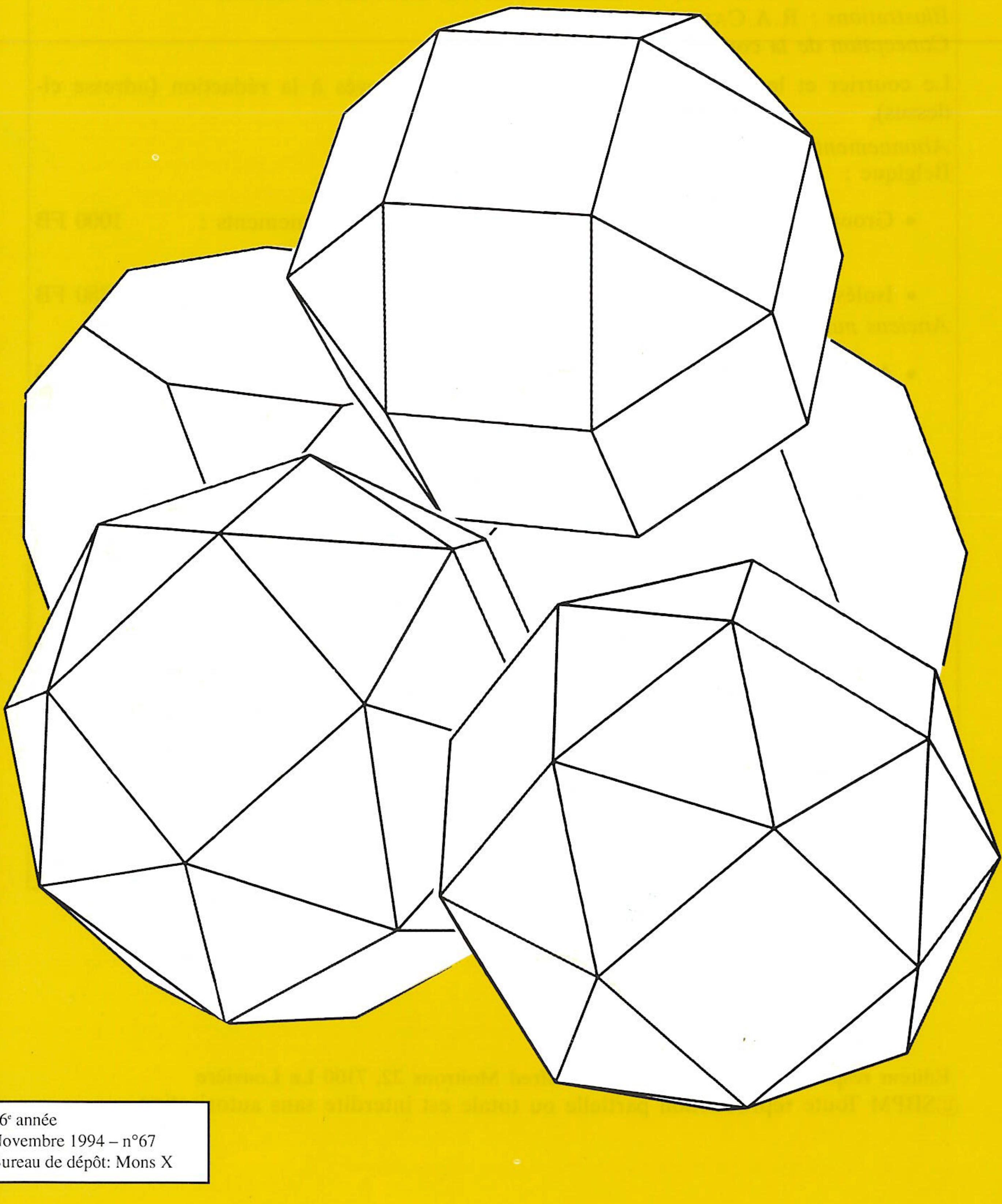
MATH-JEUNES



16e année
Novembre 1994 – n°67
Bureau de dépôt: Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIERE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Etranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1990	Par numéro : 10 FB (Etranger : 20 FB)
• Années 90/91, 91/92	Par année : 50 FB (Etranger : 100 FB)
• Années 92/93, 93/94	80 FB (Etranger : 160 FB)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).

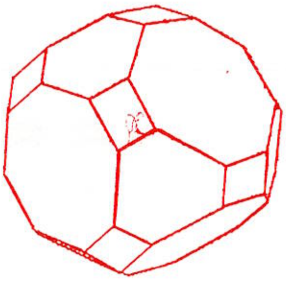
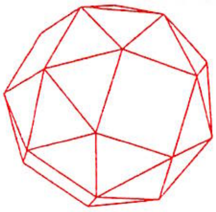
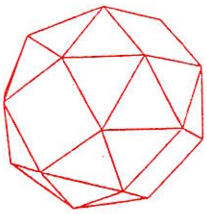
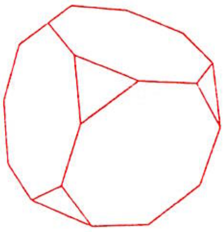
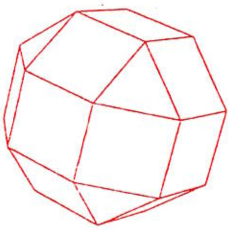
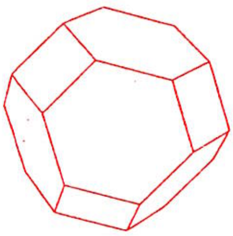
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°67 Seizième année 1994

Math-Jeunes


Math-Jeunes n°67, 18–19, 1994

À propos des élections d'octobre

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

Le 9 octobre 1994 dernier, tous les citoyens belges ayant le droit de vote se sont rendus aux urnes à l'occasion des élections destinées à renouveler les conseils communaux en Belgique. À cette occasion, chaque électeur peut accorder une et une seule voix à la liste de son choix, cette liste représentant un parti ou (rarement) un groupement de partis. Cela peut se réaliser par un vote de liste (pour la liste telle qu'elle se présente à l'électeur) ou par un vote nominatif (en faveur d'un ou plusieurs candidats d'une même liste). Il faut noter au passage que, contrairement à une affirmation répandue, le vote n'est pas obligatoire. Ce qui l'est réellement c'est le fait de se présenter au bureau de vote. Chacun fait ce qu'il lui plaît dans l'isoloir, y compris le fait de ne pas exprimer de vote. Lors du dépouillement du scrutin, on détermine le chiffre électoral de chaque liste : c'est le nombre de votes qui lui ont été attribués. Ensuite, un nombre déterminé de sièges sont répartis entre les listes.

Mais savez-vous comment se passe cette répartition ?

Le système électoral belge prévoit une distribution « à la proportionnelle » : chaque liste devrait donc recevoir un nombre de sièges proportionnel à son chiffre électoral. Toutefois, il n'est pas possible de respecter exactement les proportions : on ne coupe pas un siège en deux ou trois ou ... ! Une « méthode » a donc été mise au point, permettant de répartir les sièges aussi équitablement que possible. Il n'est pas toujours facile de comprendre le principe de cette méthode. Nous allons l'expliquer sur base d'un exemple ; les calculs sont facilement transposables aux situations réelles.

Supposons que dans une commune, 5 000 votes valables aient été enregistrés et qu'ils soient répartis entre cinq listes A, B, C, D et E, de la manière suivante :

A	B	C	D	E
980	1890	1224	261	645

Les pourcentages des votes obtenus par ces listes sont faciles à calculer. On obtient :

A	B	C	D	E
$19,6\%$	$37,8\%$	$24,48\%$	$5,22\%$	$12,9\%$

Si seize sièges sont disponibles et si on les répartit selon les pourcentages précédents, on obtient:

Liste	A	B	C	D	E
Siège(s)	$3,136$	$6,048$	$3,916$	$0,835$	$2,064$

Bien entendu, il n'est pas possible de donner à chacun ce nombre exact de sièges qui lui revient.

On peut arrondir ces nombres à leurs parties entières, ce qui donne, dans un premier temps :

Liste	A	B	C	D	E
Siège(s)	3	6	3	0	2

puis attribuer les deux derniers sièges aux listes dont les parties décimales des pourcentages de voix sont les plus élevées. De cette façon, la liste A recevrait trois sièges, la liste B en recevrait six, la liste C, quatre, la liste D, un, et la liste E hériterait de deux sièges, ce qui n'est pas choquant sur le plan de la représentation proportionnelle aux résultats du scrutin.

Dans la réalité, il en va autrement. Pour calculer la « part » de chaque liste, la loi prévoit que l'on divise son chiffre électoral successivement par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc, en négligeant les parties décimales, jusqu'à ce que les seize quotients les plus importants apparaissent. Ces quotients attribuent chacun un siège à leur liste, le numéro de ce siège correspondant à l'importance du quotient. Dans notre exemple, cela donne le tableau suivant (les nombres ont été arrondis) :

	A	B	C	D	E
Votes	980	1890	1224	261	644
$\div 2$	490	945	612	130	322
$\div 3$	326	630	408	87	214
$\div 4$	245	472	306	65	161
$\div 5$	196	378	244	52	128
$\div 6$	163	315	204	43	107
$\div 7$	140	270	174	37	92
$\div 8$	122	236	153	32	80
$\div 9$	108	210	136	29	71

Les seize quotients soulignés sont les plus importants. Au cas où des quotients entiers sont égaux, les divisions correspondantes sont poussées dans les parties décimales.
Dans le cas de l'exemple, la répartition des sièges se fera comme suit :
Liste A : 3 sièges, n° 4, 8, 13
Liste B : 7 sièges, n° 1, 2, 5, 7, 10, 12, 15
Liste C : 4 sièges, n° 3, 6, 11, 14
Liste D : 0 siège
Liste E : 2 sièges, n° 9, 16

Comme vous pouvez le constater, cette façon de répartir les sièges n'est pas tout à fait dans l'esprit d'une « proportionnalité ». Les listes ayant réalisé les plus gros scores semblent avantagées. Existe-t-il un système qui soit vraiment meilleur ? Cette méthode est quand même assez proche de la véritable proportionnalité. De toute façon, il n'est pas possible de satisfaire tout le monde !
Question : dans le cas de l'exemple utilisé, combien de votes en sa faveur une liste doit-elle obtenir pour emporter les seize sièges ? À vos calculettes !
Une solution (à ne pas consulter trop vite) se trouve ci-contre.

Le cas le plus défavorable à une liste A qui brigue les seize sièges est qu'une seule autre liste B ait recueilli les autres votes non favorables à A. Si x désigne le nombre de votes favorables à A, le nombre de votes favorables à B est donc $5\,000 - x$. Le seizième quotient de la liste A est $\frac{x}{17}$, le premier quotient de la liste B est $\frac{5000-x}{2}$.
Il faut donc

$$\begin{aligned} \frac{x}{17} &> \frac{5\,000 - x}{2} \\ 2 \cdot x &> 85\,000 - 17 \cdot x \\ 19 \cdot x &> 85\,000 \\ x &> \frac{85\,000}{19} \\ x &> 4\,473,6842\ldots \end{aligned}$$

La liste A sera certaine, dans le cas le plus défavorable, d'emporter les seize sièges à partir du moment où elle recueille 4 474 votes en sa faveur. Vérifions :

$$\frac{4\,474}{17} = 263,1764\ldots$$
$$\frac{526}{2} = 263.$$

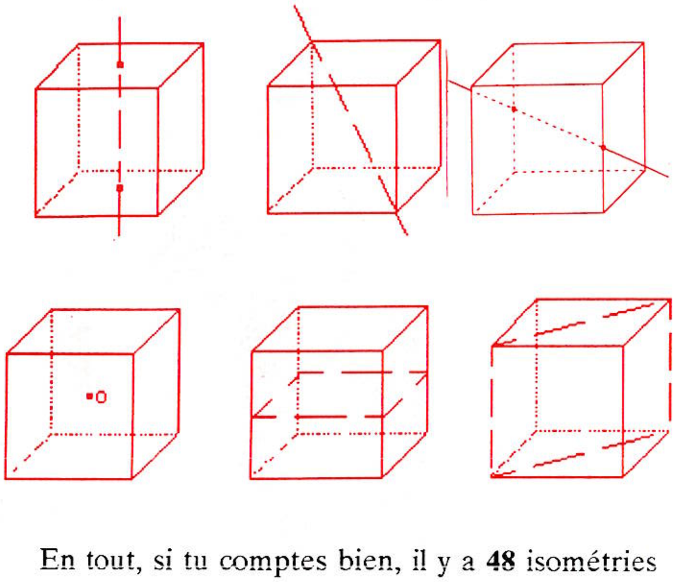
Math-Jeunes n°67, 20–21, 1994

Les polyèdres (suite)

C. Festraets, *Athénée Royal de Woluwé-St-Pierre*

Considérons un cube de centre O. Quelles sont les isométries qui appliquent ce cube sur lui-même ?

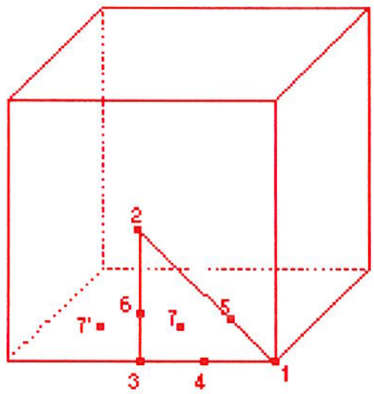
La transformation identique, bien entendu ! Les rotations autour d'une droite joignant les centres de deux faces opposées (un quart de tour, un demi-tour, trois quarts de tour), les rotations autour d'une droite joignant deux sommets opposés (un tiers de tour, deux tiers de tour), les rotations autour d'une droite joignant les milieux d'arêtes opposées (un demi-tour). Si tu comptes bien, tu trouves 24 rotations (identité incluse). Il y a 24 autres isométries qui ne sont pas des rotations et qu'on obtient en composant les 24 rotations ci-dessus avec la symétrie centrale de centre O. Parmi ces vingt-quatre « non » rotations, il y a les symétries par rapport à un plan médian, les symétries par rapport à un plan diagonal et 14 isométries plus difficiles à visualiser (fais-toi éventuellement aider par ton professeur de mathématiques).



En tout, si tu comptes bien, il y a **48** isométries différentes.

Si on détermine les images d'un point P quelconque de l'espace par ces 48 transformations, on obtient un ensemble d'au plus 48 points (*au plus*, car deux images peuvent coïncider !) que l'on appelle l'**orbite** du point P.

Imaginons un cube centré en O et dont une face contient notre point P (ce cube est homothétique au cube que nous avons fixé au départ). Où P se trouve-t-il ? Il y a **sept** positions possibles numérotées de 1 à 7 sur la figure ci-dessous : en un sommet, au centre d'une face, au milieu d'une arête, sur une arête mais pas au milieu ni en une extrémité, sur une diagonale de face mais pas en son milieu ni en une extrémité, sur une médiane mais pas en son milieu ni en une extrémité, sur une face mais pas sur un côté ni sur une diagonale ni sur une médiane.

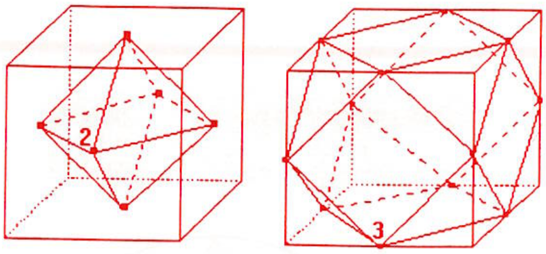


Quelles sont les orbites de P lorsqu'il occupe ces différentes positions ? Pour chacune des sept orbites obtenues, tu joindras alors les sommets de l'orbite par une arête à chacun de ses voisins les plus proches et tu obtiendras les polyèdres suivants ...

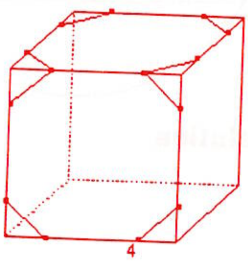
Pour 1, c'est facile : les images d'un sommet du cube sont les sommets du cube. L'orbite est donc l'**ensemble des huit sommets du cube** ci-dessus.

Pour 2, c'est presque aussi simple : les images du centre d'une face sont les centres des six faces. Et l'orbite détermine un **octaèdre**.

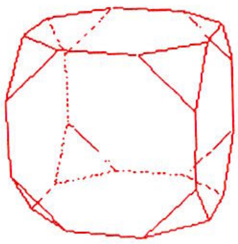
Pour 3, on obtient un **cuboctaèdre**, l'orbite comprend **douze** points qui sont les milieux des arêtes.



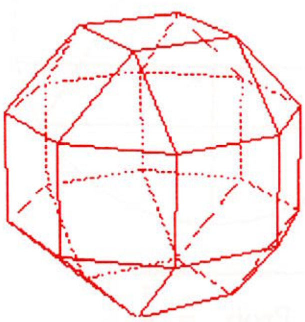
Ce dernier polyèdre a toutes ses faces qui sont des polygones réguliers : carrés ou triangles équilatéraux. C'est ce que l'on appelle un **polyèdre semi-régulier**.
Voici les images du point 4 dans la face supérieure et dans la face de devant du cube.

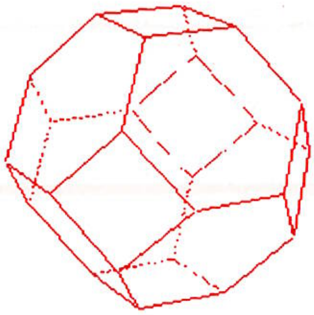


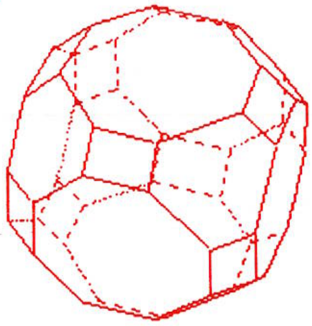
Essaie de compléter cette figure, tu obtiendras un **cube tronqué** (l'orbite comprend 24 points).



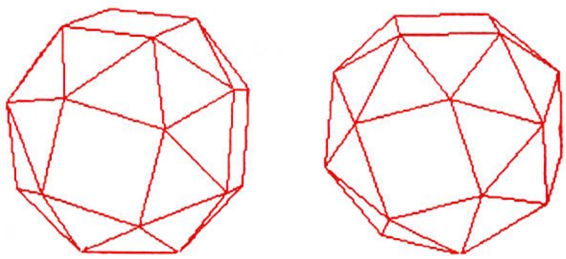
Les points 5, 6 et 7 nous fournissent respectivement le **rhombicuboctaèdre**, l'**octaèdre tronqué** et le **cuboctaèdre tronqué**.







Ces quatre derniers polyèdres ne sont semi-réguliers qu'à la condition d'avoir comme faces des polygones réguliers.
Pour t'exercer :
(1) après avoir dessiné un cube en perspective, construis les orbites des points 5, 6 et 7 ;
(2) sur les figures ci-dessus, repère les polyèdres qui te paraissent être semi-réguliers ;
(3) calcule où il faut placer le point 4 pour que le cube tronqué soit semi-régulier.
Si on utilise uniquement les rotations (et pas les symétries), alors, en partant du point 7 et du point 7' (symétrique du point 7 par rapport à la médiane du carré), on détermine un dernier type de polyèdre (semi-régulier lorsque ses faces sont des carrés et des triangles équilatéraux) : le **snub cube** (ou cube adouci), **snub cube droit** pour 7 et **snub cube gauche** pour 7'. Chacun des deux est l'image de l'autre dans un miroir (cf. si tu regardes ta main droite dans un miroir, elle devient une main gauche et inversement.)



Il existe donc **six** types de **polyèdres semi-réguliers** issus du cube.

Math-Jeunes n°67, 22–23, 1994

Le paradoxe de Bertrand

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

Ce texte se propose d'illustrer, à l'aide d'un paradoxe célèbre, le fait que des définitions différentes du « hasard » (aussi légitimes l'une que l'autre) peuvent conduire à des solutions différentes d'un même problème. L'exemple est dû à J. BERTRAND ([1]) et est baptisé *Paradoxe de Bertrand* par Henri POINCARÉ. On raconte qu'un étudiant de ce dernier lui fit remarquer que cet exemple devrait servir d'avertissement à quiconque utilise, dans des situations concrètes, les résultats de recherches théoriques sans se soucier, d'abord, que les hypothèses à la base des solutions sont en accord avec des faits expérimentalement observés ! Le problème est le suivant :

On considère un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon R. On tire une corde « au hasard. » Quelle est la probabilité pour que la longueur de cette corde soit supérieure à celle du côté du triangle ?

Nous donnons ci-après **trois** solutions différentes de ce problème.

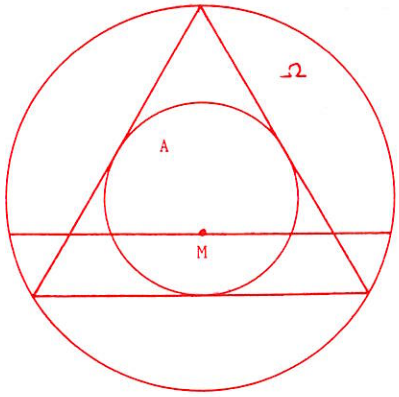
Première solution

Dans cette première solution, on considère que la longueur de la corde est déterminée par la position de son milieu.

Le choix de la corde peut donc consister à marquer un point à l'intérieur du cercle circonscrit.

Il est clair que la corde sera plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit si son point milieu M est intérieur au cercle (de rayon $\frac{R}{2}$) inscrit au triangle. Dès lors :

$$\text{Prob.} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

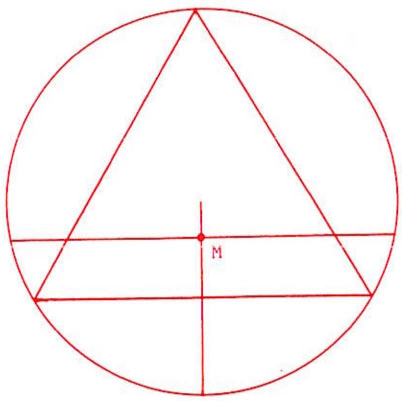


Deuxième solution

Ici, on considère que la longueur de la corde est déterminée par la distance de son milieu au centre du cercle.

On peut alors considérer que le milieu de la corde est pris sur un rayon donné du cercle et supposer que la répartition de ce point sur le rayon est uniforme.

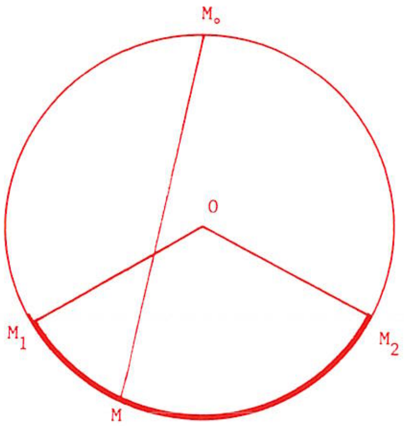
La corde sera plus longue que le côté du triangle équilatéral si son milieu est à une distance du centre inférieure à $\frac{R}{2}$. Il vient donc :



$$\text{Prob.} = \frac{1}{2}$$

([1]) Joseph Bertrand, *Calcul des Probabilités* – Paris 1889.

Troisième solution



Enfin, nous supposerons avoir fixé une des extrémités de la corde, soit M_0.

L'autre extrémité est choisie « au hasard » sur la circonférence circonscrite.

Si on admet que la probabilité pour que l'autre extrémité tombe sur un arc donné de la circonférence est proportionnelle à la longueur de cet arc, la corde M_0M est plus grande que le côté du triangle équilatéral quand M se trouve sur l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ dont la longueur est le tiers de celle de la circonférence ...
On a :

$$\text{Prob.} = \frac{1}{3}$$

Vous aurez remarqué que l'on s'intéresse ici à un ensemble Ω — non dénombrable — de résultats possibles et que le calcul s'appuie sur une « formule » que vous connaissez bien :

$$\textbf{Prob.} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorables}}{\textbf{Nombre de cas possibles}}$$

Cette approche des probabilités est connue sous le nom de « vision classique » des probabilités. Elle ne s'étend généralement pas aux cas où Ω est non dénombrable : elle a ses limites que l'exemple qui précède illustre assez bien.
Le paradoxe (trois résultats différents pour la même question) est lié à la non-compréhension du fait que des conditions expérimentales différentes conduisent, dans ce cas, à des mesures-probabilités différentes sur la même algèbre d'événements.

Bibliographie

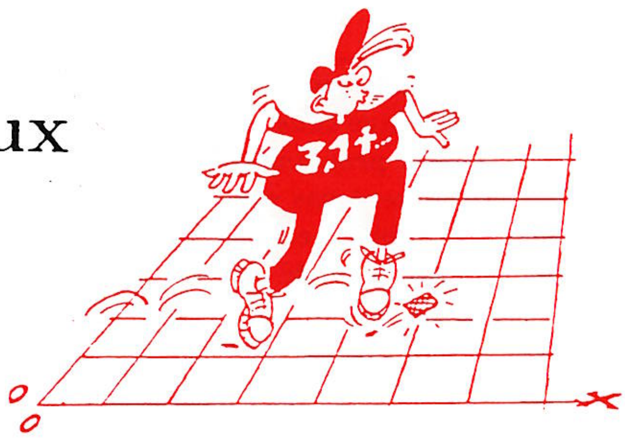
[1] E. PARZEN, *Modern Probability Theory and its Applications*, John Wiley, New York 1960.

[2] A. RENYI, *Calcul des Probabilités*, Dunod, Paris 1966.

[3] G. SAPORTA, *Probabilités — Analyse des données et Statistique*, Technip, Paris 1990.

Math-Jeunes n°67, 24–24, 1994

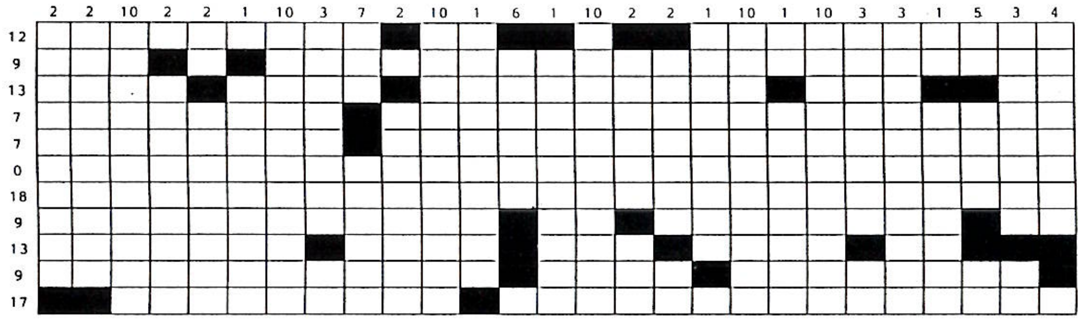
Jeux



A. Parent

Les carrés sympathiques (Cédric Parent)

Dans le rectangle quadrillé ci-dessous, un certain nombre de carrés ont été noircis. Mais seuls trente carrés noirs apparaissent, de l'encre sympathique ayant été utilisée pour les autres. Heureusement, sur chaque ligne et sur chaque colonne, on a compté le nombre de carrés noircis, qu'ils soient visibles ou non, puis on a écrit ce nombre en face de la rangée correspondante. Retrouve tous les carrés noirs.



L'addition cachée

En dépit de ce qu'on dit toujours, deux « faux » font un « vrai » si tu remplaces les lettres de l'addition ci-contre par des chiffres, sachant qu'à des lettres différentes sont associés des chiffres différents. Peux-tu trouver une solution ?

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ A\ U\ X} \\ +\ \mathrm{F\ A\ U\ X} \\ \hline \mathrm{J\ U\ S\ T\ E} \end{array}$$

Produits croisés

Sachant que chaque nombre correspond à un mot de la grille et représente le produit de la valeur de ses lettres (A=1, B=2, ..., Z=26), reconstitue une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Horizontalement
1. 630
2. 5 415
3. 38 000
4. 8 550

Verticalement
1. 4 500
2. 35 910
3. 760
4. 9 025

La Rédaction te souhaite une bonne et heureuse année civile 1995. Elle espère que ton année scolaire le sera tout autant !

L'existence d'un polyèdre régulier à douze faces (dodécagone) permet à André et Cédric Parent de t'offrir, dans cet encart central, un calendrier quelque peu original (à condition que tu veuilles effectuer les collages nécessaires). Si tu ne vois pas de quoi il s'agit, discutes-en avec ton professeur de Mathématiques ...

Ce polyèdre-calendrier t'aidera aussi à répondre aux questions qui te sont posées à la page 28 ...

Bonne année encore ...

et ...

À bientôt !

JANVIER

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

FEVRIER

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

MARS

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

AVRIL

L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

MAI

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

JUIN

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

JUILLET

L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

AOUT

L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

SEPTEMBRE

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

OCTOBRE

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

NOVEMBRE

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

DECEMBRE

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Si cela t'intéresse ...

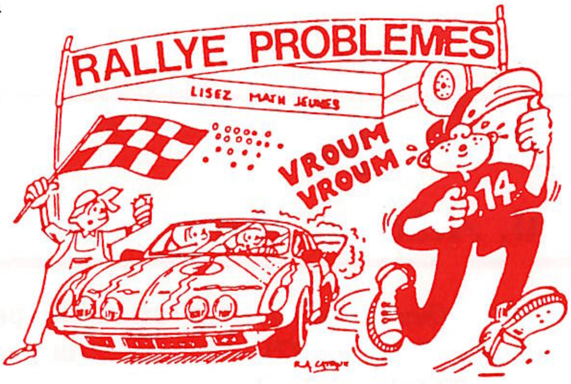
Publications de la S.B.P.M.e.f.

La S.B.P.M.e.f. est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ; elle édite notamment ta revue *Math-Jeunes* et organise l'*Olympiade Mathématique Belge.* Elle publie également des brochures que tu peux facilement te procurer en versant la somme indiquée sur le compte numéro :

000-0728014-29
S.B.P.M.e.f.
rue de Trazegnies 87
6230 Pont-à-Celles

Nous te proposons :

- **le « troisième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges » ; il comprend l'ensemble des questions posées entre 1988 et 1993. Il coûte 235 BEF (245 BEF pour l'étranger)**
- **« Mathématiques et Sports » ; dans cet ouvrage, Jacques BAIR montre de nombreuses applications des mathématiques dans le monde des sports. Les étudiants et les membres de la S.B.P.M.e.f. peuvent l'acquérir au prix de 200 BEF (230 BEF pour l'étranger).**



C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1994-1995. Rappelons que les trois premiers problèmes concernent (en principe) les élèves des trois classes inférieures et les trois derniers, les élèves des trois classes supérieures. Même si vous n'avez pu répondre qu'à un seul problème jusqu'à présent, ne vous découragez pas, vous pouvez encore figurer sur la liste des gagnants.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le n° 66 de *Math-Jeunes* et envoyez-les à C. FESTRAETS, 36 rue J.B. Vandercammen à 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 20 janvier 1995.

m4 Dans le plan, on donne un ensemble fini de points non tous alignés et tels que l'aire de tout triangle formé par trois de ces points est inférieure ou égale à 1. Démontrer qu'il existe un triangle d'aire inférieure ou égale à 4 et qui contient tous les points.

m5 Trois sacs contiennent des balles (pas nécessairement le même nombre). Seules les opérations suivantes sont autorisées :

(a) enlever simultanément une (et une seule) balle de chaque sac ;

(b) doubler le nombre de balles d'un (et d'un seul) sac.

Est-il possible de vider complètement les trois sacs en effectuant une suite de telles opérations, quel que soit le nombre de balles contenues au départ dans les sacs ?

m6 Jean dit : « je connais plusieurs nombres qui, quand on leur enlève le chiffre des unités, sont divisés par 13. » « Et moi », dit Pierre, « je connais beaucoup plus de nombres encore qui, quand on leur enlève le chiffre des unités, sont divisés par 10. » « Bah ! », dit Étienne, « moi, je connais un tas de nombres qui, quand on leur enlève le chiffre des unités, sont divisés par 9. » Est-ce possible ? Si oui, quels sont ces nombres ?

M4 Trois points A, B et C sont choisis au hasard sur un cercle. Quelle est la probabilité pour que le triangle ABC ait ses trois angles aigus ?

M5 Démontrer que, lorsqu'on divise par 12 le carré de tout nombre premier différent de 2 ou de 3, on obtient 1 comme reste.

M6 On considère la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ où $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$. De combien de façons peut-on écrire la fraction $\dfrac{1}{1995}$ comme somme d'un nombre fini de termes consécutifs de cette suite ?

Curieux, n'est-il-pas ?

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Dans son livre *Even more Mathematical Activities*, Cambridge University Press (1987), Brian Bolt, sous le titre **Think again !** nous propose ce petit problème :

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1

Quelle est la ligne suivante ?
Dans quelle ligne **4** apparaît-il pour la première fois ?

Dans le même bouquin, on trouve aussi **Some curious number relations :**

$$43 = 4^2 + 3^3$$
$$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3$$
$$518 = 5^1 + 1^2 + 8^3$$
$$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4$$

Peux-tu en trouver d'autres ?

Maurice Kraitchik propose dans ses *Mathematical Recreations*, Dover Publ. Inc. (1953) le problème suivant que Fibonacci, après bien d'autres auteurs indiens et arabes, avait déjà épinglé dans son fameux *Liber abbaci* (1202) :

Un chasseur rentrant bredouille et ayant par conséquent l'estomac dans les talons, rencontre deux bergers. L'un de ceux-ci a dans sa musette trois petits pains et l'autre, cinq. Les trois compères décident de manger ensemble et, de manière égale, les huit petits pains.
À la fin du repas, le chasseur fait ses adieux en laissant aux bergers 8 cents d'argent. Comment les deux bergers peuvent-ils se partager équitablement cette somme ?

Solution du problème proposé par André Parent à la page 28.

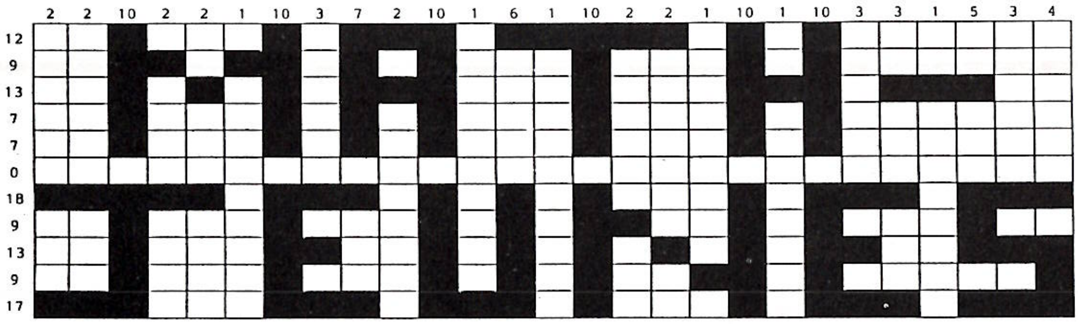
Le tableau reprend les numéros des faces (associés aux mois de l'année) selon le calendrier que tu as trouvé dans *Math-Jeunes*.

	Face	Face //	Σ nombres	Σ chiffres
I	1	7	8	8
II	2	10	12	3
III	3	9	12	12
IV	4	8	12	12
V	5	12	17	8
VI	6	11	17	8

La remarque de Michel : « Je ne peux pas les trouver ... » élimine la configuration I (sinon il déduirait que les numéros cherchés sont 1 et 7, seule possibilité dans cette hypothèse).
Guy (qui a tiré la même conclusion tout en ignorant le nombre écrit sur la feuille de Michel), précise alors : « Moi non plus ! » qui permet de supprimer la possibilité II.
La précision apportée alors par le directeur : « Vos nombres sont différents. » élimine les lignes III et IV.
Enfin la dernière information : « Un des chiffres de la somme des deux nombres que je vous ai communiqués est un des numéros à trouver » leur permet, après le calcul de cette somme (25 en notant que Guy et Michel connaissent alors les deux nombres, toi aussi d'ailleurs), de déduire que 5 est un des numéros et la face parallèle porte le numéro 12.
La dernière remarque de Guy et Michel : « le hasard fait quand même bien les choses » fait allusion au fait qu'un dodécaèdre possède **12** faces qui ont chacune **5** côtés !!!

Solutions des jeux

Les carrés sympathiques



Cédric PARENT

L'addition cachée

A=3, E=4, F=9, J=1, S=7, T=6, U=8, X=2

Produits croisés

	1	2	3	4
1	C	U	B	E
2	O	S	A	S
3	T	E	T	S
4	E	R	S	E

 Math-Jeunes n°67, 28–28, 1994

Dodéca. – Promo

André Parent, *Lycée de Mouscron*

Lecteur assidu de *Math-Jeunes*, le directeur d'une agence publicitaire ([1]), projette de réaliser un presse-papier ayant la forme d'un dodécaèdre régulier, *polyèdre formé de douze faces pentagonales régulières et ...* (voir *Math-Jeunes* n° 66), *un des* **cinq** *solides de Platon (427–347 av. J.-C.)*

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ou S.B.P.M.e.f. accepte la proposition d'acheter l'emplacement sur deux faces parallèles du solide. Le directeur de la firme, ancien lauréat de l'Olympiade Mathématique Belge (O.M.B.) ([1]), décide d'utiliser la même configuration que celle du calendrier 1995 de ta revue préférée, et de numéroter les faces de la même manière que les mois du calendrier. Il propose même la gratuité ([1]) si deux responsables de la S.B.P.M.e.f. découvrent les numéros des deux faces résultant d'un tirage au sort.

Le Directeur remet à Michel une feuille sur laquelle est écrite la somme des nombres correspondant aux numéros des faces, et à Guy une autre feuille sur laquelle est écrite la somme des chiffres qui constituent ces mêmes numéros.

Michel : « Je ne peux pas les trouver ... »

Guy : « Moi non plus ! »

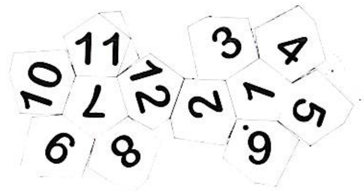
Le Directeur : « Vos nombres sont différents. »

Michel et Guy (ensemble) : « Je ne suis toujours pas capable de les trouver ! »

Le Directeur : « Un des chiffres de la somme des deux nombres que je vous ai communiqués est un des numéros à trouver. »

Aussitôt Michel et Guy écrivent les deux numéros corrects sur leur feuille en se disant que le hasard fait quand même bien les choses.

Trouveras-tu également ces deux numéros ? Quel est le sens de la dernière remarque de Guy et Michel : « le hasard fait quand même bien les choses » ?



Solution des problèmes proposés par Michel Ballieu à la page 26.

Pour le premier problème qui t'est proposé, observe bien l'avant-dernière ligne et compte les chiffres qui y figurent :
il y a un « 3 » et un « 1 » et deux « 2 » et deux « 1 ».
Remplace chaque chiffre écrit en toutes lettres par **ce** chiffre ; tu obtiens :

1 3 1 1 2 2 2 1

ce qui est bien la dernière ligne !

Cette dernière ligne comporte :
un « 1 » et un « 3 » et deux « 1 » et trois « 2 » et un « 1 »
ce qui donne, en agissant de la même manière

1 1 1 3 2 1 3 2 1 1

En ce qui concerne la deuxième partie de la question ... Réfléchis deux secondes et tu t'apercevras qu'aucun chiffre ne peut apparaître quatre fois !

Voici d'autres curieuses relations entre des nombres :

$$\begin{aligned} 63 &= 6^2 + 3^3 \\ 175 &= 1^1 + 7^2 + 5^3 \\ 598 &= 5^1 + 9^2 + 8^3 \\ 1306 &= 1^1 + 3^2 + 0^3 + 6^4 \\ 1676 &= 1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4 \end{aligned}$$

Quant au problème du chasseur et des bergers, la réponse est la suivante : le premier berger a droit à un cent tandis que le second empoche sept cents. Discutes-en avec ton professeur de mathématiques !

([1]) Scénario de math-fiction, bien entendu.

Math-Jeunes n°67, 29–32, 1994

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

C. Van Hooste

Voici d'autres problèmes qui figuraient au menu de l'Olympiade Mathématique Belge de l'année dernière. Une solution détaillée t'est encore proposée pour chaque question. Mais, rappelle-toi, il est préférable que tu ne la consultes pas avant d'avoir essayé de trouver toi-même la réponse correcte.

Éliminatoire Maxi

Question 25 : Course contre la montre

À 16 heures précises, un coup de téléphone anonyme annonce qu'une bombe explosera lorsque les aiguilles de l'horloge de la gare (d'un cycle de 12 heures) seront superposées pour la première fois. Quel est, à une seconde près, le temps qu'il reste pour désamorcer la bombe ?

(A) 21 min. et 24 sec. (B) 21 min. et 30 sec.
(C) 21 min. et 36 sec. (D) 21 min. et 49 sec.
(E) 22 minutes

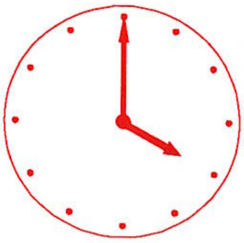


Fig. 1a : 16 heures

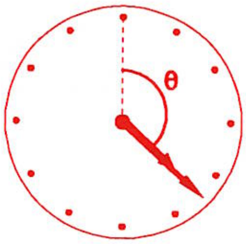


Fig. 1 b
Aiguilles superposées

Solution : Soit x le temps, exprimé en minutes, nécessaire pour que les aiguilles passent de la position « 16 heures » à celle où elles sont superposées (entre 16 et 17 heures).
Exprimons l'angle θ représenté sur la figure 1b de deux manières différentes.
Remarquons d'abord qu'à 16 heures précises, la grande aiguille se trouve sur la position 12 de l'horloge et la petite sur la position 4 de l'horloge. Un angle de 120° sépare ces deux positions (cf. fig. 1a).
La grande aiguille tourne de 360° en 60 minutes, donc de 6° par minute. Par conséquent, $\theta = 6x$.
De son côté, la petite aiguille avance de 360° en 12 heures, donc de $0,5°$ par minute. D'où $\theta = 120 + \frac{x}{2}$.
Il suffit à présent de résoudre l'équation

$$6x = 120 + \frac{x}{2}$$

On obtient $x = \frac{240}{11}$.
Comme $\frac{240}{11} = 21 + \frac{9}{11}$, il reste 21 minutes et 49 secondes, à la seconde près, pour désamorcer la bombe. La réponse est **D**.

Demi-finale Mini

Question 8 : Errare humanum est

Luc a voulu multiplier un nombre par 6, mais l'a plutôt divisé par 6. Ensuite, il a voulu ajouter 14 au résultat, mais a plutôt soustrait 14. Après ces erreurs, il a obtenu 16. Si aucune erreur n'avait été commise, le résultat aurait été

(A) inférieur à 400 (B) entre 400 et 600
(C) entre 600 et 800 (D) entre 800 et 1 000
(E) plus grand que 1 000.

Solution : Découvrons d'abord le nombre de départ. Appelons-le N. D'après ce qui est dit, Luc a divisé N par 6, a ensuite soustrait 14 au résultat et a finalement obtenu 16 :

$$\frac{N}{6} - 14 = 16$$

Cette égalité donne successivement

$$\frac{N}{6} = 30 \quad \text{ou} \quad N = 180$$

Repartons de ce nombre et effectuons les opérations que Luc aurait dû réaliser :

$$180 \times 6 = 1\,080 \text{ et } 1\,080 + 14 = 1\,094$$

La réponse est **E**.

Question 18 : Attention, l'échelle glisse !

Une échelle de 5 m de long est posée contre un mur, à une hauteur de 3 m (cf. fig. 2). Si l'extrémité supérieure de l'échelle descend de 2 m le long du mur, son autre extrémité parcourt sur le sol une distance (exprimée en m) de

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{24}$ (D) $2\left(\sqrt{6}-2\right)$
(E) une autre réponse.

Solution : La figure 2 montre les deux positions de l'échelle.

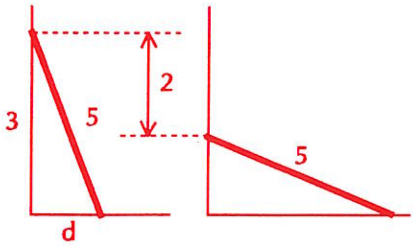


Fig. 2

Il faut d'abord déterminer la distance d entre le mur et le pied de l'échelle avant que celle-ci ne glisse. Puis, calculer la distance D entre le mur et le pied de l'échelle après le glissement. La différence entre D et d représente la distance parcourue par le pied de l'échelle sur le sol.
Il s'agit d'applications simples du théorème de Pythagore dans deux triangles rectangles :

$$d^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \text{ et } D^2 = 5^2 - 1^2 = 24$$

D'où, $d = 4$, $D = \sqrt{24}$ et

$$D - d = \sqrt{24} - 4 = 2\sqrt{6} - 4 = 2\left(\sqrt{6}-2\right)$$

La réponse est **D**.

Question 29 : (sans réponse préformulée)
Si un nombre de quatre chiffres s'écrit $xxyy$ (en base 10) et est un carré parfait, de quel nombre est-il le carré ?
Solution : On peut écrire

$$\begin{aligned} \overline{xxyy} &= 1\,000x + 100x + 10y + y \\ &= 1\,100x + 11y \\ &= 11 \cdot (100x + y) \end{aligned}$$

Ceci montre que $xxyy$ est nécessairement un multiple de 11. Mais alors, étant un carré, $xxyy$ contient au moins deux fois le facteur 11. Il s'ensuit que $100x + y$ est lui-même multiple de 11.
Rappelons le **critère de divisibilité par 11** : « *un entier est divisible par 11 lorsque la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est elle-même divisible par 11* ».
Ainsi, le nombre 72 809 est divisible par 11 car

$$(7 + 8 + 9) - (2 + 0) = 22$$

est divisible par 11.
Or, $100x + y$ s'écrit en notation décimale $x0y$. D'après le critère, ce nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme $x + y$ est aussi divisible par 11. Ne pouvant atteindre 22 (car x et y valent au plus 9), cette somme est forcément égale à 11.
Ainsi, $x0y$ est l'un des nombres suivants :

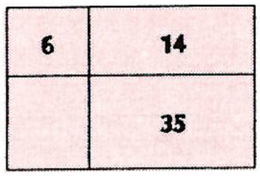
$$209 = 11 \times 19, \quad 308 = 11 \times 28,$$
$$407 = 11 \times 37, \quad 506 = 11 \times 46,$$
$$605 = 11 \times 55, \quad 704 = 11 \times 64,$$
$$803 = 11 \times 73 \text{ ou } 902 = 11 \times 82.$$

Toutefois, $xxyy$ doit être un carré. Alors, le quotient de $x0y$ par 11 doit aussi être un carré. Ainsi,
$\overline{xxyy} = 11 \times \overline{x0y} = 11 \times 11 \times 64 = (11 \times 8)^2 = 88^2$
La réponse est **88**.

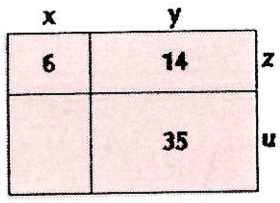
Demi-finale Maxi

Question 2 : Quelle aire a-t-il donc ?
Un rectangle est partitionné en quatre sous-rectangles par deux segments parallèles à ses côtés. Les aires de trois des sous-rectangles sont indiquées sur la figure ci-dessous. Quelle est l'aire du quatrième sous-rectangle ?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 21 (E) 25



Solution : Désignons par x, y, z et u les dimensions des sous-rectangles (cf. figure).



D'après les données relatives aux aires des sous-rectangles, nous avons

$$\begin{cases} x \cdot z = 6 \\ y \cdot z = 14 \\ y \cdot u = 35 \end{cases}$$

D'où, nous tirons l'aire du quatrième sous-rectangle :

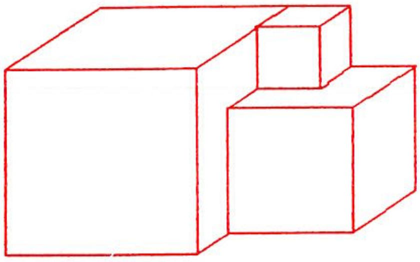
$$x \cdot u = \frac{(x \cdot z) \cdot (y \cdot u)}{y \cdot z} = \frac{6 \cdot 35}{14} = 15$$

La réponse est **B**.

Question 11 : Jeu de cubes
Trois cubes de volumes 1, 8 et 27 sont collés suivant des faces. La plus petite surface de la configuration qu'il est possible d'obtenir ainsi vaut

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 21 (E) 25

Solution : Notons d'abord que les arêtes des trois cubes ont respectivement pour mesures 1, 2 et 3. La configuration pour laquelle la surface totale devient minimale est atteinte lorsque les trois cubes ont deux à deux une face accolée. Une telle configuration est représentée sur la figure ci-dessous. La surface de celle-ci s'obtient en additionnant d'abord les surfaces des trois cubes, puis en soustrayant de ce résultat deux fois la somme des surfaces de contact :



$$6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) - 2 \cdot (1^2 + 1^2 + 2^2) = 72$$

La réponse est **D**.

Question 24 : Ne nous écartons pas trop de la moyenne !

Un échantillon de 5 valeurs entières a 10 pour moyenne et 12 pour médiane. La plus petite étendue possible d'un tel échantillon (écart entre les valeurs extrêmes) est

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 10

Solution : Appelons a, b, c, d et e les cinq nombres, classés par ordre croissant et constituant l'échantillon.
Rappelons que la médiane d'une suite statistique de nombres est le nombre qui se trouve au centre de cette suite lorsque l'effectif est impair.
Pour satisfaire aux conditions imposées, nous devons avoir

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 10 \quad \text{et} \quad c = 12.$$

De là, on tire $a+b+d+e = 38$.
Comme d et e sont supérieurs à 12, on a $d+e \geqslant 24$. D'où, $a+b \leqslant 14$. Pour que les nombres a et e s'écartent le moins possible de la médiane, il faut prendre $a = b = 7$ et $d = e = 12$.

C'est alors que l'étendue de la suite est la plus petite possible ; elle vaut

$$e - a = 12 - 7 = 5.$$

La réponse est **C**.

Finale Mini

Question 3 : Fiat lux et lux fuit

Trente-huit lampes numérotées de 1 à 38 sont disposées en cercle autour d'une lampe centrale numérotée 0. Ces lampes forment des groupes de quatre :

$$\{0,1,2,3\},\ \{0,3,4,5\},\ \{0,5,6,7\},\ \ldots,\ \{0,35,36,37\},\ \{0,37,38,1\}$$

et deux opérations sont réalisables :

(α) éteindre les quatre lampes d'un même groupe ;

(β) changer l'état de chacune des lampes d'un même groupe (c'est-à- dire, une lampe allumée est atteinte, une lampe éteinte est allumée).

Tout état initial des 39 lampes est-il transformable par une suite de telles opérations en :

(a) l'état où toutes les lampes sont allumées ?

(b) l'état où seule la lampe numéro 0 est allumée ?

Solution : Pour réduire les écritures, numérotons les groupes

$$G_1 = \{0,1,2,3\},\ G_2 = \{0,3,4,5\},\ \ldots,$$
$$G_{18} = \{0,35,36,37\},\ G_{19} = \{0,37,38,1\}$$

et adoptons les notations suivantes :

$$(G_k, \alpha) \quad \text{ou} \quad (G_k, \beta)$$

pour exprimer que l'on applique au groupe G_k l'opération α ou l'opération β.

(a) Il est toujours possible de passer d'un état initial quelconque à l'état où toutes les lampes sont allumées.

En effet, on peut allumer toutes les lampes d'un même groupe, sans modifier l'état des autres lampes. Par exemple, pour allumer toutes les lampes du groupe G_1, il suffit de deux opérations consécutives :

$$(G_1, \alpha)(G_1, \beta).$$

La première de ces opérations commence par éteindre toutes les lampes du groupe tandis que la seconde les met dans l'état opposé, donc les allume toutes.

Si on procède de cette façon pour chaque groupe, toutes les lampes seront alors allumées.

Ainsi, la procédure qui permet d'allumer toutes les lampes est la suivante :

$$(G_1, \alpha)(G_1, \beta)(G_2, \alpha)(G_2, \beta) \cdots (G_{19}, \alpha)(G_{19}, \beta).$$

(b) Il est toujours possible de passer d'un état initial quelconque à l'état où seule la lampe numéro 0 est allumée.

Toutes les lampes peuvent être éteintes quel que soit l'état initial. En effet, en appliquant à chaque groupe, du premier au dernier, l'opération α, il n'y aura plus aucune lampe allumée.

Partant de cet état, il suffit de trois opérations pour obtenir l'état où seule la lampe numéro 0 est allumée :

$$(G_1, \beta)(G_3, \alpha)(G_1, \beta).$$

La première opération change l'état des lampes numérotées 0, 1, 2 et 3, donc les allume. La seconde éteint la lampe 0. À ce moment, seules les lampes numérotées 1, 2 et 3 restent allumées. La dernière opération change l'état des lampes numérotées 0, 1, 2 et 3 ; elle éteint donc les lampes 1, 2 et 3 mais allume la lampe numéro 0. Cette dernière est alors la seule à être allumée.

Voici donc la séquence complète d'opérations qui donne cet état final :

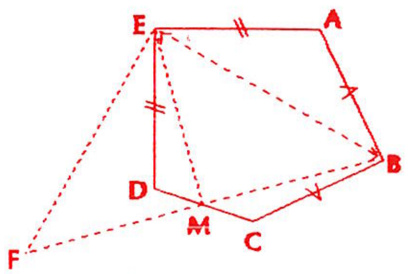
$$(G_1, \alpha)(G_2, \alpha)\cdots(G_{19}, \alpha)(G_1, \beta)(G_3, \alpha)(G_1, \beta).$$

Finale Maxi

Question 1 : Ça tourne à angle droit !

Un pentagone plan convexe a deux angles droits non adjacents. Les deux côtés adjacents au premier angle droit ont des longueurs égales. Les deux côtés adjacents au second angle droit ont des longueurs égales. En remplaçant par leur point milieu les deux sommets du pentagone situés sur un seul côté de ces angles droits, nous formons un quadrilatère. Ce quadrilatère admet-il nécessairement un angle droit ?

Solution : Soit $ABCDE$ le pentagone décrit dans l'énoncé



$$\widehat{B} = \widehat{E} = 90°, \ |EA| = |ED| \text{ et } |BA| = |BC|$$

Soit M le milieu de $[CD]$. Appelons

r la rotation de centre B et d'angle 90°

r' la rotation de centre E et d'angle 90°

s la symétrie de centre M.

Déterminons la nature de l'isométrie

$$i = r' \circ s \circ i$$

Comme r, s et r' sont des déplacements, i est également un déplacement.

Par ailleurs, A est un point fixe pour i :

$$A \xrightarrow{r} C \xrightarrow{s} D \xrightarrow{r'} A$$

De ce fait, i ne peut être qu'une rotation de centre A ou la transformation identique. Si i était une rotation, elle aurait pour angle la somme des angles des rotations qui la composent (une symétrie centrale étant une rotation d'un demi-tour). Or, cette somme vaut

$$90° + 180° + 90° = 360°.$$

Une rotation de 360° n'est autre que la transformation identique. En définitive, i est la transformation identique.

Ainsi, tous les points du plan sont fixes pour i. Par exemple, B est un point fixe pour i. Si nous notons F l'image de B par la symétrie centrale s, nous avons

$$B \xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} F \xrightarrow{r'} B$$

Ceci montre que l'image de F par la rotation r' est B. Il s'ensuit que le triangle EBF est rectangle en E et isocèle. De plus, M est le milieu de l'hypoténuse $[BF]$. La droite EM est donc à la fois médiane et hauteur de ce triangle. Dès lors, les droites EM et MB sont perpendiculaires. En conséquence, le quadrilatère $ABME$ admet bien un angle droit.

Rendez-vous le 11 janvier 1995 : Éliminatoire dans ton école de l'Olympiade Mathématique Belge. Note-le vite dans ton agenda ou ton journal de classe !

D'ici là, n'oublie pas de t'entraîner ! À bientôt ...

ERRATUM : Monsieur BRITTE de Liège, nous signale qu'une petite erreur s'est glissée dans la rubrique *Olympiade* du numéro 66 de ta revue *Math-Jeunes*.

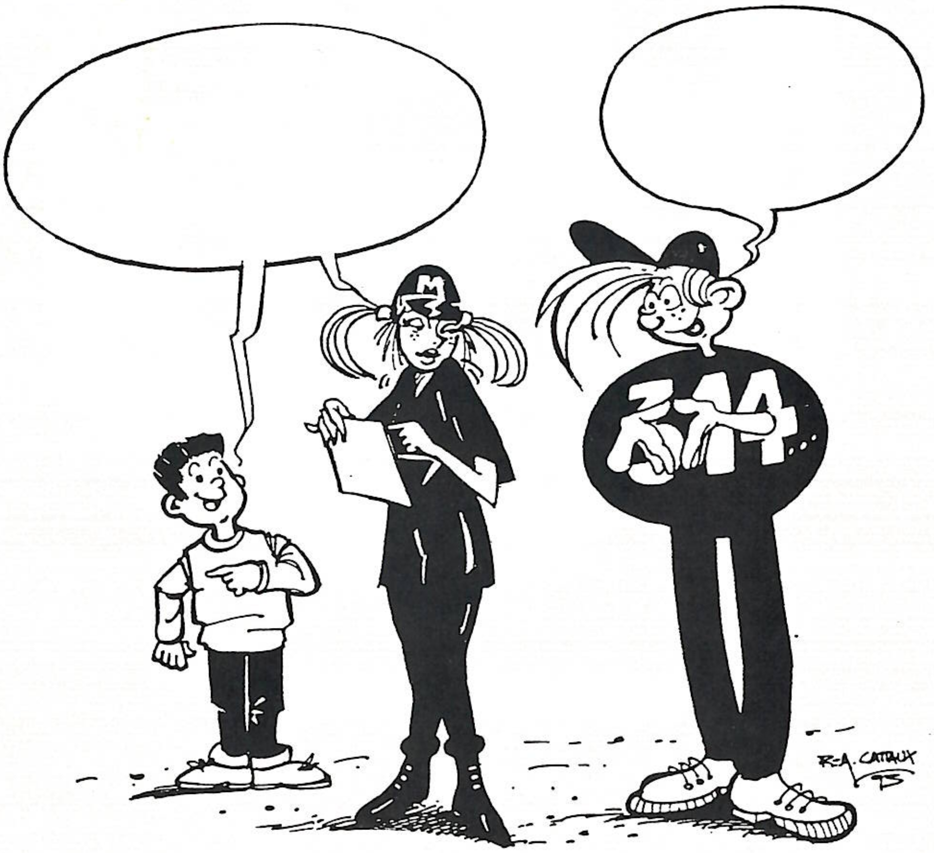
Page 16, col. 1, ligne 34 : ... (B) $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 2y^2}$ au lieu de ... (B) $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8y^2}$

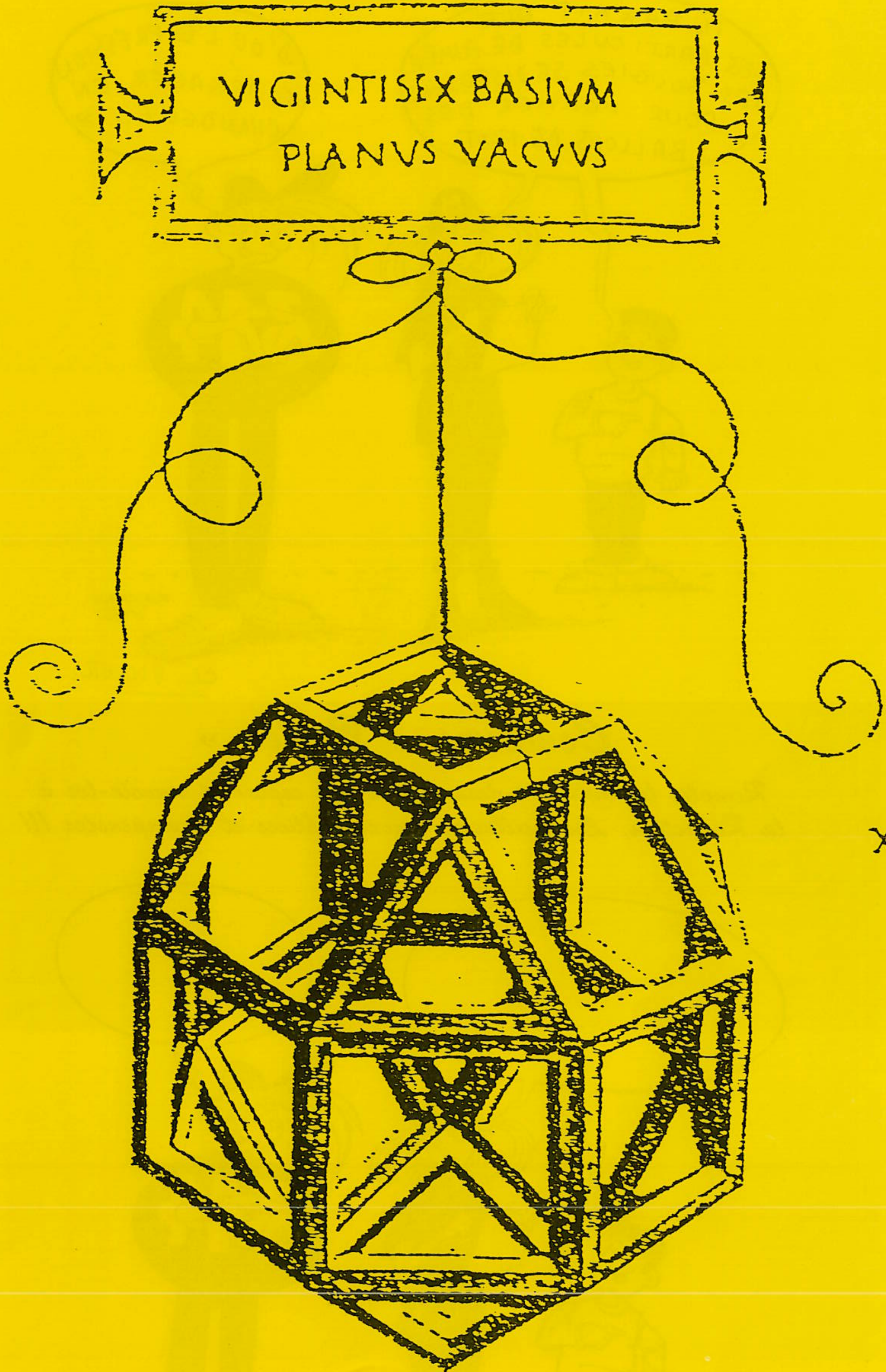
Page 16, col. 2, ligne 19 : ... $= \frac{1}{9}\left(x^2 + 8\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)$ au lieu de ... $= \frac{1}{9}\left(x^2 + 8y^2\right)$

Page 16, col. 2, ligne 21 : $|GC| = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 2y^2}$ au lieu de $|GC| = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8y^2}$

Concours « Bulles »

Remplis les bulles ci-dessous (ou une copie) et renvoie-les à la Rédaction. Les meilleures seront publiées et récompensées !!!





XXXVI

Dessin de LEONARDO DA VINCI pour l'édition de 1509
du *De divina proportione* de LUCA PACIOLI