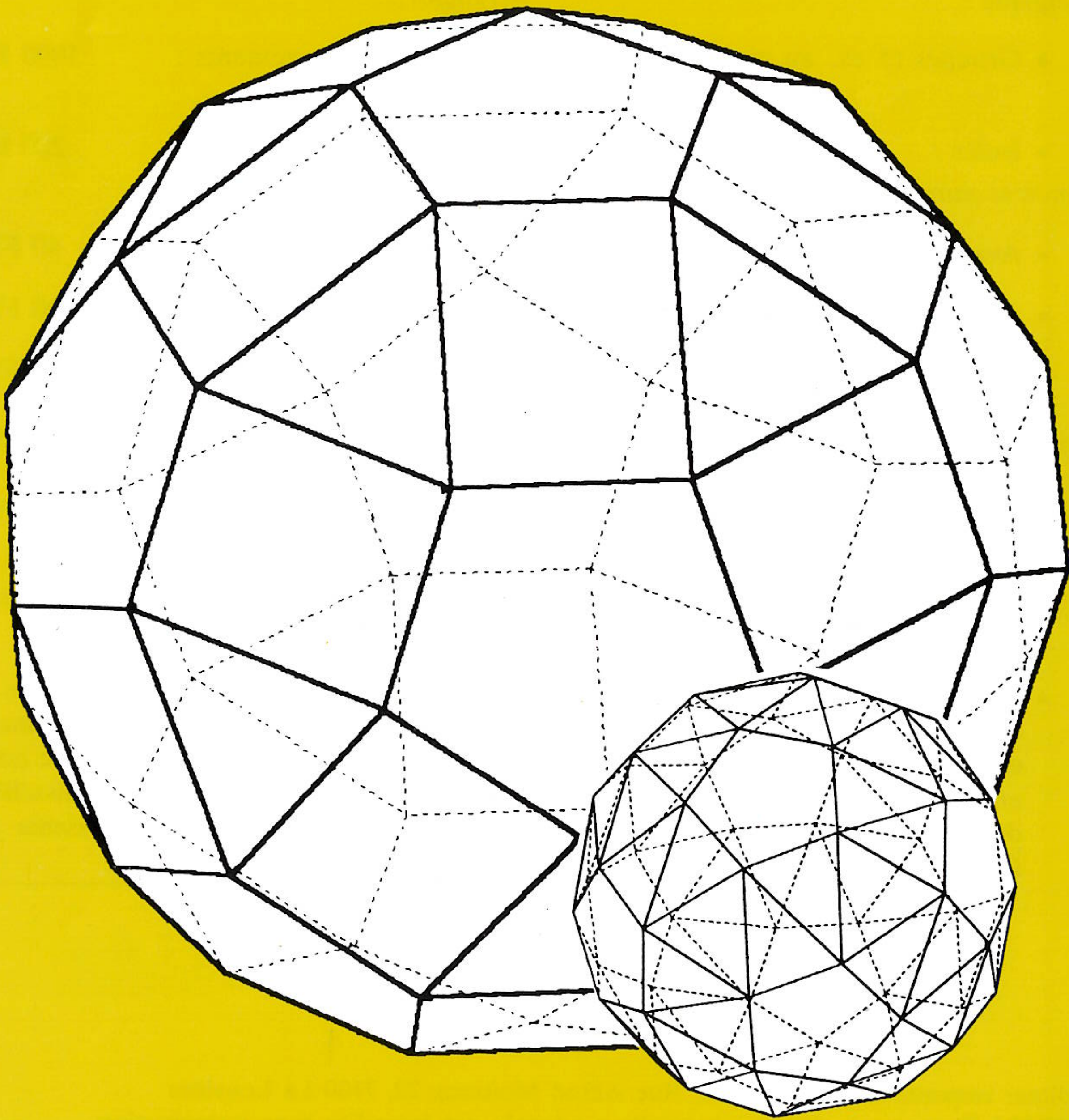
MATH-JEUNES



16e année
Mars 1995 – n°69
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Étranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	100 FB	• Pour 5 abonnements :	1000 FB
• Isolés :	140 FB	• Isolés :	280 FB

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1989	Par numéro : 30 FB (Étranger : 40 FB)
• Années 89/90, 90/91, 91/92	Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB)
• Années 92/93, 93/94	80 FB (Étranger : 160 FB)

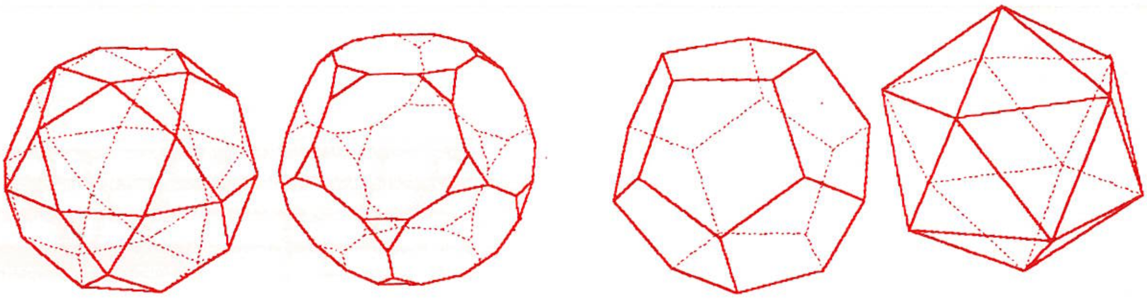
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

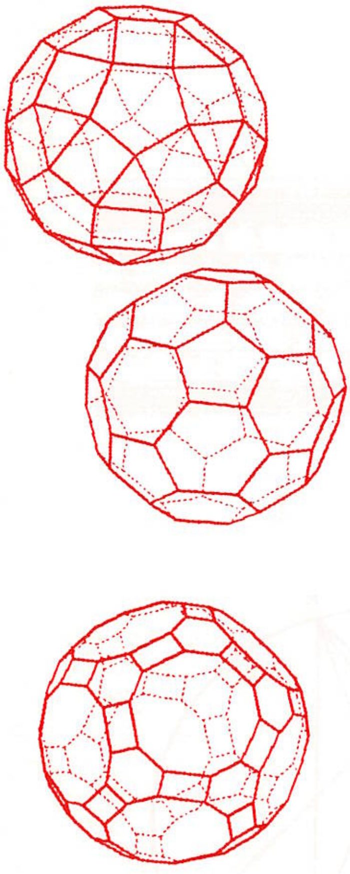
- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

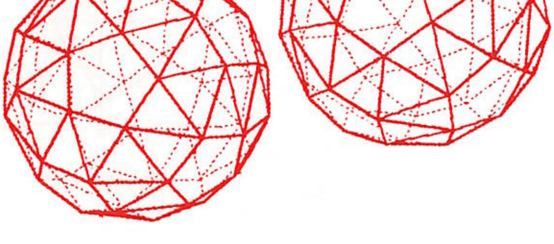
Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°69 Seizième année 1995

Math-Jeunes







Math-Jeunes n°69, 58–60, 1995

Les triangles « S »

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

Le but de cet article et de quelques autres qui suivront est de présenter certaines propriétés remarquables d'une figure géométrique particulièrement simple : le **triangle**. La richesse des propriétés de cette figure (leur abondance et leur beauté) est telle que les plus grands géomètres de la fin du siècle dernier se sont pris de passion pour leur étude. Grâce à leurs efforts de synthèse, s'est progressivement constitué un ensemble coordonné de résultats, regroupés sous l'appellation (originale !) de **géométrie du triangle** dont le sens réel (et le contenu) dépassent largement les limites traditionnelles de l'étude des quelques rares propriétés rencontrées dans l'enseignement secondaire classique. Il faut cependant noter que ces études — du moins celles que nous évoquerons — n'utilisent que des théories générales et des outils mathématiques du niveau des mathématiques « élémentaires ».

Une remarque, avant de passer réellement à ce premier article : il va de soi qu'une telle étude suppose connus tant certains éléments (classiques) de géométrie et de trigonométrie (plus occasionnellement d'analyse) que les **définitions** des éléments de base du triangle (côtés, sommets, angles, hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices). S'il nous arrivait de faire appel à d'autres notions, moins « traditionnelles », nous ouvririons à chaque fois une parenthèse pour les expliquer et/ou les démontrer. Parlons donc des triangles « S ».

1. Introduction – droite de SIMSON [1]

1.1. Théorème

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle sur les côtés de ce triangle sont en ligne droite.

Cette droite est appelée **droite de Simson** du point par rapport au triangle. Ce théorème — souvent proposé comme exercice dans la plupart des manuels (quatrième) — sera le point de départ des développements qui vont suivre et sera encore évoqué dans les articles ultérieurs. Il en existe de nombreuses démonstrations : une des plus simples, sans doute, utilise les propriétés angulaires des quadrilatères inscriptibles. Vous pourriez tenter de démontrer le théorème en utilisant la méthode indiquée ci-dessus … ou une autre !

Notant que la réciproque du théorème est vraie, on peut donc dire que :

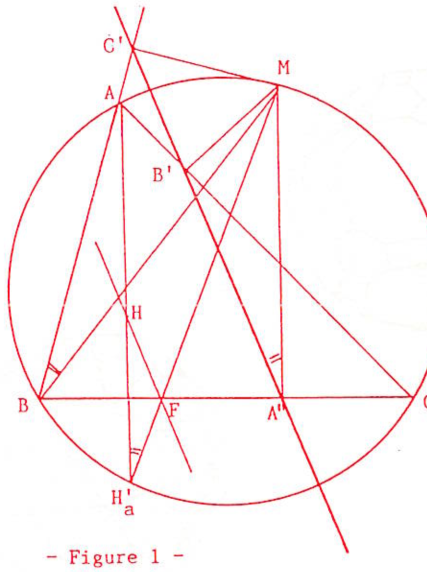
Le lieu géométrique des points M du plan tels que ses projections sur les trois côtés d'un triangle soient colinéaires est la circonférence circonscrite au triangle

1.2. Propriétés de la droite de Simson

La droite de Simson d'un point M de la circonférence circonscrite à un triangle ABC jouit de plusieurs propriétés. Nous en retiendrons deux qui seront utiles dans la suite.

Propriété 1
Désignant par H'_a le second point de rencontre de la hauteur du triangle issue de A avec la circonférence circonscrite, la droite de Simson du point M et la droite MH'_a sont également inclinées sur le côté BC. (Propriété analogue pour les trois côtés).

F désignant l'intersection de MH'_a et du côté BC, il s'agit de démontrer l'égalité des angles $\widehat{B'A'B}$ et $\widehat{MFC}$.



- Figure 1 -

([1]) Robert Simson, mathématicien écossais (1687 – 1768). On lui doit un *Traité des Sections coniques* (1735) dans lequel sont exposées pour la première fois les théories de Desargues et de Pascal, ainsi qu'une traduction des *Éléments* d'Euclide (1756).

Remarquant que ces angles sont respectivement les compléments des angles $\widehat{MA'B'}$ et $\widehat{AH'_aM}$, on est ramené à démontrer l'égalité de ces derniers.
Dans le quadrilatère inscriptible $BA'MC'$, on a :

$$\widehat{MA'B'} = \widehat{ABM} \qquad (1)$$

D'autre part, dans la circonférence circonscrite au triangle :

$$\widehat{ABM} = \widehat{AH'_aM} \qquad (2)$$

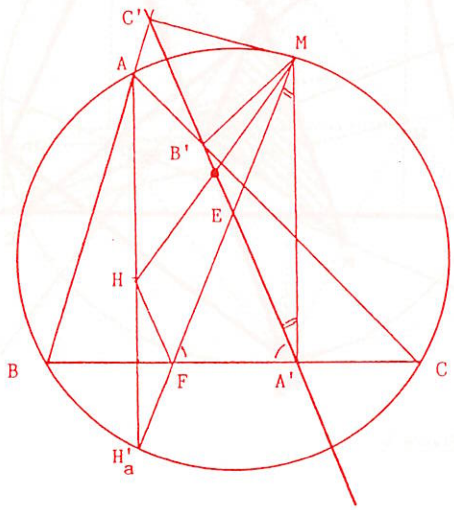
Les égalités (1) et (2) conduisent à :

$$\widehat{MA'B'} = \widehat{AH'_aM}$$

ce qui, d'après la remarque préliminaire, démontre la propriété.
Remarque : H désignant l'**orthocentre** (point de concours des hauteurs du triangle), HF est parallèle à la droite de Simson.

Nous vous laissons le soin de démontrer cette dernière propriété.

Propriété 2
La droite de Simson d'un point M par rapport au triangle ABC divise en deux parties égales le segment joignant M à l'orthocentre du triangle.



- Figure 2 -

On sait (voir propriété 1) que

$$\widehat{MFA'} = \widehat{C'A'F}$$

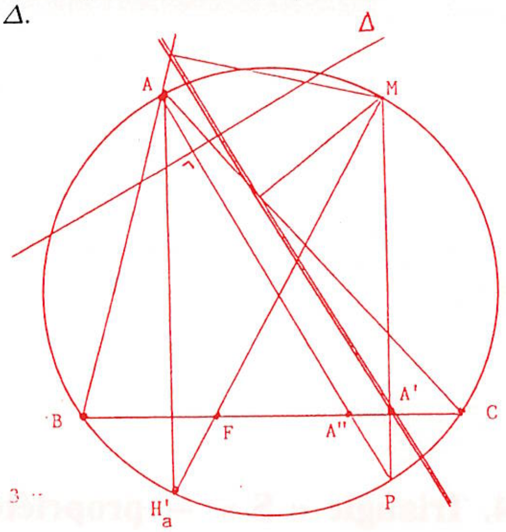
Les angles $\widehat{FMA'}$ et $\widehat{C'A'M}$, étant les compléments respectifs des angles ci-dessus sont donc égaux : il en résulte que les deux triangles FEA' et MEA' sont isocèles et que, dès lors, le point E (intersection de la droite de Simson de M et du segment MH'_a) est le milieu du segment MF.
Tenant alors compte de la remarque (*in fine* de la propriété 1), à savoir que HF est parallèle à la droite de Simson, cette dernière divise en deux parties égales le segment MH.

1.3. Droites de Simson des sommets du triangle

Les sommets du triangle étant situés sur la circonférence circonscrite, ils ont leur droite de Simson : ces dernières ne sont autres que les hauteurs du triangle. En effet, considérons par exemple le sommet A : les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les côtés AB et AC coïncident avec A, et la perpendiculaire sur BC est la hauteur issue de A (faire la figure).

1.4. Droite de Simson particulière

On peut se proposer de construire, sur la circonférence circonscrite au triangle, des points M dont les droites de Simson ont des postions particulières dans la figure. Nous nous limiterons ici à rechercher le point M de la circonférence tel que sa droite de Simson soit perpendiculaire à une direction donnée.
Soit (figure 3) le triangle ABC, sa circonférence circonscrite et la direction Δ à laquelle la droite de Simson du point M (cherché) doit être perpendiculaire.
La construction est la suivante. On abaisse de A une perpendiculaire sur la direction Δ qui rencontre la circonférence circonscrite en P. De P, on mène une perpendiculaire sur BC qui rencontre la circonférence en M ; M est le point cherché.
En effet, le quadrilatère AH'_aMP est un trapèze isocèle et les angles $\widehat{MFC}$ et $\widehat{AA''F}$ sont égaux. La droite de Simson de M passe par A' et (propriété 1) fait avec BC un angle égal à $\widehat{MFC}$: elle sera donc parallèle à AA'', c'est-à-dire perpendiculaire à la direction Δ.



- Figure 3 -

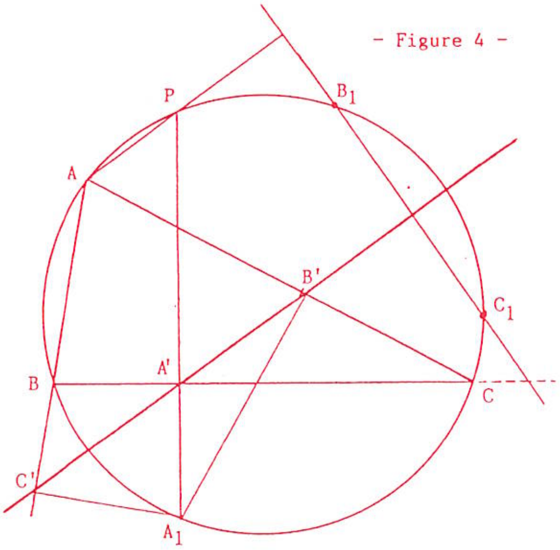
2. Triangle « S » — définition

On considère deux points quelconques B_1 et C_1 de la circonférence circonscrite à un triangle ABC. Soit A_1 le point dont la droite de Simson, par rapport au triangle ABC, est perpendiculaire à la corde B_1C_1 (figure 4).

Le triangle ABC est appelé Triangle « S » [2]

[2] Nous empruntons cette dénomination à Trajan Lalesco, *Géométrie du Triangle* (Annales Roumaines de Mathématiques)

- Figure 4 -



Un tel triangle jouit de propriétés remarquables qui font l'objet des lignes qui suivent et qui permettent des démonstrations très simples de propriétés du triangle, propriétés que nous rencontrerons plus tard.

3. Triangle « S » — propriété fondamentale

La somme des arcs (orientés) $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, $\overset{\frown}{CC_1}$ est nulle.

On a (voir figure 4) :

$$\widehat{APA'} = \widehat{PA'B'}$$

car ces angles sont alternes-internes et, d'autre part,

$$\widehat{PA'B'} = \text{angle}(BC, B_1C_1)$$

(angles à côtés perpendiculaires). On en conclut, dans le cas de la figure :

$$\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{BB_1} - \overset{\frown}{CC_1}$$

Notant, en outre que l'arc $\overset{\frown}{BB_1}$ est de sens contraire aux arcs $\overset{\frown}{AA_1}$ et $\overset{\frown}{CC_1}$, il vient :

$$\overset{\frown}{AA_1} + \overset{\frown}{BB_1} + \overset{\frown}{CC_1} = 0$$

4. Triangle « S » — propriétés

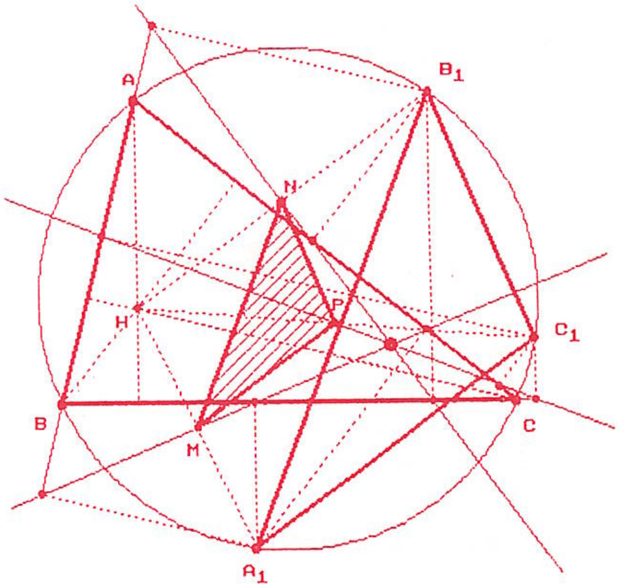
Propriété 1
La droite de Simson (par rapport au triangle ABC de chaque sommet du triangle $A_1B_1C_1$ est perpendiculaire au côté opposé.

Cette propriété, par ailleurs remarquable, est immédiate. En effet, à cause de la propriété fondamentale, si l'on cherche le point dont la droite de Simson (par rapport au triangle ABC) est perpendiculaire à A_1C_1, on tombe sur B_1.

Propriété 2
Les droites de Simson (par rapport au triangle ABC des sommets du triangle $A_1B_1C_1$ sont concourantes.

Désignant par M, N, P (voir figure 5) les milieux respectifs des segments $[A_1H]$, $[B_1H]$, $[C_1H]$ (H est l'orthocentre du triangle ABC), ces points sont situés sur les droites de Simson des points A_1, B_1, C_1 (droite de Simson — propriété 2) et sont les sommets d'un triangle dont les hauteurs sont les droites de Simson de A_1, B_1, C_1 (les triangles $A_1B_1C_1$ et MNP ont leurs côtés parallèles (pourquoi ?) et les droites de Simson de A_1, B_1, C_1 sont respectivement perpendiculaires à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 (Triangle « S » — propriété 1)), donc ...

Les triangles $A_1B_1C_1$ sont les seuls qui jouissent de cette propriété.



- Figure 5 -

Nous avons voulu montrer, dans ce texte, que tout en restant dans le domaine (que l'on croit trop souvent limité) de la géométrie élémentaire, un esprit curieux trouvait toujours un sujet digne d'être « fouillé » : comparez, par exemple, la dernière propriété ci-dessus à l'énoncé du théorème d'existence de la droite de Simson (et, c'est pourtant ce dernier qui nous a servi de point de départ !)
Disposant maintenant du minimum d'éléments nécessaires, nous pourrons dans un proche avenir aborder la notion d'**orthopôle** d'une droite non sans avoir rappelé, au préalable, ce qu'est le **cercle d'Euler** d'un triangle (autre notion fondamentale en « Géométrie du Triangle »).

À bientôt ... Si votre lecture vous inspire des commentaires ou des questions, n'hésitez surtout pas à nous en faire part.

Les polyèdres (suite)

C. Festraets, *Athénée Royal de Woluwé-St-Pierre*

Dans ce numéro de *Math-Jeunes*, tu vas découvrir la famille du **dodécaèdre**. Tu sais déjà qu'il nous faut connaître les transformations qui appliquent un dodécaèdre de centre O sur lui-même : rotations, d'une part, composées de ces rotations avec la symétrie de centre O d'autre part.

Combien y a-t-il de rotations ? Calculons ...

Il y a **six paires de faces opposées** et des rotations de

$$\frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5}\quad \text{de tour}$$

autour d'un axe passant par les centres de deux faces opposées ...

$$6 \times 4 = \mathbf{24} \text{ rotations de ce type.}$$

Il y a **dix paires de sommets opposés** et des rotations de

$$\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3}\quad \text{de tour}$$

autour d'un axe passant par deux sommets opposés ...

$$10 \times 2 = \mathbf{20} \text{ telles rotations.}$$

Il y a **quinze paires d'arêtes opposées** et des rotations de $\frac{1}{2}$ tour autour d'un axe joignant les milieux de deux arêtes opposées ...

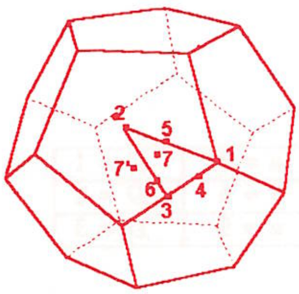
$$15 \times 1 = \mathbf{15} \text{ rotations de ce genre.}$$

Si nous y ajoutons la **rotation identique**, cela donne :

$$24 + 20 + 15 + 1 = \mathbf{60} \quad \text{rotations}$$

Il y a donc **120** isométries qui appliquent un dodécaèdre sur lui-même : soixante déplacements et soixante retournements.

Voici le triangle fondamental :

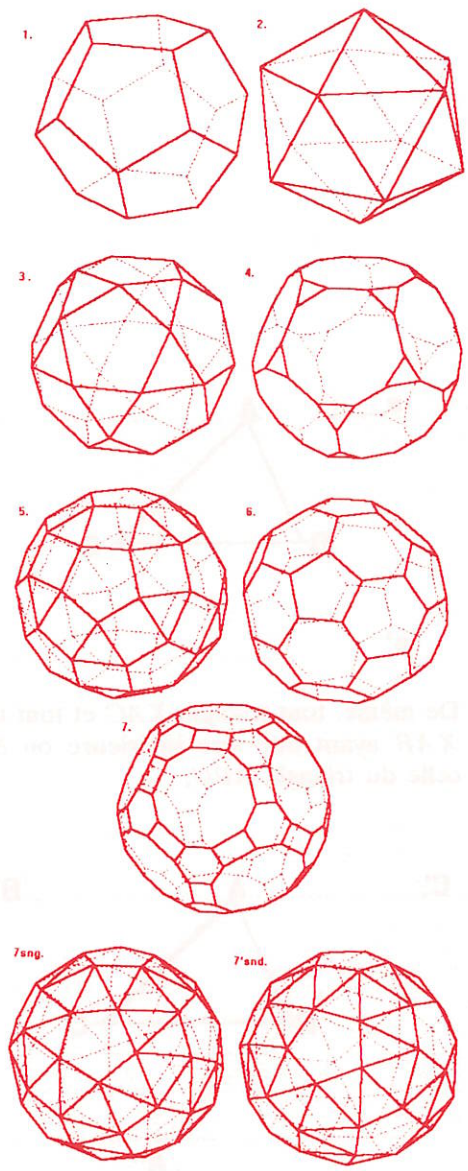


Les orbites d'un point P ne sont pas très faciles à construire (sauf pour les points 1 et 2). Je te les livre ci-après :

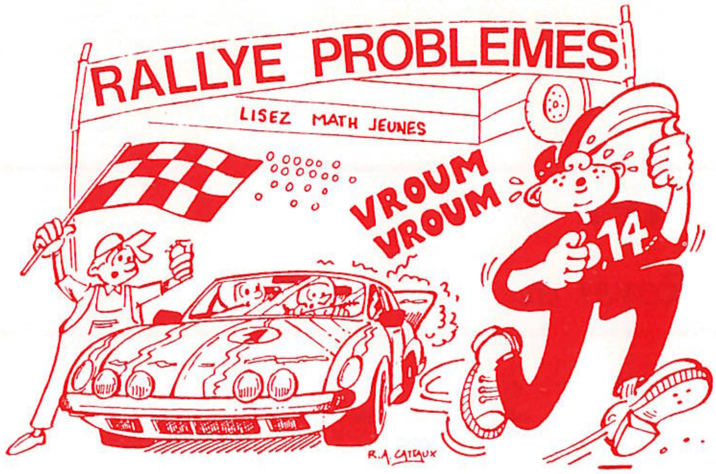
- $P = 1$: le dodécaèdre de départ ;
- $P = 2$: un icosaèdre ;
- $P = 3$: un icosidodécaèdre ;
- $P = 4$: un dodécaèdre tronqué ;
- $P = 5$: un rhombicosidodécaèdre ;
- $P = 6$: un icosaèdre tronqué ;
- $P = 7$: un icosidodécaèdre tronqué.

Si on cherche les orbites de 7 et de 7' en ne considérant que les rotations, on obtient les snubdodécaèdres gauche et droit (7sng et 7'sng).

Voici ces polyèdres :



Nous avons découvert les polyèdres (semi-réguliers lorsque toutes les faces sont des polygones réguliers) issus du cube, du tétraèdre et du dodécaèdre. Y en a-t-il d'autres ? Réfléchis-y ; nous en parlerons dans le prochain *Math-Jeunes*.



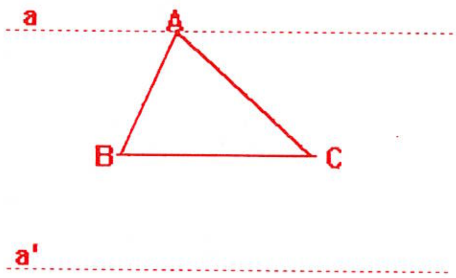
Math-Jeunes n°69, 62–63, 1995

C. Festraets

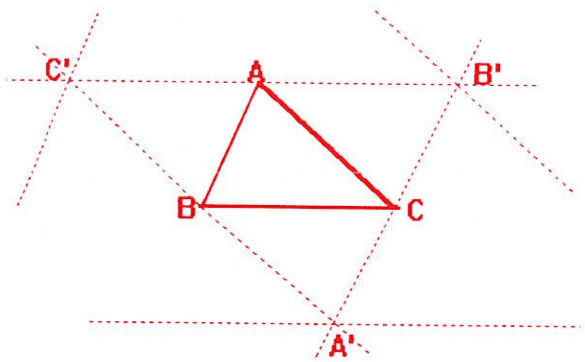
Solutions des problèmes proposés dans le numéro 67

m4 Puisque le nombre de points est fini, le nombre de triangles dont les sommets sont trois de ces points est également fini. Considérons celui qui a (ou un de ceux qui ont) la plus grande aire et soit ABC ce triangle.

Si X est un des points de l'ensemble donné, le triangle XBC a une aire inférieure ou égale à celle du triangle ABC. Donc X est situé dans la bande fermée limitée par la droite a menée par A parallèlement à BC et par la droite a' symétrique de a par rapport à BC.



De même, tout triangle XAC et tout triangle XAB ayant une aire inférieure ou égale à celle du triangle ABC,



tout point X de l'ensemble donné doit se trouver à l'intérieur ou sur les bords du triangle $A'B'C'$ dont l'aire vaut quatre fois celle du triangle ABC, donc est inférieure ou égale à 4.

m5 Si aucun sac ne contient une seule balle, effectuons une suite d'opérations (a), c'est-à-dire enlever une balle dans chaque sac, jusqu'au moment où un des sacs (au moins) contient une seule balle.

Effectuons ensuite l'opération (b) successivement sur chacun des sacs qui ne contient qu'une balle ; chacun d'eux contiendra alors deux balles. Effectuons à nouveau l'opération (a). Le ou les sacs contenant deux balles n'en contiennent à nouveau plus qu'une seule et le ou les sacs contenant plus de deux balles voient leur nombre de balles diminuer d'une unité.

Recommençons : opération (b) sur chaque sac contenant une balle, puis opération (a).

On effectue cette suite d'opérations (qui diminue le nombre total de balles) jusqu'au moment où tous les sacs contiennent une seule balle.

Il reste alors à effectuer l'opération (a) et ... tous les sacs seront vides.

m6 Écrivons un nombre N sous la forme

$$N = 10D + u,$$

D étant le nombre de dizaines ($D \neq 0$) et u le chiffre des unités.

Pour que l'affirmation de Jean soit exacte, il faut que

$$\frac{N}{13} = \frac{10D+u}{13} = D$$

donc $10D + u = 13D$ ou $3D = u$. Les seules possibilités sont

$u = 3$	$D = 1$
$u = 6$	$D = 2$
$u = 9$	$D = 3$

ce qui donne les nombres 13, 26, 39.

Pour que l'affirmation de Pierre soit exacte, il faut que

$$10D + u = 10D$$

Donc $u = 0$ et D peut prendre n'importe quelle valeur entière non nulle ; tous les nombres multiples de 10 conviennent.

Pour que l'affirmation d'Étienne soit exacte, il faut que

$$10D + u = 9D$$

Donc $u = -D$, ce qui est impossible, u et D étant l'un et l'autre des nombres positifs.

Donc Étienne est un vantard !

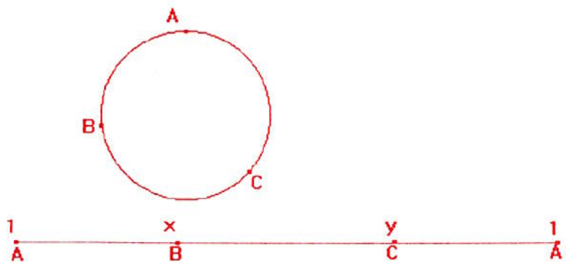
M4 Fixons la position du A sur le cercle que nous supposerons de longueur 1 ; coupons ce cercle en A et déplions-le de manière à obtenir un segment $ABCA$.

Le tr iangle ABC est acutangle si et seulement si chacun des arcs déterminés par les points A, B, C est inférieur à un demi-cercle. Donc, si nous attribuons aux points A, B, C, A du segment $ABCA$ les abscisses respectives 0, x, y, 1, on doit avoir les conditions

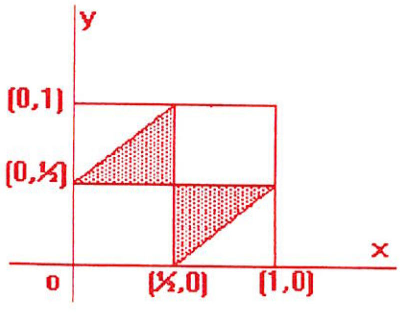
$$x < \frac{1}{2}, \quad y - x < \frac{1}{2}, \quad 1 - y < \frac{1}{2}.$$

Si on intervertit les rôles de B et C, donc de x et de y, on a de même

$$y < \frac{1}{2}, \quad x - y < \frac{1}{2}, \quad 1 - x < \frac{1}{2}.$$



La probabilité cherchée est donc le rapport entre l'aire ombrée et l'aire du carré dans la figure ci-dessous, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$.



M5 Soit p un nombre premier. Divisons p par 6 ; nous obtenons

$$p = 6 \cdot q + r, \quad q,\ r \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad r < 6$$

r ne peut pas valoir 0, sinon p (qui est premier) serait un multiple de 6 ;

r ne peut pas valoir 2 ou 4, sinon p serait un multiple de 2 ;

r ne peut pas valoir 3, sinon p serait un multiple de 3.

Les seules valeurs possibles de r sont donc 1 et 5, ce qui donne

$$p = 6 \cdot q + 1 \quad \text{ou} \quad p = 6 \cdot q + 5.$$

En élevant au carré, on obtient

$$p^2 = 36q^2 + 12q + 1$$

ou

$$p^2 = 36q^2 + 60q + 25$$

et si on divise p^2 par 12, on obtient bien 1 comme reste.

M6 On a :

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donc,

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{t-1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \\ &\qquad \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{1\,995}\end{aligned}$$

d'où, $1\,995t - 1\,995k = kt$, ce qui peut encore s'écrire

$$(1\,995 + t) \cdot (1\,995 - k) = 1\,995^2.$$

On trouve toutes les valeurs de t et de k en écrivant $1\,995^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs distincts entiers et positifs, de toutes les manières possibles, le premier facteur devant être strictement supérieur au second.

Or $1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ et $1\,995^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$. $1\,995^2$ admet donc

$(2+1)(2+1)(2+1)(2+1) = 81$ diviseurs.

Pour cette dernière affirmation, voir par exemple l'aplat de la page 54 de la revue *Math-Jeunes* numéro 68.

Supprimons $1\,995$ ($1\,995^2 = 1\,995 \cdot 1\,995$ correspond à $t = k = 0$ et ne convient pas) de la liste des diviseurs ; il reste 80 diviseurs et donc 40 solutions.

Math-Jeunes n° 69, 64–68, 1995

Le Lotto : c'est facile, ce n'est pas cher, et ça peut rapporter gros

Roland Godart, *Informaticien principal, Responsable des Publications du BUPFI (Bureau Provincial Hennuyer pour la Formation à l'Informatique)*

(Le texte qui suit est paru dans la revue AUDAX publiée par le BUPFI)

« *Jouer au Lotto, c'est perdre à coup presque sûr. C'est prévu par le règlement. Une analyse mathématique le démontre sans trop de difficulté* ».

Ces trois phrases sont extraites de l'introduction d'une étude réalisée par Claude Bouzitat et Gil Pages, intitulée « *Les vrais comptes du Loto* » (Revue « Science et Vie », n° 909, juin 1993).

Assez bizarrement, le Loto s'orthographie en Belgique avec deux « t » ... Différence plus fondamentale, il utilise 42 boules chez nous, 49 en France ... À part cela, on peut dire que le Loto français et le Lotto belge, c'est chou vert et vert chou ... et les considérations de « Science et Vie » sont donc, *mutatis mutandis*, fort comparables : nous nous en inspirerons largement.

Comme chez nos amis de France (et d'ailleurs), le Lotto est devenu un phénomène de société. Lancé chez nous en 1978, il file vers sa majorité avec une belle vigueur. Mieux (si l'on peut dire) : le nombre de tirages a doublé (un tirage le mercredi est venu s'ajouter à celui du samedi) et le montant des mises approche à chaque jeu les 300 millions de francs.

Essentiellement conçu pour permettre à l'État de financer un certain nombre de projets sociaux et humanitaires (sans doute pour essayer de se donner bonne conscience), le Lotto – succédant à une Loterie nationale comateuse – a connu un succès foudroyant dès le départ. Il faut dire que l'État, grand maître du jeu (c'est le cas de le dire), ne lésine pas sur les moyens publicitaires pour réveiller – et éviter que ne se rendorme ! ... – le joueur qui sommeille en chacun de nous.

Nous ne ferons pas à nos lecteurs l'injure de décrire les règles du Lotto : c'est facile, ce n'est pas cher et cela peut rapporter gros. Oui, mais ... Un rapide calcul nous permet de déterminer qu'il y a, avec nos 42 boules dans le tambour, 5 245 786 grilles possibles.

C'est facile à comprendre. Il y a en effet 42 choix possibles pour la première boule, c'est évident, 41 pour la deuxième, 40 pour la troisième, etc., 37 pour la sixième.

Ce qui représente $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 3\,776\,965\,592$ possibilités. Cependant, comme l'ordre du tirage n'a pas d'importance, il convient de diviser ce résultat par le nombre de façons d'obtenir une même combinaison de 6 numéros, soit 720 $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$, ce qui donnera finalement 5 245 786 grilles possibles soit une probabilité de $\frac{1}{5\,245\,786}$ d'obtenir les six numéros.

Pour être tout à fait certain d'obtenir les 6 numéros du Lotto, il n'y a qu'une solution : jouer pour le même tirage les 5 245 786 grilles possibles, ce qui représenterait une dépense de 52 457 860 francs. Hors cela, pas de salut.

La chose est-elle possible ?

Le règlement du Lotto ne comporte aucune disposition qui s'y oppose (la suite expliquera pourquoi). Disons seulement ici que, légalement, elle est possible.

Il y a évidemment d'abord le problème de trouver les 53 millions nécessaires à une telle opération. Ce n'est pas peu de choses ... mais ce n'est sans doute pas impossible. Ne peut-on pas penser en effet que l'on puisse trouver les capitaux nécessaires selon différentes formules (un genre de super-cagnotte par exemple) ... d'autant plus que l'investissement est de courte durée (de l'ordre de quelques semaines, voire de quelques jours) ? ...

D'autres difficultés ne sont pas de celles que l'on balaie d'un geste de la main : elles naissent naturellement de la difficulté de « gérer » les 5 245 786 grilles possibles.

Avec des bulletins ordinaires qui permettent de consigner 12 grilles, il s'agira de remplir 437 149 bulletins du genre ! ... Si l'on considère que l'établissement des 12 grilles d'un tel bulletin puisse demander 1 minute et demie (c'est une belle moyenne car l'opération est particulièrement fastidieuse, exigeante d'attention et loin d'être aussi simple qu'il n'y paraît à première vue !), on passera 10 930 heures à les compléter. Si on décide d'y consacrer 10 heures chaque jour (week-ends et jours de fête compris), il faudra un peu moins de 3 ans.

Mais vous penserez peut-être que rien ne presse ... et que rien n'empêche donc de mener ce travail au rythme qui convient le mieux. Bon courage quand même !...

Pour vous faire une idée plus concrète du travail à réaliser, imaginez-vous que vos quelque 437 000 bulle-

tins représenteront une pile de documents de plus de 5 mètres de haut (!) et un poids de 7 kg.
C'est au niveau de leur enregistrement dans les centres de validation que les plus grandes difficultés vont surgir et rendre l'opération pratiquement impossible car à supposer que l'enregistrement d'un bulletin demande 1 minute, il faudrait y consacrer environ 7 300 heures, ce qui est impensable puisqu'on dispose pour ce faire de maximum 30 heures, par exemple du jeudi au samedi pour le tirage du samedi soir.
Quant à répartir ces 437 000 bulletins entre plusieurs centres, il vaut mieux ne pas trop y penser pour un tas de raisons évidentes. Sans être vraiment impossible, l'opération est pour le moins ... fort compliquée.
L'utilisation de bulletins multiples (qui peut permettre de jouer sur une même grille jusqu'à 14 chiffres, soit 3 003 combinaisons différentes) ne modifie pas beaucoup notre raisonnement : il faudra toujours trouver un peu moins de 53 millions de francs et si l'établissement des grilles peut être accéléré – dans des proportions qui restent à déterminer (et en ne perdant pas de vue le risque de « couvrir » plusieurs fois une même grille de six chiffres) – l'opération reste matériellement fort difficile.
Il est mathématiquement possible de déterminer ce que les 5 245 786 grilles de six numéros nous permettraient de gagner à coup sûr :

- 1 fois 6 numéros
- 6 fois 5 numéros et le complémentaire
- 216 fois 5 numéros
- 9 450 fois 4 numéros
- et ... 142 800 fois 3 numéros.

À première lecture, le réflexe sera sans doute de considérer qu'une telle opération doit être particulièrement lucrative ...
En fait, rien n'est moins sûr.
Du montant des mises jouées, il faut savoir en effet que l'Administration du Lotto prélève immédiatement 50% et ne réinjecte dans les gains que les 50% restant, de telle sorte que « notre opération » ne sera intéressante que si la chance veut que nous soyons les seuls (ou très peu nombreux) à avoir la bonne combinaison de six numéros ... mais puisque nous avons la certitude d'avoir les six numéros gagnants avec une mise d'environ 50 millions, il y a, statistiquement parlant, avec les quelque 300 millions d'autres mises, six gagnants en puissance, six personnes qui les ont joués aussi et dans ce cas, statistiquement parlant toujours, nous en serons seulement à récupérer 50% de notre mise de 50 millions ! ...
L'addendum 1 intitulé « Un exemple basé sur le tirage du Lotto du 14 mai » fera comprendre que les statisticiens de l'Administration du Lotto ont dû, sans aucun doute, songer à « notre opération » avant nous.

Des chiffres à donner le vertige

Nous en voilà donc réduits – si nous pouvons nous exprimer ainsi – « à jouer le jeu honnêtement » ...
Mais peut-on parler d'honnêteté en l'occurrence ?
5 245 786 grilles possibles ! Cela signifie, en d'autres termes, qu'une grille a *grosso modo* une chance sur environ 5.246.000 d'être gagnante au rang 1, ce qui représente moins de 0,00002% !
Peut-être certains de nos lecteurs n'imaginent-ils pas bien ce que cela veut dire ? ... C'est à donner le vertige. Pour être plus parlant, on peut imaginer, par exemple, que cela correspond à une période de plus ou moins 10 minutes dans un siècle ou encore à environ 16, 5 millièmes de seconde dans une journée de 24 heures !
Les auteurs de la revue française dont nous parlions en début d'article, faisant appel à des techniques de dénombrement, en arrivent à démontrer que finalement une grille du Loto français a environ 1, 86 chance sur 100 d'être gagnante à un rang quelconque ... de telle sorte, ajoutent-ils pour être bien compris, que 98 grilles de Loto sur 100 finissent à la poubelle sans avoir rapporté le plus petit centime. Faut-il dire que nous en sommes fort proches avec notre formule de Lotto à 42 boules ?
Histoire sans doute de continuer à faire rire (jaune) le joueur français, les deux auteurs se lancent alors dans d'autres statistiques en se basant sur les moyennes enregistrées dans le passé. Combien de temps devrait-il jouer huit grilles hebdomadaires pour avoir une chance de gagner à l'un ou l'autre rang ? Les chiffres ici aussi donnent le tournis...
Pour avoir une chance de gagner au rang 5 (l'équivalent de nos 50 francs), il devrait jouer plus ou moins 7 semaines, ce qui aurait entraîné une dépense d'environ 85 FF. Mais les chiffres se corsent rapidement, car pour avoir une chance de gagner au rang 4 (4 chiffres dans les 6), il devrait alors jouer sans désemparer ses 8 grilles pendant environ 2 ans et demi et cela lui aurait coûté *grosso modo* 1 548 FF.
Au rang 3, cette même chance de gain lui demanderait un peu plus de 1 300 années pour une dépense de quelque 83 000 FF. Au rang 2, un peu plus de ... 56 siècles ... pour une dépense proche de 3 500 000 FF et, enfin, au rang 1, plus de 336 siècles (33 614 années) avec un investissement proche de 21 millions de francs français.
Attention. On n'insistera jamais assez : il ne s'agit pas ici de chiffres qui traduisent une assurance de gagner mais seulement d'avoir une chance de gagner, sur la base, rappelons-le, des chiffres du passé. Ces résultats, font remarquer les deux auteurs, sont tout à fait indépendants du nombre de joueurs, de telle sorte, écrivent-ils, que « *si vous disposez d'un pécule de 21 millions de francs (il s'agit de francs français, rappelons-le) et d'une espérance de vie de 33 600 années, vous pouvez raisonnablement espérer ga-*

gner (mais rien n'est sûr) le gros lot du premier rang ».

Encore faut-il, pour toucher le magot, avoir un « petit » surcroît de chance pour être le seul gagnant d'un montant qui puisse justifier l'investissement au cours des siècles des 21 millions de francs français. Tous comptes faits, disent nos deux chercheurs statisticiens, cela donne environ une chance et demie sur mille (sur une période de 336 siècles) de toucher le montant intégral d'un joli magot. Il est vrai, ajoutent-ils encore en guise de plaisanterie, qu'on peut améliorer cette probabilité en ne jouant que les jours de maxi-cagnotte ... même si cela demande un peu plus d'un million d'années.

Jouer c'est perdre.

Jouer au Loto (avec 1 ou 2 « t »), c'est perdre à coup presque sûr.

Si Dame Fortune et les statistiques ne nous laissent espérer gagner qu'une fois tous les 33 600 ans, autant que ce soit pour la toute grosse somme. Et dès lors, pour mettre de son côté le maximum de chances de décrocher le pactole, on essaiera de jouer ce que les autres ne jouent pas. On évitera par exemple les numéros inférieurs à 12 qui se retrouvent à la fois dans les jours et les mois des dates de naissance et qui sont donc joués très fréquemment. On évitera aussi les combinaisons qui « font des dessins ». On jouera de préférence des séries de numéros continues car les gens – illogiquement – « répugnent » à ce genre de choses, comme si de telles séries avaient moins de chances de sortir que des numéros dispersés ... mais on ne jouera pas les numéros de début et de fin de grille, ni ceux qui commencent ou finissent une ligne ou une colonne, qui sont – curieusement aussi – davantage joués. Ainsi, seraient particulièrement nombreuses les personnes qui jouent les chiffres 1 à 6 et 37 à 42.

Il faut être bien clair et ne pas craindre de le répéter : en procédant de la sorte, le joueur n'augmente pas ses chances de gagner plus souvent ou plus rapidement que les autres (on en reste à une petite probabilité sur une période de 300 siècles environ si on joue 8 grilles par semaine), mais au moins en a-t-il une (toute toute toute petite) d'être – peut-être ! – le seul gagnant et d'empocher ainsi la toute grosse somme.

Addendum 1

Un exemple basé sur le tirage du Lotto du 14 mai 1994

Les chiffres officiels du tirage du 14 mai 1994 (qui était le résultat le plus récent au moment où nous mettions la dernière main à notre article) donnent la situation suivante :

- montant des mises : 271 673 990 Fr
- montant des mises réinjectées dans les gains (50 %) : 135 827 040 Fr
- 3 numéros exacts : 755 838 gagnants à 50 Fr : 37 791 900 Fr
- solde des mises réinjectées dans les autres gains :
  135 827 040 – 37 791 900 = 98 035 140 Fr
- pour 4 numéros exacts (25% de la somme ci-dessus) : 24 502 280 Fr
  (55 687 gagnants à 440 Fr)
- pour 5 numéros exacts (20% de la somme ci-dessus) : 19 608 960 Fr
  (1 459 gagnants à 13 440 Fr)
- pour 5 numéros exacts + complémentaire (10%) : 9 803 900 Fr
  (73 gagnants à 134 300 Fr)
- pour 6 numéros exacts (45% de la somme ci-dessus) : 44 120 000 Fr (5 gagnants à 8 824 000 Fr).

Si nous avions choisi la date du 14 mai pour « notre » opération, les chiffres auraient été les suivants (à quelques dizaines de francs près, à cause des arrondis) :

- montant des mises : 271 673 990 + « nos » 52 457 860 : 324 131 850 Fr
- montant des mises réinjectées dans les gains (50%) : 162 065 900 Fr
- 3 numéros exacts : nombre de gagnants : 755 838 + « nos » 142 800 = 898 638 à 50 Fr soit 44 931 900 Fr
- solde
  des mises réinjectées dans les autres gains : 162 065 900 – 44 931 900 = 117 134 000 Fr
- 4 numéros exacts : nombre de gagnants : 55 687 + « nos » 9 450 = 65 137 pour 29 283 500 Fr (25% de 117 134 000) soit chacun 450 Fr
- 5 numéros exacts :
  nombre de gagnants : 1 459 + « nos » 216 = 1 675 pour 23 426 800 Fr (20% de 117 134 000) soit chacun 13 986 Fr
- 5 numéros exacts + le complémentaire :
  nombre de gagnants : 73 + « nos » 6 = 79 pour 11 713 300 Fr (10% de 117 134 000) soit chacun 148 270 Fr
- 6 numéros exacts : nombre de gagnants : 5 + « notre » 1 = 6 pour 52 710 300 Fr (45% de 117 134 000) soit chacun 8 785 050 Fr

Nos « gains » auraient donc été (pour une mise de 52 457 860 francs !) d'un peu plus de 24 millions ! ...

Addendum 2 Programme de simulation d'un tirage du Lotto

```
10 PI = 3.1415927# : DIM X(8), Y(8), B(7), T$(7)
30 KEY OFF : RANDOMIZE TIMER : KEY (1) ON : ON KEY (1) GOSUB 60000
40 T$(1) = "première" : T$(2) = "deuxième" : T$(3) = "troisième"
50 T$(4) = "quatrième" : T$(5) = "cinquième" : T$(6) = "sixième" : T$(7) = "dernière"
100 GOSUB 5000
110 GOSUB 10000
120 GOSUB 15000
130 FOR BO = 1 TO 7
140 SO = 0
150 FOR C = 1 TO 30
160 GOSUB 20000
170 FOR M = 1 TO 5 : PLAY "MBOOL64" + CHR$(INT(7 * RND(M)) + 65) : NEXT M
180 NEXT C
190 SO = 1 : J = 40
200 GOSUB 35000
210 LOCATE 18, 5 : PRINT "Et voici la " + T$(BO) + " boule..."
220 FOR C = 1 TO 10
230 GOSUB 20000
240 SOUND 400 * C, 5
250 NEXT C
260 SO = 0 : PR = 1 : J = 0
270 LOCATE 18, 1 : FOR A = 1 TO 80 : PRINT " " ;: NEXT A
280 S$ = RIGHT$(STR$(INT(B(BO) / 10)), 1) + RIGHT$(STR$(B(BO) - 10 * INT(B(BO) / 10)), 1)
290 GOSUB 35000
300 GOSUB 40000
310 FOR C = 1 TO 10
320 SOUND 2200 - C * 200,.5
330 GOSUB 20000
350 NEXT C
360 PR = 0
370 NEXT BO
380 FOR C = 1 TO 40
390 GOSUB 20000
400 FOR M = 1 TO 5 : PLAY "MBOOL64" + CHR$(INT(7 * RND(M)) + 65) : NEXT M
410 NEXT C
420 GOTO 50000
5000 ' Bienvenue
5010 SCREEN 2 : CLS
5020 LOCATE 5, 20 :PRINT "Bienvenue à notre tirage du lotto !..."
5030 PLAY "AB"
5040 LOCATE 10, 20 : PRINT "Maître Honome, Huissier de Justice, va donner dans"
5050 PLAY "CD"
5060 LOCATE 13, 20 : PRINT "quelques instants le signal du départ..."
5070 PLAY "EF"
5080 FOR X=1 TO 10000:NEXT X
5090 RETURN
10000 ' Dessin du tambour
10010 SCREEN 1 : CLS : CIRCLE (160,50), 50
10030 LINE (149,91) - (149,110)
10040 LINE (171,91) - (171,110)
10050 RETURN
15000 '   Choix de la combinaison
15010 FOR A = 1 TO 7
15020 B(A) = INT(42 * RND(14)) + 1
15030 IF A = 1 THEN GOTO 15070
15040 FOR C = 1 TO A - 1
```

```
15050 IF B(C) = B(A) THEN GOTO 15020
15060 NEXT C
15070 NEXT A
15080 RETURN
20000 ' Mouvement des boules
20010 FOR A = 1 TO 8
20020 R = INT(36 * RND(14))
20030 AL = 2 * PI * RND(14)
20040 IF X(A) <> 0 THEN CIRCLE (X(A), Y(A)), 5, 0
20050 X(A) = 160 + COS(AL) * R : Y(A) = 50 - SIN(AL) * R
20060 CIRCLE (X(A), Y(A)), 5, 1
20070 IF SO = 1 THEN GOSUB 30000
20080 IF PR = 1 THEN GOSUB 45000
20090 NEXT A
20100 RETURN
30000 ' Sortie d'une boule
30010 J = J + 1
30020 IF J > 80 THEN CIRCLE (160, J - 1), 5, 0
30030 IF J > 79 THEN CIRCLE (160, J), 5, 1
30040 CIRCLE (160, 50), 50, 0, 17 / 12 * PI, 19 / 12 * PI
30050 RETURN
35000 '  Ouverture/fermeture
35010 SOUND 40, 4
35020 CIRCLE (160, 50), 50, 3 - 3 * SO, 17 / 12 * PI, 19 / 12 * PI
35030 RETURN
40000 ' Prpéaration zoom
40010 CO = BO * 40 - 10 - 24 * (BO = 7)
40020 PCO = 2 - CO / 80 : PLI = .75
40030 RETURN
45000 '  zoom
45010 CIRCLE (160 - J * PCO, 120 + J * PLI), 5 + J / 8, 0
45020 J = J + 1
45030 IF J = 80 THEN LOCATE 23, (5 * BO - 1 - 3 * (BO = 7)) : PRINT S$
45040 CIRCLE (160 - J * PCO, 120 + J * PLI), 5 + J / 8, 1
45050 RETURN
50000 '  Récapitulatif
50010 CLS : A$ = ""
50020 LOCATE 5, 5 : PRINT "Voici les résultats de ce soir"
50025 LOCATE 7, 5 : PRINT "dans l'ordre numérique... "
50030 PLAY "MBL1002ADGBGDBCBGBDEABCCABBGDBBDBGBDBGBFBABA"
50040 IF FI = 1 THEN GOTO 50030
50050 FOR A = 1 TO 6
50060 H = 50
50070 FOR P = 1 TO 6
50080 IF B(P) < H THEN H = B(P) : L = P
50090 NEXT P
50100 B(L) = 50
50110 LOCATE 18, 5 * A - 3 : PRINT H
50120 FOR G = 1 TO 1000 : NEXT G
50130 NEXT A
50140 LOCATE 18, 36 : PRINT B(7)
50150 FI = 1 : GOTO 50030
50160 RETURN
60000 SCREEN 2 : SCREEN 0 : CLS
60020 LOCATE 10, 20 : PRINT " Au revoir !..."
60030 END
```

Math-Jeunes n° 69, 69–69, 1995

Et ainsi de suite ... (3)

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

3e partie : Les suites de FIBONACCI généralisées

Il est possible de construire des suites de nombres sur le modèle de la suite de FIBONACCI (voir première partie) en choisissant les deux premiers termes et en calculant chacun des termes suivants comme somme des deux termes qui le précèdent. Ces suites portent le nom de « Suites de FIBONACCI généralisées ».

En voici quelques exemples :

(a) $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \ldots$

(b) $4, 2, 6, 8, 14, 22, 36, 58, \ldots$

et comme rien ne nous empêche d'utiliser des nombres négatifs :

(c) $-3, -4, -7, -11, -18, -29, -47, \ldots$

(d) $2, -5, -3, -8, -11, -19, -30, -49, \ldots$

etc.

La suite F de FIBONACCI

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

apparaît donc comme un cas particulier de ces suites. La plus immédiate d'entre elles qui soit vraiment différente de la suite de Fibonacci est $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$, elle est appelée *suite de* LUCAS. Nous la désignerons par L. Vous remarquez que ce n'est pas celle qui commence par 1, 2. Voyez-vous pourquoi ?

Et si, comme pour la suite de FIBONACCI, nous regardons les rapports successifs de deux termes consécutifs de ces suites :

Pour (a) : $\frac{2}{4} = 0,5$, $\frac{4}{6} = 0,666\ldots$, $\frac{6}{10} = 0,6$, $\frac{10}{16} = 0,625$, $\frac{16}{26} = 0,615\ldots$, $\frac{26}{42} = 0,619\ldots$, $\frac{42}{68} = 0,617\ldots$, $\frac{68}{110} = 0,618\ldots$, etc.

Pour (b) : $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{2}{6} = 0,333\ldots$, $\frac{6}{8} = 0,75$, $\frac{8}{14} = 0,571\ldots$, $\frac{14}{22} = 0,636\ldots$, $\frac{22}{36} = 0,611\ldots$, $\frac{36}{58} = 0,620\ldots$, $\frac{58}{94} = 0,617\ldots$, $\frac{94}{152} = 0,618\ldots$, etc.

Pour (c) : $\frac{2}{-5} = -0,4$, $\frac{-5}{-3} = 1,666\ldots$, $\frac{-3}{-8} = 0,375$, $\frac{-8}{-11} = 0,727\ldots$, $\frac{-11}{-19} = 0,578\ldots$, $\frac{-19}{-30} = 0,633\ldots$, $\frac{-30}{-49} = 0,612\ldots$, $\frac{-49}{-79} = 0,620\ldots$, $\frac{-79}{-128} = 0,617\ldots$, etc.

Il semble bien que ces rapports tendent à devenir égaux quand on est assez loin dans les suites.

Il en est bien ainsi !

Dans le cadre de cet article, cette particularité sera acceptée sans démonstration rigoureuse. Vous pouvez cependant essayer de justifier cette propriété en regardant les écarts entre les rapports consécutifs. Voici une de ces suites de FIBONACCI généralisées

$$\ldots, a, b, a+b, a+2b, \ldots$$

Les rapports successifs sont

$$\ldots, \frac{a}{b}, \frac{b}{a+b}, \frac{a+b}{a+2b}, \ldots$$

Les écarts sont

$$\begin{aligned} e_1 &= \left|\frac{b}{a+b} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b^2 - a(a+b)}{b(a+b)}\right| \\ &= \left|\frac{b^2 - a^2 - ab}{b(a+b)}\right| = \left|\frac{a^2+ab-b^2}{b(a+b)}\right| \\ e_2 &= \left|\frac{a+b}{a+2b} - \frac{b}{a+b}\right| = \left|\frac{(a+b)^2 - b(a+2b)}{(a+2b)(a+b)}\right| \\ &= \left|\frac{a^2+2ab+b^2-ab-2b^2}{(a+2b)(a+b)}\right| = \left|\frac{a^2+ab-b^2}{(a+2b)(a+b)}\right| \end{aligned}$$

On a donc $0 < e_2 < e_1$ puisque e_1 et e_2 sont des valeurs absolues, que les numérateurs sont égaux et que le dénominateur de e_2 est supérieur au dénominateur de e_1. Les écarts positifs vont en s'amenuisant ce qui montre que les rapports tendent à devenir égaux.

À la limite, on aura $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ donc $a^2 + ab = b^2$ ou encore $a^2 + ab - b^2 = 0$.

Vous reconnaissez certainement une équation du second degré mais qui vous ennuye peut-être par suite de la présence des deux inconnues a et b. Heureusement ce ne sont ni a ni b qui nous intéressent mais bien leur rapport $\frac{a}{b}$.

Dès lors, en divisant les deux membres de $a^2+ab-b^2 = 0$ par b^2, il vient $\frac{a^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0$ ou $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$ qui nous donne par application de la formule déjà rencontrée $\frac{a}{b} = \phi^-$.

Ceci confirme l'impression donnée par les exemples : le rapport de deux termes consécutifs d'une suite de FIBONACCI généralisée tend à valoir ϕ^- (ou ϕ^+ qui est son inverse si vous calculez les rapports dans l'autre sens).

Vous ne serez pas en peine de trouver des exemples de suites de FIBONACCI généralisées et d'en rechercher des propriétés.

En particulier, je vous invite à observer ce qui se passe lorsque vous additionnez, terme à terme, deux suites de FIBONACCI généralisées. Nous serons très heureux de publier toutes vos découvertes individuelles ou collectives. Écrivez-nous !

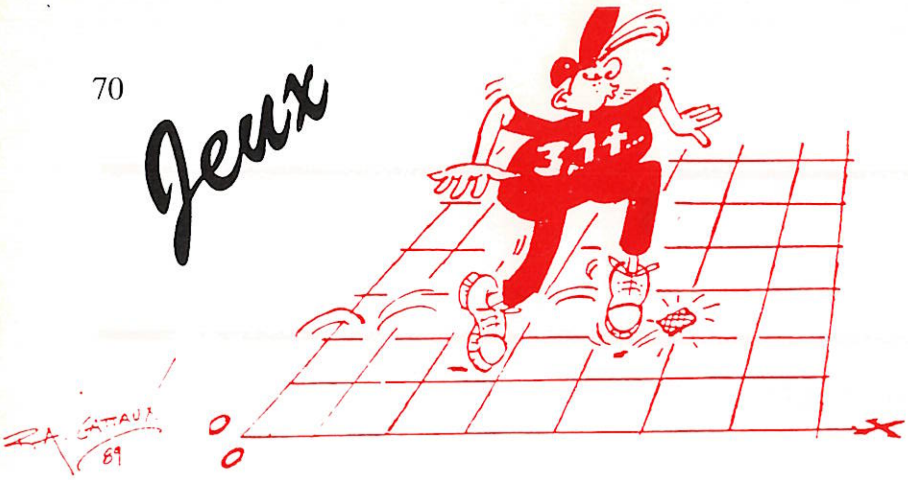
Bibliographie

Martin GARDNER, *Math'circus*, Bibliothèque « Pour la Science », Diffusion Belin (France).

Pierre DEDRON, *Mathématiques et mathématiciens*, Éditions Magnard (France).

Jean-Paul COLLETTE, *Histoire des mathématiques*, Éditions du renouveau pédagogique (Canada).

Math-Jeunes n°69, 70–70, 1995



Les mots cachés (par CéVé)

Retrouvez les mots qui vous sont proposés en serpentant dans la grille, horizontalement ou verticalement en tous sens mais jamais en oblique.
Chaque lettre dans cette grille ne sert qu'une fois.
Les lettres qui restent vous donneront un mot ou un groupe de mots. Quel est-il ?

Premier problème

Mots à composer : ARCS, CARRES, CERCLE, DISQUE, DROITE, LOSANGE, RECTANGLE, TRAPEZE, TRIANGLE

E	C	A	R	O	R	D	R
L	G	N	R	I	T	C	E
R	I	A	E	S	E	T	A
T	E	G	S	C	R	G	N
L	E	N	A	E	A	L	E
C	L	O	S	Z	E	U	Q
R	M	A	S	E	D	I	S
E	C	T	H	P	A	R	T

Deuxième problème

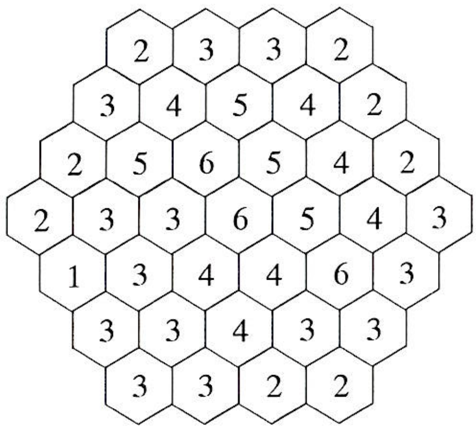
Mots à composer : CENTRE, HOMOTHETIE, IMAGES, INVERSION, ROTATIONS, SYMETRIE, TRANSLATION

M	E	T	R	I	E	N	S
Y	O	T	A	T	I	O	I
S	R	A	N	S	G	A	M
E	N	R	T	L	E	N	O
I	O	I	T	A	S	S	I
T	E	H	T	V	E	R	G
C	E	N	O	N	I	E	A
E	R	T	M	O	H	N	G

A. Parent

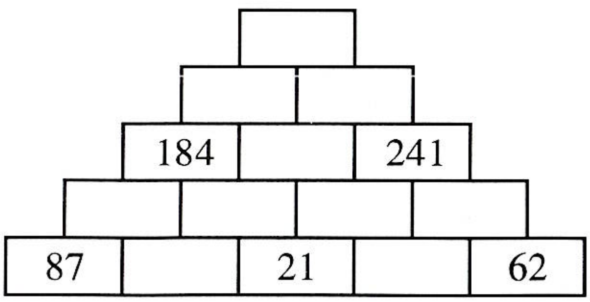
Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.



Luca di Borgo ou Luca Pacioli

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Tu as sans doute remarqué que la page quatre de la couverture de chacun des *Math-Jeunes* de cette année est illustrée au moyen d'un dessin que LEONARDO DA VINCI avait réalisé pour l'édition de 1509 du *De divina proportione* de Luca PACIOLI.

Je pense que tu connais quelque peu VINCI mais que, par contre, le nom de Luca PACIOLI n'évoque pas grand-chose pour toi ; je te propose donc de faire sa connaissance.

Il naît vers 1445 – un peu après que J. GUTENBERG eut mis au point sa technique d'impression par caractères mobiles – à Borgo San Sepolcro près d'Arezzo en Toscane. Issu d'une famille modeste, il est possible qu'il ait reçu une partie de son éducation première dans l'atelier du peintre et mathématicien PIERO DELLA FRANCESCA, également natif de San Sepolcro et dont on peut admirer les très belles œuvres à Arezzo (son œuvre maîtresse : *La Légende de la Croix*), à Rimini, à San Sepolcro, à Urbino, à Florence, à la National Gallery de Londres, ...

En 1464, on trouve PACIOLI à Venise ; il y exerce la fonction de tuteur des trois fils du marchand Antonio ROMPIASI. Il en profite pour assister aux leçons du mathématicien Domenico BRAGADINO à la *Scuola di Rialto*. C'est à cette époque qu'il écrit son premier manuscrit, un petit traité d'arithmétique commerciale à l'usage de ses trois jeunes élèves.

Vers 1471, durant plusieurs mois, il est l'hôte de l'humaniste et architecte Leon Battista ALBERTI à Rome. Il est ordonné Frère Franciscain un peu plus tard à San Sepolcro mais il a la chance de n'être pas confiné dans ses devoirs religieux ; ses supérieurs ecclésiastiques lui permettent de voyager énormément en tant que professeur enseignant les mathématiques (Rome, Naples, Venise, Florence, Bologne, ...)

Il est invité par Ludovico SFORZA dit IL MORO à enseigner les mathématiques à l'Université de Milan (1496–1499). C'est là qu'il devient l'ami de VINCI. Il semble qu'il y ait eu une collaboration dans les deux sens, Luca PACIOLI conseillant LEONARDO DA VINCI dans des questions de mathématiques, de perspective, opérant des calculs pour lui et VINCI illustrant le *De divina proportione* de PACIOLI. À propos, tu as pu lire un article sur cette « divine proportion » dans le numéro 68 de *Math-Jeunes* : il s'agit en fait du **nombre d'or** !

Au cours de ses nombreux voyages, Luca PACIOLI a rencontré pas mal d'érudits de son époque ainsi que de nombreuses personnalités politiques. Peu enclin à la modestie, paraît-il, il aimait les citer dans les dédicaces, préfaces et postfaces de ses œuvres.

Ses deux principaux ouvrages sont la *Summa* (Venise, 1494) et le *De divina proportione* (Venise, 1509). Venise était devenue, à cette époque, un des grands centres typographiques d'Europe.

La *Summa*, dans laquelle il cite entre autres LEONARDO PISANO encore connu sous le nom de FIBONACCI, comporte de l'arithmétique classique, de l'algèbre, de l'arithmétique commerciale, la façon de bien tenir un livre de comptes, des problèmes de poids et mesures, de taux d'échanges et des notions de géométrie. Il semble qu'il ait voulu présenter à un large public le résultat des études mathématiques de FIBONACCI. Selon CARDAN (1501–1576), il aurait trouvé une copie du manuscrit du *Liber Abacci* de FIBONACCI (version 1202) à la Bibliothèque de San Antonio di Castello à Venise.

Le *De divina proportione* traite du nombre d'or, des corps réguliers, des cinq polyèdres platoniciens, ...

PACIOLI désirait que ses écrits soient connus du plus grand nombre possible ; la preuve en est qu'ils sont rédigés en langue italienne et non pas en latin, langue des savants de l'époque. De plus il avait l'avantage de bénéficier de l'invention toute récente de l'imprimerie. Il meurt en 1517 mais reste l'un des grands mathématiciens, algébristes de la Renaissance.

Bibliographie

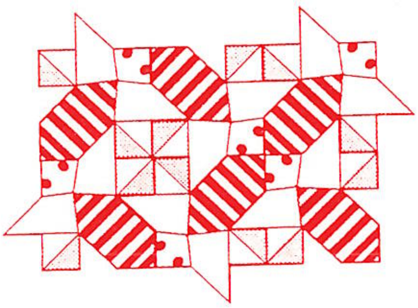
[1] Luca PACIOLI, *Exposition of Double Entry Bookkeeping (Venice 1494)*, english translation by Antonia von Gebsattel, introduction and commentary by Basil Yamey, Albrizzi editore, Venice 1994.

[2] Luca PACIOLI, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, édition fac-similé, Istituto poligrafico e zecca dello Stato, Roma, 1994.

Réponses aux jeux-problèmes des quarts de finale individuels du neuvième championnat international des jeux mathématiques et logiques.

Le questionnaire a été publié dans le numéro 66 de *Math-Jeunes*.

1.



2. Il existe 6 chemins différents
3. Il y a 7 nombres entre 1 et 69 :
   15, 26, 27, 36, 37, 48, 58.
4. On peut obtenir 22 masses différentes : toutes les masses de 1 gramme à 24 grammes inclus, excepté 4 et 20 grammes.
5. Le tiroir-caisse de Madame Ladouceur contient 50 centimes, 65 centimes ou 70 centimes de monnaie.
6. Le bloc de Galaxix pèse 125 kilogrammes.
7. 3 phrases sont vraies (la 1, la 3, et soit la 2, soit la 4 ; les 2 autres étant fausses).
8.

9. Il existe 222 nombres « troncadivisibles » inférieurs à 1995.
10.

N	J	V	B
B	V	J	N
V	B	N	J
J	N	B	V

1^er^ étage

J	N	B	V
N	B	V	J
B	V	J	N
V	J	N	B

2ème étage

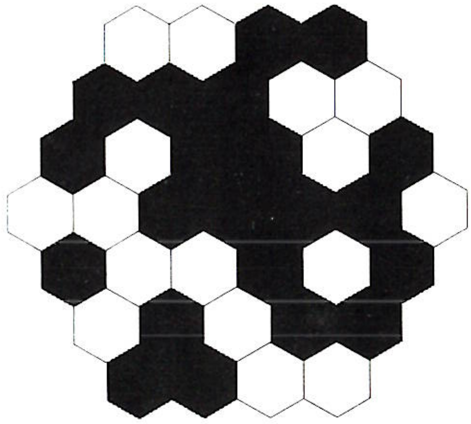
11. Il y a au maximum 13 cristaux liquides en panne.
12. les 3 chiffres sont 1, 2 et 7.
13. On obtient 60 résultats différents.
14. V A L L E E vaut 174 455.
15. n vaut au maximum 23.
16. Le nombre de Francis est 19.

Solution des jeux

Les mots cachés (par CéVé)

Premier problème : MATHS
Deuxième problème : GAGNE

Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Le mur des nombres

		743		
	343	400		
	184	159	241	
125	59	100	141	
87	38	21	79	62

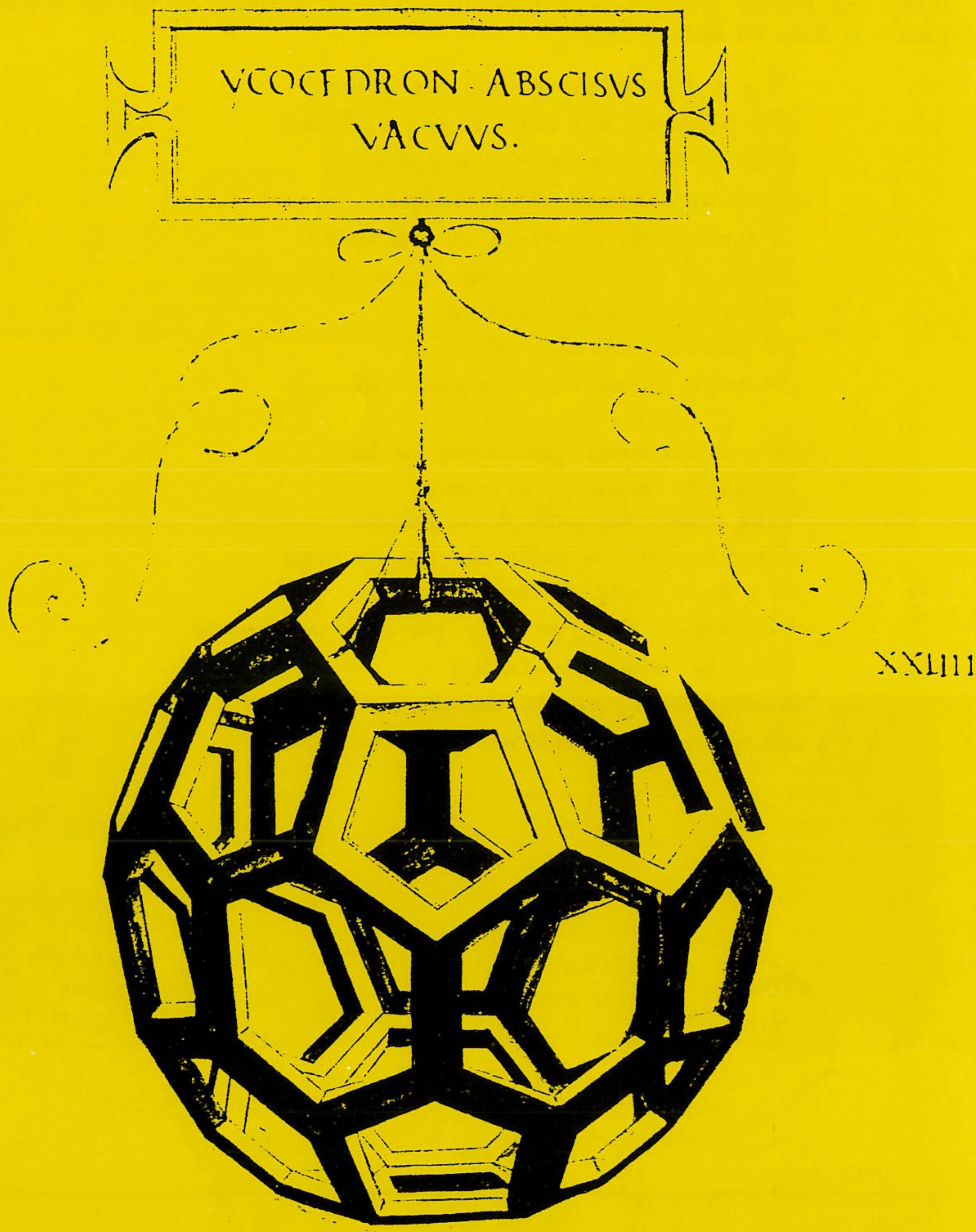
Monsieur Hector Dujacquier, professeur à l'École Normale de Braine-le-Comte, nous rappelle ce texte de Boris VIAN :

Il y a des racines de tout' les formes
Des pointues, des rond' et des difformes
Cell' de la guimauve est angélique
Et la mandragore est diabolique
Il y a un Racin' qu'est un classique
Mêm' s'il nous bassin', on n'y peut plus rien
Mais la racine que j'adore
Et qu'on extrait sans effort-eu
La racin' carrée c'est ma préfé-rée.

Il y a des racin' qui s'vend' en botte
Le radis, l'navet ou la carotte
Vous connaissez celle de la bruyère
Dans laquell' on taille des pip' en terre
Il y a la racin' de canne à pêche
Cultivez-la donc, qu'est-c' qui vous en empêche ?
Mais la racine que j'adore
Donnez m'en-z-encore, encore
La racin' carrée c'est ma préfé-rée.

Boris VIAN

H. DUJACQUIER
Braine-le-Comte



Dessin de Leonardo da Vinci pour l'édition de 1509
du *De divina proportione* de Luca Pacioli