array}{lclclcl}
\mathrm{R(n)} & = & \mathrm{R(n-1)} & + & \mathrm{P(n)} & - & \mathrm{P(n-1)} \\
 & & & & & + & \mathrm{n-2} \\
\mathrm{R(n-1)} & = & \mathrm{R(n-2)} & + & \mathrm{P(n-1)} & - & \mathrm{P(n-2)} \\
 & & & & & + & \mathrm{n-3} \\
\vdots & = & \vdots & & & & \\
\mathrm{R(6)} & = & \mathrm{R(5)} & + & \mathrm{P(6)} & - & \mathrm{P(5)} \\
 & & & & & + & 4 \\
\mathrm{R(5)} & = & \mathrm{R(4)} & + & \mathrm{P(5)} & - & \mathrm{P(4)} \\
 & & & & & + & 3
\end{array}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, il vient :

$$\mathrm{R(n) = R(4) + P(n) - P(4) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3}$$

ou, en remarquant que

$$\mathrm{(n-2) + (n-3) + \cdots + 3 = [(n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1] - 3}$$

est la somme des $(n-2)$ premiers entiers diminuée de 3, on a :

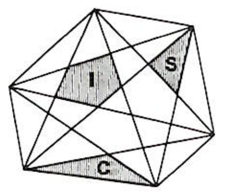
$$\mathrm{R(n) = 4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 3}$$

ce qui donne, en simplifiant :

$$R(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

On vérifie que $R(4) = 4$, $R(5) = 11$, $R(6) = 25$ ... Tout va bien !

Observons de plus près le cas où n vaut 6 :



Il existe trois sortes de régions :

- les régions de type « **C** » qui ont un côté commun avec le n-gone ;
- les régions de type « **S** » qui ont un sommet commun avec le n-gone, sans avoir de côté commun ;
- les régions de type « **I** » qui sont à l'intérieur du n-gone, ou mieux, qui n'ont aucun sommet commun avec le n-gone.

Vous vous attendez évidemment à la question :

Combien sont-elles ?

Troisième problème : Dans un polygone convexe à n côtés, parmi les régions déterminées par toutes les diagonales à l'intérieur du polygone, quel est le nombre de régions ayant un côté commun avec le polygone ?

On notera $C(n)$ ce nombre.

Quatrième problème : Dans un polygone convexe à n côtés, parmi les régions déterminées par toutes les diagonales à l'intérieur du polygone, quel est le nombre de régions ayant un sommet commun avec le polygone sans côté commun avec ce polygone ?

On notera $S(n)$ ce nombre.

Et surtout

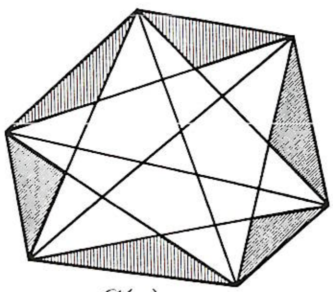
Cinquième problème : Dans un polygone convexe à n côtés, parmi les régions déterminées par toutes les diagonales à l'intérieur du polygone, quel est le nombre *maximum* de régions n'ayant aucun point commun avec ce polygone ?

On notera $I(n)$ ce nombre.

La lecture des trois cas étudiés donne :

n	4	5	6
$R(n)$	4	11	25
$C(n)$	4	5	6
$S(n)$	0	5	12
$I(n)$	0	1	7

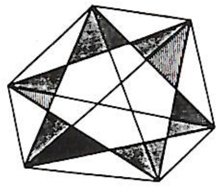
Une des réponses est évidente !



$C(n) = n$

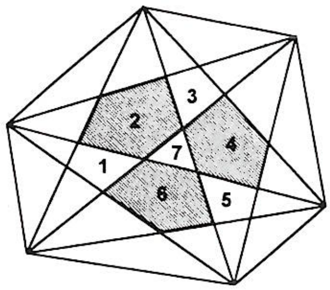
puisqu'un n-gone possède n côtés !

La seconde l'est presque !



De chaque sommet partent $(n-3)$ diagonales qui déterminent $(n-4)$ régions de type « **S** ». Aucune de ces régions n'est comptée plusieurs fois ; comme il existe n sommets,

$$S(n) = n(n-4)$$



Pour le dernier problème, … Ben, y en a plus, puisque

$$R(n) = C(n) + T(n) + I(n)$$

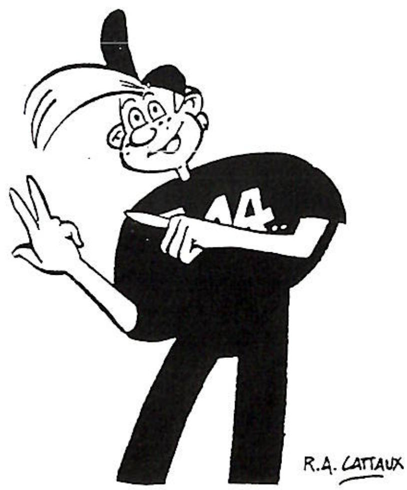
Un calcul **monstrueux** (faites-le) donne :

$$I(n) = \frac{n^4 - 6n^3 - n^2 + 30n + 24}{24}$$

Vérifie quand même $I(6)$ …

Référence :

Problème de l'E.N.S.A.E., 1976



Les Médailles FIELDS

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Tu as déjà entendu parler de *Prix Nobel.* Tu sais sans doute que ce prix est décerné à des personnes qui se sont distinguées dans les domaines de la physique, de la chimie, de la physiologie et/ou de la médecine, mais aussi en littérature et plus récemment (depuis 1968-69) en sciences économiques. Il existe aussi, depuis l'origine, un Prix Nobel de la paix décerné à celui ou celle qui a tenté d'agir le plus ou le mieux pour établir la paix universelle.

Alfred NOBEL était un industriel chimiste suédois qui naquit à Stockholm en 1833 et mourut à San Remo en 1896. Après avoir découvert [1] son laboratoire en 1864, grâce à la nitroglycérine [2], il rendit courant l'usage de cette substance en tant qu'explosif en la mélangeant à de la silice amorphe (1867).

Par testament, NOBEL disposa d'une partie de sa fortune colossale pour créer les prix qui portent son nom. Pour la petite histoire, il faut signaler qu'Alfred NOBEL n'aimait pas beaucoup le grand mathématicien suédois MITTAG-LEFFLER. Lors de la création de « ses » prix, il demanda à ses conseillers si MITTAG-LEFFLER était susceptible d'avoir un Prix Nobel de Maths au cas où il y en aurait un. Comme on lui répondit que cela était fort probable, il décida de ne pas créer de Prix Nobel en mathématiques.

Cette carence fut compensée en 1932 lors du Congrès International de Zürich par la création du prix appelé « Médaille Fields », en hommage au mathématicien canadien John Charles FIELDS (1863-1932) qui en avait eu l'idée. Les deux premières médailles furent décernées à deux américains lors du Congrès d'Oslo en 1936. Après une période trouble (deuxième guerre mondiale), le prix est réattribué en 1950. Depuis 1966, quatre médailles sont décernées tous les quatre ans. Au total, depuis la création, 38 mathématiciens ont été récompensés. Signalons que, pour l'être, il faut avoir moins de quarante ans.

En 1978, au Congrès d'Helsinki, un premier mathématicien belge obtint la Médaille Fields : Pierre DELIGNE qui avait fait ses études à l'Université Libre de Bruxelles (ULB) et qui travaille actuellement au prestigieux Institute for Advanced Study à Princeton.

Cette année, le Congrès de Zürich rassemblait environ 3 000 mathématiciens professionnels venant d'une centaine de pays différents. Le mercredi 3 août (1994), 4 médailles Fields furent attribuées à deux français, Pierre-Louis LIONS, 38 ans (pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles non linéaires) et Jean-Christophe YOCCOZ, 37 ans (pour ses travaux sur les systèmes dynamiques), à un russe, Efim ZELMANOV, 39 ans (pour ses travaux sur la théorie des groupes) et à un **belge**, Jean BOURGAIN, un peu moins de 40 ans (pour ses travaux sur l'analyse harmonique et sur la géométrie des espaces de Banach).

Jean BOURGAIN est né en 1954 (c'est tout juste !) et a fait ses études (licence et doctorat) à la Vrije Universiteit Brussel (VUB). Il a ensuite travaillé à l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette (près de Paris) et vient d'être nommé professeur dans le même institut que Pierre DELIGNE. Bravo Monsieur BOURGAIN !

Je tiens à remercier Jean DOYEN, professeur à l'ULB, qui, avec sa gentillesse coutumière, m'a communiqué une grande partie de la documentation nécessaire à la rédaction de cet article.

---

[1] découvrir signifie, au sens premier, ôter ce qui couvrait, protégeait

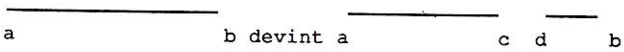
[2] Larousse du XX^{e} en six volumes publié sous la direction de Paul Augé (1932)

Et ainsi de suite ... (1)

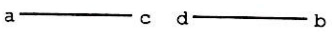
C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

1ère partie : FIBONACCI

L'autre jour, je manipulais distraitement une allumette brûlée. Et ce qui devait fatalement arriver s'est produit. J'ai réussi à casser en deux ce malheureux bout de bois qui ne m'avait rien fait.

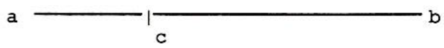


Mais il me semblait que les deux morceaux n'étaient pas bien « équilibrés ». Ils n'avaient pas la même longueur !
J'aurais certainement éprouvé une impression plus harmonieuse si j'avais obtenu deux morceaux de même longueur soit



$$|ac| = |db|$$

ou encore $\dfrac{|ac|}{|db|} = 1$.
La situation n'est plus tout à fait la même si l'on veut mathématiser cette petite aventure en la schématisant à l'aide de segments de droite.
En effet, si vous placez un point c sur un segment $[ab]$



alors vous pouvez distinguer trois segments et plus seulement deux, $[ac]$, $[cb]$ et $[ab]$.
Comment alors exprimer l'idée d'équilibre entre plus de deux segments ?
De longue date, il a été proposé d'utiliser la notion de « proportionnalité » entre des longueurs.
Rappelons tout de suite qu'une proportion est l'égalité de deux fractions (ou rapports).
Une proportion nécessite donc l'écriture de quatre nombres : deux numérateurs et deux dénominateurs (certains disent aussi deux antécédents et deux conséquents).
Pour appliquer cela aux longueurs de nos trois segments $[ac]$, $[cb]$ et $[ab]$, nous pouvons décider d'observer ce qui se passe si nous imposons $\dfrac{|ac|}{|cb|} = \dfrac{|cb|}{|ab|}$.

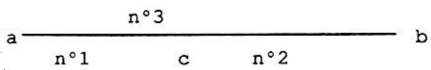
Essayons d'en tirer quelques conclusions.

Vous pouvez remarquer que la deuxième longueur est répétée comme terme moyen de façon à disposer de quatre nombres.

Il est certain que nous aurions pu utiliser ces longueurs dans un autre ordre.

Rappelons ici que ces deux rapports seront égaux à la condition nécessaire et suffisante que le produit $|ac| \times |ab|$ des termes extrêmes soit égal au produit $|cb| \times |cb|$ des termes moyens.

Dans un premier stade d'étude de la situation, essayons de trouver des nombres naturels qui puissent être les longueurs des segments $[ac]$, $[cb]$ et $[ab]$.



Donnons donc des valeurs à $|ac|$ et à $|cb|$ ce qui fournira automatiquement celle de $|ab|$ qui est leur somme.

Voici un tableau qui résume des calculs successifs. Il se construit systématiquement. Vous pouvez, si vous le souhaitez, le prolonger encore un peu.

$\|ac\|$	$\|cb\|$	$\|ab\|$	$\|ac\| \cdot \|ab\|$	$\|cb\|^2$	*Ecarts entre les deux produits*
1	1	2	2	1	1*
1	2	3	3	4	1*
1	3	4	4	9	5
2	1	3	6	1	5
2	2	4	8	4	4
2	3	5	10	9	1*
2	4	6	12	16	4

$\lvert ac \rvert$	$\lvert cb \rvert$	$\lvert ab \rvert$	$\lvert ac \rvert \cdot \lvert ab \rvert$	$\lvert cb \rvert^2$	*Ecarts entre les deux produits*
3	1	4	12	1	11
3	2	5	15	4	11
3	3	6	18	9	9
3	4	7	21	16	5
3	5	8	24	25	1*
3	6	9	27	36	9
4	1	5	20	1	19
4	2	6	24	4	20
4	3	7	28	9	19
4	4	8	32	16	16
4	5	9	36	25	11
4	6	10	40	36	4
4	7	11	44	49	5
4	8	12	48	64	16
5	1	6	30	1	29
5	2	7	35	4	31
5	3	8	40	9	31
5	4	9	45	16	29
5	5	10	50	25	25
5	6	11	55	36	19
5	7	12	60	49	11
5	8	13	65	64	1*
5	9	14	70	81	11

etc.

Si vous cherchez d'autres longueurs entières qui fournissent un écart égal à 1, vous trouverez successivement 8, 13, 21 puis 13, 21, 34, etc.

Observez bien les triples de nombres naturels qui ont fourni un écart unitaire (lignes marquées de *).

Ce sont 1, 1, 2
puis 1, 2, 3
puis 2, 3, 5
puis 3, 5, 8
puis 5, 8, 13
puis 8, 13, 21
puis 13, 21, 34
etc.

Je suppose que vous avez en mémoire la manière d'obtenir chaque fois le troisième nombre à partir des deux premiers.
Il est possible de résumer tous ces nombres sous la forme d'une seule « suite » que voici :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Cette suite est connue sous le nom de « Suite de Fibonacci »[(1)]. Nous la désignerons par F, on écrira :
$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5,$
$F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21 \ldots$
Retenez bien que tout terme de cette suite, à partir du troisième évidemment, est la somme des deux termes qui le précèdent.
C'est ainsi que si a et b sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci alors le terme qui suit a et b est fatalement $a + b$ (et ainsi de suite).
La suite F de Fibonacci possède de nombreuses propriétés. En voici une : *La somme de trois termes consécutifs de F est toujours paire.*
Vous pouvez le vérifier sur de nombreux exemples numériques. En voici quelques uns :

$$\begin{array}{lcllcl}
F_1 + F_2 + F_3 & = & 1 + 1 + 2 & & = & 4 \text{ (pair)} \\
F_2 + F_3 + F_4 & = & 1 + 2 + 3 & & = & 6 \text{ (pair)} \\
F_3 + F_4 + F_5 & = & 2 + 3 + 5 & & = & 10 \text{ (pair)} \\
\vdots & & \vdots & & & \\
F_8 + F_9 + F_{10} & = & 21 + 34 + 55 & & = & 110 \text{ (pair)}
\end{array}$$

Mais il convient de <u>démontrer</u> cette propriété. Voici deux manières de présenter la démonstration :

1. Soit i le rang, dans la suite F, du premier des trois termes consécutifs choisis, on a :
$$\begin{aligned}
F_i + F_{i+1} + F_{i+2} &= (F_i + F_{i+1}) + F_{i+2} \\
&= F_{i+2} + F_{i+2} \\
&\quad \text{car } F_i + F_{i+1} = F_{i+2} \\
&= 2F_{i+2} \\
&\quad \text{qui est pair}
\end{aligned}$$

2. Si $F_i = a$ et $F_{i+1} = b$, alors $F_{i+2} = a + b$, la somme de ces trois termes

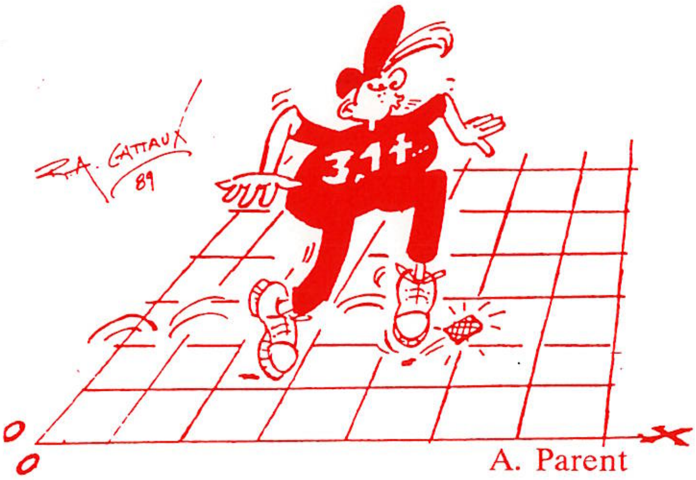
consécutifs est $2a + 2b = 2(a + b)$ c'est-à-dire un nombre pair.

Voici d'autres propriétés des termes de F :

- la somme de six termes consécutifs de F est divisible par 4,
- la somme de dix termes consécutifs de F est un multiple de 11,
- ...

Essayez de démontrer ces propriétés et aussi d'en trouver d'autres. Nous attendons vos réflexions à ce sujet. Nous publierons volontiers vos découvertes, bonne réflexion et rendez-vous au prochain numéro.

(1) FIBONACCI, également connu sous le nom Léonard de Pise, a vécu de ±1170 à ±1250. Son surnom de FIBONACCI est une contraction de « fils de Bonaccio ». Les occupations du père qui pratiquait le commerce, créèrent chez FIBONACCI un intérêt pour les mathématiques. Il voyagea beaucoup et notamment en Algérie, en Égypte, en Syrie, en Sicile et en Grèce. Il se persuada alors de l'importance du calcul et de la supériorité de la notation en chiffres arabes (qui est une numération de position en base 10, dotée du chiffre zéro). Il composa en 1202 un ouvrage célèbre intitulé *Liber Abaci* qu'il révisa en 1228 et dont le contenu porte entre autre sur des développements de méthodes algébriques. Il s'en est fallu de très peu que Léonard de Pise soit totalement méconnu. C'est notamment grâce à Édouard LUCAS, arithméticien français et auteur d'ouvrages de récréations mathématiques (dont vous pouvez vous procurer, encore actuellemnent, chez tout bon libraire, des exemplaires de réédition par la librairie A. Blanchard à Paris) qu'il fut connu.



A. Parent

Le mot caché (par CéVé)

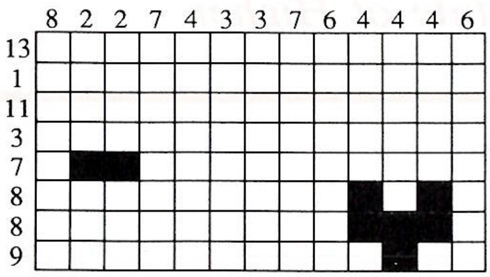
Retrouvez les mots qui vous sont proposés en serpentant dans la grille, horizontalement ou verticalement en tous sens mais jamais en oblique.
Chaque lettre dans cette grille ne sert qu'une fois. Les lettres qui restent vous donneront un mot ou un groupe de mots. Quel est-il ?
Mots à composer : ABEL, BOURBAKI, CHASLES, EUCLIDE, EULER, LAME, LIE, PYTHAGORE, THALES

E	L	U	E	S	E	I	K
R	M	A	C	S	L	B	A
T	E	L	H	A	-	R	U
H	A	S	P	M	A	T	O
E	L	E	Y	U	E	H	R
R	O	H	T	C	L	L	E
E	G	A	U	N	I	D	B
I	L	J	E	E	S	E	A

Les carrés sympathiques

Dans le rectangle quadrillé ci-dessous, un certain nombre de carrés ont été noircis. Mais seuls huit carrés noirs apparaissent, de l'encre sympathique ayant été utilisée pour les autres.
Heureusement, sur chaque ligne et sur chaque colonne, on a compté le nombre de carrés noircis, qu'ils soient visibles ou non, puis on a écrit ce nombre en face de la rangée correspondante.

Retrouvez tous les carrés noirs.



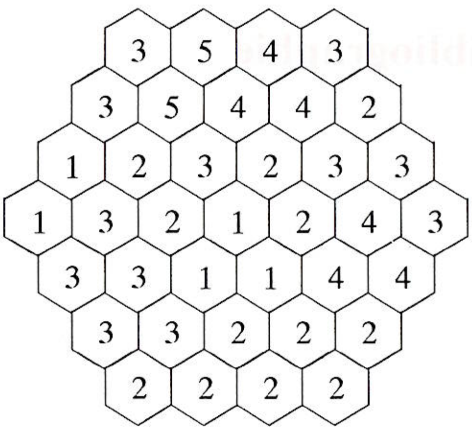
L'addition cachée

Reconstituez cette addition sachant qu'à des lettres différentes sont associés des chiffres différents.

```
    C I N Q
+     S I X
  ---------
    O N Z E
```

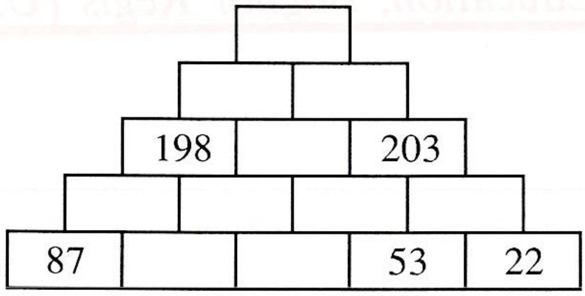
Jeu de l'hexagone et de la marguerite

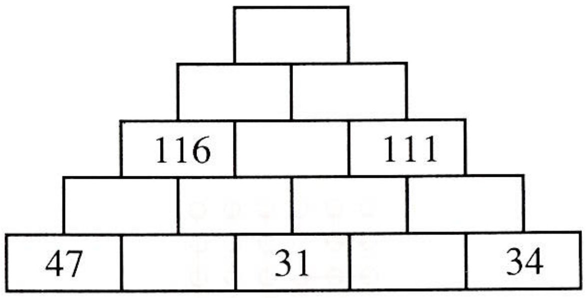
Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



Le mur des nombres

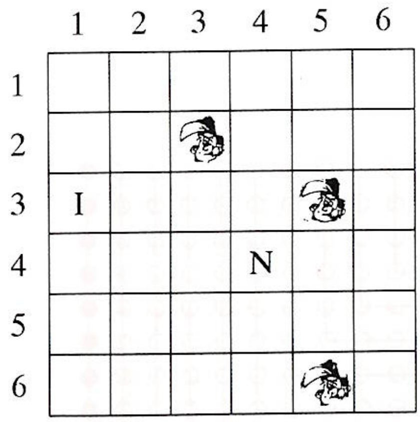
Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.





Produits croisés

Sachant que chaque nombre correspond à un mot de la grille et représente le produit de la valeur de ses lettres (A=1, B=2, ..., Z=26), reconstituez une grille de mots croisés cohérente.



Horizontalement
1. 1 005 480
2. 90 — 4 410
3. 2 772
4. 47 880
5. 1 436 400
6. 9 500

Verticalement
1. 45 360
2. 356 400
3. 540
4. 3 910 200
5. 70 — 100
6. 6 481 755

Les gnomons et les triplets pythagoriciens

Warwick Evans, *West Sussex Institute of Higher Education, Bognor Regis (U.K.)*

Dans *Math-Jeunes* n° 62, Michel BALLIEU [1] a décrit le « gnomon » et Maurice FAMELART [2] a montré comment on peut produire des triplets pythagoriciens. En fait, il y a une liaison entre les deux articles.

PYTHAGORE (± 500 av. J.-C.) a fondé une école et une secte secrètes en Italie du sud. L'école attribuait beaucoup d'importance aux nombres entiers. Les pythagoriciens savaient [1] que les sommes partielles de la série infinie des nombres impairs donnaient les nombres carrés, et ils en avaient une démonstration géométrique par les gnomons (cf. Fig. 1).

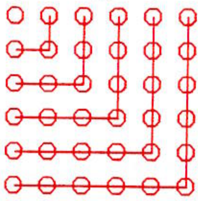


Fig 1

Grâce au motif des gnomons, les pythagoriciens pouvaient construire des triplets (la méthode est décrite en [3]). Dans la figure 2, par exemple, le gnomon le plus grand est 25 ($= 5^2$), le carré sans ce gnomon est 12^2, et le carré qui contient ce gnomon est 13^2. Il s'ensuit que $5^2 + 12^2 = 13^2$ et nous avons trouvé le triplet pythagoricien $(5, 12, 13)$.

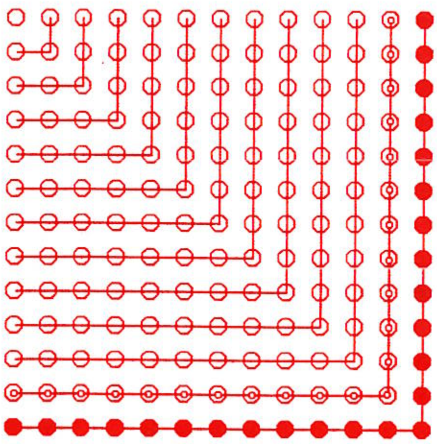


Fig 2

On peut utiliser le même procédé avec chaque nombre impair carré. Si m est un nombre impair, m^2 est aussi impair ; il existe donc un gnomon mesurant m^2. La longueur du côté du gnomon m^2 est $\frac{m^2+1}{2}$ et celle du côté du gnomon précédent, $\frac{m^2-1}{2}$.

Il s'ensuit que

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

et donc, $\left(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2}\right)$ est un triplet pythagoricien.

m	$\frac{m^2-1}{2}$	$\frac{m^2+1}{2}$
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
...	...	...

Les pythagoriciens savaient qu'il y avait une infinité de triplets, un pour chaque nombre impair. Mais le processus ne donne pas, par exemple, le triplet $\{8, 15, 17\}$.

Nous avons besoin d'une méthode qui peut produire **tous** les triplets pythagoriciens, et Maurice FAMELART a décrit très clairement une telle méthode en [2].

Bibliographie

[1] Michel BALLIEU, *Tout est nombre*, Math-Jeunes n°62 (1993), p.14.

[2] Maurice FAMELART, *À la recherche des triplets pythagoriciens*, Math-Jeunes n°62 (1993), p.11-13.

[3] D. SHANKS, *Solved & Unsolved Problems in Number Theory*, Spartan Books, 1962.

9e
CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

Participez à l'événement le plus astucieux de l'année !

Bienvenue dans l'univers des jeux mathématiques !

Nous vous offrons de révéler le (petit) génie qui sommeille en vous ! Car ce questionnaire vous permet de participer au neuvième championnat international des jeux mathématiques et logiques, alias l'événement le plus astucieux de l'année!

Tout le monde est concerné : depuis les élèves de 4e primaire jusqu'aux adultes les plus diplômés. Vous souhaitez déterminer votre catégorie? Consultez le tableau ci-dessous. Il vous indique aussi le numéro des problèmes que vous devrez résoudre pour atteindre les demi-finales régionales. Vous n'avez droit qu'à deux erreurs ! Et pour chaque problème, une simple réponse ne suffit pas toujours. Il faut aussi le nombre de solutions (sauf en CM).

Une fois les jeux résolus, photocopiez le bulletin réponse, complétez-le et renvoyez-le **avant le 10 janvier 1995**. A ce stade de l'épreuve, la participation est **entièrement gratuite**. La qualification et la participation aux demi-finales nécessitent l'adhésion à la FFJM, mais vous pouvez y adhérer dès à présent.

Vous recevez votre convocation ? Oui ? Alors commence une grisante aventure: les demi-finales régionales le 18 mars à 14 heures dans l'une des 100 villes organisatrices dont plusieurs en Belgique.

La finale nationale belge est prévue le 20 mai 1995. Elle est dotée de nombreuses récompenses: calculatrices Hewlett-Packard, chèques CGER, jeux de réflexion Abalone, Pyramis, Quarto ... et de nombreux autres prix.

L'apothéose : la finale internationale à Paris début septembre où 3.000.000 FB de prix attendent les lauréats. Mais nous savons que là n'est pas la raison première de votre participation.

A VOS MATHS. !

9e
CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

FAIRE DES MATHÉMATIQUES AUTREMENT

Qu'est-ce qui fait courir les matheux joueurs? *Pourquoi les écoliers, élèves et étudiants qui s'enfuient devant le problème de mathématique donné en classe accourent-ils dès qu'il s'agit des jeux-problèmes du championnat? Pourquoi n'éprouvent-ils plus ni peur, ni ennui devant les mathématiques lors du championnat?*

DES ÉNIGMES FASCINANTES
Le principe des jeux-problèmes du championnat a spécialement été étudié pour leur plaire, même si les ressorts mathématiques sous-tendus sont aussi formateurs que ceux des "vrais" problèmes de mathématiques. En voici la recette:

Pas d'appel aux connaissances:
Les petites énigmes demandent *de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche,* mais pas réellement de connaissances.

Pas de démonstration:
Au risque de déplaire à quelques puristes, ***seul le résultat compte***. Qu'il s'exprime par un nombre, un dessin, une disposition de lettres.

Un habillage humoristique et moderne:
Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. On n'hésite pas à "coller" à l'actualité: élections, restructuration de cartes politiques, inflation ont été les sujets de problèmes des dernières séances du championnat.

Le résultat? Des problèmes plaisants, qui provoquent ***une hiérarchie souvent différente de celle constatée à l'école****. Car dans ce championnat, d'autres qualités peuvent s'exprimer: l'imagination, l'intuition, la persévérance.*

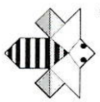
FÉDÉRATION FRANÇAISE DES JEUX MATHÉMATIQUES
Comité de Belgique
BP 157 - 7700 MOUSCRON

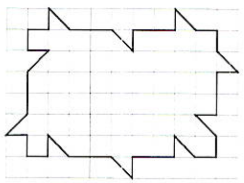
QUARTS DE FINALE INDIVIDUELS PAR CORRESPONDANCE
Vous avez jusqu'au 10 janvier 1995 pour résoudre les problèmes de votre catégorie et retourner le bulletin réponse.

Catégorie	Public concerné	Problèmes à résoudre :
CM	Elèves de 4e et 5e primaire	N° 1 à N° 6
C1	Elèves de 6e et 1ère secondaire	N° 3 à N° 9
C2	Elèves de 2e et 3e secondaire	N° 5 à N° 11
L1	Elèves de 4e,5e et 6e secondaire	N° 5 à N° 14
GP	Grand Public: tous adultes sauf HC et L2	N° 5 à N° 14
L2	Premier cycle universitaire	N° 5 à N° 16
HC	Haute compétition	N° 5 à N° 16

1 - MAYA ET SES SOEURS

L'abeille Maya, représentée ci-dessous, et ses cinq soeurs, peuvent recouvrir entièrement la forme ci-contre, sans chevauchement.

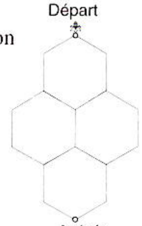




Vous dessinerez le contour des six abeilles.

2 - LE VOYAGE DE MAYA

Maya l'abeille se trouve sur un rayon de miel.
Elle se déplace sur le bord des alvéoles, et doit se rendre du point de départ au point d'arrivée (voir le dessin), par le chemin le plus court possible.



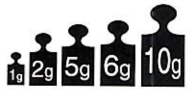
Combien existe-t-il de chemins différents possibles ?

3 - DES CHIFFRES ET DES LETTRES

Français, Belges et Suisses comptent de la même manière jusqùà soixante-neuf.
Quarante-huit a une curieuse propriété: la somme de ses chiffres 12 (= 4 + 8) est aussi le nombre de ses lettres.

Combien de nombres entiers (entre 1 et 69), y compris quarante-huit, ont un nombre de lettres égal à la somme de leurs chiffres ?

4 - LES CINQ MASSES



On dispose de cinq masses marquées de 1 gramme, 2 grammes, 5 grammes, 6 grammes et 10 grammes.

Combien de masses différentes peut-on obtenir en utilisant une ou plusieurs de ces cinq masses marquées ?

5 - LE ROUDOUDOU DE DOUDOU

Le petit Edouard sort de l'école et se précipite chez Madame Ladouceur, marchande de bonbons, juste en face de l'école. Il achète un bonbon (à 15 centimes) et tend une pièce de 1 F.
"Désolé, mon petit, je n'ai pas de quoi te rendre la monnaie". Doudou tend alors à la place une pièce de 50 centimes.
"Je ne peux toujours pas te rendre la monnaie, et pourtant, il y a dans mon tiroir-caisse entre 50 centimes et 1 franc de monnaie, en pièces jaunes uniquement. Tu n'as pas une pièce de 20 centimes ? Je pourrai te rendre la monnaie."
note : En France, les pièces "jaunes" sont les pièces de 5 centimes, de 10 centimes et de 20 centimes.

Combien y a-t-il de monnaie dans le tiroir-caisse de Madame Ladouceur ?

6 - LE COUP DU MENHIR

Pour la fête d'Andromède, une de ses lointaines cousines, Obélix a taillé un énorme pavé de granit de 8 tonnes. Maintenant, il en taille un plus petit pour Galaxix, le chien d'Andromède : ses dimensions sont chacune le quart des dimensions du bloc précédent.

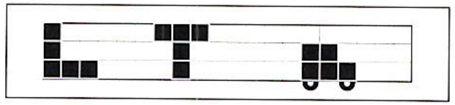
Combien pèse le bloc de Galaxix, en kilogrammes ?

7 - LE PIEGE DES MATHEUX

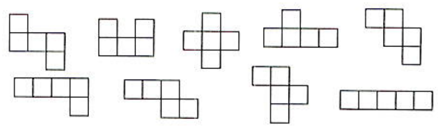
Pierre, Irène, Emmanuel, Gilles et Evariste sont les cinq membres d'une famille de matheux; les phrases qu'ils prononcent sont toujours vraies ou fausses; voici cinq phrases soumises par ces joueurs rusés à votre perspicacité :
1) Pierre : " PARIS s'écrit avec trois consonnes et deux voyelles."
2) Irène : " Au Pays de Galles, le Mont Snowdon culmine à 1085 m."
3) Emmanuel : " 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100."
4) Gilles : " La phrase prononcée par Irène est fausse."
5) Evariste : " Une seule des phrases précédentes est vraie."

Parmi les cinq phrases ci-dessus, combien sont vraies ?

8 - LES PENTAMINOS DE LEON TINE



Léon Tine est un garagiste aussi efficace qu'astucieux. C'est pourquoi il a collé sur son enseigne les douze pentaminos dans un rectangle de 3 carreaux sur 20, ses initiales et un pentamino en forme de petite voiture stylisée ayant été préalablement coloriés en rouge vif.
Placez les 9 pentaminos manquants représentés ci-dessous.
note : les pièces peuvent être tournées sur la face de votre choix.



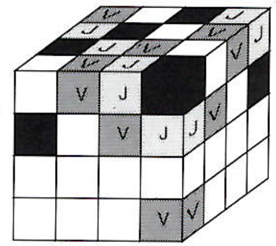
9 - TRONCADIVISIBLE

Si vous prenez le nombre 24 et que vous supprimez son chiffre des unités (4), vous obtenez 2, qui divise le nombre de départ 24. Un tel nombre, tel que si on supprime son chiffre des unités, le nouveau nombre obtenu formé des chiffres restants, divise le nombre de départ, est dit "*troncadivisible*".

Combien existe-t-il de nombres "troncadivisibles" inférieurs à 1995 ?

10 - LA QUADRICHROMIE NETTE

Pour tester des nouveaux produits, Monsieur Lechat a besoin d'établir un plan d'expérimentations.
Schématisant chacun des quatre produits par une couleur, il réalise un cube 4x4x4 dans lequel tout alignement de quatre cubes (sauf en diagonale) comporte quatre couleurs (blanc, jaune, noir et vert).



Il vient juste de terminer son cube, mais il n'a pas encore eu le temps de terminer de noter le coloriage ! Les V indiquent des faces vertes, et les J des faces jaunes.
Sachant qu'immédiatement en dessous du cube vert du coin supérieur se trouve un cube blanc, **pouvez-vous indiquer les couleurs des cubes se trouvant dans les étages 1 et 2** (l'étage 1 est celui du bas, et l'étage 2 celui immédiatement au-dessus) ? **Vous noterez respectivement B, J, N, V les couleurs blanc, jaune, noir et vert.**

11 - LA MONTRE DE NICOLAS

Nicolas possède une montre à affichage digital. Chaque chiffre s'affiche grâce à un certain nombre de cristaux liquides (voir figure 1).

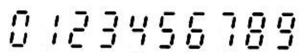


figure 1

figure 2

L' heure s'affiche de 0. 00 à 23 . 59 (le chiffre des dizaines d'heures ne s'affiche que s'il est différent de 0 ; par contre, celui des dizaines de minutes s'affiche dans tous les cas. La partie gauche de la figure 2 montre, par exemple, l'affichage de 5 h 04, et celui de 17 h 04.
Si les cristaux liquides marqués d'une croix sur la partie droite de la figure 2 ne fonctionnaient plus, Nicolas ne pourrait plus distinguer l'affichage de 5 h 04 de celui de 17 h 04.

Quel nombre maximum de cristaux liquides (horizontaux ou obliques) peuvent ne plus fonctionner, sans qu'à aucun moment de la journée (de 0 h 00 à 23 h 59), il n'y ait ambiguïté sur la lecture de l'heure affichée, moyennant un petit effort de réflexion ?

12 - LE NUMÉRO DE CODE

Bernard et Francis se retrouvent devant chez Martine avec qui ils ont rendez-vous. Ils se demandent alors quel est le numéro de code de l'entrée de l'immeuble, que Martine leur a donné, mais qu'ils ont oublié de noter.

_" Je sais que le numéro de code est impair, qu'il comporte trois chiffres, et je me souviens de ces trois chiffres, dit Bernard. Il n'y a qu'à essayer toutes les combinaisons !"

_" Attends, lui dit Francis, moi, je n'ai pas retenu les chiffres, mais j'avais remarqué que le nombre formé de ces trois chiffres est égal au triple du produit de deux nombres consécutifs, ce triple étant augmenté de 1. Cela peut sans doute t'aider !"

_ "Hélas, répond Bernard, cela ne réduit absolument pas le nombre de combinaisons à essayer. Heureusement, elles ne sont pas nombreuses !"

Donnez, dans l'ordre croissant, les trois chiffres du numéro de code de l'entrée de l'immeuble où habite Martine.

13 - UNE PILE DE FRACTIONS

Les nombres 1, 2, et 3, "empilés" en fraction (voir encadré ci-contre) permettent d'obtenir deux résultats différents : 1 / 6 et 3 / 2, selon les priorités induites par la longueur des traits de fraction.

$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}\ ,\quad \text{et} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}}$$

Combien de résultats différents peut-on obtenir, si l'on "empile" en fraction, dans cet ordre, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8 ?

14 - UNE OPÉRATION VOLCANIQUE

Lors de la dernière éruption de ce volcan, nous avons pu observer les coulées de LAVE et de MAGMA qui se divisaient à n'en plus finir. Rien ne semblait pouvoir arrêter leur progression vers la VALLEE.

$$\frac{\text{L A V E}}{\text{M A G M A}} = 0,\text{VALLEE VALLEE VALLEE} \ldots\ldots$$

Comme dans tout cryptarithme, deux lettres différentes remplacent toujours deux chiffres différents, et deux chiffres différents sont toujours remplacés par deux lettres différentes. Le "0" du quotient représente le chiffre zéro, mais d'autres zéros peuvent être remplacés par une lettre.

Que vaut V A L L E E ?

15 - LES FEUX ROUGES

Frédéric, qui se veut mathématicien, simule sur ordinateur la circulation routière dans la rue principale de sa ville. On suppose que dans cette avenue, il y a n feux numérotés de 1 à n (n > 0), et qu'à un instant donné, chaque feu est soit rouge, soit orange, soit vert.

Pour optimiser le trafic, Frédéric affirme qu'il faut remplir la condition suivante :

quels que soient p et q distincts, si les feux numéros p et q sont de la même couleur, alors le feu numéroté p+q n'est pas de cette couleur.

Que vaut n, au maximum ?

16 - LE THÉOREME DISCRET

Dans l'espace "discret", c'est-à-dire dont tous les points sont à coordonnées entières, Francis prétend avoir trouvé le nombre n minimum de points différents qu'il faut choisir pour être certain que parmi tous les triangles formés par ces points, il y en a au moins un dont les coordonnées du centre de gravité seront entières !

Quel est le nombre de Francis ?

BULLETIN REPONSE MATH-JEUNES

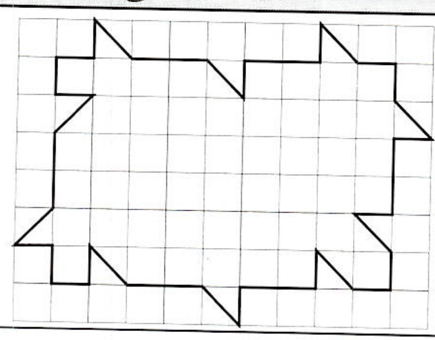
à retourner au plus tard le 10/01/1995 à F.F.J.M. BP157 - 7700 MOUSCRON

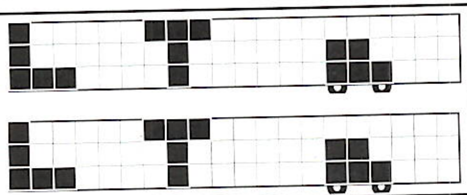
Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
.... Tél : ....

CATEGORIE (impératif) CM ☐ C1 ☐ C2 ☐ L1 ☐ GP ☐ L2 ☐ HC ☐

☐ Adhérent FFJM en 1994 : N°FFJM .... Clé : ....

☐ J'adhère pour 1995 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C2), 450 F (L1), 500 F (L2), 700 F (GP et HC) au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP157 – 7700 Mouscron

N°du Pb	Votre solution	Points	Coef.
	catégorie : CM		
1	**Vous dessinerez ci-contre le contour des six abeilles** 		
2	**Il existe |__| chemins différents**		
	catégories : CM C1		
3	**Il y a |__| nombres entre 1 et 69**		
4	**On peut obtenir : |__|__| masses différentes**		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	**Contenu du tiroir-caisse : |__|__| centimes**		
6	**Le bloc de Galaxix pèse : |__|__|__| kilogrammes**		

N°du Pb	Nombre de solutions	Votre ou vos solutions	Points	Coef.
	Toutes catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC			
7	...... solution(s)	1) nombre de phrases vraies : ⌴ 2) nombre de phrases vraies : ⌴		
8	...... solution(s) (vous dessinerez les pentaminos)	1) 2) 		
9	1 solution	Nombre de nombres "troncadivisibles" : ⌴⌴⌴⌴		
	catégories : C2 L1 GP L2 HC			
10	1 solution (vous écrirez le nom des couleurs : B pour blanc, J pour jaune, N pour noir, et V pour vert).	1er étage 2ème étage		
11	1 solution	Nombre maximum de cristaux liquides en panne : ⌴⌴		
	catégories : L1 GP L2 HC			
12	1 solution	Les 3 chiffres sont : ⌴ ⌴ ⌴		
13	1 solution	On obtient ⌴⌴⌴ résultats		
14	... solution(s)	1) V A L L E E vaut : ⌴⌴⌴⌴⌴⌴ 2) V A L L E E vaut : ⌴⌴⌴⌴⌴⌴		
	catégories : L2 HC			
15	1 solution	n vaut au maximum : ⌴⌴⌴		
16	1 solution	Le nombre de Francis est : ⌴⌴⌴		
		TOTAL		

8e championnat international des jeux mathématiques et logiques

Le Sénat à Paris

Résultats des candidats belges à la finale internationale des 2 et 3 septembre 1994 au Sénat (Palais du Luxembourg) à Paris.

Catégorie CM: (4e et 5e primaire): 31 participants

Florence SOHET 9e, Nicolas BOUTET 19e,

Catégorie C1: (1ère et 2e secondaire): 47 participants

Jean-François LADRY 34e, Thomas LAVALETTE 35e, Trung Truc HUYNH 42e, Denis DEFRERE 46e

Catégorie C2: (2e et 3e secondaire): 43 participants

Emilie BURTON 6e, Carole DEVILLERS 32e

Catégorie L1 (4e, 5e et 6e secondaire): 46 participants

Grégory SOYEZ 4e, Charles Henri MASSA 5e, Quentin LOUVEAUX 16e, Xavier HAINAUT 17e, Véronique VAN ELEWIJCK 24e, Vanessa PASTORET 38e

Catégorie L2 (1er cycle universitaire): 26 participants

Claude DESSET 1er, François GLINEUR 2e

Catégorie GP (Grand Public): 36 participants

Philippe BASTIEN 3e,
Pierre OTTE 5e,
Michel HAUTECOEUR 7e,
José HANS 9e,
Yves DOHOGNE 11e,
Stéphane LOICQ 12e,
Monique TASSIN 25e,
Francis RUELLE 27e,
Philippe DUMORTIER 28e,
Daniel WALLE 34e,
Serge VANDEN BOSCH 35e

Catégorie HC (Haute compétition): 36 participants

Eric LAERMANS 6e,
Nicolas NASDROVISKY 19e
Joël FAGNOUL 27e,
Jérôme LOUVEAUX 31e

CONCOURS PARALLÈLE

Catégorie CM: 5 participants

Valérie SOYEZ 2e

Catégorie L1: 19 participants

Patrick BROWAEYS 2e
Sébastien LEROY 3e
Jacques THEYS 4e
Alice DEVILLERS 5e
Jean-François MACQ 12e

Catégorie HC/L2: 10 participants

Gilles PIRET: 3e

Les fous de... math

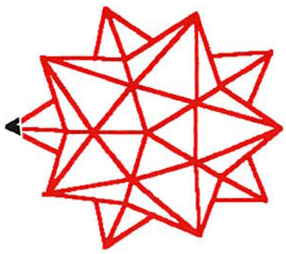
Les polyèdres

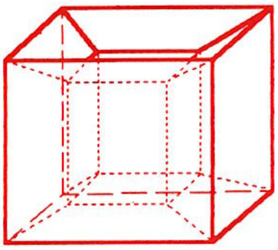
C. Festraets, *Athénée Royal de Woluwé-St-Pierre*

Sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, nous te présentons les polyèdres de Platon. Ce sont des polyèdres **réguliers**.

Le mot « polyèdre » vient du grec *polus* qui signifie *nombreux* et *hedra* qui signifie *base*. Un polyèdre est donc un solide à plusieurs bases (faces). Il est dit convexe lorsqu'il est entièrement situé d'un même côté de chacune de ses faces.

Voici des polyèdres non convexes :





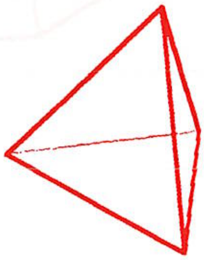
Un polyèdre **régulier** est convexe, inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques.

Il n'existe que cinq polyèdres réguliers.

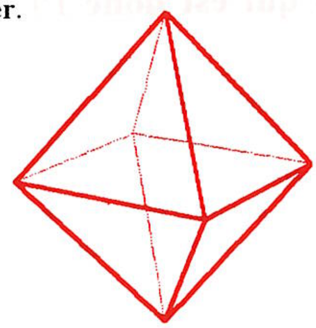
En effet, tu sais que les angles d'un polygone régulier sont tous isométriques, mais que mesurent-ils ? 60° pour le triangle équilatéral, 90° pour le carré, 108° pour le pentagone, 120° pour l'hexagone, et puis ? Peux-tu trouver une formule générale ? En tous cas, à partir de l'heptagone, l'angle est plus grand que 120°. Or, en un sommet d'un polyèdre, il y a au moins trois faces, ces faces ne sont pas dans un même plan, donc la somme des angles en ce sommet est plus petite que 360°. Si on plaçait trois hexagones réguliers comme faces au sommet d'un polyèdre, ces trois faces seraient dans le même plan puisque $3 \times 120° = 360°$.

Donc les seules faces possibles sont le triangle équilatéral, le carré et le pentagone.

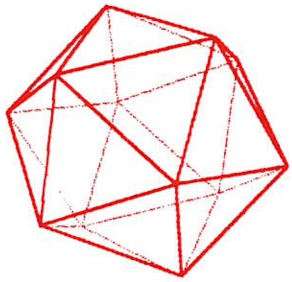
Si en chaque sommet, on place trois triangles équilatéraux ($3 \times 60° < 360°$), on obtient le **tétraèdre régulier**.



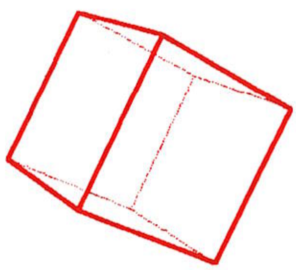
Si en chaque sommet, on place quatre triangles équilatéraux ($4 \times 60° < 360°$), on obtient l'**octaèdre régulier**.



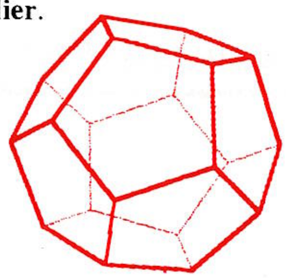
Si en chaque sommet, on place cinq triangles équilatéraux ($5 \times 60° < 360°$), on obtient l'**icosaèdre régulier**.



Si en chaque sommet, on place trois carrés ($3 \times 90° < 360°$), on obtient l'**hexaèdre régulier** que l'on appelle plus souvent **cube**.



Si en chaque sommet, on place trois pentagones réguliers ($3 \times 108° < 360°$), on obtient le **dodécaèdre régulier**.



Si on essaye de placer en un sommet plus de triangles, de carrés ou de pentagones réguliers, on atteint ou dépasse 360°. Il n'y a donc que cinq polyèdres réguliers, dits aussi polyèdres de Platon.

Mais qui est donc PLATON ?

PLATON *n'est pas vraiment un mathématicien, c'est un philosophe grec de l'antiquité qui vécut de 427 à 347 avant J.-C. Son principal souci était d'ordre politique : il voulait sauver Athènes affaiblie par les guerres et menacée de décadence en enseignant aux responsables de la cité la philosophie et la vertu.*

*À cet effet, il fonda l'*Académie, *école de philosophie où il enseigna pendant environ trente ans. L'Académie était non seulement une école, mais aussi un lieu de rencontre, de promenade, de discussions, d'habitation et une bibliothèque.*

Dans ses écrits, et en particulier dans La République, PLATON *insiste sur l'importance des mathématiques. En voici deux passages, le premier a trait à la « science des nombres » et le second à la géométrie :* « Il conviendrait donc de rendre cette science obligatoire et de persuader ceux qui sont destinés à remplir les plus hautes fonctions de l'État d'en entreprendre l'étude et de s'y appliquer, non pas superficiellement, mais jusqu'à ce qu'ils arrivent par la pure intelligence à pénétrer la nature des nombres, non point pour la faire servir, comme les négociants et les marchands, aux ventes et aux achats, mais pour faciliter à l'âme elle-même le passage du monde sensible à la vérité et à l'essence. »

« ... car la géométrie est la connaissance de ce qui est toujours. Elle est donc propre à tirer l'âme vers la vérité et à faire naître l'esprit philosophique, qui élève nos regards vers les choses d'en haut, au lieu de les tourner, comme nous le faisons, vers les choses d'ici bas. »

PLATON *distingue le monde concret, réel, du monde abstrait des idées, il est un des premiers à avoir considéré les objets mathématiques comme des objets abstraits : le nombre, le point, la droite, ... sont des êtres de l'esprit sans existence matérielle. La droite n'est pas une ligne tracée sur le sable, un cube n'est pas cet objet avec lequel on joue aux dés, tout recours à l'expérience est interdit, seul compte le raisonnement pur.*

C'est en cela que son école aura une influence considérable sur le développement ultérieur des mathématiques.

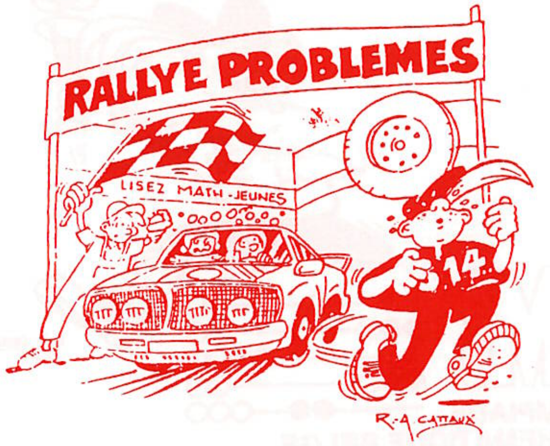
C'est dans le Timée *que l'on trouve les idées de* PLATON *sur les cinq polyèdres réguliers, il y explique comment les construire et, ce qui peut de nos jours prêter à sourire, les associe aux cinq éléments de l'univers dont ils constituent en quelque sorte les « atomes » : le cube est attribué à la terre, parce que, sa base étant un carré, il est plus stable, le tétraèdre est le germe du feu, parce qu'il est le plus petit, le plus aigu et le plus tranchant de partout, l'icosaèdre est associé à l'eau parce qu'il est le plus immobile à cause de son grand nombre de faces, l'octaèdre, intermédiaire entre le tétraèdre et l'icosaèdre, est associé à l'air, intermédiaire entre le feu et l'eau et enfin le dodécaèdre, dont la forme est proche de la sphère, représente l'univers.*

Les polyèdres réguliers étaient, semble-t-il, connus bien avant PLATON. *On a, par exemple, retrouvé près de Padoue, un dodécaèdre régulier étrusque daté d'au moins 500 ans avant J.-C.*

Cependant, c'est PLATON *et ses élèves qui ont placé ces cinq solides remarquables au sommet d'une hiérarchie qu'ils établissaient entre les différentes figures géométriques : certaines figures sont plus belles, plus harmonieuses que d'autres et donc méritent plus d'attention.*

C'est d'ailleurs pourquoi ces polyèdres et ceux qui en dérivent font l'objet des couvertures des numéros de Math-Jeunes de cette année.

Math-Jeunes n°66, 13–13, 1994



C. Festraets

Voici la liste des lauréats du rallye problèmes de l'an dernier :
J.-F. Macq, 15 ans, Coll. St-Joseph, Chimay
L. Berger, 17 ans, Éc. Sup. de Luxembourg
M. Levy, 16 ans, Lycée Daschbeck, Bruxelles
S. Leroy, 16 ans, Inst. St-Bon.-Parn., Bxls
X.H. Nguyen, 15 ans, Ath. Royal de Spa.
Tous ont reçu leur prix dans le courant des vacances d'été, je leur adresse mes plus vives félicitations.

Le rallye problèmes 1994-1995 comportera trois étapes publiées dans les numéros 66, 67 et 68 de *Math-Jeunes*. Dans chaque numéro, vous trouverez des problèmes plus spécialement destinés aux élèves des trois classes inférieures ; ils sont numérotés m1, m2, ..., m9 ; tandis que ceux destinés aux élèves des classes supérieures sont numérotés M1, M2, ..., M9. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer la solution de n'importe quel problème. Les solutions des différents problèmes seront rédigées sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.
Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final. Veillez à ce que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées et à ce que figures et démonstrations soient sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.
Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 2 décembre à C. Festraets, 36 rue J.B. Vandercammen à 1160 Bruxelles.

m1 Parmi six garçons, deux ont volé des pommes. Mais qui ? Adam dit « Bernard et Claude ». Daniel dit « Emmanuel et François ». Emmanuel dit « François et Bernard ». Claude dit « Adam et Bernard ». Bernard dit « Daniel et Emmanuel ». Quatre des garçons interrogés ont cité correctement un des deux coupables et ont menti pour le second, le cinquième a menti pour les deux qu'il a cités. Qui a volé les pommes ?

m2 On donne un triangle ABC ; à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles ABD, BCE et CAF de sorte que $\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180°$. Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles concourent en un même point et que le triangle formé par les centres de ces trois cercles a des angles égaux à $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$.

m3 Dans un carré de côté 1, on donne 51 points distincts. Démontrer qu'il existe un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ à l'intérieur duquel se trouvent au moins trois de ces points.

M1 Deux personnes conviennent de se rencontrer entre midi et 13 heures en un lieu donné. Elles décident que le premier arrivé attendra le second un quart d'heure, après quoi il partira. Quelle est la probabilité que la rencontre ait lieu, sachant que chacune des personnes choisit au hasard son moment d'arrivée au lieu du rendez-vous entre midi et 13 heures ?

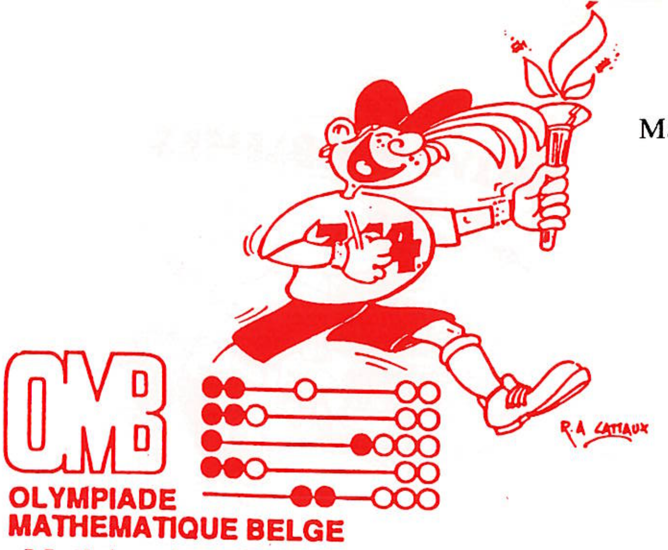
M2 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(x\sqrt{i}\right)$$

n'est pas périodique.

M3 On donne un angle aigu de sommet O et à l'intérieur de cet angle un point A. Déterminer deux points B et C situés chacun sur un côté de l'angle et tels que le périmètre du triangle ABC soit minimum.

Math-Jeunes n°66, 14–16, 1994



C. Van Hooste

L'Olympiade Mathématique Belge

L'OMB est un vaste concours ouvert à **tous** les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième année. En fait, il s'agit de deux concours qui se déroulent en parallèle : la « mini-olympiade » réservée aux élèves des trois premières années et la « maxi-olympiade » destinée à ceux des trois dernières années. L'un et l'autre comportent trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Voici le calendrier de l'OMB pour cette année.

Mercredi 11 janvier 1995 :	éliminatoire
Mercredi 15 février 1995 :	demi-finale
Mercredi 05 avril 1995 :	finale
Samedi 06 mai 1995 :	proclamation

Bien entendu, ton professeur reçoit toutes les informations voulues sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions qui te brûlent les lèvres. Il se fera un plaisir d'y répondre.

Plus loin, tu trouveras quelques problèmes posés l'an dernier. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais aussi te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt pouvoir le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Sache qu'une seule d'entre elles est correcte.

Néanmoins, certaines questions n'ont aucune réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème n'hésite pas à le schématiser ; s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible.

La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es absolument sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 point pour une mauvaise réponse. Jusque là, rien de plus normal. Mais, quand tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois alors 2 points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut parfois mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin, tu dois aussi savoir qu'il faut répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Vingtième anniversaire

Cette année, l'OMB, cette épreuve majeure du calendrier scolaire, aura lieu pour la vingtième fois. Depuis sa création, son succès n'a cessé de grandir : de 760 participants lors de la première édition en 1975-76 jusqu'à 18 675 l'an dernier. Alors, pourquoi pas toi ?

Les problèmes qui suivent proviennent de différents questionnaires de l'an dernier. Une solution détaillée est proposée pour chaque question. Mais, il est préférable que tu ne la consultes pas avant d'avoir essayé de trouver la réponse correcte. D'ailleurs, tu le sais bien : « Essayer, c'est très souvent réussir, c'est toujours participer ! »

Éliminatoire Mini

Question 17 : À l'impossible nul n'est tenu !
La somme de trois nombres impairs consécutifs vaut 114. Quel est le plus grand de ces trois nombres ?

(A) 35 (B) 38 (C) 39 (D) 40
(E) Le problème n'a pas de solution.

Solution : Si on ajoute trois nombres impairs, on obtient forcément un nombre impair. Il est donc impossible que la somme de trois nombres impairs soit égale à 114. La réponse est **E**.

Question 22 : Croissez, belles plantes !

Une plante mesure 5 cm et double sa hauteur en une semaine, une autre mesure 0,5 mm et quadruple sa hauteur en une semaine. Au cours de quelle semaine, comptée à partir d'aujourd'hui, la deuxième plante dépassera-t-elle la première en hauteur ?

(A) la quatrième (B) la cinquième
(C) la sixième (D) la septième
(E) la huitième

Solution : Établissons un tableau comparatif des hauteurs (en mm) des deux plantes semaine après semaine.

	1^e plante	2^e plante
Aujourd'hui	50	0,5
Après 1 semaine	100	2
Après 2 semaines	200	8
Après 3 semaines	400	32
Après 4 semaines	800	128
Après 5 semaines	1 600	512
Après 6 semaines	3 200	2 048
Après 7 semaines	6 400	8 192

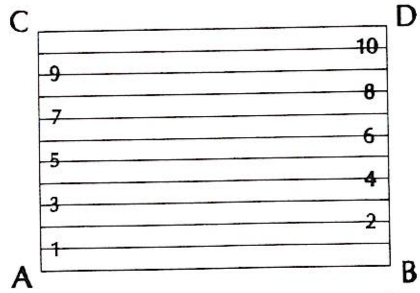
Ce tableau montre que la seconde plante dépasse la première en hauteur dans le courant de la septième semaine. La réponse est **D**.

Question 26 : Multipliez-vous, rectangles !

À l'intérieur d'un rectangle, traçons dix segments parallèles à un même côté et limités au bord du rectangle. Combien de rectangles avons-nous en tout dans ce dessin ?

(A) 10 (B) 11 (C) 55 (D) 66 (E) 132

Solution : Pour déterminer le nombre de rectangles que comprend la figure ci-dessous, on compte d'abord le nombre de rectangles admettant comme base inférieure le côté $[AB]$, puis on recommence pour chacun des dix segments tracés à l'intérieur du rectangle $ABCD$.



Base inférieure	Nbre de rectangles
$[AB]$	11
1^{er} segment	10
2^e segment	9
$\vdots$	$\vdots$
10^e segment	1

Au total, il y a donc

$$11 + 10 + 9 + \ldots + 1 = 66$$

rectangles dessinés dans la figure. La réponse est **D**.

Bon à savoir :

Il existe une formule qui permet de calculer la somme des n premiers naturels non nuls :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Si tu ne parviens pas à démontrer cette formule, fais-toi aider par ton professeur.

Question 27 : Et pourtant, ça tourne !

La roue A d'un engrenage possède 24 dents et entraîne directement la roue B qui a 40 dents. Si la roue A effectue x tours par minute et la roue B effectue y tours par minute, alors $\frac{x}{y} =$

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{960}{64}$ (D) $\frac{64}{960}$
(E) une autre réponse

Solution : En une minute, la roue A « avance » de $24x$ dents tandis que la roue B « avance » de $40y$ dents. Comme la première entraîne la seconde, elles doivent évidemment « avancer » d'un même nombre de dents en un même laps de temps. Dès lors, nous avons

$$24x = 40y \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{y} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

La réponse est **B**.

Éliminatoire Maxi

Question 13 : Peu importe les solutions, la réponse suffit !

L'équation $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$ dans $\mathbb{R}$

(A) admet une unique solution
(B) admet exactement deux solutions
(C) a 0 pour somme de ses solutions
(D) a 5 pour somme de ses solutions
(E) a 6 pour produit de ses solutions.

Il n'est pas nécessaire de savoir résoudre cette équation pour répondre à la question. En effet, partant du fait que deux réels opposés ont la même valeur absolue, on déduit que, si un certain réel est solution de l'équation proposée, alors son opposé l'est aussi. Il s'ensuit que la somme des solutions de cette équation est nécessairement 0.

Il se pourrait aussi que l'équation ne possède pas de solution, mais cette éventualité ne figure pas dans la liste des réponses proposées. Idéalement, il vaut mieux résoudre l'équation. En posant $y = |x|$, l'équation devient

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Celle-ci admet deux solutions 2 et 3. D'où, l'équation proposée est équivalente à

$$|x| = 2 \quad \vee \quad |x| = 3$$

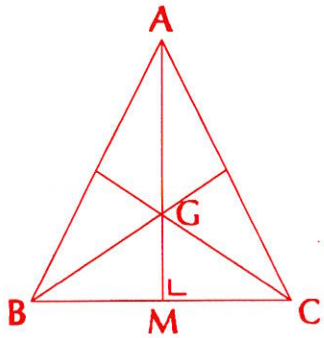
Ses solutions sont donc les réels -3, -2, 2 et 3. Et la somme de ces réels est nulle. La réponse est **C**.

Question 18 : Où est le centre de gravité ?

Si ABC est un triangle isocèle avec $|AB| = |AC| = x$ et $|BC| = y$, la distance du centre de gravité au sommet C vaut

(A) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{36}y^2$ (B) $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8y^2}$
(C) $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}y^2}$ (D) $\frac{1}{6}\sqrt{4x^2 + y^2}$
(E) $\frac{4}{3}x^2 + 6y^2$

Solution : Appelons G le centre de gravité du triangle ABC et M le milieu du côté $[BC]$ (voir figure).



Le triangle MGC est rectangle en M. En y appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$$|GC|^2 = |MG|^2 + |MC|^2 \quad (1)$$

Or, le centre de gravité d'un triangle se trouve sur chaque médiane, aux deux tiers de celle-ci à compter du sommet. Ainsi, $|MG| = \frac{1}{3}|AM|$ et l'égalité (1) devient

$$|GC|^2 = \frac{1}{9}|AM|^2 + |MC|^2 \quad (2)$$

En appliquant ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle MAC, rectangle en M, on obtient

$$|AM|^2 = |AC|^2 - |MC|^2$$

et l'égalité (2) devient successivement

$$\begin{aligned} |GC|^2 &= \frac{1}{9}\left(|AC|^2 - |MC|^2\right) + |MC|^2 \\ &= \frac{1}{9}\left(|AC|^2 + 8|MC|^2\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(x^2 + 8y^2\right) \end{aligned}$$

D'où, on tire

$$|GC| = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8y^2}$$

La réponse est **B**.

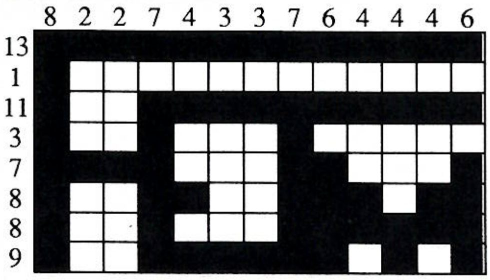
Tu trouveras d'autres problèmes avec leur solution dans ton prochain *Math-Jeunes*. À bientôt ...

Solutions des jeux

Le mot caché (par CéVé)

Le groupe de mots à retrouver était *Math Jeunes*

Les carrés sympathiques



L'addition cachée

C=1, E=0, I=5, N=3, O=2, Q=6, S=8, X=4, Z=9

Produits croisés

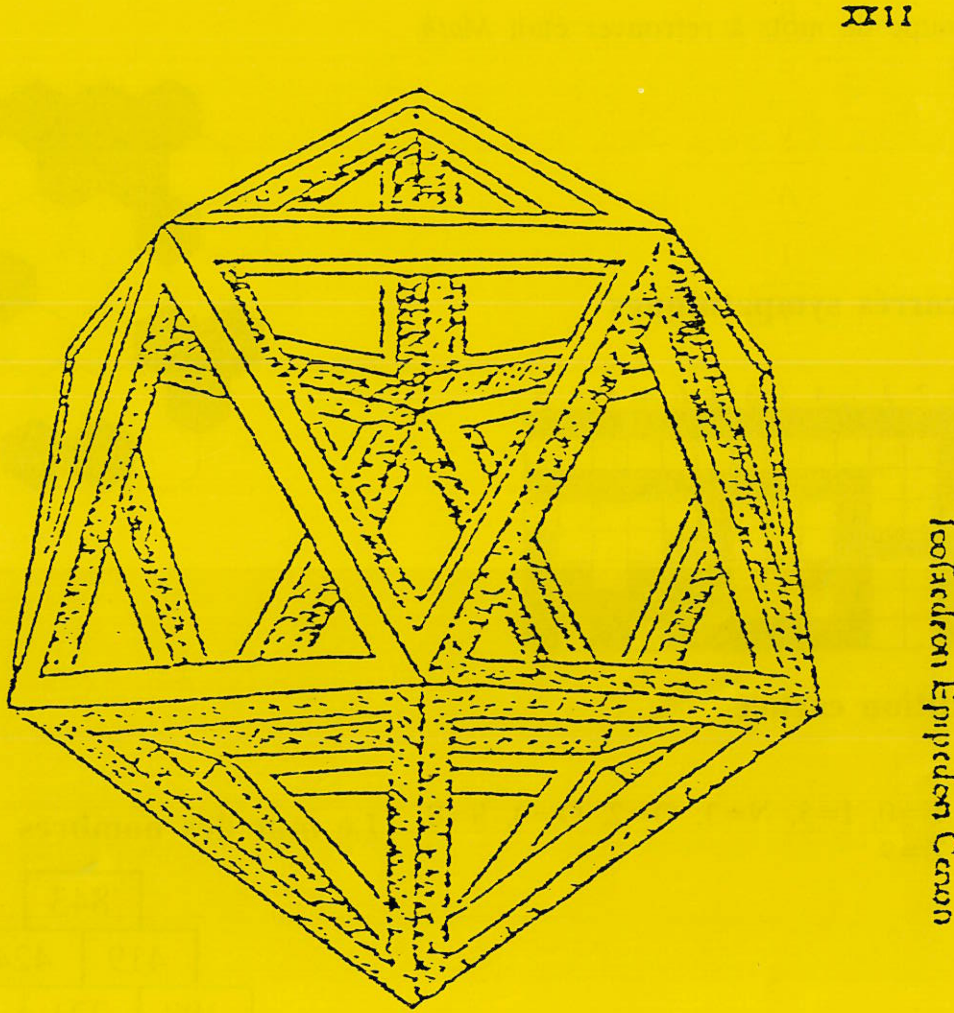
	1	2	3	4	5	6
1	B	R	U	N	E	S
2	R	E		O	N	U
3	I	V	A	N		I
4	D	A	I	N	E	S
5	G	I	L	E	T	S
6	E	T	E	S		E

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le mur des nombres

843				
419	424			
198	221	203		
105	93	128	75	
87	18	75	53	22

435				
220	215			
116	104	111		
66	50	54	57	
47	19	31	23	34



Dessin de LEONARDO DA VINCI pour l'édition de 1509
du *De divina proportione* de LUCA PACIOLI