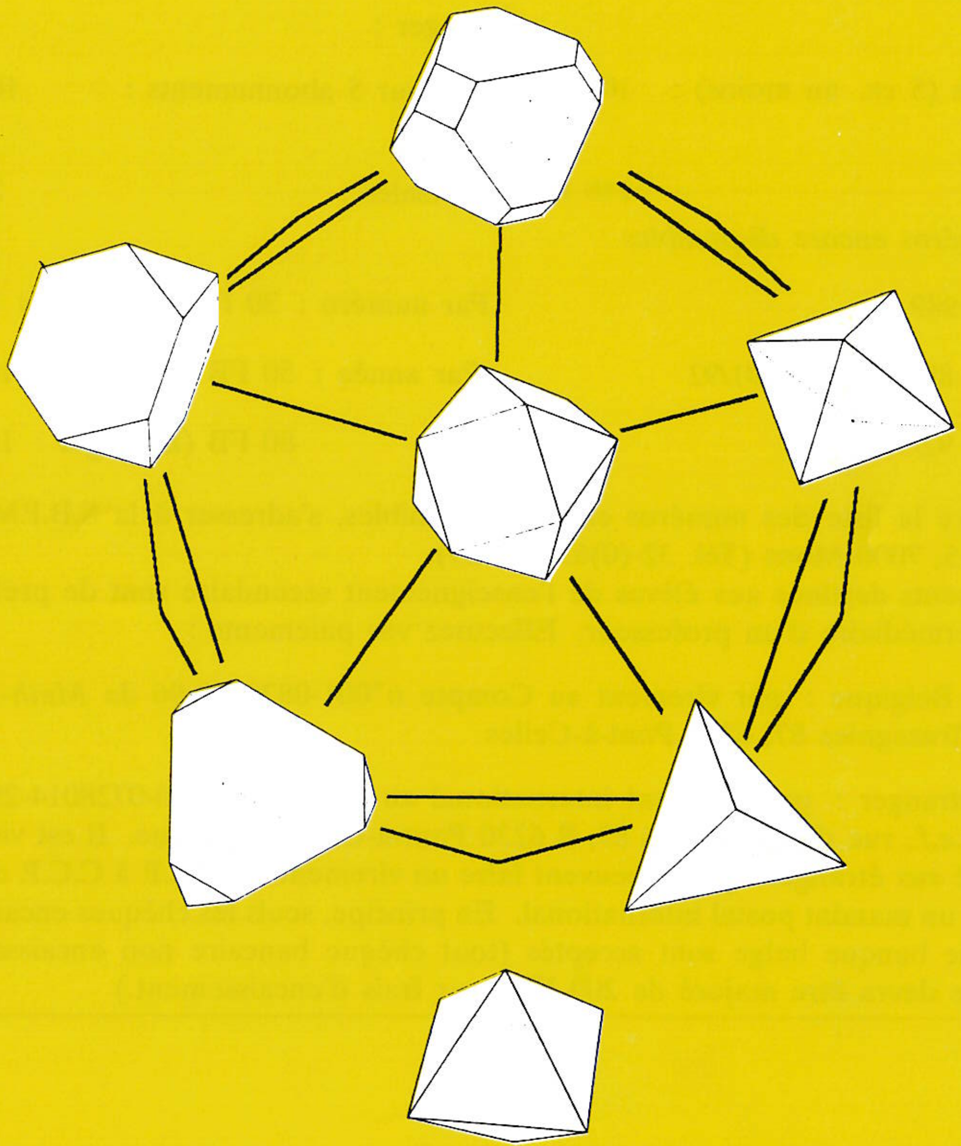
MATH-JEUNES



16e année
Janvier 1995 – n°68
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, G.Noël, A.Parent, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux
Conception de la couverture : K. Martroye

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Étranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1989	Par numéro : 30 FB (Étranger : 40 FB)
• Années 89/90, 90/91, 91/92	Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB)
• Années 92/93, 93/94	80 FB (Étranger : 160 FB)

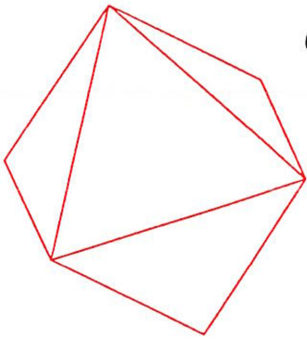
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

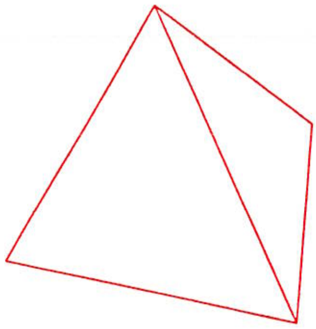
- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

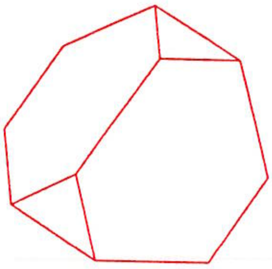
Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

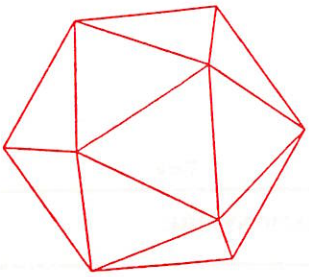
N°68 Seizième année 1995

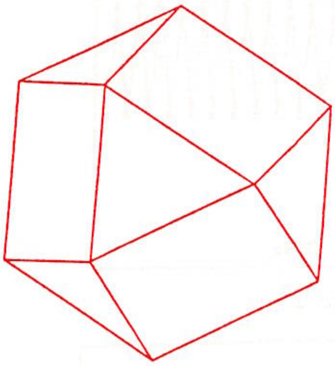
Math-Jeunes

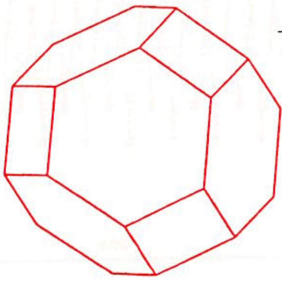












Math-Jeunes n°68, 34–38, 1995

Chaos et fractals

Christian Vandercammen, *Jeunesses Scientifiques*

Le livre « **Le Parc Jurassique** » nous a intéressé au moins pour deux raisons : c'est un bon roman et il soulève un certain nombre de **questions** dans l'actualité scientifique (génie génétique, paléontologie, mathématiques, ...). Michael CRICHTON a fondé l'intrigue de son livre sur une évocation amusante de la théorie du chaos. Un des personnages, le mathématicien Malcolm, se livre à une critique dévastatrice du milliardaire Hammond, le père du projet « *Jurassic Park* » en la fondant sur la théorie du chaos et des fractals. Malcolm prédit que la disparition du parc à dinosaures se réalisera de façon totalement imprévisible et spectaculaire. Il explique :

« *Vous allez rendre vie à des animaux préhistoriques et les installer sur une île. C'est très bien. C'est un beau rêve. Charmant. Mais cela ne se passera pas comme prévu. Nous nous rassurons en imaginant qu'un changement subit est toujours extérieur à l'ordre normal de choses. Un accident, comme un accident de voiture. Ou bien au-delà de notre contrôle, comme une maladie fatale. Nous ne concevons pas un changement soudain, radical, irrationnel, comme construit à l'intérieur même de l'existence. Et pourtant, c'est comme cela. Et c'est la théorie du chaos qui nous l'apprend.* »

Pour comprendre les allusions du mythique Malcolm, nous allons examiner un problème qui intéresse beaucoup les écologistes et qui touche à la **dynamique des populations** : de dinosaures, de lapins, d'éléphants ou de bactéries. Tous ces organismes ont la capacité intrinsèque d'accroître, en principe, indéfiniment leur nombre, de génération en génération. Cependant, nous savons qu'il existe des facteurs qui viennent restreindre cette croissance : les prédateurs, la limitation des ressources alimentaires, les maladies, ... Il s'ensuit que la taille de la plupart des populations animales et végétales tend à fluctuer. Jusqu'à il y a une trentaine d'années, on supposait qu'une population donnée pouvait maintenir sa densité constante ou tout au plus qu'elle pouvait varier cycliquement. Et si une fluctuation irrégulière surgissait, cela ne pouvait provenir que de variations imprévisibles de l'environnement, d'accidents, pour paraphraser Malcolm.

La théorie des systèmes dynamiques montre que la réalité est beaucoup plus complexe, mais que néanmoins des **modèles simples** sont concevables.

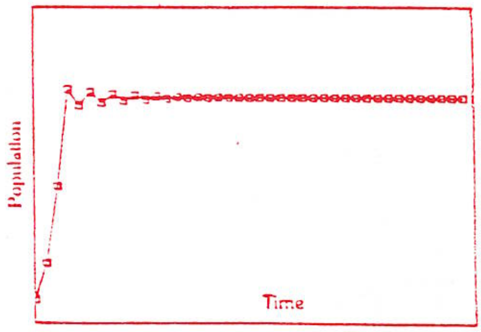
Ainsi, au début des années 70, Robert MAY, l'un des fondateurs de la théorie du chaos, actuellement professeur à l'Université d'Oxford et à l'Imperial College de Londres, découvre que les équations utilisées par les écologistes présentent une extraordinaire richesse dans les comportements dynamiques des populations [1].

MAY étudie l'équation du mathématicien belge Pierre VERHULST (1845), équation du type :

$$x_{t+1} = r \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$$

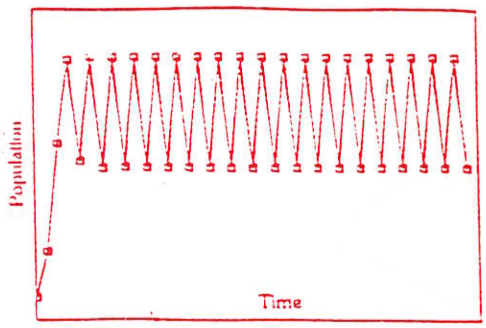
Lorsqu'on **itère** cette équation un grand nombre de fois, pour connaître l'effectif final de la population, le taux de reproduction r étant fixé à l'avance, on observe des propriétés vraiment étonnantes. Pour un r donné, on porte en abscisse le temps t et en ordonnée, l'effectif de population :

$r = 1.8$



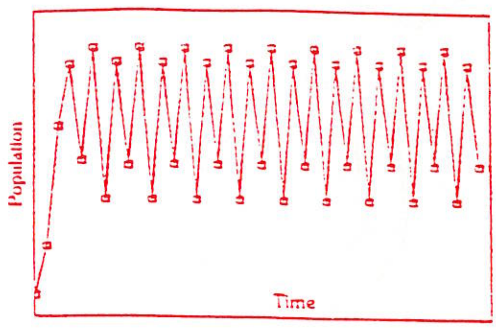
ÉTAT STATIONNAIRE

$r = 2.3$



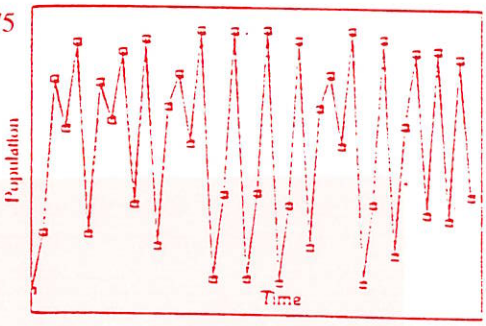
CYCLE D'ORDRE 2

$r = 2.5$



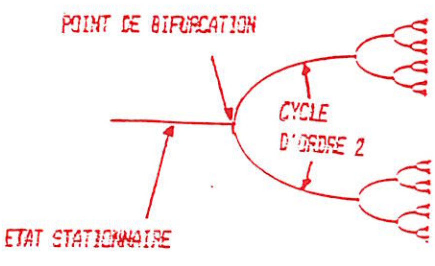
CYCLE D'ORDRE 4

$r = 3.575$

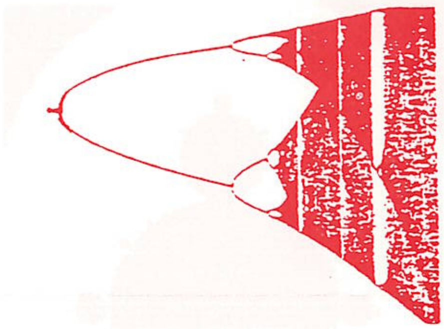


CHAOS !!!

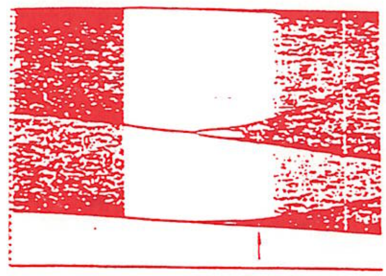
Un domaine de fluctuations apparemment imprévisibles surgit pour $r > 3.57$. Alors, pour des différences **infimes** dans la valeur initiale de x, on obtient des évolutions temporelles très différentes. C'est ce que l'on appelle la « **sensibilité aux conditions initiales** » (**SCI**).
La prédiction à long terme devient impossible, alors que l'équation fournit une règle **simple** où rien n'est laissé au hasard. On peut, à chaque étape, calculer x_{t+1} connaissant x_t. On obtient ce que l'on appelle du **CHAOS DÉTERMINISTE**.
On remarquera au passage que l'on a affaire ici, à une « dynamique discrète » et non « continue ». Dans un système dynamique authentique, le temps s'écoule de manière continue de moins l'infini à plus l'infini, et passe par tout ce qui existe dans cet intervalle. Dans le système abordé ci-dessus, le temps s'écoule **par étapes d'un seul instant**, de 1, 2, 3, ..., n unités. Entre 1 et 2, il n'y aura pas de 1.5 ou de 1.58921 unités.
R. MAY est l'un des personnages clés dans l'histoire de la prise de conscience par les scientifiques de ce qu'on appelle aujourd'hui la **route vers le chaos par doublement de période.**
On peut comprendre de quoi il s'agit en examinant le diagramme suivant :



On a représenté les quelques premières **bifurcations** de l'équation de croissance de population. Cela ne semble pas très extraordinaire. Mais ...



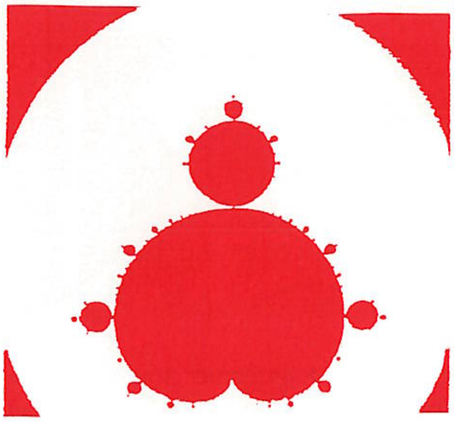
Si on regarde le diagramme pour des valeurs de r comprises entre 3 et 4, on voit apparaître des zones complexes. Les zones d'ombre représentent le chaos. À l'intérieur, on remarque des bandes blanches. Il s'agit de « fenêtres » dans lesquelles le système devient stable, où l'on retrouve des accalmies. L'ordre est toujours là, quelque part, enfoui dans un océan de chaos. Mieux encore, un grossissement de certaines parties du diagramme montre qu'on obtient la structure de départ. En fait, à l'intérieur de toute fenêtre, se trouve une copie exacte de l'image **tout entière**. Le diagramme de bifurcation contient des copies minuscules de lui-même. Cette importante caractéristique est appelée **auto-similarité**.



Autre surprise : en 1975, le physicien américain Mitchell FEIGENBAUM a démontré que le rapport entre la longueur des branches du diagramme de bifurcation était une constante égale à 4.6692... **quel que soit le système périodique étudié**.

Le doublement de période, le « chaos ordonné » apparaît pour toute une série d'équations, pour autant qu'elles soient **non linéaires**. Et ces équations s'appliquent à des choses aussi différentes que des circuits électroniques, des lasers, des cycles économiques ou des populations, des écoulements turbulents, ...

Sommes-nous arrivés au bout de nos surprises ? Certes non. Le monde du chaos est riche en rebondissements agréables. Ainsi, nous allons découvrir qu'une itération aussi simple que $z = z^2 + c$, réalisée dans le plan complexe, va engendrer l'objet mathématique le plus compliqué connu à ce jour : l'*ensemble de Mandelbrot*.



Benoît MANDELBROT est chercheur au Centre Thomas J. Watson d'IBM et professeur de mathématiques à l'université de Harvard. Ce mathématicien original est le père de la **théorie des fractals**.

Tous ceux qui disposent d'un ordinateur peuvent facilement obtenir cet ensemble. On trouvera, en annexe, un programme (de quelques lignes seulement) écrit en GWBASIC.

Mais voyons d'abord comment Mandelbrot décrit la construction de son ensemble.

« *Prenez un point de départ dans le plan, C_0 de coordonnée (u_0, v_0). À partir de C_0, formez un second point C_1 dont la coordonnée est définie par*

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 - v_0^2 + u_0 \\ v_1 &= 2u_0v_0 + v_0 \end{aligned}$$

Après on cherchera C_2 de coordonnée

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1^2 - v_1^2 + u_0 \\ v_2 &= 2u_1v_1 + v_0 \end{aligned}$$

Plus généralement, on obtient C_k de coordonnée

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1}^2 - v_{k-1}^2 + u_0 \\ v_k &= 2u_{k-1}v_{k-1} + v_0 \end{aligned}$$

*Quand C_0 est représenté par un nombre complexe $c_0 = u_0 + iv_0$ (par définition, $i^2 = -1$), on vérifie facilement que $c_1 = c_0^2 + c_0$ et $c_k = c_{k-1}^2 + c_0$. L'ensemble des points C_k forme ce qu'on appelle l'*__orbite__* de C_0. L'ensemble de Mandelbrot ($\mathcal{M}$) est défini de la manière suivante : si l'orbite « ne tend pas à rejoindre l'infini », alors le point C_0 est contenu dans $\mathcal{M}$ et on le colorie en noir ; dans le cas contraire, le point C_0 est en dehors de $\mathcal{M}$ et on le colorie en blanc ou dans différentes couleurs selon la « vitesse d'éloignement » des itérés.*

Quand C_0 est à l'intérieur de $\mathcal{M}$, la dynamique fournit une orbite parfaitement ordonnée. Quand C_0 est en dehors de $\mathcal{M}$, l'évolution de l'orbite est **déterministe** *mais pratiquement* **imprédictible**, *c'est-à-dire* **chaotique**. *La frontière entre un comportement ordonné ou chaotique n'est pas nette, si bien que l'ensemble $\mathcal{M}$ concentre en lui et l'*__ordre__* et le* **chaos**. » [4]

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les illustrations suivantes où l'on a réalisé quelques grossissements de détails de $\mathcal{M}$:

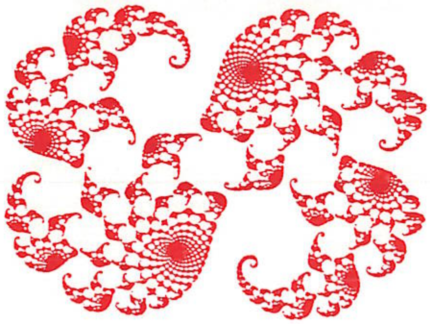
Au début des années 1980, MANDELBROT a encore réussi, à l'aide de son PC, à faire revivre les travaux de deux mathématiciens français, Gaston JULIA et Pierre FATOU. Entre 1910 et 1925, ils étudiaient la dynamique des systèmes complexes. De leurs travaux sont apparus ce que l'on appelle les **ensembles de Julia**. De quoi s'agit-il ?

Pour obtenir un ensemble de Julia, on change légèrement les règles qui nous ont permis d'obtenir l'ensemble $\mathcal{M}$.

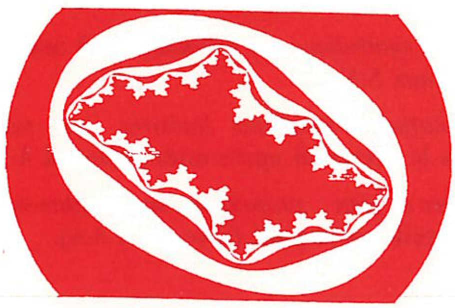
Comme pour la construction de $\mathcal{M}$, on démarre avec un point C de coordonnée (u, v), mais à présent, on le considère comme un paramètre. Après, on choisit un point P_0 de coordonnée (x_0, y_0). On forme alors $x_1 = x_0^2 - y_0^2 + u$ et $y_1 = 2x_0y_0 + v$. Comparée avec la formation de $\mathcal{M}$, cette règle combine les points (x_0, y_0) et (u, v). En terme de nombres complexes, $c = u + iv$ et $z = x + iy$, la règle devient

$$z_1 = z_0^2 + c \text{ et, en généralisant : } z_k = z_{k-1}^2 + c$$

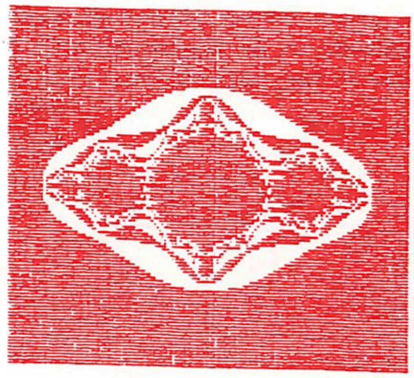
Quand l'orbite tend à s'échapper vers l'infini, on dit que le point P_0 appartient à un ensemble de Julia discontinu, formé d'un nuage de points ; si l'orbite reste à distance finie de O, alors l'ensemble $\mathcal{J}$ obtenu est d'un seul tenant : il est **connexe**. Voici à quoi ressemblent ces ensembles $\mathcal{J}$:

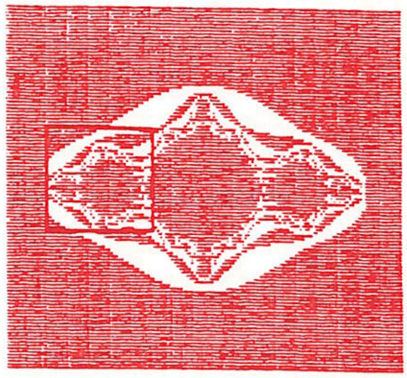


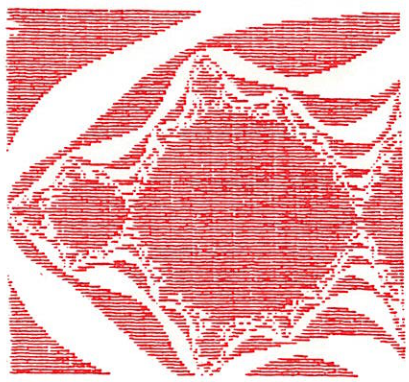
Pour $c = -0.5 + 0.5i$, on obtient l'ensemble ci-dessous (et un de ses « zooms ») :



Enfin, pour obtenir le $\mathcal{J}$ suivant, on a pris $c = -1$.

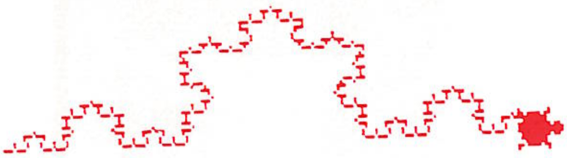






Avez-vous remarqué le zoom en bas ? Cela ne vous rappelle-t-il rien ... ?

En itérant l'équation de VERHULST, on a montré qu'on pouvait obtenir un mélange subtil de chaos et d'ordre. Les itérations dans le plan fournissent les fractals de MANDELBROT et JULIA. Ces ensembles apparaissent comme de véritables joyaux mathématiques. Le mot **fractal** a été inventé par MANDELBROT en 1975. Il désirait caractériser toute une série d'objets dont la forme est soit extrêmement irrégulière, soit extrêmement fragmentée, quelle que soit l'échelle d'examen à laquelle l'observateur se place. Les fractals ont deux propriétés principales : l'**auto-similarité** et une **dimension fractionnaire**. Comme on l'a vu dans l'application de nos zooms, l'auto-similarité apparaît quand des parties d'une figure sont de petites répliques de l'ensemble de départ. Sans entrer dans le détail de la dimension d'un fractal, disons qu'elle permet de mesurer le **degré d'irrégularité** et de **fragmentation**. Par exemple, la courbe ci-dessous, appelée courbe de VON KOCH possède une dimension fractale de $\frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\ldots$



Cette courbe n'est pas une droite dont la dimension $d = 1$ ni un plan de dimension $d = 2$. Ce fractal est « quelque chose entre les deux ».
Quand les théories des fractals et du chaos, dans les années 1970, étaient encore au berceau, on voyait mal le lien entre eux. Un quart de siècle plus tard, on voit plus clairement que les deux théories traitent de la **structure de l'irrégularité**. Les fractals, au-delà de leur aspect esthétique, vont nous fournir un **nouveau langage** avec lequel on pourra décrire la forme du chaos. Les fractals nous aident à comprendre toute une série de phénomènes en physique, chimie, biologie, médecine, hydrologie [7][8]. Et plus encore, la géométrie fractale semble s'affirmer de plus en plus comme une véritable géométrie de la nature.

Annexe : programmez en BASIC la construction de l'ensemble de Mandelbrot sur un PC.

```
10 REM MANDELBROT
30 SCREEN 2
40 FOR I = 1 TO 300:C1=-2+4*I/300
45 FOR J = 1 TO 150:C2=2-4*J/300
50 X=C1
60 Y=C2
70 FOR N = 1 TO 30:X1=(X*X)-(Y*Y)+C1:
Y1=2*(X*Y)+C2
80 R=(X1*X1)+(Y1*Y1)
90 IF R>4 THEN GOTO 150
100 X=X1
110 Y=Y1
120 NEXT N
130 PSET(I,J)
140 PSET(I,300-J)
150 NEXT J
160 NEXT I
```

Bibliographie

[1] Robert MAY, *Le chaos en biologie*, La Recherche 232, vol. 22, mai 1991.

[2] J. BRIGGS, F.D. PEAT, *Un miroir turbulent*, InterEditions, 1991.

[3] I. STEWART, *Les Mathématiques du chaos*, Flammarion, 1992.

[4] N. HALL and all, *Guide to Chaos*, Penguin Books, 1992.

[5] H-O. PEITGEN, H. JURGENS, D. SAUPE, *Fractals for the Classroom*, 2 vol., Springer Verlag, 1993.

[6] H. LAUWERIER, *Fractals*, Penguin Books, 1987.

[7] B. MANDELBROT, *Les objets fractals*, Flammarion, 1984.

[8] B. SAPOVAL, *Les échanges à travers les fractales*, Pour la Science 198, avril 1994.

Le lecteur intéressé par l'un ou l'autre aspect de cet article peut participer aux stages de mathématiques organisés par les *Jeunesses Scientifiques de Belgique* :

- *Construire des fractals avec son ordinateur*, 23 et 24 février 1995 à Bruxelles (niveaux 4-5-6).
- *Chaos et fractals*, 11 mars 1995 à Liège (niveaux 5-6).

Renseignements et inscriptions : Secrétariat des Jeunesses Scientifiques de Belgique, avenue du Parc 90, 1060 Bruxelles. T.02-5370325.

D'autres thèmes seront également abordés au cours de l'année scolaire 1994-1995 :

- *De la perspective à la géométrie projective*, 11 février 1995 (niveaux 4-5-6).
- *Les objets tournants et les phénomènes périodiques*, 15 mars 1995 (niveaux 5-6).
- *Calcul symbolique sur ordinateur*, 18 mars 1995 (niveaux 5-6).
- *Résolution d'équations linéaires*, sur rendez-vous le mercredi après-midi (niveaux 4-5-6).
- *Sphère et plan : projections*, sur rendez-vous le mercredi après-midi (niveaux 4-5-6).

Tout est simple ...

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Si tu as lu l'article de Christian VANDERCAMMEN intitulé *Chaos et fractals*, tu n'as certainement pas perdu ton temps mais tu as rencontré deux expressions, **logarithme** et **dimension fractale**, sans doute nouvelles pour toi. Elles t'ont aussi peut-être conforté dans une idée que personnellement, je trouve saugrenue mais qui, malheureusement est trop largement diffusée : « *les maths ..., c'est réservé à quelques initiés ; c'est tout juste bon à infliger des échecs scolaires aux élèves !* » Remarque qu'il y a même quelques personnes qui croient dur comme fer que les quelques initiés dont il est question ci-dessus ont une **bosse** ... ??? Gardons la tête sur les épaules ... Tentons de ne pas tomber dans les travers engendrés par de telles fadaises. En un mot, raisonnons !

Une idée importante qui se dégage lors de la lecture de ce texte *Chaos et fractals*, est que les mathématiques sont très étroitement liées aux autres sciences, qu'il s'agisse de physique, de chimie, de biologie, de médecine, d'économie, ... Et cela n'est pas seulement vrai pour les théories du **chaos** ou des **fractals**. En fait, pour un scientifique de quelque bord qu'il soit, les mathématiques constituent l'outil indispensable sans lequel il lui est impossible d'entreprendre aucune tâche. Loin d'avoir été inventées pour « torturer mentalement » l'étudiant, les mathématiques sont nées du besoin que l'homme a toujours ressenti d'expliquer le monde dans lequel il évolue. Lis donc l'article historique de Simone TROMPLER sur les logarithmes et tu comprendras le « pourquoi » de l'introduction d'une telle notion dont l'appellation peut parfois sembler « barbare ». Tu verras aussi que derrière ce vocable, se cache un concept relativement simple. Même si on ne te l'enseignera que dans la classe de rhétorique, il est très facile de t'en faire une idée autre que le fait « qu'il y a une telle touche sur ta calculatrice ».

Ainsi, si un nombre réel x est égal à une certaine puissance y de 10, ce que l'on note habituellement $x = 10^y$, on dit que y est le **logarithme** (décimal) de x, et on écrit : $\log x = y$. Il est possible de montrer que le nombre réel représentant l'exposant y existe toujours, mais cela, c'est une autre histoire ! Regardons quelques exemples :

$$\begin{array}{rcll} 10 &=& 10^1 \; ; & \text{on dit que} \quad \log 10 = 1 \\ 100 &=& 10^2 \; ; & \text{on dit que} \quad \log 100 = 2 \\ 1\,000 &=& 10^3 \; ; & \text{on dit que} \quad \log 1\,000 = 3 \end{array}$$

Si tu es un peu plus avancé en mathématiques, tu peux encore comprendre ce qui suit :

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1} \; ; \text{ on dit que } \quad \log 0,1 = -1$$

Au moyen de ta calculatrice, tu peux aisément vérifier que

$$10^{0,698\,970\,004\,3\ldots} \approx 5$$

Eh bien, on dit que :

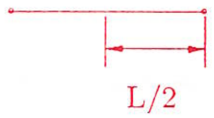
$$\log 5 = 0,698\,970\,004\,3\ldots$$

Vois-tu, cela est vraiment très simple ! Mais ne me demande tout de même pas d'où j'ai sorti le réel $0,698\,970\,004\,3\ldots$ Tu trouveras un début d'explication dans l'article de Simone TROMPLER.

Je vais maintenant essayer de démythifier le concept de **dimension fractale**. Je ne pourrai bien sûr t'en donner qu'une **idée intuitive**, mais tu verras, là non plus, les mystères ne sont quand même pas bien grands. Nous allons d'abord examiner le cas mieux connu de la **dimension** de **systèmes réguliers** (à densité uniforme). Sous ces mots peut-être quelque peu antipathiques, tu trouveras en fait pas mal d'« objets » qui te sont très familiers. Par exemple, un long, long, très long fil, tellement long que son épaisseur en devient totalement « négligeable » ; tu peux alors l'assimiler à un objet mathématique « abstrait », en l'occurence une droite qui, tu le sais, **n'a pas d'épaisseur !** Il en est de même d'une grande surface plate très mince (carrée, par exemple) et tellement mince qu'à nouveau, son épaisseur d'objet réel devient négligeable : on peut aussi l'assimiler à un objet mathématique « abstrait », un morceau de plan qui, tu le sais (ou tu devrais le savoir), **n'a pas non plus d'épaisseur**. Un autre objet que nous regarderons encore sera un gros cube plein. Pour des raisons évidentes d'« homogénéité », de « régularité de comportement », ... nous supposerons que tous ces objets « concrets » mais que nous désirons les plus proches possible des objets mathématiques « abstraits » sont fabriqués dans un matériau de densité uniforme.

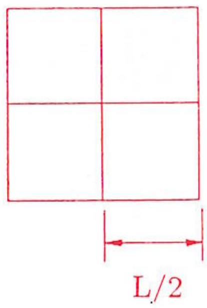
Après avoir pris toutes ces précautions qui vont nous permettre de pratiquer **la science parfaite, la plus belle (?) ..., celle des mathématiques**, nous dirons que la **dimension** d d'un « objet mathématique » est une caractéristique de la manière dont la masse

$M(L)$ du système, de l'objet change en fonction de son « format linéaire » :



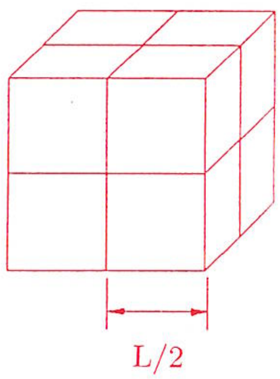
$$M\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{2}M(L) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} M(L)$$

$$\boxed{d = 1}$$



$$M\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{4}M(L) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} M(L)$$

$$\boxed{d = 2}$$



$$M\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{8}M(L) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} M(L)$$

$$\boxed{d = 3}$$

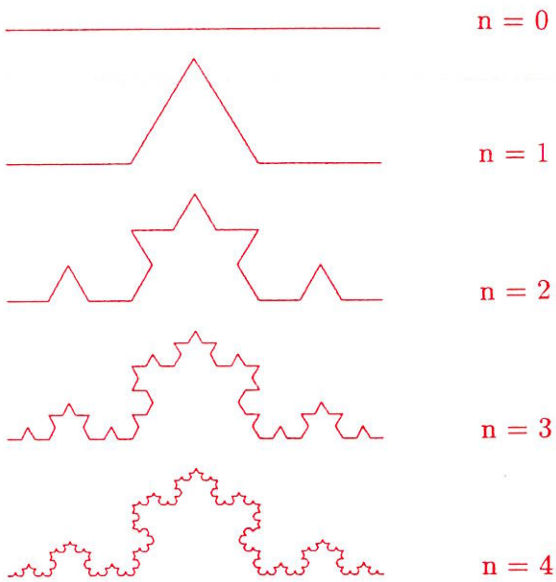
Dans chacun des cas, nous avons :

$$\boxed{M(bL) = b^d M(L)}$$

et d s'appelle **dimension** de l'« objet ».

Voyons maintenant le cas de **systèmes non réguliers**, d'**objets fractals déterministes**. Nous savons, grâce à la lecture de l'article *Chaos et fractals* qu'on obtient ceux-ci à partir d'itérations successives :

- **La courbe de H. von Koch** (1870 - 1924)



Si nous regardons les itérations n = 0 et n = 1 (nous arriverions aux mêmes conclusions avec les itérations 1 et 2 ou 2 et 3 ou ...), nous voyons qu'il y a, dans l'itération numero 1, 4 « objets » ou segments dont la mesure de la longueur, c'est-à-dire le « format linéaire » vaut le tiers du « format linéaire » du segment de l'itération 0 ; on peut donc écrire :

$$\boxed{M\left(\frac{1}{3}L\right) = \frac{1}{4}M(L) = \left(\frac{1}{3}\right)^{d} M(L)}$$

Ainsi, il faut trouver d tel que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{d} = \frac{1}{4}$$

Tu ne connais peut-être pas encore suffisamment les propriétés de la fonction **logarithme** pour trouver la valeur de *d*, mais tu peux, grâce à ta calculatrice « constater » que

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,261\,859\,507\ldots$$

et que

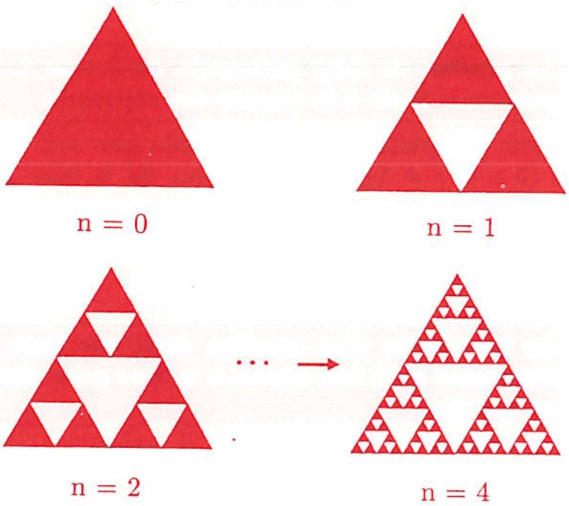
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,261\,859\,507\ldots} = 0,25 = \frac{1}{4}$$

Nous avons donc envie de dire que la **dimension fractale** de l'objet qu'on appelle courbe de von Koch vaut

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261\,859\,507\ldots$$

et, si tu observes bien la courbe de VON KOCH, tu t'aperçois que c'est un objet qui n'est ni vraiment un segment (de dimension 1), ni vraiment une surface (de dimension 2) ; c'est « quelque chose entre les deux » et il est donc normal que sa dimension se situe entre 1 et 2 !

- **Le triangle de W. Sierpinski** (1882 - 1960)



Remarque tout d'abord que ce qui est représenté en blanc constitue un « trou » dans la « surface ». Tu constates que, dans l'itération 1, il y a trois objets, trois triangles équilatéraux dont le « format linéaire » vaut la moitié du « format linéaire » c'est-à-dire de la mesure du côté du triangle de l'itération numéro 0. On peut donc écrire :

$$\boxed{M\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{3}M(L) = \left(\frac{1}{2}\right)^d M(L)}$$

Ainsi, d est tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{1}{3}$$

et on trouve que la **dimension fractale** d du triangle de SIERPINSKI vaut

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,584\,962\,501\ \ldots$$

Vérifie bien, grâce à ta calculatrice que

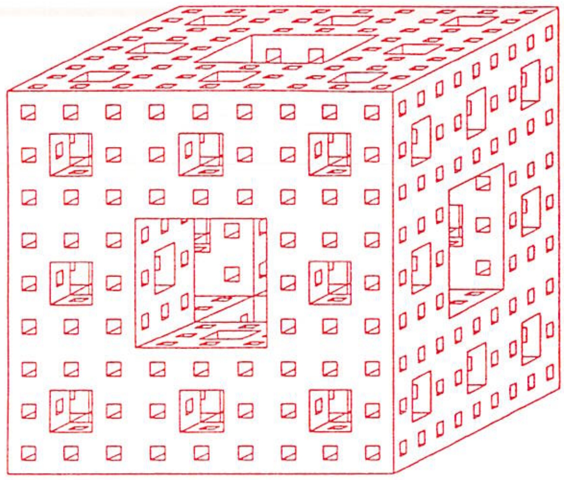
$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1,584\,962\,501\ \ldots$$

et que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,584\,962\,501\ldots} = 0,33333\ldots = \frac{1}{3}$$

Remarque que la dimension de cet objet, qui se « rapproche » plus d'une surface s'est elle-même « rapprochée » de 2 !

- **L'éponge de Sierpinski**



Amuse-toi à tenter de voir que la **dimension fractale** d de cet « objet » vaut

$$d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,726\,833\,028\ \ldots$$

As-tu remarqué, la dimension (comprise entre 2 et 3) de cet « objet » qui est bien sûr « plus qu'une surface » mais qui n'est pas encore, à cause de « tous ses trous », un « véritable solide » !

Le monde des fractals est un monde fascinant !

Bien sûr, nous en sommes restés à un stade très intuitif, mais tu te rends quand même bien compte que ... rien n'est vraiment compliqué !

Bibliographie

[1] Michael BARNSLEY, *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.

[2] Armin BUNDE, Shlomo HAVLIN (Eds), *Fractals in Science*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[3] H.-O. PEITGEN, P.-H. RICHTER, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[4] H.-O. PEITGEN, H. JURGENS, D. SAUPE, *Fractals for the Classroom*, 2 vol., Springer-Verlag New York, 1993.

 Math-Jeunes n°68, 42–45, 1995

Il y a trois cent quatre-vingts ans naissaient les logarithmes

Simone Trompler

Il existe en mathématique des mots mystérieux. Ils font peur, mais en même temps, ils rendent fiers ceux qui en connaissent la signification et envieux ceux qui ne la connaissent pas.
LOGARITHME est l'un de ces mots.
On pourrait diviser les « Humains » en deux catégories : les « non-initiés » aux logarithmes et les « initiés ». Le jeune qui passe de la première catégorie à la seconde se sent d'un coup grandir, accéder à une connaissance jusque-là réservée aux aînés : il a acquis une sorte de « passeport pour la Science ».
Essayons de « démythifier » ce concept. Il est en réalité, très facile à comprendre. Il suffit de considérer les puissances d'un nombre strictement positif, différent de **1**, que l'on appelle **base**.
Choisissons par exemple **2** comme base. Les premières puissances de 2, que tu dois certainement connaître sont

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ \ldots$$

Si on additionne deux nombres de cette liste, leur somme **ne figure pas nécessairement** dans cette liste :

$1 + 2 = 3$ **absent** de la liste
$2 + 2 = 4$ **élément** de la liste
$4 + 8 = 12$ **absent** de la liste
$\vdots$
$8 + 128 = 136$ **absent** de la liste ...

Tu peux trouver toi-même d'autres exemples en la prolongeant. Et il en est de même pour la soustraction :

$16 - 4 = 12$ **absent** de la liste
$8 - 4 = 4$ **élément** de la liste
$4 - 16 = -12$!!!

Par contre, si on multiplie deux nombres de cette liste, leur produit **figure toujours** dans la liste !

$1 \times 2 = 2$ **élément** de la liste
$4 \times 8 = 32$ **élément** de la liste
$16 \times 64 = 1\,024$ **élément** de la liste.

Tu peux le vérifier, mais aussi le voir en opérant

$$2^4 \times 2^6 = (2\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2\times2) = 2^{10}$$

4 facteurs d'une part, 6 facteurs d'autre part ce qui fait au total 10 facteurs. C'est simple, non ? Remarque au passage, si tu ne le sais pas encore, que

$$\boxed{2^n \times 2^p = 2^{n+p}}$$

Le produit de deux puissances de 2 vaut 2 à la puissance égale à la somme des exposants

Cette propriété reste vraie quelle que soit la base b ($b > 0$, $b \neq 1$). Les exposants de la base jouent donc un rôle privilégié dans ces calculs.
Voici la signification (et même la définition) du mot mystérieux qui introduit ce texte :

Le logarithme d'un nombre, dans une base, est l'exposant qu'il faut mettre à la base pour obtenir ce nombre.

Le logarithme en base 2 de 8 noté $\log_2 8$ vaut 3 puisque $8 = 2^3$. $\log_2 256 = 8$, puisque $256 = 2^8$.

$$8\times16 = 128 \text{ ou } (2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2) = 2^7 = 2^{3+4}$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2 128$$

Lorsqu'on multiplie deux nombres, les logarithmes de ceux-ci s'additionnent.

$$\text{Puisque } \left(2^5\right)^2 = 2^5 \times 2^5 = 2^{10},$$

$$\log_2 \left(2^5\right)^2 = \log_2 2^5 + \log_2 2^5 = 2 \times \log_2 2^5,$$

$$\log_2 \left(2^5\right)^2 = 2 \times \log_2 2^5.$$

Lorsqu'on élève un nombre au carré, son logarithme est doublé.

Bien entendu, le logarithme d'un nombre élevé à la puissance **3** sera **triplé**, et ainsi de suite ...
Bien entendu aussi, ce qui est vrai pour un logarithme en **base 2** l'est également pour un logarithme dans une **autre base**.

Remplacer une multiplication par une addition, une élévation à une puissance par une multiplication, représente une simplification très intéressante des calculs.

C'est un grand gain de temps et cela supprime pas mal de causes d'erreurs.
Les plus anciennes traces du long chemin à parcourir avant de voir aboutir la notion de **logarithme** remontent à l'époque paléo-babylonienne au deuxième

millénaire avant Jésus-Christ. On trouve en effet des tablettes qui mettent en relation des puissances de nombres et leurs exposants.

Beaucoup plus tard, au troisième siècle avant Jésus-Christ, ARCHIMÈDE, qui ne connaît pas les travaux des Mésopotamiens, cherche, dans l'*Arénaire*, le nombre de grains de sable qui se trouverait contenu dans une sphère de la grandeur de notre « univers » ; il calcule que ce nombre est plus petit que 1 000 unités du septième ordre de nombres, un mode de dénombrement qui pour nous, équivaut à 10^{51}.

Les nombres que manipule ARCHIMÈDE sont gigantesques évidemment. Comme il ne dispose pas de symboles pour les exposants, ni de numération positionnelle, il faut tout son génie pour pouvoir classer les nombres et calculer leurs puissances. Il y réussit et énonce la règle

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

sous une forme différente, bien sûr ! Mais les travaux d'ARCHIMÈDE sont perdus pour l'Occident et aucun progrès vers les logarithmes ne sera fait avant le quinzième siècle ...

Nous pouvons aller plus loin et mettre en évidence d'autres propriétés des logarithmes.

On a $\left(2^4\right)^2 = 2^4 \times 2^4 = 2^8$ donc 2^4 est la racine carrée de 2^8, ce qui s'écrit, rappelons-le $\sqrt{2^8} = 2^4$.

$$\text{Or } \log_2\left(2^4\right)^2 = 2\log_2\left(2^4\right)$$

$$\text{ou } \log_2\left(2^8\right) = 2\log_2\left(2^4\right)$$

c'est-à-dire que $\log_2\left(2^4\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(2^8\right)$

ou encore $\log_2\sqrt{2^8} = \frac{1}{2}\log_2\left(2^8\right)$.

Le logarithme de la racine carrée d'un nombre vaut la moitié du logarithme de ce nombre.

Il va de soi que le logarithme de la racine **cubique** d'un nombre vaut le **tiers** du logarithme de ce nombre et ainsi de suite.

Nous avons vu que $2^8 = 2^3 \times 2^5$ et ainsi

$$\log_2 2^8 = \log_2 2^3 + \log_2 2^5$$

Il vient $\frac{2^8}{2^3} = 2^5$ ou encore

$$\log_2 \frac{2^8}{2^3} = \log_2 2^5 = \log_2 2^8 - \log_2 2^3$$

Lorsqu'on divise deux nombres, leurs logarithmes se soustraient.

Remplacer une division par une soustraction, une extraction de racine par une division, voilà qui ajoute encore de l'intérêt à ce que nous avons vu précédemment !

Le calcul au moyen des logarithmes reste très limité : la plupart des nombres ne sont pas des puissances naturelles d'un nombre, naturel lui aussi.

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^{7-5} = 2^2$$

mais on devrait aussi avoir

$$\frac{2^5}{2^7} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Il faut donc accepter les **exposants négatifs**.

De même, si l'on comprend bien que $\sqrt{2^8} = 2^4$, on voit mal comment traiter $\sqrt{2^7}$ à moins d'accepter $2^{\frac{7}{2}}$. Il faut donc aussi travailler avec des **exposants fractionnaires**.

C'est ce que les mathématiciens ont fait depuis le quinzième siècle. Dans la *Triparty en la Science des Nombres* (1484), le français Nicolas CHUQUET introduit les exposants négatifs et fractionnaires.

De même, dans l'*Arithmetica Integra* (1544), l'allemand Michaël STIFEL écrit, avec d'autres notations, évidemment,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \ldots \end{array}$$

À $4 \times 8 = 32$ correspond $2 + 3 = 5$ et à $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$ correspond bien entendu $(-2) + (-3) = (-5)$.

Évidemment, nous sommes bien loin de la définition première d'un exposant qui consiste à dire que l'exposant d'une puissance d'un nombre est le nombre de facteurs égaux à ce nombre, nécessaire pour obtenir cette puissance. Mais, si cette définition est trop « étroite » pour le nouvel usage que l'on en fait, elle reste valable dans les cas particuliers où elle l'était et toutes les opérations, les raisonnements, les conclusions obtenus avec le « nouveau statut » des exposants restent applicables et exacts dans les cas simples connus précédemment.

Les mathématiques progressent souvent de cette manière, c'est-à-dire par **abstraction** par **élargissements successifs** d'un concept. Nous sommes maintenant prêts à définir les **logarithmes**.

Le logarithme en base a (a réel strictement positif différent de 1) d'un nombre réel r positif est l'exposant réel auquel il faut élever cette base a pour obtenir ce nombre r.
Le logarithme est un nombre réel positif, négatif ou nul.

Il ne reste plus qu'à le calculer ...

C'est un travail ardu, long, fastidieux, mais pas vraiment difficile. La base à choisir, **dix** est tout indiquée par notre bon vieux système métrique. Nous faisons donc correspondre deux suites de nombres :

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{nombre } r & \ldots & \frac{1}{1\,000} & \frac{1}{100} & \frac{1}{10} & 1 & \mathbf{10} & 100 & 1\,000 & \ldots \\ \log_{10} r & \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

Il faut maintenant remplir les énormes lacunes entre 1 et 10. Commençons par $\sqrt{10}$. Son logarithme vaut 0,5. Ce n'est pas gai de calculer $\sqrt{10}$, mais c'est très faisable. Voici sa valeur avec 5 décimales exactes : 3,162277. Donc

$$\log_{10} 3,162277 = \log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log_{10} 10 = \frac{1}{2} \times 1 = 0,5.$$

Ensuite, on calcule la racine carrée de ce nombre, dont le logarithme vaut 0,25 et on recommence ce type d'opération autant de fois que l'on veut pour obtenir la précision désirée.
Et au-delà de 10 ? Soit 316 228, par exemple. Eh bien, c'est ultra simple car $316\,228 = 3,16228 \times 10^5$, donc

$$\log_{10} 316\,228 = 0,5 + 5 = 5,5$$

Évidemment, toute une série de nombres compris entre les racines carrées successives nous échappent mais il existe des moyens de combler ces lacunes, moyens dont nous ne parlerons pas ici.
Mais ... le cheminement que nous avons fait ensemble pour en arriver au concept de **logarithme** n'est pas du tout celui de **l'Histoire**. Nous avons vu qu'au quinzième siècle, la voie semblait ouverte. Et pourtant, rien ne s'est passé. Le pas suivant n'a pas été franchi ! Cette approche a totalement été abandonnée et c'est grâce à une autre démarche que la découverte a jailli.

Merci, John Napier !

John NAPIER (1550 – 1617) est né en Écosse, au château de Merchiston, près d'Édimbourg. Il entre à l'Université de St Andrews à treize ans, mais n'y reste que quelques termes, sans y faire rien de remarquable. Son père l'envoie alors sur le continent. Il en revient très convaincu de la qualité des savants et très monté contre les **papistes** ; C'est en 1614 que son livre « *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* » est publié et marque la naissance du mot et du concept de logarithme. Ses motivations sont clairement exprimées dans la préface de ce traité de 1614 :
« *Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui de longues opérations et beaucoup plus encore à la certitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement ...* »
Dans sa « *Descriptio* » les logarithmes sont définis ainsi :

Les logarithmes sont des nombres qui correspondent à des nombres proportionnels et ont des différences égales.
Les logarithmes peuvent être appelés compagnons équidifférents de nombres proportionnels.

Le mot **logarithme** est de lui et signifie **nombre de raisons.** Il est formé de deux racines grecques : $\lambda o\gamma o\varsigma$ (*logos*), qui signifie **raison**, sous-entendu **raison de progression arithmétique** et $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ (*arithmos*), qui veut dire **nombre, quantité**.
NAPIER va construire une **progression géométrique** de **raison** $1 - \frac{1}{10^7}$. Rappelons qu'une progression géométrique est une suite de nombres dont chacun vaut le précédent multiplié par un nombre constant appelé raison. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, si t est un terme de la suite, son suivant vaut

$$t \times \left(1 - \frac{1}{10^7}\right).$$

NAPIER passe donc d'un terme à un autre en soustrayant sa 10^7-ième partie :

nombre	logarithme
$t_1 = 10\,000\,000,000\,000$	0
$t_2 = t_1 - 1,000\,000$	
$= 9\,999\,999$	1
$t_3 = t_2 - \frac{t_2}{10^7}$	
$= 9\,999\,999 - 0,999\,999\,9$	
$= 9\,999\,998,000\,000\,1$	2
⋮	⋮
$9\,999\,900,000\,495\,0$	100

Le travail est impeccable, mais beaucoup trop long, car la différence entre deux nombres est très petite et s'amenuise à chaque opération. Il faudrait uje quantité de calculs invraisemblable pour arriver au bout.
Mais NAPIER a plus d'un tour dans son sac, et c'est par des astuces très ingénieuses qu'il en fera beaucoup moins sans rien perdre de la précision. Par différents moyens et notamment par des formules de trigonométrie, il trouvera le logarithme des nombres plus petits que $\frac{10^7}{2}$ sans devoir opérer tous les calculs évoqués ci-dessus.

Mais, ces logarithmes ne semblent pas avoir grand chose en commun avec ceux que nous avons décrits au début de l'article. Ils semblent en effet très différents mais au fond, ils ne le sont pas tant que cela ! Leurs propriétés se rapprochent de celles que nous avions obtenues, mais avec quelques différences importantes :

- La notion de **base** est **inapplicable** à son système.
- **Le logarithme de 1 n'est pas égal à 0** et par conséquent, $\log ab$ n'est pas égal à $\log a + \log b$.

NAPIER n'a plus le temps ni la force de modifier ses logarithmes, mais cependant, l'idée est de lui.
Dans l'appendice d'un second ouvrage « *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* » paru après sa mort, on peut cependant lire : « *Parmi les différentes améliorations des logarithmes, la plus importante est celle qui adopte zéro comme logarithme de l'unité et* 10 000 000 *comme logarithme de soit un dixième de l'unité, soit dix fois l'unité.* » Alors, ceux-là étant fixés, les logarithmes de tous les autres nombres s'ensuivent nécessairement.
En 1615, le professeur de mathématiques Henri BRIGGS vient rendre visite à NAPIER en Écosse. Leurs discussions conduisent à la construction par BRIGGS d'une **table de logarithmes** « améliorés » pour laquelle le logarithme de 1 est égal à zéro et celui de 10 est égal à 1.
Vos grands-parents et vos parents ont encore utilisé cette table avant l'avènement des calculettes.
Pour construire sa table, BRIGGS a commencé par calculer les racines carrées répétées depuis 10 :

x	$\log x$
10	**1,0000**
$10^{\frac{1}{2}} = 3,16228$	$0,5000$
$10^{\frac{1}{4}} = 1,77828$	$0,2500$
$10^{\frac{1}{8}} = 1,33352$	$0,1250$
$\vdots$	$\vdots$

Après cinquante-quatre racines successives, il obtient un nombre très légèrement supérieur à 1, dont le logarithme vaut $\frac{1}{2^{54}}$. Puis, par une application répétée de la loi des logarithmes, il construit une table de nombres très « rapprochés », la première table de **logarithmes communs**.
Cette fois, ça y est ! Il s'agit bien des logarithmes comme nous les voyons dans l'enseignement secondaire pour la première fois. Au fil du temps, il y a encore eu pas mal de rebondissements dans le concept et les utilisations des logarithmes, mais nous pourrons en parler une autre fois.

Bibliographie

[1] Ch. NAUX, *La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables*, Paris, A. Blanchard, 1971.

[2] J. NAPIER, *Tercentenary Volume*.

[3] ARCHIMÈDE, *L'Arénaire*, trad. Ch. Mugler, Paris, Les Belles Lettres, 1971.

[4] *D'Imhotep à Copernic*, Cahiers d'Altaïr édités par Fr. Mawet et Ph. Talon, Peeters-Leuven, 1992.

[5] N. CHUQUET, *Triparty en la Science des Nombres* (1484).

[6] M. STIFEL, *Arithmetica Integra* (1544).

ERRATUM – Sur la première page de l'encart central du numéro 67, à la ligne 5, entre les deux parenthèses, le lecteur « quelque peu subtil » aura évidemment remplacé le mot :

dodécagone

par

dodécaèdre

Merci de bien vouloir accepter nos excuses ...

Math-Jeunes n°68, 46–46, 1995

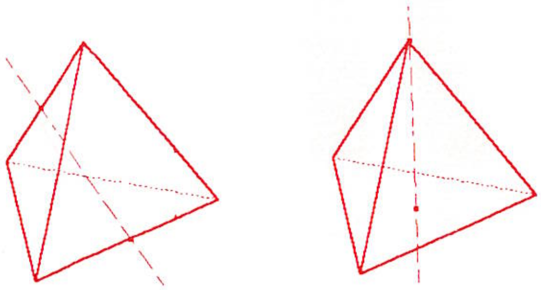
Les polyèdres (suite)

C. Festraets, *Athénée Royal de Woluwé-St-Pierre*

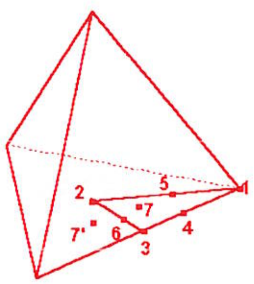
Dans le numéro précédent de ton *Math-Jeunes*, tu as découvert les polyèdres issus du cube et j'espère que tu as bien compris comment on procède pour les obtenir, car nous allons utiliser la même méthode pour rechercher ceux issus du tétraèdre.

Il y a **vingt-quatre** isométries qui appliquent un tétraèdre régulier sur lui-même : **douze déplacements** et **douze retournements** qui sont les composées des douze déplacements avec une des symétries par rapport à un plan passant par une arête et le milieu de l'arête gauche qui lui est opposée. Énumérons les déplacements :

- la rotation identique ;
- trois rotations d'un demi-tour autour des droites joignant les milieux de deux arêtes gauches opposées ;
- huit rotations (un tiers de tour et deux tiers de tour) autour des droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée.

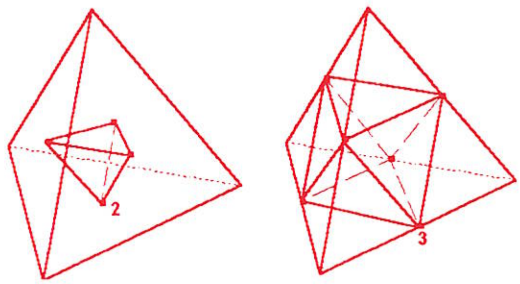


Recherchons maintenant les **orbites** d'un point P de l'espace, c'est-à-dire les images de P par les vingt-quatre isométries qui conservent globalement le tétraèdre. Le point P occupera l'une des **sept** positions représentées ci-dessous :

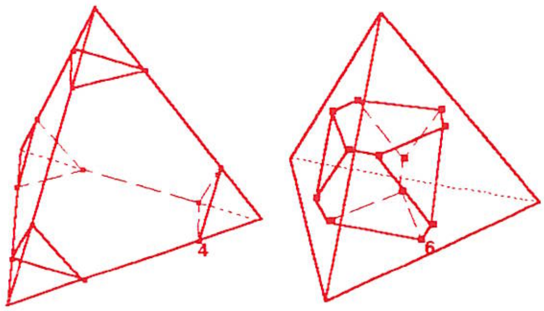


Tu retrouves sur une face du tétraèdre le **triangle fondamental** dont le sommet 1 est en un sommet du tétraèdre, le sommet 2 au centre de gravité de cette face et le sommet 3 au milieu d'une arête de cette même face.

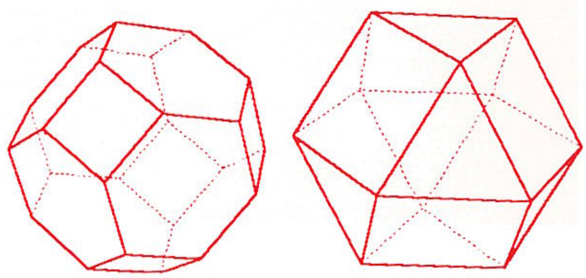
Lorsque P est en 1, son orbite est évidemment formée par les 4 sommets du tétraèdre. Voici les orbites obtenues pour P situé en 2 et en 3 ; tu reconnais un tétraèdre et un octaèdre :



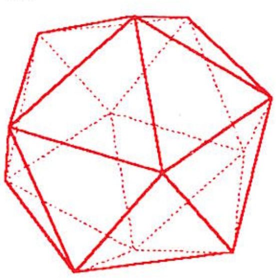
Pour 4, nous obtenons un **tétraèdre tronqué**, de même d'ailleurs que pour 6 :



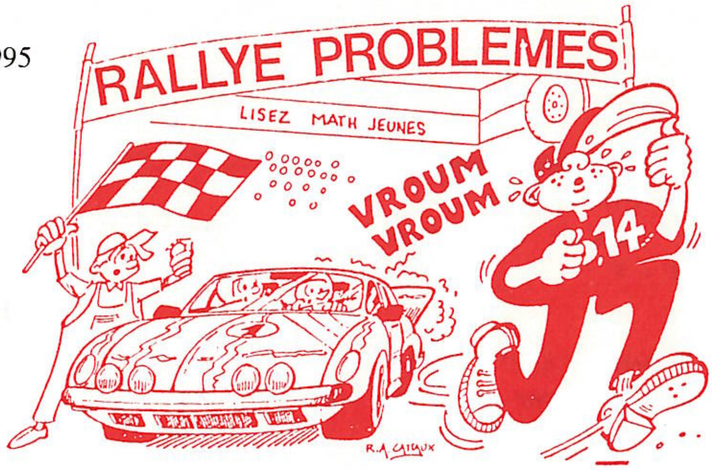
Quant à 5 et 7, ils nous fournissent les polyèdres ci-dessous. Les reconnais-tu ? Nous les avons rencontrés dans la famille du cube ; il s'agit du cuboctaèdre et de l'octaèdre tronqué :



Si on recherche les images de 7 ou de 7' uniquement par les **douze rotations** (on laisse tomber les retournements), alors l'orbite est formée des sommets d'un icosaèdre qu'on appelle aussi **snubtétraèdre**.



Math-Jeunes n°68, 47–49, 1995



C. Festraets

Voici les derniers problèmes de ce rallye 1994-1995, ainsi que les solutions des problèmes proposés dans le numéro 66 de *Math-Jeunes*.

N'oubliez pas d'envoyer vos solutions sur des feuilles séparées (ne mettez pas la solution d'un problème au recto et celle d'un autre problème au verso de la même feuille). Elles doivent arriver au plus tard le vendredi 17 mars chez C. FESTRAETS, 36 rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

m7 On donne un triangle ABC, un point P situé sur $[AB]$, un point Q situé sur $[BC]$ et un point R situé sur $[CA]$. Soient A', B', C' les centres respectifs des cercles circonscrits respectivement aux triangles APR, BPQ et CQR. Démontrer que le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC.

m8 Deux voleurs ont dérobé un tonneau contenant 8 litres de vin. Ils disposent de deux récipients vides dont les capacités sont de 5 litres et de 3 litres. Comment doivent-ils procéder pour se partager équitablement le vin et recevoir ainsi chacun 4 litres de vin ? Et si les données étaient un tonneau de 30 litres et deux récipients, l'un de 20 litres et l'autre de 10 litres ?

m9 Dans un tournoi de tennis, il n'y a pas de match nul, un joueur reçoit 1 point s'il gagne et 0 s'il perd. Il y a 10 joueurs. Démontrer qu'à la fin du tournoi, la somme des carrés de leurs scores vaut au plus 285.

M7 On donne trois segments de longueurs 1, a et b. Construire géométriquement un segment de longueur $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

M8 Trouver toutes les valeurs de n, entier et positif, telles que $n^4 + 4^n$ soit un nombre premier.

M9 Je dois coller des timbres sur une enveloppe pour une valeur totale de n francs. Je dispose de k timbres, chacun d'une valeur entière de francs, dont le montant total vaut au moins n francs, mais est inférieur à $2k$ francs. Démontrer qu'il est toujours possible de choisir un certain nombre de timbres parmi ceux dont je dispose pour un montant total de n francs exactement.

Solutions des problèmes proposés dans le numéro 66

m1 Désignons les six garçons par l'initiale de leur prénom et schématisons leurs réponses de la manière suivante :

$$A(B,C) \quad D(E,F) \quad E(F,B) \quad C(A,B) \quad B(D,E)$$

Si A est celui qui a totalement menti, on a : $A(\text{non}B, \text{non}C) \quad E(F, \text{non}B) \quad C(A, \text{non}B)$
A et F sont donc les coupables, ce qui entraîne :

$$D(\text{non}E, F) \quad B(D, \text{non}E)$$

D serait alors aussi coupable, ce qui est impossible.

Si D est celui qui a totalement menti, on a : $D(\text{non}E, \text{non}F) \quad E(\text{non}F, B) \quad B(D, \text{non}E)$
D et B sont donc les coupables, ce qui entraîne :

$$A(B, \text{non}C) \quad C(\text{non}A, B)$$

Cette solution convient ; reste à voir si c'est la seule !

Si E est celui qui a totalement menti, on a : $E(\text{non}F, \text{non}B) \quad A(\text{non}B, C) \quad D(E, \text{non}F) \quad C(A, \text{non}B)$
ce qui nous donne trois coupables C, E, A et est donc impossible.

Si C est celui qui a totalement menti, on a : $C(\text{non}A, \text{non}B) \quad A(\text{non}B, C) \quad C(A, \text{non}B)$
A et C sont donc les coupables, ce qui entraîne que D a cité deux non-coupables, ce qui est impossible.

Si B est celui qui a totalement menti, on a : $B(\text{non}D, \text{non}E) \quad D(\text{non}E, F)$
F est donc coupable, et alors : $E(F, \text{non}B) \quad A(\text{non}B, C) \quad C(\text{non}B, A)$
A et C sont aussi coupables, ce qui est impossible.

Il n'y a donc qu'**une seule** solution : **Bernard et Daniel ont volé les pommes.**

m2 Soit G le second point de rencontre des cercles circonscrits aux triangles ABD et CAF (le premier étant A).
$AGBD$ est un quadrilatère inscrit dans un

cercle, donc ses angles opposés sont supplémentaires et $\widehat{AGB} = 180° - \widehat{D}$.

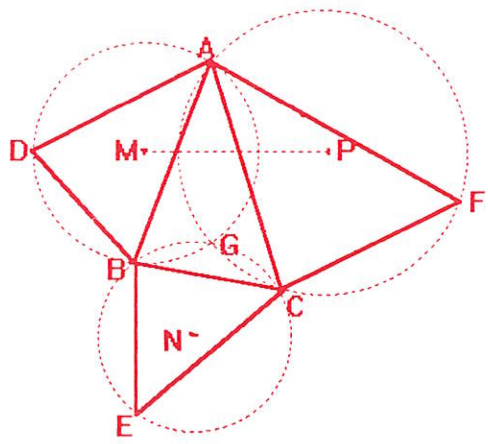
De même, dans le quadrilatère $CGAF$, $\widehat{CGA} = 180° - \widehat{F}$.

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{BGC} &= 360° - (\widehat{AGC} + \widehat{CGA}) \\ &= 360° - (180° - \widehat{D} + 180° - \widehat{F}) \\ &= \widehat{D} + \widehat{F} = 180° - \widehat{E}\end{aligned}$$

Dans le quadrilatère $BGCE$, on a ainsi deux angles opposés supplémentaires ; donc ce quadrilatère est inscriptible et le cercle circonscrit au triangle BCE passe bien par le point G.

Désignons par M, N, P les centres respectifs des trois cercles :



La droite MP est un diamètre des cercles de centres M et P, donc est perpendiculaire en H à la corde $[AG]$ commune à ces deux cercles.

De même, MN est perpendiculaire à BG en J et PN est perpendiculaire à CG en K.

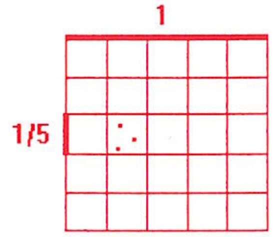
Le quadrilatère $MHGJ$ a donc deux angles opposés valant 90° ; il est inscriptible et dès lors,

$$\widehat{HMJ} = 180° - \widehat{HGJ} = 180° - \widehat{AGB} = \widehat{D}.$$

On démontre de même que

$$\widehat{JNK} = \widehat{E} \quad \text{et} \quad \widehat{JPH} = \widehat{F}.$$

m3 Partageons le carré donné en 25 petits carrés de côté $\frac{1}{5}$ en menant des parallèles aux côtés. Puisqu'il y a 51 points et 25 petits carrés, un (au moins) des petits carrés contient trois points.



La diagonale d'un petit carré a pour longueur $\frac{1}{5}\sqrt{2}$, donc le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au petit carré contenant les trois points a pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{10}$. Or on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7} \quad \text{car} \quad 7\sqrt{2} < 10 \Leftrightarrow 49 \times 2 = 98 < 100$$

Donc le disque de rayon $\frac{1}{7}$ et de même centre que le cercle $\mathcal{C}$ contient les trois points.

M1 Prenons midi comme origine des temps et l'heure comme unité.

Soient x et y les moments d'arrivée des deux personnes, x et y sont pris au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$.

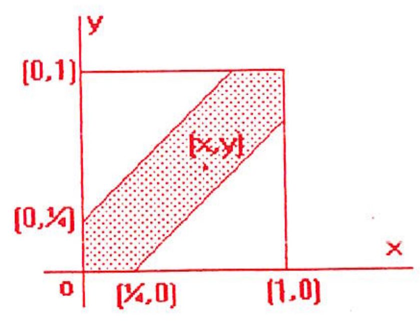
Pour qu'il y ait rencontre, il faut que

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$$

et donc les points de coordonnée (x, y) doivent satisfaire les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x - y \leqslant \frac{1}{4} \\ x - y \geqslant -\frac{1}{4} \end{cases}$$

et sont donc situés dans la zone ombrée de la figure ci-dessous.



L'aire de cette zone est égale à l'aire du carré moins les aires des deux triangles rectangles, soit

$$1 - 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

La probabilité cherchée est le rapport entre cette aire et l'aire du carré.
Elle vaut donc : $\frac{7}{16}$.

M2 Supposons que la fonction f soit périodique ; il existe alors (au moins) un réel r positif non nul r tel que $f(r) = f(0)$ et on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(r\sqrt{i}) = \sum_{i=1}^{n} \cos 0 = n \cdot \cos 0 = n$$

Mais $\cos(r\sqrt{i}) \leqslant 1$, donc

$$\cos r = \cos(r\sqrt{2}) = \cos(r\sqrt{3}) = \ldots = \cos(r\sqrt{n}) = 1.$$

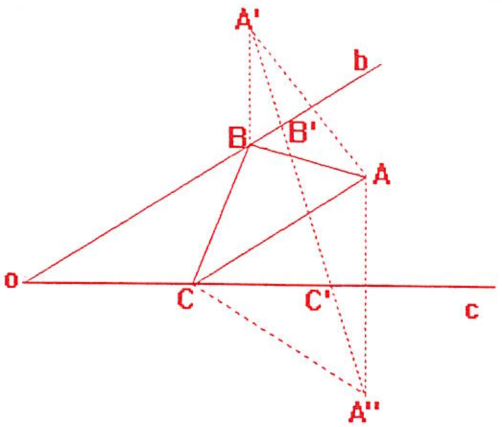
En particulier, il faut que $r = 2m\pi$ et $r\sqrt{2} = 2n\pi$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$,
et en divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

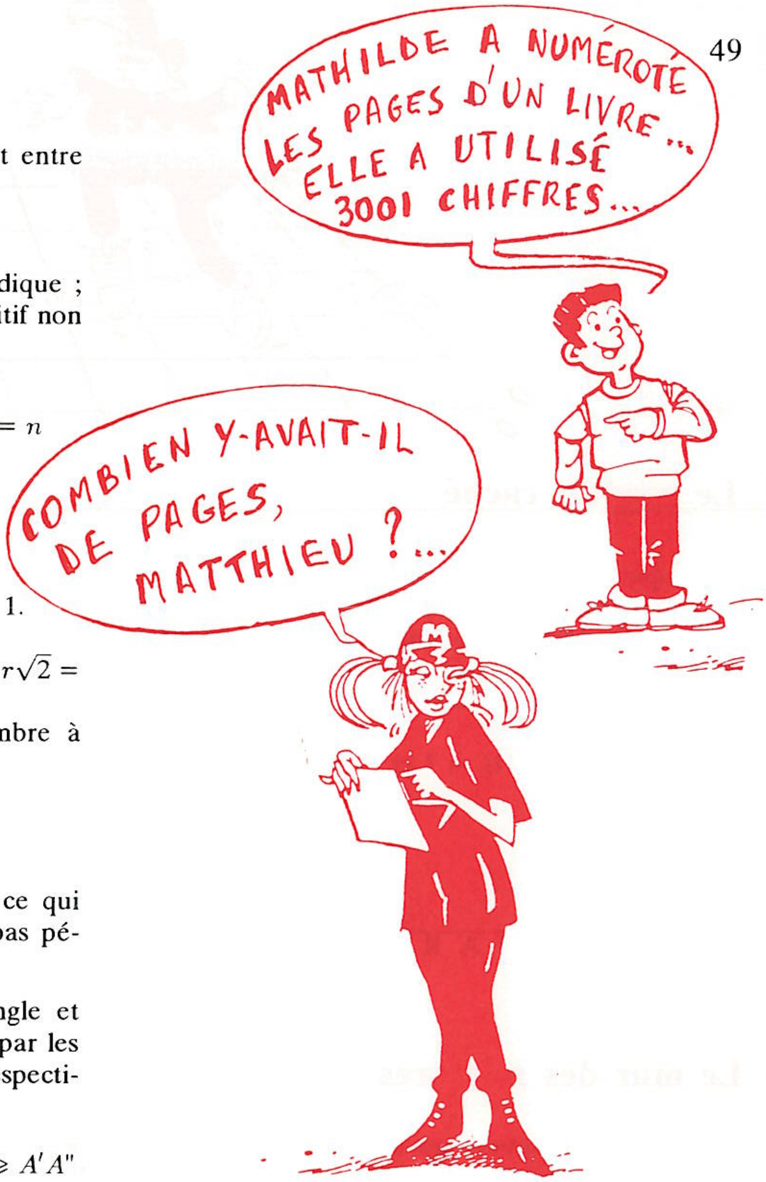
qui signifie que $\sqrt{2}$ est un rationnel, ce qui évidemment est faux. Donc f n'est pas périodique.

M3 Appelons b et c les deux côtés de l'angle et construisons les images A' et A'' de A par les symétries orthogonales d'axes b et c respectivement. Nous avons :

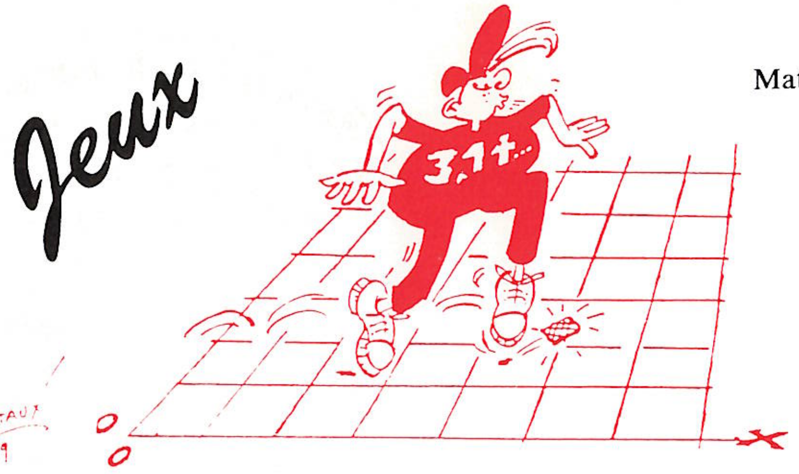
$$AB + BC + CA = A'B + BC + CA'' \geqslant A'A''$$



C'est donc le triangle $AB'C'$ qui a le **périmètre minimum.**



Math-Jeunes n°68, 50–50, 1995



A. Parent

Le produit caché

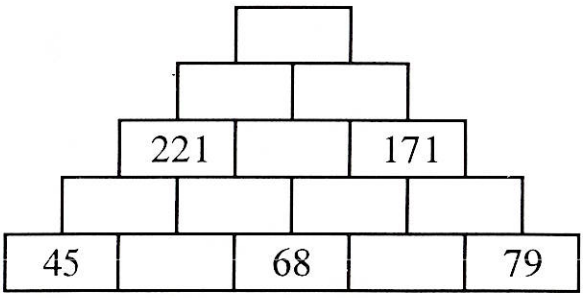
À chaque lettre est associé un chiffre qui permet de reconstituer une multiplication cohérente. L'ordinateur de *Math-Jeunes* nous a donné 63 solutions différentes (que tu peux aussi tenter de trouver) ! Sinon, nous te demandons simplement la solution pour laquelle

$$A = H = I \text{ et } C = U$$

$$\begin{array}{r} C\ I\ N\ Q \\ \times \quad H\ U\ I\ T \\ \hline Q\ U\ A\ R\ A\ N\ T\ E \end{array}$$

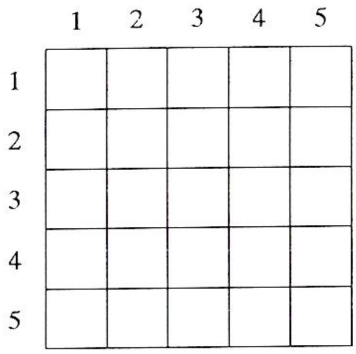
Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.



Produits croisés

Sachant que chaque nombre correspond à un mot de la grille et représente le produit de la valeur de ses lettres (A=1, B=2, ..., Z=26), reconstitue une grille de mots croisés cohérente. Cette grille a la particularité de présenter une « certaine symétrie » : les mots sont les mêmes, qu'ils soient lus horizontalement ou verticalement !

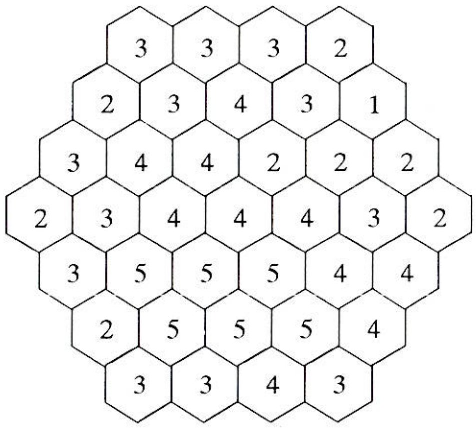


Horizontalement ou **Verticalement**

1. 504
2. 41 580
3. 215 460
4. 58 800
5. 25 270

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



Math-Jeunes n°68, 51–52, 1995

Et ainsi de suite ... (2)

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

2e partie : La ruée vers l'or

Rappelons que les premiers termes de la suite F de FIBONACCI sont

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ \ldots$$

Nous savons que deux rapports successifs de deux termes consécutifs de cette suite ne sont pas égaux. Ils sont cependant assez proches l'un de l'autre.

Calculons-en des valeurs approchées, à l'aide d'une calculatrice (ou à la main pour les plus courageux). $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{2}{3} = 0,666\ldots$, $\frac{3}{5} = 0,6$, $\frac{5}{8} = 0,625$, $\frac{8}{13} = 0,6153\ldots$, $\frac{13}{21} = 0,619\ldots$, $\frac{21}{34} = 0,6176\ldots$, $\frac{34}{55} = 0,618\ldots$, $\frac{55}{89} = 0,6179\ldots$, ...

Vous constatez facilement que toutes ces valeurs semblent tendre vers un même nombre (on dit que la suite des rapports converge). Il est possible de démontrer cette propriété. Admettons-la.

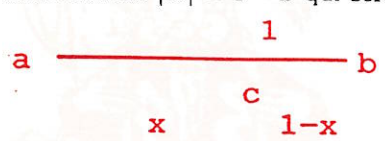
Le nombre $0,618\ldots$ vers lequel cette suite de rapports converge, est appelé *Nombre d'Or* et est représenté par ϕ^- (prononcez « phi moins »).

Voyons ensemble comment il est possible d'évaluer ϕ^- de manière plus précise.

Voici un segment $[ab]$ auquel nous attribuons la longueur 1 ($|ab| = 1$).

Plaçons c sur $[ab]$ et imposons, comme nous l'avons fait pour construire la suite de FIBONACCI, $\frac{|ac|}{|cb|} = \frac{|cb|}{|ab|}$

Si nous désignons $|ac|$ par x (donc $0 < x < 1$ puisque $|ab|$=1), nous aurons $|cb| = 1 - x$ qui sera également positif.



Il faut donc $\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$ ou encore $(1-x)^2 = x$, ce qui donne $1 - 2x + x^2 = x$ c'est-à-dire

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Il existe une formule permettant de tirer x de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Elle est obtenue classiquement en utilisant des identités remarquables (carré d'un binôme et différence de deux carrés). C'est un sujet important du cours de mathématique de quatrième année et votre professeur peut vous donner des informations à son sujet.

Appliquons cette formule, nous obtenons $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ c'est-à-dire $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (voir aussi addendum).

La première valeur de x doit être rejetée car elle est supérieure à 1, le *Nombre d'Or* ϕ^- est égal à

$$\frac{1-x}{1} = 1 - x = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Un petit calcul à la machine nous donne bien $\phi^- = 0,61803\ldots$

EUCLIDE fait mention du Nombre d'Or ϕ^- dans son traité de géométrie (environ 300 avant Jésus Christ). PYTHAGORE (6ème siècle avant J.-C.) et ses disciples, connaissaient les propriétés de ce nombre qui représentait, pour eux, l'harmonie entre les nombres et aussi dans certaines formes géométriques.

Plus tard, des artistes comme LE TITIEN, Léonard DE VINCI, RAPHAËL furent des utilisateurs du Nombre d'Or. La fameuse « Joconde » de Léonard DE VINCI est composée, paraît-il, selon cette « divine proportion ».

Il était possible de mener autrement la recherche précédente. Ainsi, par exemple, vous pouviez désigner $|bc|$ par y. Dès lors, vous aviez $|ac| = 1 - y$ et la proportion devenait $\frac{1-y}{y} = \frac{y}{1}$ d'où $y^2 = 1 - y$ donc $y^2 + y - 1 = 0$.

En appliquant la formule de résolution d'une équation du second degré, vous obteniez $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

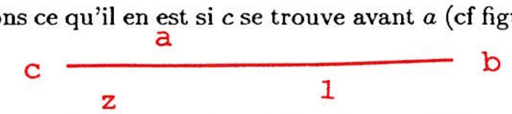
Et le Nombre d'Or ϕ^- vaut bien

$$\frac{y}{1} = y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\ldots$$

Il est coutume de dire que la curiosité est un vilain défaut. En mathématique, une saine curiosité serait plutôt une grande qualité.

C'est ainsi que nous pouvons nous demander ce qui se passerait si nous acceptions que le point c soit choisi sur la droite ab c'est à dire qu'il puisse être situé en dehors du segment $[ab]$.

Voyons ce qu'il en est si c se trouve avant a (cf figure).



Posons $|ca| = z$ et gardons $|ab| = 1$, on a $|bc| = z + 1$. Il faut $\frac{|ac|}{|cb|} = \frac{|cb|}{|ab|}$ ce qui entraîne

$\frac{z}{z+1} = \frac{z+1}{1}$ d'où $(z+1)^2 = z$ ou $z^2 + 2z + 1 = z$ ou $z^2 + z + 1 = 0$. L'application de la formule de résolution de l'équation du second degré donne $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ et z n'est pas un nombre réel car la racine carrée de -3 n'est pas réelle.

c ne peut donc pas se trouver avant a.

Voyons maintenant ce qui se passe si c est après b.

a ——— t ——— c

1 b t−1

Posons $|ac| = t$ avec $t > 1$ et gardons $|ab| = 1$ donc $|cb| = t-1$. Il faut toujours $\frac{|ac|}{|cb|} = \frac{|cb|}{|ab|}$ ce qui entraîne $\frac{t}{t-1} = \frac{t-1}{1}$.

Nous en déduisons que $t^2-2t+1 = t$ ou $t^2-3t+1 = 0$. Nous retrouvons la même équation que celle rencontrée plus avant mais l'inconnue est t au lieu de x.

Nous en déduisons que $t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ce qui donne $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $t = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution doit être rejetée car t doit être supérieur à 1.

Le rapport $\frac{|cb|}{|ab|}$ vaut donc

$$\frac{t-1}{1} = t-1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,61803\ldots$$

Ce nombre est un autre Nombre d'Or et est désigné par ϕ^+ (prononcez « phi plus »).

Observons ϕ^+ et ϕ^- !

Il semble d'abord que $\phi^+ - \phi^- = 1$. C'est vrai puisque

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

ϕ^+ et ϕ^- sont anticomplémentaires à 1.

De plus

$$\phi^+ \cdot \phi^- = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-1}{4} = 1.$$

ϕ^+ et ϕ^- sont deux nombres inverses.

Les deux Nombres d'Or ϕ^+ et ϕ^- ont encore d'autres propriétés. Vous pourrez les découvrir par recherches personnelles ou en consultant des manuels de mathématique.

Vous pouvez nous faire part de vos découvertes, même si elles vous semblent modestes. C'est avec plaisir que nous les publierons dans un courrier des lecteurs.

Addendum

Voici, si cela vous intéresse, une autre façon de résoudre une équation du second degré.

Soit à tirer les valeurs de x hors de $x^2-3x+1 = 0$. Si ces valeurs sont représentées par p et q alors on aura, de façon triviale, $x = p$ et $x = q$ donc aussi $x-p = 0$ et $x-q = 0$ donc encore $(x-p)\cdot(x-q) = 0$ c'est-à-dire $x^2 - px - qx + pq = 0$ et enfin $x^2 - (p+q)x + pq = 0$.

En comparant cette relation avec l'équation donnée, il vient immédiatement $p+q = 3$ et $pq = 1$. La moyenne arithmétique des deux nombres p et q cherchés est donc $\frac{p+q}{2} = \frac{3}{2}$.

p et q sont également éloignés de leur moyenne arithmétique et nous en déduisons que $p = \frac{3}{2}+t$ et $q = \frac{3}{2}-t$ (t étant choisi positif).

En utilisant la relation $pq = 1$, il vient $\left(\frac{3}{2}+t\right)\left(\frac{3}{2}-t\right) = 1$ ou encore $\frac{9}{4} - t^2 = 1$ donc $t^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

Nous obtenons enfin $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (la solution $t = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ est à rejeter puisqu'on a choisi t positif).

Nous retrouvons ainsi $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Courrier des lecteurs

Suite à la première partie de cet article publiée dans le n°66 de *Math-Jeunes*, la classe de 3ème latin-math du Collège Saint Joseph de Chimay et Mr DEBAISIEUX Professeur à l'Institut du Sacré-Cœur de Mouscron nous ont envoyé quelques démonstrations de propriétés de la suite de FIBONACCI.

De Chimay ...

- La somme de six termes consécutifs de F est un multiple de 4.
- La somme de dix termes consécutifs de F est un multiple de 11.
- La somme de huit termes consécutifs de F est un multiple de 3.
- La somme de douze termes consécutifs de F est un multiple de 8.

Voici la démonstration de la première de ces propriétés, les autres lui sont semblables.

Dans la suite F :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, a, b, a+b, \ldots,$$

soient $F_i = a$ et $F_{i+1} = b$, alors $F_{i+2} = a+b$, $F_{i+3} = 2b+a$, $F_{i+4} = 3b+2a$, $F_{i+5} = 5b+3a$, ...

La somme de six termes consécutifs vaut :

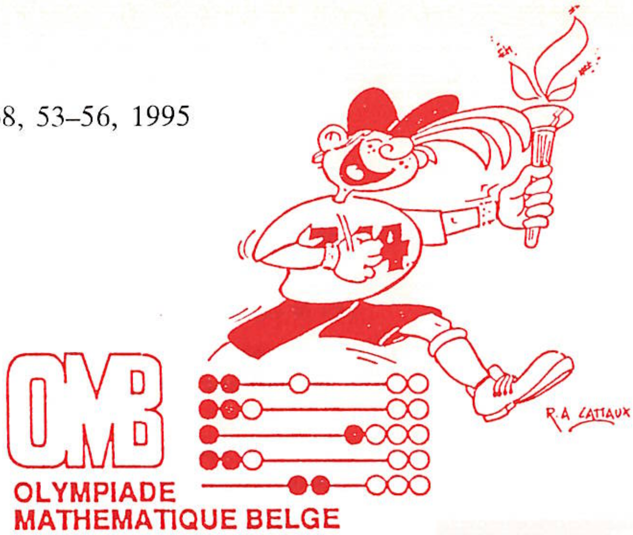
$$a+b+(a+b)+(2b+a)+(3b+2a)+(5b+3a) = 8a+12b = 4(2a+3b)$$

qui est un multiple de quatre !

De Mouscron ...

Mr DEBAISIEUX démontre les mêmes propriétés et montre également que :

- La somme des carrés de trois termes consécutifs de F est un nombre pair.
- La somme des cubes de six termes consécutifs de F est un nombre pair.



C. Van Hooste

Ami lecteur, voici quelques solutions détaillées aux problèmes qui t'ont été proposés lors des éliminatoires qui viennent de se dérouler. Tu trouveras, en fin d'article, les réponses correctes (mini et Maxi) à l'ensemble des questions.

Mini-Éliminatoire

Question 10 : Isométries

Un segment est toujours applicable sur un segment donné de même longueur par :
(A) une translation ; (B) une symétrie centrale ;
(C) une symétrie orthogonale ; (D) une translation suivie d'une symétrie orthogonale ;
(E) une translation suivie d'une symétrie centrale.

Considérons deux segments $[AB]$ et $[CD]$ de même longueur.

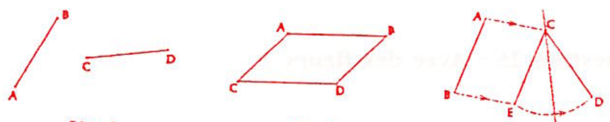


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Si ces segments ne sont pas inclus dans des droites parallèles (cf. fig. 1), alors il n'existe pas de translation, ni de symétrie centrale, ni de translation suivie d'une symétrie centrale qui applique l'un de ces segments sur l'autre. En effet, pour toute translation et pour toute symétrie centrale, une droite et son image sont toujours parallèles. Les réponses (A), (B) et (E) doivent donc être rejetées.

Si les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont deux côtés opposés d'un parallélogramme non particulier (cf. fig. 2), alors il n'existe aucune symétrie orthogonale qui applique l'un de ces segments sur l'autre. En effet, s'il existait une telle symétrie, l'axe de cette symétrie devrait comprendre les milieux des côtés $[AC]$ et $[BD]$ et être perpendiculaire à ces côtés. Comme ces deux conditions ne peuvent être remplies simultanément dans un parallélogramme non particulier, il n'y a effectivement pas de symétrie orthogonale qui convienne. Ainsi, la réponse (C) doit être rejetée aussi. On aurait pu conclure plus vite à condition de savoir qu'un parallélogramme non particulier n'a aucun axe de symétrie.

Montrons qu'il existe bien une isométrie, composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale, qui applique $[AB]$ sur $[CD]$.

Soit la translation t qui applique A sur C et désignons par E l'image de B par t (cf. fig. 3).

Soit encore la symétrie orthogonale s dont l'axe est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ECD}$. Elle applique $[CE]$ sur $[CD]$.

Par conséquent, l'isométrie $s o t$ (t suivi de s) applique $[AB]$ sur $[CD]$:

$$[AB] \xrightarrow{t} [CE] \xrightarrow{s} [CD]$$

Question 11 : Partez d'une bonne base !

On considère un triangle ABC ; on marque les points P et Q sur le segment $[AB]$, de telle manière que $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$ et $|BQ| = \frac{2}{5}|AB|$. Si $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle ACP, $\mathcal{B}$ celle de CPQ et $\mathcal{C}$ celle de BCQ, alors :
(A) $\mathcal{A} < \mathcal{B} < \mathcal{C}$ (B) $\mathcal{B} < \mathcal{C} < \mathcal{A}$
(C) $\mathcal{C} < \mathcal{B} < \mathcal{A}$ (D) $\mathcal{B} < \mathcal{A} < \mathcal{C}$ (E) $\mathcal{A} < \mathcal{C} < \mathcal{B}$

Si l'on considère que les triangles ACP, CPQ et BCQ ont respectivement pour base les côtés $[AP]$, $[PQ]$ et $[QB]$, alors ils ont la même hauteur. Par conséquent, ces triangles ont une aire proportionnelle à la mesure de leur base :

$$\frac{\mathcal{A}}{|AP|} = \frac{\mathcal{B}}{|PQ|} = \frac{\mathcal{C}}{|QB|}$$

Autrement dit, plus la base est grande, plus l'aire du triangle correspondant est grande. Or, d'après les données,

$$|AP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{5}{15}|AB| \quad |QB| = \frac{2}{5}|AB| = \frac{6}{15}|AB|$$

$$\text{et} \quad |PQ| = |AB| - |AP| - |QB| = \frac{4}{15}|AB|.$$

D'où il vient $|PQ| < |AP| < |BQ|$ et, par voie de conséquence,

$$\mathcal{B} < \mathcal{A} < \mathcal{C} \quad - \quad \text{la réponse est donc } D$$

Question 18 : Famille nombreuse

Une famille compte quatre enfants dont le produit des âges (exprimés en nombres entiers) est 126 et la somme

17. La différence d'âge entre les deux enfants les plus âgés est :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Il faut mettre 126 sous forme d'un produit de quatre naturels dont la somme est égale à 17. Pour cela, dressons la liste des diviseurs de 126. Partant de la décomposition de 126 en facteurs premiers ($126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$), nous déduisons que ce nombre admet 12 diviseurs naturels.

Nombre de diviseurs

Pour obtenir le nombre de diviseurs d'un naturel N supérieur à 1, il faut décomposer ce nombre en facteurs premiers :

$$N = p^a \times q^b \times \cdots \times r^c$$

où $p, q, \ldots, r$ sont des premiers et $a, b, \ldots, c$ des naturels strictement positifs. De cette décomposition, on déduit le nombre de diviseurs de N :

$$d(N) = (a+1) \times (b+1) \times \cdots \times (c+1)$$

À consulter :

N.J. SCHONS, Traité d'arithmétique, La Procure, Namur, 1963, p. 109-111 et p. 116-118.

M. BALLIEU, Ne dites plus Jules et Jim, ..., Math-Jeunes n° 59, p. 56-60.

Ces diviseurs sont :

1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63 et 126

Mais, parmi ceux-ci, seuls les diviseurs inférieurs à 17 nous intéressent :

1, 2, 3, 6, 7, 9 et 14

Pour obtenir un produit égal à $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, les critères suivants doivent être respectés :

pour amener le facteur premier	il faut choisir
2	2 ou 6 ou 14
3 (de mult. 2)	(3 et 3) ou (3 et 6) ou 9
7	7 ou 14

Les facteurs 9 et 14 doivent être rejetés sinon la somme des quatre facteurs choisis dépasserait 17. D'ailleurs, pour que cette somme ne dépasse pas 17, seules les deux décompositions qui suivent sont acceptables :

$$7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \quad \text{et} \quad 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1.$$

Les sommes correspondantes sont respectivement 15 et 17. La bonne décomposition est donc la seconde. Ainsi, la différence d'âge entre les deux enfants les plus âgés est égale à 1. La réponse est *B*.

Question 20 : Cylindres

Deux récipients cylindriques X et Y sont tels que le diamètre de la base de X est le double de celui de Y et que la hauteur de X est la moitié de celle de Y. Dans ce cas :

(A) X et Y ont même capacité ;

(B) la capacité de X est double de celle de Y ;

(C) la capacité de X est quadruple de celle de Y ;

(D) la capacité de Y est double de celle de X ;

(E) la capacité de Y est quadruple de celle de X.

Étant donné que le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

la capacité d'un récipient cylindrique est

- proportionnelle à sa hauteur ;
- proportionnelle au carré de son rayon (ou de son diamètre).

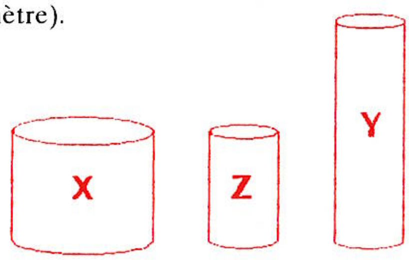


Fig. 4

Imaginons alors un récipient cylindrique Z de même hauteur que X et de même rayon que Y (cf. fig. 4). Nous aurions :

capacité de $X = 4 \times$ capacité de Z et

capacité de $Z = \frac{1}{2} \times$ capacité de Y

D'où, il vient :

capacité de $X = 2 \times$ capacité de Y.

La réponse est *B*.

Question 25 : Avec des fleurs

À une réunion de famille arrivent 5 femmes, 4 hommes et 8 enfants. Les hommes entre eux ne s'offrent rien, mais offrent une fleur à chaque femme et à chaque enfant, tandis que les femmes et les enfants offrent une fleur à chaque autre personne. Combien de fleurs se donnent en tout ?

(A) 130 (B) 208 (C) 260 (D) 273 (E) 520

Au total, il y a 17 personnes présentes à cette réunion de famille. Imaginons que chaque personne donne une fleur à chaque autre personne. Se donneraient alors au total :

$$17 \times 16 = 272 \text{ fleurs.}$$

Mais, comme les hommes ne se donnent pas de fleurs, il faut décompter :

$$4 \times 3 = 12 \text{ fleurs.}$$

Donc, finalement, se donnent 260 fleurs exactement. La réponse est *C*.

Question 29 : Sculpture et peinture

Une artiste dispose de 14 cubes ayant un mètre d'arête ; elle réalise et pose sur le sol la sculpture représentée à la figure 5 ; cette sculpture est constituée de trois étages carrés. L'artiste peint toutes les surfaces exposées.

Quelle est, en mètres carrés, l'aire à peindre ?
(A) 21 (B) 24 (C) 33 (D) 37 (E) 42

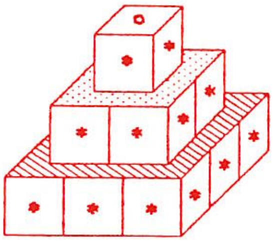


Fig. 5

La surface à peindre est composée (cf. fig. 5)

- de $4 \times 3 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 24$ carrés (marqués par le symbole $*$),
- d'un « chemin de ronde » situé au niveau 1 (hachuré),
- d'un « chemin de ronde » situé au niveau 2 (marqué de petits points),
- d'un carré au niveau 3 (marqué par le symbole $\circ$).

L'aire des 24 carrés vaut 24 m^2.
L'aire du « chemin de ronde » du niveau 1 est égale à la différence des aires entre un carré de côté 3 m et un carré de côté 2 m ; elle vaut donc

$$9 \text{ m}^2 - 4 \text{ m}^2 = 5 \text{ m}^2.$$

De même, l'aire du « chemin de ronde » du niveau 2 est égale à la différence des aires de deux carrés de côtés 2 m et 1 m ; elle vaut

$$4 \text{ m}^2 - 1 \text{ m}^2 = 3 \text{ m}^2.$$

L'aire du carré au niveau 3 vaut 1 m^2.
L'aire totale à peindre vaut donc

$$24 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 + 3 \text{ m}^2 + 1 \text{ m}^2 = 33 \text{ m}^2.$$

La réponse est *C*.

Maxi-Éliminatoire

Question 4 : Un carré !

Les côtés d'un carré mesurent $x + 3$, $x^2 + 1$, $y - 3$ et $y^2 - 6y - 11$. Que vaut la différence $y - x$?
(A) −6 (B) 0 (C) 4 (D) 6 (E) 10

Puisque les quatre côtés d'un carré ont la même longueur, on doit avoir :

$$x + 3 = y - 3$$

D'où, on tire $y - x = 6$; la réponse est *D*.

Question 5 : Critère de divisibilité par 7

Soit n un nombre naturel de trois chiffres dont le chiffre des centaines est x, celui des dizaines est y et celui des unités est z. Si n est divisible par 7, lequel des nombres suivants est certainement divisible par 7 ?
(A) z (B) $x + y + z$ (C) $x \cdot y \cdot z$
(D) $5x - y + 2z$ (E) $2x + 3y + z$

Le nombre n s'écrit :

$$\begin{aligned} n &= 100x + 10y + z \\ &= (98x + 7y) + (2x + 3y + z) \\ &= 7 \cdot (14x + y) + (2x + 3y + z) \end{aligned}$$

Pour qu'il soit divisible par 7, il est nécessaire que le second terme de cette somme soit lui-même divisible par 7. La réponse est *E*.

Question 6 : Bassin circulaire

Un terrain triangulaire a un angle droit ; les deux côtés adjacents à cet angle droit mesurent 60 m et 80 m. Quel est le rayon du plus grand bassin circulaire qu'on puisse y placer ?
(A) 18 m (B) $6\sqrt{10}$ m (C) 20 m
(D) 21 m (E) $10\sqrt{5}$ m

Soit ABC le triangle représentant le terrain (cf. fig. 1).
Le plus grand cercle que l'on puisse tracer à l'intérieur d'un triangle est le cercle inscrit à ce triangle, celui qui est tangent aux trois côtés et dont le centre est le point commun aux bissectrices intérieures du triangle.

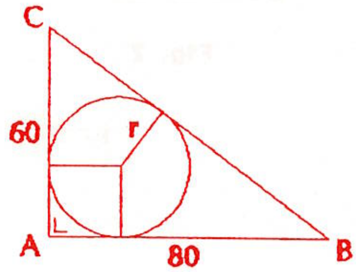


Fig. 1

Souvenons-nous alors que l'aire S d'un triangle est égale au produit de son demi-périmètre p par le rayon r du cercle qui lui est inscrit :

$$S = p \cdot r$$

Par conséquent, pour déterminer le rayon du cercle inscrit, il suffit de trouver l'aire et le périmètre du triangle.
Le triangle ABC est rectangle. Appliquons-y le théorème de Pythagore afin de déterminer la mesure de son hypoténuse :

$$|BC|^2 = 60^2 + 80^2 = 10\,000$$

D'où, $|BC| = 100$.
Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} r &= \frac{S}{p} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 80 \times 60}{\frac{1}{2}(100 + 80 + 60)} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Question 11 : Polyèdres réguliers

Les centres des six faces d'un cube sont les sommets d'un octaèdre. Le rapport du volume du cube à celui de l'octaèdre vaut :
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Soit $SABCDS'$ l'octaèdre dont les sommets sont les centres des faces d'un cube d'arête a (cf. fig. 2). Il s'agit d'un octaèdre convexe régulier.

Un octaèdre convexe régulier est formé de deux pyramides à base carrée. Rappelons que le volume V d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base B par sa hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

D'une part, la base de ces pyramides est le carré $ABCD$, carré dont les sommets sont les milieux des côtés d'un carré isométrique aux faces du cube. Il est facile de vérifier que l'aire du carré $ABCD$ vaut la moitié de l'aire d'une face du cube.

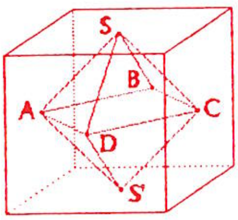


Fig. 2

D'autre part, la hauteur de chacune de ces pyramides vaut la moitié de l'arête du cube.

Ainsi, nous avons :

$$B = \frac{1}{2}a^2, \quad h = \frac{1}{2}a$$

et

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

Le volume de l'octaèdre vaut donc : $\frac{1}{6}a^3$.

Le cube a ainsi un volume six fois plus grand que celui de cet octaèdre. La réponse est D.

Question 18 : Trapèze

(Sans réponse préformulée) — La petite base d'un trapèze a une longueur de 90 et les milieux de ses diagonales sont distants de 5. Quelle est la longueur de la grande base de ce trapèze ?

Soit $ABCD$ le trapèze. Désignons respectivement par M et N les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze (cf. fig. 3).

La droite MN coupe les côtés non parallèles $[AD]$ et $[BC]$ respectivement en P et en Q.

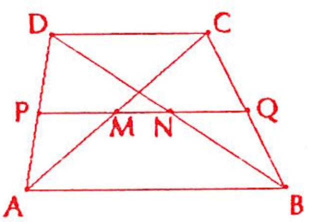


Fig. 3

Dans le triangle ACD, le segment $[PM]$ joint les milieux de deux côtés ; par conséquent, la mesure de ce segment est la moitié de celle du troisième côté (théorème des milieux) :

$$|PM| = \frac{1}{2}|DC| = 45$$

Dans le triangle DAB, le segment $[PN]$ joint les milieux de deux côtés ; celui-ci mesure donc la moitié du troisième côté (de nouveau, le théorème des milieux) :

$$|PN| = \frac{1}{2}|AB|$$

D'où, on tire :

$$\begin{aligned} |AB| &= 2|PN| \\ &= 2(|PM| + |MN|) \\ &= 100 \end{aligned}$$

Question 30 : Distance

Un point se trouve au tiers d'une diagonale d'un cube d'arête 1. Que vaut sa distance à une autre diagonale de ce cube ?

(A) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ *(B)* $\frac{\sqrt{2}}{4}$ *(C)* $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *(D)* $\frac{1}{4}$

(E) Cela dépend du choix de la seconde diagonale

On peut bien sûr résoudre ce problème par le biais de la géométrie analytique, mais il est aussi possible d'utiliser une méthode purement géométrique.

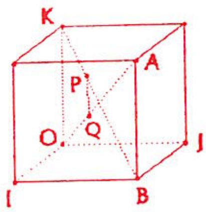


Fig. 4

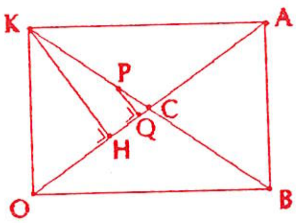


Fig. 5

En effet, plaçons-nous dans le rectangle $OKAB$ (cf. fig. 5). Désignons par C le centre de ce rectangle et traçons la hauteur $[KH]$ du triangle rectangle OKA. Remarquons alors que le segment $[PQ]$ qui réalise la distance de P à la droite OA est perpendiculaire à OA, donc parallèle à KH. Comme P se trouve au tiers du segment $[KB]$ à partir de K, nous avons :

$$|KP| = \frac{1}{3}|KB| = \frac{2}{3}|KC|$$

D'où,

$$|CP| = \frac{1}{3}|CK|$$

Comme les côtés des triangles CKH et CPQ sont deux à deux parallèles, ces triangles sont semblables. Il s'ensuit que :

$$\frac{|PQ|}{|KH|} = \frac{|CP|}{|CK|} = \frac{1}{3}$$

Il reste à déterminer la mesure de $[KH]$ pour trouver celle de $[PQ]$. En calculant de deux façons la surface du triangle rectangle KAO, on obtient :

$$|KH| \cdot |OA| = |KO| \cdot |KA|$$

Mais, $|KO| = 1$ (mesure de l'arête du cube), $|KA| = \sqrt{2}$ (mesure d'une diagonale de face du cube) et

$|OA| = \sqrt{3}$ (mesure d'une diagonale du cube). Ainsi, nous obtenons :

$$|KH| = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad |PQ| = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

La réponse est A.

Voici maintenant toutes les réponses correctes à ces éliminatoires :

mini – E C C C D B 150 C D D D D E E 1
D B B 4 B D C C D C 71 C C C D
Maxi – E D C D E C 6 A B B D D A C 142
B E 100 D C D E B A 22 B D E A A

Rendez-vous – je l'espère pour toi – le 15 février pour les demi-finales !

Solutions des jeux proposés à la page 50

Le produit caché

E = 0 ; R = 1 ; N = 2 ; T = 5 ; Q = 6 ; A = H = I = 7 ; C = U = 8.

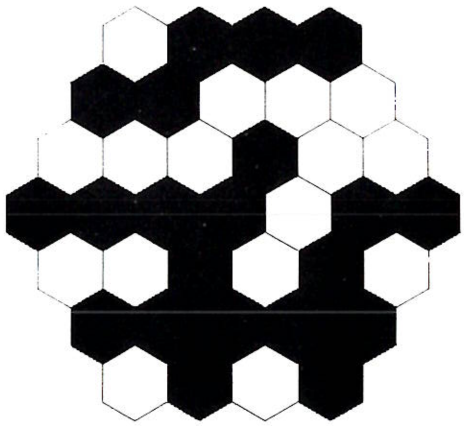
Le mur des nombres

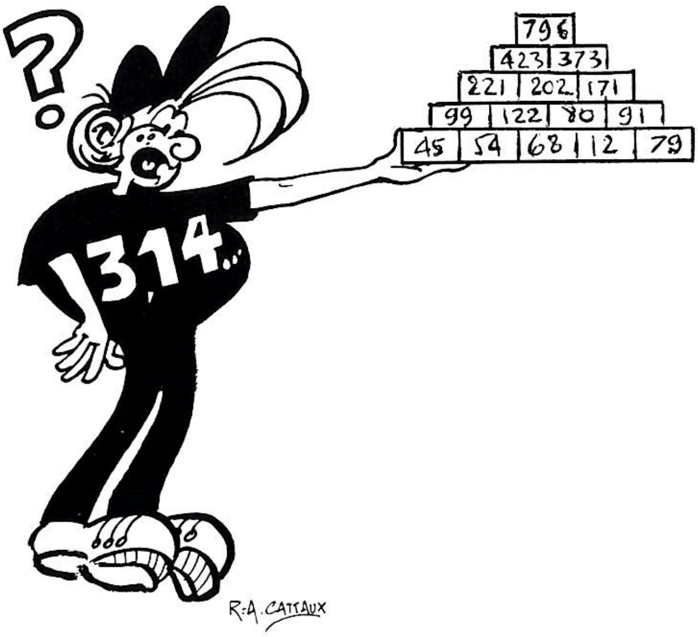
796				
423	373			
221	202	171		
99	122	80	91	
45	54	68	12	79

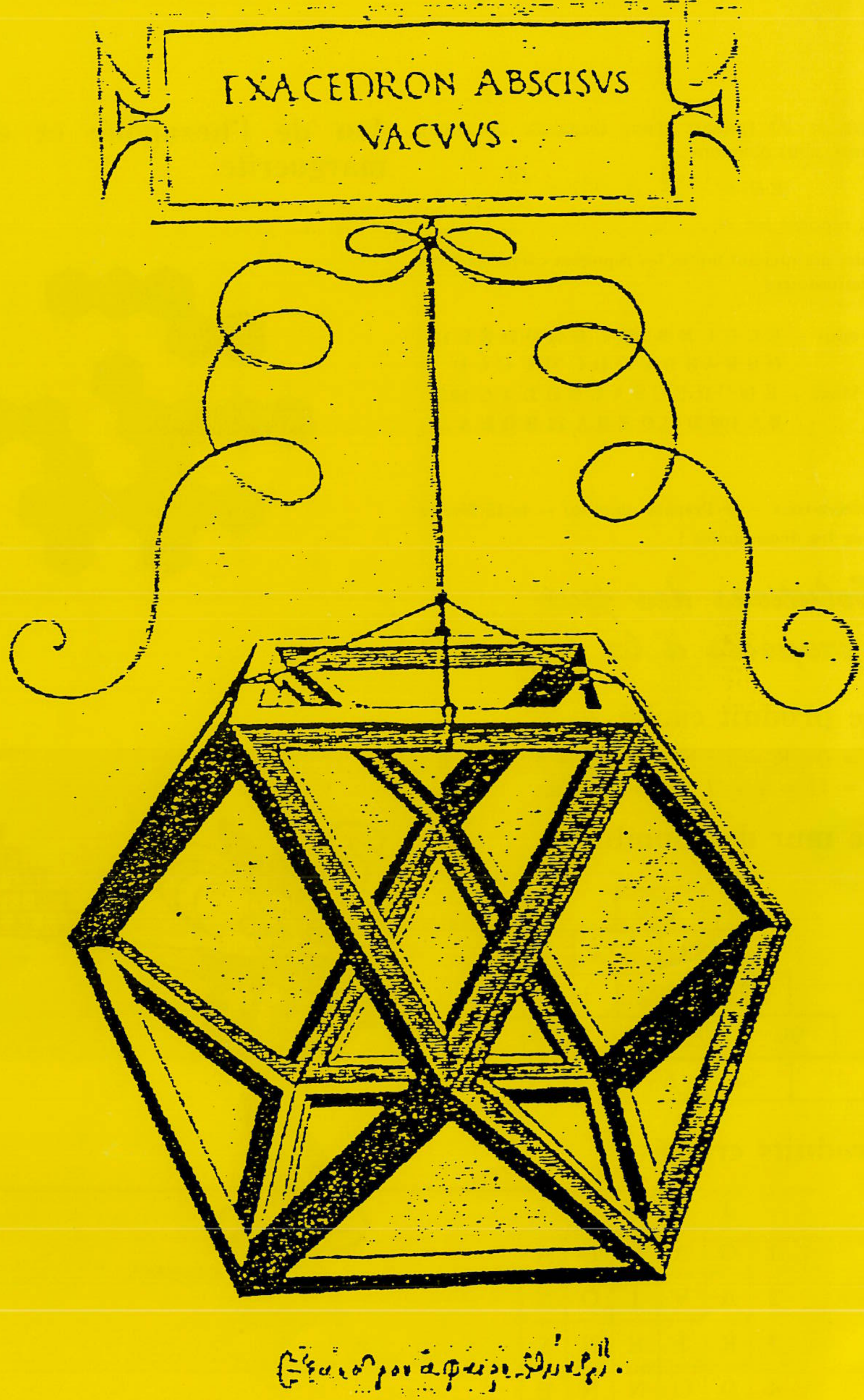
Produits croisés

	1	2	3	4	5
1	G	A	R	D	A
2	A	V	I	O	N
3	R	I	E	N	S
4	D	O	N	N	E
5	A	N	S	E	S

Jeu de l'hexagone et de la marguerite







Dessin de Leonardo da Vinci pour l'édition de 1509
du *De divina proportione* de Luca Pacioli