MATH - JEUNES

17^{e} année
Octobre 1995 – n° 71
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, G.Noël, A.Parent, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux
Conception de la couverture : K. Martroye

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 ex. au moins) : 150 FB
- Isolés : 200 FB

Étranger :

- Groupés (5 ex. au moins) : 250 FB (42 FF)
- Isolés : 330 FB (55 FF)

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1989 — Par numéro : 15 FB (Étranger : 30 FB ou 5 FF)
- Années 89/90, 90/91, 91/92 — Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB ou 17 FF)
- Années 92/93, 93/94, 94/95 — 80 FB (Étranger : 160 FB ou 27 FF)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

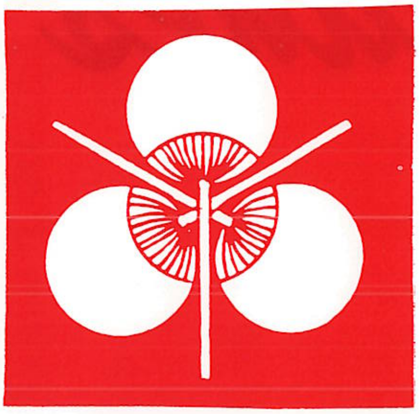
Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

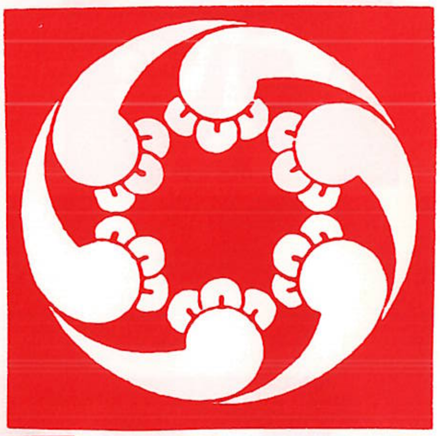
N ° 71 Dix-septième année 1995

Math-Jeunes

Rosaces

G. Noël & M. Ballieu, *Univ. Mons & A. R. Binche*





La couverture de ton *Math-Jeunes* représente une **rosace**.

De nombreux **motifs** – en anglais, *patterns* – que l'on rencontre dans la nature, dans l'art, ..., présentent ce qu'on appelle des **symétries circulaires** – en anglais, *rotational symetries*.

De quoi s'agit-il ?...

En fait, cela signifie que les « motifs » en question (tu en as quelques exemples à la page qui précède) peuvent « **tourner** » ou **subir une rotation** de moins d'un tour complet (autour d'un point central que tu n'auras guère de mal à localiser), de telle manière que la figure en question est **exactement restée la même** après avoir subi la rotation. Le motif est **inchangé** : déplacé de moins d'un tour, il **colle** avec l'original. Si tu as un quelconque problème de compréhension à ce stade, n'hésite surtout pas à en discuter avec ton professeur de mathématiques.

Des motifs qui possèdent la propriété dont nous venons de parler sont appelés **rosaces**.

Les exemples ci-dessus te font percevoir des ressemblances et des différences assez immédiates. Chacune des rosaces possède un certain nombre de « pétales ». Nous considérerons deux rosaces comme semblables si elles ont le même nombre de pétales ; nous les dirons différentes dans le cas contraire.

Le nombre de pétales d'une rosace est évidemment lié à l'angle entre deux pétales : s'il y a n pétales (rosace dite d'**ordre** n), l'angle α entre deux pétales vaut $\frac{360}{\alpha}$ degrés.

Si on fait tourner la rosace d'un angle de 0°, $\alpha°$, $2\alpha°$, ..., $(n-1)\alpha°$ (autour de son « point central »), elle est appliquée sur elle-même : l'image « colle avec » l'original, comme il en a déjà été question plus haut. Une rosace à n pétales possède une **symétrie circulaire d'ordre** n.

Certaines rosaces ont en plus des **axes de symétrie**. Essaie de voir que, *si une rosace d'ordre* n *possède un axe de symétrie, alors elle en admet exactement* n.

Dans les exemples montrés en début d'article, recherche les rosaces ayant des symétries circulaires d'ordre deux, trois, quatre, cinq, six, huit et seize. Quelles sont celles qui possèdent des axes de symétrie ? Combien ? Dessine-les ...

Il nous reste à ajouter un petit mot à l'intention de ceux, parmi vous, qui ont « beaucoup d'heures de math. par semaine ».

L'ensemble (muni de la loi de composition ($\circ$)) de toutes les **isométries** – rotations, symétries par rapport à une droite (ou symétries-miroirs) et composées de ces deux types d'isométries – qui **conservent une figure** possède un certain nombre de propriétés : l'opération est **interne** et **partout définie**, **associative** dans l'ensemble ; elle y admet un **élément neutre** et tout élément de l'ensemble possède un **inverse**. On dit que cet ensemble d'isométries (avec la loi de composition) constitue le **groupe de symétries de la figure**.

Tu peux, avec l'aide de ton professeur de mathématiques, tenter de déterminer les groupes de symétries (tous finis, c'est-à-dire ayant un **nombre fini** d'éléments) des rosaces que nous t'avons proposées ; tu peux citer chacun des éléments de ces groupes. Ainsi, dans le cas ci-dessous, le groupe de symétries de la rosace est $\mathbb{Z}_3 = \{1, r, r^2\}$ appelé **groupe cyclique d'ordre 3**.

1 est la rotation identique, r celle d'un tiers de tour. On a, bien sûr :

$$\begin{aligned}
1 \circ 1 &= 1 \\
1 \circ r &= r \circ 1 = r \\
1 \circ r^2 &= r^2 \circ 1 = r^2 \\
r \circ r &= r^2 \\
r^2 \circ r &= r \circ r^2 = r^3 = 1 \\
r^2 \circ r^2 &= r^3 \circ r = 1 \circ r = r
\end{aligned}$$

 Math-Jeunes n° 71, 4–8, 1995

Voyages Extraordinaires
Autour de la Lune

Jules Verne. *Chapitre IV* *Un peu d'algèbre*

La nuit se passa sans incident. À vrai dire, ce mot « nuit » est impropre.

La position du projectile ne changeait pas par rapport au Soleil. Astronomiquement, il faisait jour sur la partie inférieure du boulet, nuit sur sa partie supérieure. Lors donc que dans ce récit ces deux mots sont employés, ils expriment le laps de temps qui s'écoule entre le lever et le coucher du Soleil sur la Terre.

Le sommeil des voyageurs fut d'autant plus paisible que, malgré son excessive vitesse, le projectile semblait être absolument immobile. Aucun mouvement ne trahissait sa marche à travers l'espace. Le déplacement, quelque rapide qu'il soit, ne peut produire un effet sensible sur l'organisme quand il a lieu dans le vide ou lorsque la masse d'air circule avec le corps entraîné. Quel habitant de la Terre s'aperçoit de sa vitesse, qui l'emporte cependant à raison de quatre-vingt-dix mille kilomètres par heure ? Le mouvement, dans ces conditions, ne se « ressent » pas plus que le repos. Aussi tout corps y est-il indifférent. Un corps est-il en repos, il y demeurera tant qu'aucune force étrangère ne le déplacera. Est-il en mouvement, il ne s'arrêtera plus si aucun obstacle ne vient enrayer sa marche. Cette indifférence au mouvement ou au repos, c'est l'inertie.

Barbicane et ses compagnons pouvaient donc se croire dans une immobilité absolue, étant enfermés à l'intérieur du projectile. L'effet eût été le même, d'ailleurs, s'ils se fussent placés à l'extérieur. Sans la Lune qui grossissait au-dessus d'eux, ils auraient juré qu'ils flottaient dans une stagnation complète.

Ce matin-là, le 3 décembre, les voyageurs furent réveillés par un bruit joyeux, mais inattendu. Ce fut le chant du coq qui retentit à l'intérieur du wagon.

Michel Ardan, le premier sur pied, grimpa jusqu'au sommet du projectile, et fermant une caisse entrouverte :

« Veux-tu te taire ? dit-il à voix basse. Cet animal-là va faire manquer ma combinaison ! »

Cependant Nicholl et Barbicane s'étaient réveillés.

« Un coq ? avait dit Nicholl.

— Eh non ! mes amis, répondit vivement Michel, c'est moi qui ai voulu vous réveiller par cette vocalise champêtre ! »

Et ce disant, il poussa un splendide kokoriko qui eût fait honneur au plus orgueilleux des gallinacés.

Les deux Américains ne purent s'empêcher de rire.

« Un joli talent, dit Nicholl, regardant son compagnon d'un air soupçonneux.

— Oui, répondit Michel, une plaisanterie de mon pays. C'est très gaulois. On fait, comme cela, le coq dans les meilleures sociétés ! »

Puis, détournant la conversation :

« Sais-tu, Barbicane, dit-il, à quoi j'ai pensé toute la nuit ?

— Non, répondit le président.

— À nos amis de Cambridge. Tu as déjà remarqué que je suis un admirable ignorant des choses mathématiques. Il m'est donc impossible de deviner comment les savants de l'Observatoire ont pu calculer quelle vitesse initiale devrait avoir le projectile en quittant la Columbiad pour atteindre la Lune.

— Tu veux dire, répliqua Barbicane, pour atteindre ce point neutre où les attractions terrestres et lunaires se font équilibre, car, à partir de ce point situé aux neuf dixièmes du parcours environ, le projectile tombera sur la Lune simplement en vertu de sa pesanteur.

— Soit, répondit Michel, mais, encore une fois, comment ont-ils pu calculer la vitesse initiale ?

— Rien n'était plus aisé, répondit Barbicane.

— Et tu aurais su faire ce calcul ? demanda Michel Ardan.

— Parfaitement. Nicholl et moi, nous l'eussions établi si la note de l'Observatoire ne nous eût évité cette peine.

— Eh bien, mon vieux Barbicane, répondit Michel, on m'eût plutôt coupé la tête, en commençant par les pieds, que de me faire résoudre ce problème-là !

— Parce que tu ne sais pas l'algèbre, répliqua tranquillement Barbicane.

— Ah ! vous voilà bien, vous autres, mangeurs d'x ! Vous croyez avoir tout dit quand vous avez dit : l'algèbre.

— Michel, répliqua Barbicane, crois-tu qu'on puisse forger sans marteau ou labourer sans charrue ?

— Difficilement.

— Eh bien, l'algèbre est un outil, comme la charrue ou le marteau, et un bon outil pour qui sait l'employer.

— Sérieusement ?

— Très sérieusement.

— Et tu pourrais manier cet outil-là devant moi ?

— Si cela t'intéresse.

— Et me montrer comment on a calculé la vitesse initiale de notre wagon ?

— Oui, mon digne ami. En tenant compte de tous les éléments du problème, de la distance du centre de la Terre au centre de la Lune, du rayon de la Terre, de la masse de la Terre, de la masse de la Lune, je puis établir exactement quelle a dû être la vitesse initiale du projectile, et cela par une simple formule.

— Voyons la formule.

— Tu la verras. Seulement, je ne te donnerai pas la courbe réellement tracée par le boulet entre la Lune et la Terre, en tenant compte de leur mouvement de translation autour du Soleil. Non. Je considérerai ces deux astres comme immobiles, ce qui nous suffit.

— Et pourquoi ?

— Parce que ce serait chercher la solution de ce problème qu'on appelle « le problème des trois corps », et que le calcul intégral n'est pas encore assez avancé pour le résoudre.

— Tiens, fit Michel Ardan de son ton narquois, les mathématiques n'ont donc pas dit leur dernier mot ?

— Certainement non, répondit Barbicane.

— Bon ! Peut-être les Sélénites ont-ils poussé plus loin que vous le calcul intégral ! Et à propos, qu'est-ce que ce calcul intégral ?

— C'est un calcul qui est l'inverse du calcul différentiel, répondit sérieusement Barbicane.

— Bien obligé.

— Autrement dit, c'est un calcul par lequel on cherche les quantités finies dont on connaît la différentielle.

— Au moins, voilà qui est clair, répondit Michel d'un air on ne peut plus satisfait.

— Et maintenant, reprit Barbicane, un bout de papier, un bout de crayon, et avant une demi-heure je veux avoir trouvé la formule demandée. »

Barbicane, cela dit, s'absorba dans son travail, tandis que Nicholl observait l'espace, laissant à son compagnon le soin du déjeuner. Une demi-heure ne s'était pas écoulée que Barbicane, relevant la tête, montrait à Michel Ardan une page couverte de signes algébriques, au milieu desquels se détachait cette formule générale :

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = gr\left\{\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m}\left(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r}\right)\right\}$$

« Et cela signifie ?... demanda Michel.

— Cela signifie, répondit Nicholl, que : un demi de v deux moins v zéro carré, égale gr multiplié par r sur x moins un, plus m prime sur m multiplié par r sur d moins x, moins r sur d moins r...

— X sur y monté sur z et chevauchant sur p, s'écria Michel Ardan en éclatant de rire. Et tu comprends cela, capitaine ?

— Rien n'est plus clair.

— Comment donc ! dit Michel. Mais cela saute aux yeux, et je n'en demande pas davantage.

— Rieur sempiternel ! répliqua Barbicane. Tu as voulu de l'algèbre et tu en auras jusqu'au menton !

— J'aime mieux qu'on me pende !

— En effet, répondit Nicholl, qui examinait la formule en connaisseur, ceci me paraît bien trouvé, Barbicane. C'est l'intégrale de l'équation des forces vives, et je ne doute pas qu'elle ne nous donne le résultat cherché.

— Mais je voudrais comprendre ! s'écria Michel. Je donnerais dix ans de la vie de Nicholl pour comprendre !

— Écoute alors, reprit Barbicane. Un demi de v deux moins v zéro carré, c'est la formule qui nous donne la demi-variation de la force vive.

— Bon, et Nicholl sait ce que cela signifie ?

— Sans doute, Michel, répondit le capitaine. Tous ces signes, qui te paraissent cabalistiques, forment cependant le langage le plus clair, le plus net, le plus logique pour qui sait le lire.

— Et tu prétends, Nicholl, demanda Michel, qu'au moyen de ces hiéroglyphes, plus incompréhensibles que des ibis égyptiens, tu pourras trouver quelle vitesse initiale il convenait d'imprimer au projectile ?

— Incontestablement, répondit Nicholl, et même par cette formule, je pourrai toujours te dire quelle est sa vitesse à un point quelconque de son parcours.

— Ta parole ?

— Ma parole.

— Alors, tu es aussi malin que notre président ?

— Non, Michel. Le difficile, c'est ce qu'a fait Barbicane. C'est d'établir une équation qui tienne compte de toutes les conditions du problème. Le reste n'est plus qu'une question d'arithmétique, et n'exige que la connaissance des quatre règles.

— C'est déjà beau ! » répondit Michel Ardan, qui, de sa vie, n'avait pu faire une addition juste et qui définissait ainsi cette règle : « Petit casse-tête chinois qui permet d'obtenir des totaux indéfiniment variés. »

Cependant, Barbicane affirmait que Nicholl, en y songeant, aurait certainement trouvé cette formule.

« Je n'en sais rien, disait Nicholl, car, plus je l'étudie, plus je la trouve merveilleusement établie.

— Maintenant, écoute, dit Barbicane à son ignorant camarade, et tu vas voir que toutes ces lettres ont une signification.

— J'écoute, dit Michel d'un air résigné.

— d, fit Barbicane, c'est la distance du centre de la Terre au centre de la Lune, car ce sont les centres qu'il faut prendre pour calculer les attractions.

— Cela je le comprends.

— r est le rayon de la Terre.

— r, rayon. Admis.

— m est la masse de la Terre ; m prime la masse de la Lune. En effet, il faut tenir compte de la masse des deux corps attirants, puisque l'attraction est proportionnelle aux masses.

— C'est entendu.

— g représente la gravité, la vitesse acquise au bout d'une seconde par un corps qui tombe à la surface de la Terre. Est-ce clair ?

— De l'eau de roche ! répondit Michel.

— Maintenant, je représente par x la distance variable qui sépare le projectile du centre de la Terre, et par v la vitesse qu'a ce projectile à cette distance.

— Bon.

— Enfin, l'expression v zéro qui figure dans l'équation est la vitesse que possède le boulet au sortir de l'atmosphère.

— En effet, dit Nicholl, c'est à ce point qu'il faut calculer cette vitesse, puisque nous savons déjà que la vitesse au départ vaut exactement les trois demis de la vitesse au sortir de l'atmosphère.

— Comprends plus ! fit Michel.

— C'est pourtant bien simple, dit Barbicane.

— Pas si simple que moi, répliqua Michel.

— Cela veut dire que lorsque notre projectile est arrivé à la limite de l'atmosphère terrestre, il avait déjà perdu un tiers de sa vitesse initiale.

— Tant que cela ?

— Oui, mon ami, rien que par son frottement sur les couches atmosphériques. Tu comprends bien que plus il marchait rapidement, plus il trouvait de résistance de la part de l'air.
— Ça, je l'admets, répondit Michel, et je le comprends, bien que tes v zéro deux et tes v zéro carrés se secouent dans ma tête comme des clous dans un sac !
— Premier effet de l'algèbre, reprit Barbicane. Et maintenant, pour t'achever, nous allons établir la donnée numérique de ces diverses expressions, c'est-à-dire chiffrer leur valeur.
— Achevez-moi ! répondit Michel.
— De ces expressions, dit Barbicane, les unes sont connues, les autres sont à calculer.
— Je me charge de ces dernières, dit Nicholl.
— Voyons r, reprit Barbicane. r, c'est le rayon de la Terre qui, sous la latitude de la Floride, notre point de départ, égale six millions trois cent soixante-dix mille mètres. d, c'est-à-dire la distance du centre de la Terre au centre de la Lune, vaut cinquante-six rayons terrestres, soit ... »
Nicholl chiffra rapidement.
« Soit, dit-il, trois cent cinquante-six millions sept cent vingt mille mètres, au moment où la Lune est à son périgée, c'est-à-dire à sa distance la plus rapprochée de la Terre.
— Bien, fit Barbicane. Maintenant m prime sur m, c'est-à-dire le rapport de la masse de la Lune à celui de la Terre, égale un quatre-vingt-unième.
— Parfait, dit Michel.
— g, la gravité, est à la Floride de neuf mètres quatre-vingt-un. D'où résulte que gr égale ...
— Soixante-deux millions quatre cent vingt-six mille mètres carrés, répondit Nicholl.
— Et maintenant ? demanda Michel Ardan.
— Maintenant que les expressions sont chiffrées, répondit Barbicane, je vais chercher la vitesse v zéro, c'est-à-dire la vitesse que doit avoir le projectile en quittant l'atmosphère pour atteindre le point d'attraction égale avec une vitesse nulle. Puisque, à ce moment, la vitesse sera nulle, je pose qu'elle égalera zéro, et que x, la distance où se trouve ce point neutre, sera représentée par les neuf dixièmes de d, c'est-à-dire de la distance qui sépare les deux centres.
— J'ai une vague idée que cela doit être ainsi, dit Michel.
— J'aurai donc alors : x égale neuf dixièmes de d, et v égale zéro, et ma formule deviendra ... »
Barbicane écrivit rapidement sur le papier :

$$v_0^2 = 2gr\left\{1 - \frac{10r}{9d} - \frac{1}{81}\left(\frac{10r}{d} - \frac{r}{d-r}\right)\right\}$$

Nicholl lut d'un œil avide.
« C'est cela ! c'est cela ! s'écria-t-il.
— Est-ce clair ? demanda Barbicane.
— C'est écrit en lettres de feu ! répondit Nicholl.
— Les braves gens ! murmurait Michel.
— As-tu compris, enfin ? lui demanda Barbicane.
— Si j'ai compris ! s'écria Michel Ardan, mais c'est-à-dire que ma tête en éclate !
— Ainsi, reprit Barbicane, v zéro deux égale deux gr multiplié par un, moins dix r sur 9 d, moins un quatre-vingt-unième multiplié par dix r sur d moins r sur d moins r.
— Et maintenant, dit Nicholl, pour obtenir la vitesse du boulet au sortir de l'atmosphère, il n'y a plus qu'à calculer. »
Le capitaine, en praticien rompu à toutes les difficultés, se mit à chiffrer avec une rapidité effrayante. Divisions et multiplications s'allongeaient sous ses doigts. Les chiffres grêlaient sa page blanche. Barbicane le suivait du regard, pendant que Michel Ardan comprimait à deux mains une migraine naissante.
« Eh bien ? demanda Barbicane, après plusieurs minutes de silence.
— Eh bien, tout calcul fait, répondit Nicholl, v zéro, c'est-à-dire la vitesse du projectile au sortir de l'atmosphère, pour atteindre le point d'égale attraction, a dû être de ...
— De ? ... fit Barbicane.
— De onze mille cinquante et un mètres dans la première seconde.
— Hein ! fit Barbicane, bondissant, vous dites !
— Onze mille cinquante et un mètres.

Math-Jeunes n°71, 8–12, 1995

— Malédiction ! s'écria le président en faisant un geste de désespoir.
— Qu'as-tu ? demanda Michel Ardan, très surpris.
— Ce que j'ai ! Mais si à ce moment la vitesse était déjà diminuée d'un tiers par le frottement, la vitesse initiale aurait dû être ...
— De seize mille cinq cent soixante-seize mètres ! répondit Nicholl.
— Et l'Observatoire de Cambridge, qui a déclaré que onze mille mètres suffisaient au départ, et notre boulet qui n'est parti qu'avec cette vitesse !
— Eh bien ? demanda Nicholl.
— Eh bien, elle sera insuffisante !
— Bon.
— Nous n'atteignons pas le point neutre !
— Sacrebleu !
— Nous n'irons même pas à moitié chemin !
— Nom d'un boulet ! s'écria Michel Ardan, sautant comme si le projectile fût sur le point de heurter le sphéroïde terrestre.
— Et nous retomberons sur la terre ! »

Le code DX

Claude Villers,
Athénée Royal de Mons

En guise d'introduction

L'homme s'avançait lentement, sans bruit, dans le creux des dunes. Il était vêtu de manière à se confondre au maximum avec la nature qui l'entourait. Son regard de maniaque inspectait les alentours.
Soudain, l'homme s'arrêta. Il venait de découvrir sa prochaine cible. Elle se tenait immobile, face à la mer, peu soucieuse de ce qui pouvait se produire autour d'elle. Perchée sur un vieux morceau de bois probablement rejeté par une marée précédente, elle semblait attendre. Qui ? Quoi? Nul ne le saura jamais. Alors, avec mille précautions, l'homme déposa le grand sac noir qu'il portait en bandoulière. Il l'ouvrit et en retira une sorte de crosse d'un noir bien mat. Il y fixa l'arme avec laquelle il allait opérer. C'était un engin magnifique, de fabrication récente et muni des toutes dernières sophistications. L'homme savait qu'il lui suffisait de le charger pour qu'automatiquement tous les réglages nécessaires soient assurés. Aussi, avec une certaine délectation, il placa une cartouche adéquate, munie du fameux code DX, dans l'emplacement prévu à cet effet dont il referma le volet protecteur. Tout était prêt.
L'homme épaula lentement et appliqua son œil droit sur l'oculaire destiné à la visée. Dans le viseur, l'image de la cible, d'abord floue devint progressivement nette. Alors l'homme posa le doigt sur le bouton du déclenchement qu'il enfonça sans hésiter plus longtemps.
En une fraction de seconde tout fut terminé. La cible n'avait pas eu le temps de se rendre compte de ce qui lui arrivait. La vie qui l'animait venait d'être figée pour l'éternité. Alors l'homme replia consciencieusement son maté-

riel et, sans remords, poursuivit sa route à la recherche d'une autre cible.

« Je pense que ce sera une bonne photo de mouette », marmona-t-il en s'éloignant.

Comme vous pouvez le constater, le code DX ne constitue pas un élément de roman noir mais est, plus prosaïquement, le nom d'un code utilisé dans le domaine de la photographie.

Il est destiné à rendre plus aisé l'usage de l'appareil de prise de vues.

Le code DX consiste en un système d'indications figurant sur les cartouches de films « 135 » (vues de 24 mm sur 36 mm), qui informent l'appareil prévu pour cet usage, des deux principales caractéristiques d'un tel film, c'est-à-dire : le nombre de vues pouvant être prises et la sensibilité de l'émulsion utilisée.

La première caractéristique est une notion évidente et ne nécessite donc guère d'explications.

La seconde mérite peut-être qu'on s'y attarde. Voici quelques mots à son sujet.

La sensibilité d'un film est sa capacité à réagir à la lumière qu'il reçoit. Plus un film est sensible, plus il permet de réaliser une photographie dans de mauvaises conditions de luminosité du sujet photographié. Cette sensibilité des films s'exprime dans divers systèmes d'unités. Actuellement, le système le plus employé est le système ISO (International Standard Organization) encore appelé parfois système ASA (American Standard Association). Ainsi, par exemple, il existe des films « 25 ISO » et des films « 5 000 ISO » dont les capacités à réagir à la lumière sont très différentes. Les premiers sont d'ailleurs qualifiés de « lents » et les seconds de « rapides ». Il existe, bien entendu, des films de sensibilités intermédiaires.

Vous pensez peut-être qu'alors il y a intérêt à toujours utiliser des films très sensibles. Ce n'est pas le cas car tout avantage (au sujet des conditions de luminosité) est accompagné d'un inconvénient. Plus un film est rapide, moins bonne est la qualité de finesse de l'image qu'il fournit. Il faut donc utiliser un film dont la sensibilité est le meilleur compromis entre sa capacité de réaction à la lumière et la qualité attendue de l'image. D'autres critères peuvent en outre être pris en compte pour le choix de la sensibilité du film à acquérir.

Première analyse du code DX

Si vous observez attentivement des cartouches de films à codage DX (vous pouvez en récupérer chez votre revendeur habituel), vous constatez la présence d'une sorte de damier de pavés créés soit par le métal de la cartouche laissé à nu (ces parties semblent argentées) soit par des zones recouvertes de peinture (noire).

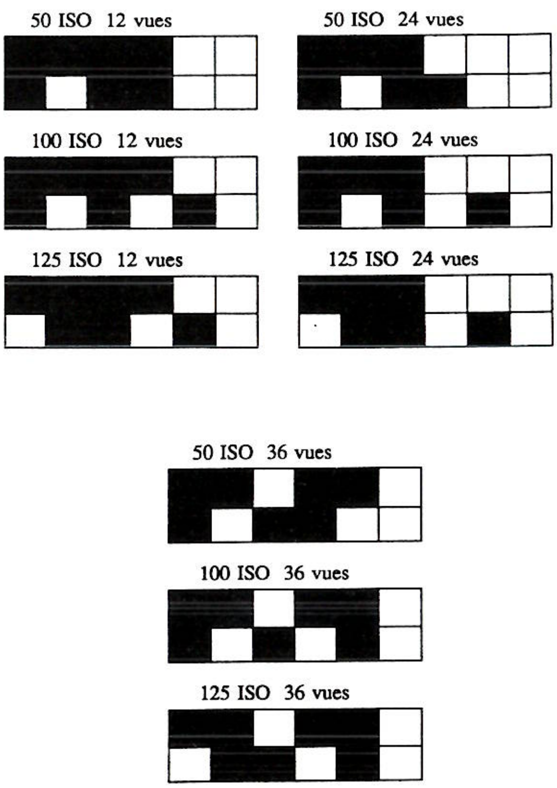
Ces pavés permettent à l'appareil d'établir des contacts électriques. En effet, là ou le métal est à nu, le courant peut « passer » ce qu'il ne peut faire là où le métal est peint. Nous dirons , dans la suite de cet article, que le pavé est à 1 dans le premier cas et est à 0 dans le second cas. On peut dire que ces zones jouent le rôle d'interrupteurs pour des circuits contenus dans l'électronique de l'appareil. Le décodage s'effectue en effet par l'intermédiaire de contacts visibles dans le logement prévu pour le film, qui transmettent les informations à un circuit intégré qui les exploite.

Poursuivez votre observation en tenant la cartouche devant vous de manière à avoir une lecture normale du code-barre et du damier qui s'y trouvent (voir figure). En examinant bien le codage DX (le damier), vous vous apercevez rapidement qu'il est formé de deux rangées de 6 pavés pouvant donc prendre chacun la valeur 1 ou la valeur 0. Vous vous doutiez certainement que la photographie avait des liens avec l'art (par la composition de l'image), avec la physique (par l'optique, par exemple) et avec la chimie (par le traitement des émulsions et le tirage des images). Vous voici maintenant plongé dans un domaine mathématique par la rencontre de ces pavés de valeur 1 ou 0, appelés « binary digits » ou encore « bits ».

Le code DX utilisé en photographie est donc simplement un code transmettant des informations à l'appareil par le biais du système de numération binaire (voir annexe).

Comment cela fonctionne-t-il ?

Continuez à observer des codes DX de différents films.
Voici quelques exemples (noir = peinture = bit à 0, blanc = métal = bit à 1) :



Vous trouverez vite, par des lectures comparatives, que la première rangée de 6 bits permet de caractériser la longueur du film (en nombre de vues).
Dès lors, il apparaît évident que la rangée inférieure de 6 bits doit renseigner l'appareil sur la sensibilité du film. D'autre part, vous pouvez constater que, dans tous les cas, le bit de droite de chacune des deux rangées (attention, nous l'appellerons « le premier bit ») a toujours la valeur 1.
A quoi peut-il donc bien servir ? La réponse n'est peut-être pas évidente mais est cependant facile à comprendre. Les premiers bits (à droite) servent à indiquer à l'appareil qu'il est en présence d'un film codé DX. Si le film n'est pas codé DX alors l'emplacement de ce premier bit est couvert de peinture et coupe donc tout contact électrique.
Dès lors, on peut dire que pour les films codés DX, les premiers bits de droite sont toujours mis à 1 (le courant peut ainsi passer dans le circuit de l'appareil qui lui indique l'utilisation d'un film à code DX). C'est ce que nous pourrons vérifier par la suite.

Valeurs lues sur différentes cartouches de film

a) Sensibilité du film

Transcrivons, avec des 1 et des 0, les valeurs indiquées par la deuxième rangée du code DX de quelques émulsions classiques. Nous obtenons le tableau suivant :

50 ISO	010011
100 ISO	010101
125 ISO	100101
200 ISO	010111
250 ISO	100111
400 ISO	011001
500 ISO	101001

Il y a des codes dont le 6ème bit (à gauche donc) est 0 et des codes où il est 1.
Séparons donc la liste précédente selon ce critère. On obtient :

50 ISO	010011	125 ISO	100101
100 ISO	010101	250 ISO	100111
200 ISO	010111	500 ISO	101001
400 ISO	011001		

Vous pouvez voir poindre une régularité. Dans chacune des deux séries, on passe d'une valeur ISO à la suivante en multipliant par 2. De plus, le premier bit et le sixième bit ont joué leur rôle, comme on l'a vu précédemment.
Dès lors, il apparaît que le codage de la sensibilité du film soit déterminé par la configuration des quatre bits n° 5, 4, 3 et 2.
Et c'est bien ainsi que le système DX fonctionne (vous pouvez le vérifier en achetant des films de toutes les sensibilités disponibles !!!).

Nous en avons eu la confirmation auprès de fabricants de films.

Voici donc un tableau qui résume ces codes de sensibilité.

Code DX	Valeur décimale (bits 5 à 2)	Sensibilité ISO
Codes commençant par 0		
0 1000 1	8	25
⌣ 1001 ⌣	9	50
⌣ 1010 ⌣	10	100
⌣ 1011 ⌣	11	200
⌣ 1100 ⌣	12	400
⌣ 1101 ⌣	13	800
⌣ 1110 ⌣	14	1600
⌣ 1111 ⌣	15	3200
Codes commençant par 1		
1 0000 1	0	32
⌣ 0001 ⌣	1	64
⌣ 0010 ⌣	2	125
⌣ 0011 ⌣	3	250
⌣ 0100 ⌣	4	500
⌣ 0101 ⌣	5	1000
⌣ 0110 ⌣	6	2000
⌣ 0111 ⌣	7	4000
et		
⌣ 1000 ⌣	8	40
⌣ 1001 ⌣	9	80
⌣ 1010 ⌣	10	160
⌣ 1011 ⌣	11	320
⌣ 1100 ⌣	12	640
⌣ 1101 ⌣	13	1250
⌣ 1110 ⌣	14	2500
⌣ 1111 ⌣	15	5000

On remarquera que dans chacune des trois catégories, certaines valeurs ISO sont des valeurs « arrondies ».

b) Nombre de vues

A la lecture, en clair, des différentes possibilités offertes par le commerce, nous constatons qu'il n'y a que peu de longueurs différentes proposées.

Ce sont, 12 vues, 20 vues, 24 vues et 36 vues. Dès lors, en tenant compte que des valeurs inhabituelles doivent pouvoir être codées, il suffit de 3 bits pour réaliser cet objectif. En effet, 3 bits permettent de coder $2 \times 2 \times 2$ valeurs entières différentes allant de 000 (la plus petite) à 111 (la plus grande).

Les renseignements obtenus auprès de fabricants de films, assurent que cette supputation est correcte. La longueur du film est donc codée par les bits n° 4, 3 et 2 de cette rangée supérieure du code.

Transcrivons donc, avec des 1 et des 0, les valeurs usuelles du nombre de vues, lues sur des cartouches.

Nous obtenons le tableau suivant (en négligeant cette fois le premier bit de droite et les deux derniers bits de gauche) :

Code DX	Valeur décimale (bits 5 à 2)	Nbre de vues
⌣⌣ 001 ⌣	1	12
⌣⌣ 010 ⌣	2	20
⌣⌣ 011 ⌣	3	24
⌣⌣ 100 ⌣	4	36
et aussi		
⌣⌣ 101 ⌣	5	48
⌣⌣ 110 ⌣	6	60
⌣⌣ 111 ⌣	7	72

Mais alors, à quoi peuvent bien servir les deux bits de gauche de cette rangée (les bits n° 6 et 5). Nous entrons là dans le domaine du spécialiste de la photographie. Sachez cependant, si cela vous intéresse, que cette configuration de deux bits (donc quatre valeurs entières différentes) est destinée à renseigner l'appareil sur la latitude (souplesse) du film quant à son exposition.

Ainsi, un film noir et blanc est plus tolérant du point de vue exposition qu'un film négatif/couleurs qui l'est lui-même plus qu'un film diapositives.

Les conventions sont les suivantes :

Code binaire	Valeur décimale	Tolérance (diaphragme)
00 ⌣⌣⌣⌣	0	+1/2
01 ⌣⌣⌣⌣	1	+1
10 ⌣⌣⌣⌣	2	+2,-1
11 ⌣⌣⌣⌣	3	+3,-1

En guise de conclusion

Voici donc un peu démystifié ce codage DX figurant sur les cartouches de certains films.

Ce codage est nécessaire si l'appareil utilisé est prévu pour son usage.
Vous savez maintenant ce qu'il vous reste à faire si vous avez un appareil automatique utilisant le code DX alors que le film dont vous disposez ne possède pas ce code.
Armez-vous d'un outil vous permettant de gratter la peinture de la cartouche, à l'emplacement normal du code DX, de manière à mettre le métal à nu puis collez du « scotch » aux endroits devant rester isolants.
Bon courage et surtout ... bonnes photos.

Annexe : La numération binaire

Le système de numération que nous utilisons habituellement est un système de base dix. Cela signifie que l'on effectue des dénombrements élémentaires jusqu'à un maximum de dix unités.
C'est pourquoi nous n'avons besoin que de dix chiffres allant de 0 (absence d'unité) à 9 (nombre maximum d'unités pouvant être dénombrées).
C'est ainsi que 3 504 signifie réellement
« $3 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1$ ».
Ce système attribue donc une valeur à chaque chiffre, dont l'importance dépend de la place du chiffre considéré dans le nombre. On dit qu'il s'agit d'une numération de position.
Il existe des systèmes dont la base n'est pas dix. En particulier, le système binaire est un système de base 2 qui n'utilise donc que deux chiffres : le zéro pour l'absence d'unité et le 1 (valeur maximum des unités dénombrées).
C'est donc un système qui dénombre (de droite à gauche) les unités, les *deuzaines*, les *quatraines*, les *huitaines*, les *seizaines*, etc.
Ainsi 110101 nous dit qu'on a dénombré 1 unité, 0 *deuzaine*, 1 *quatraine*, 0 *huitaine*, 1 *seizaine* et enfin 1 *trente-deuzaine*.
110101 vaut donc 1+0+4+0+16+32 soit 53.
Comme nous n'avons besoin dans ce texte que de nombres entiers binaires écrits sur 4 bits au maximum, nous rencontrerons donc les nombres entiers allant de 0000 à 1111 soit donc $2 \times 2 \times 2 \times 2$ nombres entiers. Les valeurs décimales entières de ces 16 configurations vont donc de 0 à 15. On aura :

0000 $\leftrightarrow$ 0	0001 $\leftrightarrow$ 1
0010 $\leftrightarrow$ 2	0011 $\leftrightarrow$ 3
0100 $\leftrightarrow$ 4	0101 $\leftrightarrow$ 5
0110 $\leftrightarrow$ 6	0111 $\leftrightarrow$ 7
1000 $\leftrightarrow$ 8	1001 $\leftrightarrow$ 9
1010 $\leftrightarrow$ 10	1011 $\leftrightarrow$ 11
1100 $\leftrightarrow$ 12	1101 $\leftrightarrow$ 13
1101 $\leftrightarrow$ 14	1111 $\leftrightarrow$ 15

10^e

CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

FAIRE DES MATHÉMATIQUES AUTREMENT

Qu'est-ce qui fait courir les matheux joueurs? *Pourquoi les écoliers, élèves et étudiants qui s'enfuient devant le problème de mathématique donné en classe accourent-ils dès qu'il s'agit des jeux-problèmes du championnat? Pourquoi n'éprouvent-ils plus ni peur, ni ennui devant les mathématiques lors du championnat?*

DES ÉNIGMES FASCINANTES

Le principe des jeux-problèmes du championnat a spécialement été étudié pour leur plaire, même si les ressorts mathématiques sous-tendus sont aussi formateurs que ceux des "vrais" problèmes de mathématiques. En voici la recette:

Pas d'appel aux connaissances:
Les petites énigmes demandent *de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche,* mais pas réellement de connaissances.

Pas de démonstration:
Au risque de déplaire à quelques puristes, ***seul le résultat compte***. Qu'il s'exprime par un nombre, un dessin, une disposition de lettres.

Un habillage humoristique et moderne:
Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. On n'hésite pas à "coller" à l'actualité: élections, restructuration de cartes politiques, inflation ont été les sujets de problèmes des dernières séances du championnat.

Le résultat? Des problèmes plaisants, qui provoquent ***une hiérarchie souvent différente de celle constatée à l'école****. Car dans ce championnat, d'autres qualités peuvent s'exprimer: l'imagination, l'intuition, la persévérance.*

FÉDÉRATION FRANÇAISE DES JEUX MATHÉMATIQUES
Comite de Belgique
BP 157 - 7700 MOUSCRON

10^e

CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

Participez à l'événement le plus astucieux de l'année !

Bienvenue dans l'univers des jeux mathématiques !

Nous vous offrons de révéler le (petit) génie qui sommeille en vous ! Car ce questionnaire vous permet de participer au neuvième championnat international des jeux mathématiques et logiques, alias l'événement le plus astucieux de l'année!

Tout le monde est concerné : depuis les élèves de 4^e primaire jusqu'aux adultes les plus diplômés. Vous souhaitez déterminer votre catégorie? Consultez le tableau ci-dessous. Il vous indique aussi le numéro des problèmes que vous devrez résoudre pour atteindre les demi-finales régionales. Vous n'avez droit qu'à deux erreurs ! Et pour chaque problème, une simple réponse ne suffit pas toujours. Il faut aussi le nombre de solutions (sauf en CM).

Une fois les jeux résolus, photocopiez le bulletin réponse, complétez-le et renvoyez-le **avant le 31 janvier 1996**. A ce stade de l'épreuve, la participation est **entièrement gratuite**. La qualification et la participation aux demi-finales nécessitent l'adhésion à la FFJM, mais vous pouvez y adhérer dès à présent.

Vous recevez votre convocation ? Oui ? Alors commence une grisante aventure: les demi-finales régionales le 23 mars à 14 heures dans l'une des 100 villes organisatrices dont plusieurs en Belgique.

La finale nationale belge est prévue le 11 mai 1996. Elle est dotée de nombreuses récompenses: calculatrices Hewlett-Packard, chèques CGER, jeux de réflexion Abalone, Pyramis, Quarto ... et de nombreux autres prix.

L'apothéose : la finale internationale à Paris début septembre où 3.000.000 FB de prix attendent les lauréats. Mais nous savons que là n'est pas la raison première de votre participation.

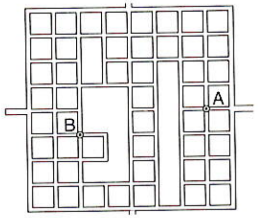
A VOS MATHS. !

QUARTS DE FINALE INDIVIDUELS PAR CORRESPONDANCE

Vous avez jusqu'au 31 janvier 1996 pour résoudre les problèmes de votre catégorie et retourner le bulletin réponse.

Catégorie	Public concerné	Problème à résoudre:
CM	Elèvres de 4e et 5e primaire	N° 1 à N° 6
C1	Elèves de 6e et 1re secondaire	N° 3 à N° 9
C2	Elèves de 2e et 3e secondaire	N° 5 à N° 11
L1	Elèves de 4e, 5e et 6e secondaire	N° 5 à N° 14
GP	Grand public: tous adultes sauf HC et L2	N° 5 à N° 14
L2	Premier cycle universitaire	N° 5 à N° 16
HC	Haute compétition	N °5 à N° 16

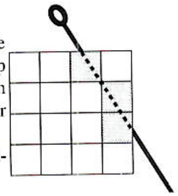
1 - PÉRIPLE À CARRÉVILLE



Carréville est une bourgade construite selon le plan ci-contre : chaque petit pâté de maisons est un carré de 100 mètres de côté, et la ville toute entière est un carré de 800 mètres de côté (on ne tient pas compte de la largeur des rues).
Etienne Karr doit se rendre à pied du Rond-point des Aviateurs, indiqué sur le plan par la lettre A, au Rond-point des Bateliers, indiqué par la lettre B.
Quelle distance minimum devra parcourir Karr E. pour se rendre de A à B ?
On donnera la réponse en hectomètres.

2 - LA BELLE BROCHETTE

Francis adore faire des brochettes sur son barbecue. Aujourd'hui, il vient de découper un beau carré de viande en seize petits carrés. Il peut, d'un seul coup de brochette, traverser plusieurs carrés de viande. La figure montre une façon d'embrocher trois carrés (pour qu'un carré soit traversé, la brochette doit passer à l'intérieur de ce carré).
Sans déplacer aucun des seize morceaux de viande, combien Francis peut-il en embrocher au maximum, d'un seul coup de brochette ?



3 - LE PETIT CAHIER

Une feuille de papier est partagée en huit rectangles A, B, C, D, E, F, G et H et disposée comme sur la figure 1, le rectangle H étant agrafé sur la table. Sans dégrafer le rectangle H, on plie successivement 3 fois la feuille comme l'indiquent les figures 1, 2, et 3. On obtient alors le petit cahier de 16 pages de la figure 4 (en coupant éventuellement certains plis).
Si on numérote les pages dans l'ordre de 1 à 16, De quel rectangle de départ provient la page numéro 9 ?

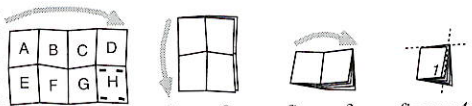
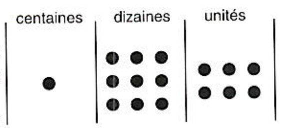


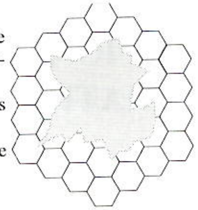
figure 1 *figure 2* *figure 3* *figure 4*

4 - AU COURS PREPARATOIRE

L'institutrice vient de montrer, avec des objets placés dans des colonnes représentant les centaines, les dizaines et les unités, que l'on peut figurer le nombre 196 avec seize objets (voir dessin).
Mathias intervient : "Si on n'est pas obligé de mettre moins de dix objets par colonne, on peut aussi représenter 196, mais avec beaucoup plus d'objets !
_ C'est vrai, c'est tout l'intérêt de notre système, mais Mathias, avec ta méthode, peut-on représenter 196 avec exactement 70 objets ?"
Un moment plus tard, Mathias et Mathilde ont trouvé chacun une représentation différente de 196 avec 70 objets.
Donnez une de ces deux représentations.



5 - CATASTROPHE CHEZ MAÏA



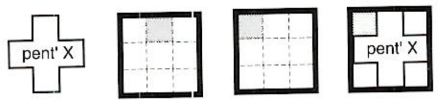
Une terrible averse de grêlons a dévasté la ruche ! Maïa est chargée de reconstruire les alvéoles abîmées dans une région de la ruche (voir dessin ci-contre).
Devant l'énorme trou, Maïa cherche un moyen de savoir combien de parois ont été détruites ou abîmées ...
Dites-nous combien de parois devront être réparées ou reconstruites (une paroi est un côté d'un hexagone).

6 - L'ALPHABET BORGNE

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

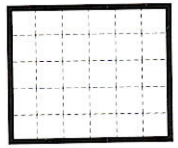
L'imprimante de la F.F.J.M. a quelques problèmes. Toutes les lettres de l'alphabet présentant un "oeil" comme le a, le b, le d, le e, etc...., voient celui-ci systématiquement rempli d'encre. Une recharge d'encre est prévue pour imprimer un million de caractères précisément. Tous les caractères normalement encrés nécessitent la même quantité d'encre, mais les caractères abîmés en demandent exactement trois fois plus.
Une recharge neuve a été mise dans l'imprimante pour imprimer : *quarts de finale du dixième championnat international des jeux mathématiques et logiques*, jusqu'à épuisement de l'encre contenue dans la recharge.
Quel sera le dernier caractère imprimé ?

7 - X' INHABITABLE



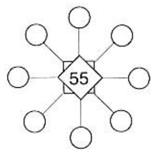
maison 1 maison 2

Le pentamino X (pent'X pour les intimes) ne peut habiter la maison 1 ;
par contre, il peut habiter la maison 2, comme le montre la figure ci-dessus.
En effet, on doit pouvoir poser pent'X dans sa maison, de façon à ce que ses contours coïncident avec les contours de petits carrés de la maison, sans qu'il recouvre un petit carré en grisé.
Combien faut-il griser de petits carrés de la maison 3, au minimum, pour qu'elle devienne inhabitable pour pent'X ?



maison 3

8 - AUTOUR DE L'OCTOGONE



Le grand-père de Mathias lui montre l'octogone de la figure ci-contre. Il lui demande de remplir les huit cercles disposés autour du nombre 55, par des nombres tous différents, inférieurs à 100, de telle sorte que les produits de trois nombres alignés soient tous égaux à 1980.
Quelle est la somme des huit nombres entourant l'octogone ?

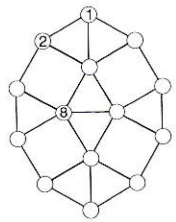
9 - QUOTIENT = RUESIVID

En divisant 100 000 par un nombre à trois chiffres tous différents, j'obtiens un quotient entier et un reste.
Le quotient est égal au diviseur renversé (ses chiffres sont écrits dans l'ordre inverse).
Quel est le diviseur ?

10 - LE DIAMANT

Les cercles de ce diamant doivent contenir les nombres de 1 à 14, de telle sorte que la différence entre deux nombres reliés par un segment, prise en valeur absolue,
- soit toujours un nombre inférieur ou égal à 5
- ne soit jamais égale à 3.

Complétez le diamant

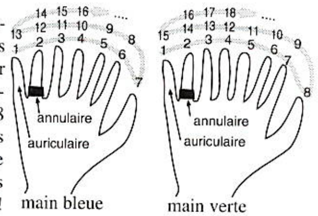


11 - ENCYCLONUMÉRISTE
Denis est fou de son encyclopédie. Aujourd'hui, il vient d'ouvrir celle-ci au hasard. Les numéros des 2 pages qu'il a sous les yeux sont deux nombres à 3 chiffres, celui de la page de gauche étant, bien sûr, un nombre pair. L'écriture de ces deux nombres à 3 chiffres n'a nécessité que l'utilisation de 3 chiffres différents ; ces 3 chiffres sont consécutifs, et l'un a été utilisé 3 fois, un autre 2 fois, et le troisième une fois seulement. La somme des 6 chiffres qui composent les deux numéros de ces pages est égale à 25.
Quel est le numéro de la page de gauche ?

12 - LA SOMME FATIDIQUE
On donne la somme :
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots + 94 + 95 + 96$ des nombres entiers de 1 à 96. Si, dans cette somme, on supprime des signes d'addition (en remplaçant, par exemple, 2 + 3 par 23, ou 2 + 3 + 4 par 234), on obtient une nouvelle somme.
Quel est le nombre minimum de signes d'addition qu'il faut supprimer pour obtenir un total de 9696 ?

13 - TOUT À 10 F AU B.H.B
Au Bazar du Hasard Bizarre (le B.H.B.), tous les prix sont des nombres entiers de francs.
Aujourd'hui a lieu une opération promotionnelle spéciale, l'opération "tout à 10 francs". Pour les articles habituellement vendus plus de 10 F, c'est intéressant ; mais pour ceux qui, en temps normal, sont étiquetés à moins de 10 F, cela l'est moins ! Pour pallier cet inconvénient, Monsieur Hubert Luberlu, le directeur, a édicté la règle suivante : tout client qui achèterait plusieurs articles du même type, vendus habituellement moins de 10 F, se les verrait facturer 10 F pièce, mais avec une remise qui équivaut au prix habituel d'un exemplaire de l'article en question. Par exemple, si vous achetiez 2 salières vendues 7 F pièce en temps normal, aujourd'hui vous paieriez $2 \times 10 - 7 = 13$ F, au lieu de $2 \times 7 = 14$ F. Par contre, si vous achetiez 5 moules à gaufres vendus 6 F en temps normal, aujourd'hui, vous paieriez $5 \times 10 - 6 = 44$ F au lieu de 30 F.
Je viens d'acheter plusieurs fourchettes à escargots, et après un rapide calcul, j'ai constaté que j'avais payé exactement le même prix que si j'avais fait cet achat un autre jour.
Quel est le prix habituel d'une fourchette à escargot ?

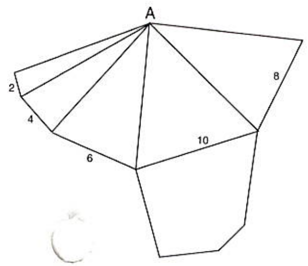
14 - COÏNCIDENCES ANNULAIRES
Dans une lointaine région de l'espace, sur une planète inexplorée, se produit une rencontre du quatrième type : les petits hommes bleus rencontrent les petits hommes verts. A leur grand étonnement, ils constatent que leurs mains ne comportent pas le même nombre de doigts : 7 pour les bleus, et 8 pour les verts. Mais les savants des deux peuples ne sont pas longs à remarquer que, si l'on compte sur les doigts comme indiqué sur la figure, certains nombres se comptent à la fois sur l'annulaire des mains bleues et sur celui des mains vertes !



Combien y a-t-il de telles coïncidences entre 1896 et 1996 ? Donnez-en deux.

15- DÉFLATION GALOPANTE
Cheapland est un petit pays peu connu où le tourisme commence à se développer. La monnaie locale, le "Foiryen" (Fr) n'est pas à proprement parler une devise forte, mais la vie n'est pas chère à Cheapland, bien que pour 3 Foiryens, on n'ait pas grand-chose...
Non seulement le coût de la vie est bon marché dans ce petit paradis, mais de plus, il baisse constamment en vertu d'une déflation galopante. Le souvenir local, par exemple, coûte beaucoup moins cher cette année que l'année dernière, puisque, bien que n'étant pas donné, il vaut maintenant moins de 100 Foiryens. Le nombre entier qui exprime son nouveau prix, exprimé en Foiryens, est exactement égal au taux de la baisse, exprimé en "pour cent", dont il a bénéficié depuis un an.
Quel est le prix actuel d'un souvenir de Cheapland ?

16 - LA PYRAMIDE DE 1 À 16
La pyramide développée ci-contre a 6 faces dont les aires sont en progression arithmétique : S, 2S, 3S, 4S, 5S pour les faces triangulaires, et 6S pour la base pentagonale.
Quelle est l'aire du plus petit triangle ?
on donnera la réponse arrondie au dixième.



BULLETIN REPONSE

à retourner **au plus tard le 31/1/96** à FFJM – BP157, 7700 MOUSCRON

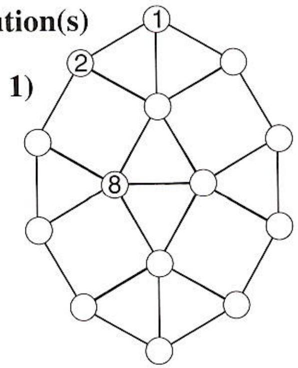
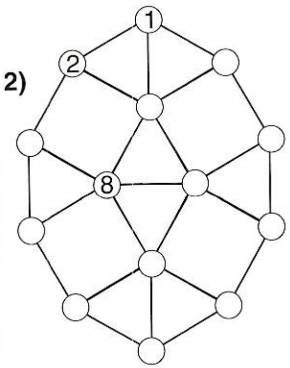
Heure de remise └┴┘h└┴┘
Report du total └┴┴┴┘

Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
.... Tel :...
CATEGORIE (impératif) **CM**☐ **C1**☐ **C2**☐ **L1**☐ **GP**☐ **L2**☐ **HC**☐
☐ Adhérent FFJM en 1995 : n° FFJM .... Clé : ....
☐ J'adhère pour 1996 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C2), 450 F (L1), 500 F (L2), 650 F (GP et HC)
au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP157 – 7700 Mouscron

N° du Pb	Votre solution	Points (1-0)	Coef. (0 à 6)
	catégorie : CM		
1	distance minimum pour se rendre de A à B : └┴┘ hm		
2	nombre de morceaux : └┘		
	catégories : CM C1		
3	rectangle de départ : └┘		
4	centaines : └┴┘ dizaines : └┴┘ unités : └┴┘		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	nombre de parois : └┴┘		
6	dernier caractère imprimé : └┘		
	TOTAL		

BULLETIN REPONSE

(toutes catégories *sauf* CM - **Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !**)

N° du Pb	Nbre de solutions	Votre ou vos solutions		Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
	catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC				
7	**1 solution**	nombre de carrés à noircir :			
8	**... solution(s)**	**1)**	**2)**		
9	**... solution(s)**	**1)**	**2)**		
	catégories : C2 L1 GP L2 HC				
10	**... solution(s)**	**1)** 	**2)** 		
11	**... solution(s)**	**1)**	**2)**		
	catégories : L1 GP L2 HC				
12	**1 solution**	nombre de signes :			
13	**.... solution(s)**	1)	2)		
14	**.... solution(s)**	1)	2)		
	catégories : L2 HC				
15	**.... solution(s)**	1)	2)		
16	**1 solution**	aire : ,			
			TOTAL		

9^{e} championnat international des jeux mathématiques et logiques

Résultats des candidats belges à la finale internationale des 1 et 2 septembre 1995 au Sénat (Palais du Luxembourg) à Paris

Catégorie CM: (4^{e} et 5^{e} primaire): 43 participants
Valérie SOYEZ 2^{e} , Cédric DECLERCQ 21^{e} , Cédric TROESSAERT 34^{e}

Catégorie C1: (6^{e} primaire et 2^{e} secondaire): 49 participants
Marie WILLEMET 38^{e}

Catégorie L1: (4^{e}, 5^{e} et 6^{e} secondaire): 52 participants
Patrick BROWAEYS 2^{e}, Sébastien LEROY 3^{e}, Jacques THEYS 10^{e}, Grégory SOYEZ 12^{e}, Roland BRICMAAN 20^{e}

Catégorie L2: (1er cycle universitaire): 33 participants
Xavier HAINAUT 3^{e}, Charles-Henry MASSA, 5^{e}, Alice DEVILLERS 10^{e}, Laurent SUINEN 12^{e}, Quentin LOUVEAUX 18^{e}, Bernaed MOHYMONT 22^{e}, Arnaud VAN DER STRAETEN 31^{e}

Catégorie GP: (Grand Public): 38 participants
Sébastien LOUVEAUX 11^{e}, Pierre MASAI 19e, Yves VERSCHEURE 23^{e}

Catégorie HC: (Grand Public): 38 participants
Philippe NIEDERKORN 7^{e}, Marc PAULY 10^{e}, François GLINEUR 15^{e}, Joël FAGNOUL 18^{e}, Philippe DUMORTIER 24^{e}, Pierre BILLOT 29^{e}

CONCOURS PARALLÈLE

Catégorie GP: (Grand Public): 12 participants
Gilles-François PIRET 1er, Pierre DUMRTIER 4^{e}, Daniel WALLE 8^{e}

Catégorie HC: (Grand Public): 19 participants
Claude DESSET 1er, Eric LAERMANS 3^{e}, Michel HAUTECOEUR 4^{e}

Acoustique : sons et décibels

Patrick Croquet, *Athénée Royal de Binche*

L'acoustique est la partie de la physique qui étudie les sons.
Qu'est-ce-qu'un **son** ?
Un son peut se définir de 2 manières :

- une vibration d'un milieu matériel qui se propage de proche en proche ;
- une sensation que l'on perçoit grâce à l'organe d'audition : l'oreille.

Ces deux définitions ne sont cependant pas équivalentes ; en effet, toutes les vibrations ne sont pas audibles par l'oreille humaine : certaines sont trop rapides (ultrasons), d'autres sont trop lentes (infrasons) pour être perçues.
Dans un fluide (un liquide ou un gaz), en l'absence d'obstacles, le son se propage en ligne droite et les vibrations sonores se font suivant la direction de propagation ; on dit que les vibrations sont **longitudinales**.
La vibration sonore consiste en un déplacement des particules du milieu de propagation. Ces particules possèdent de l'**énergie cinétique** ou énergie due au mouvement ($E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2$). Il faut distinguer la vitesse des particules du milieu de propagation et la vitesse de propagation de l'onde sonore. Cette dernière sera appelée **célérité** du son.
Les particules en mouvement rencontrant un obstacle exercent une pression sur cet obstacle et de ce fait possèdent de l'**énergie potentielle.**
Résumons : les particules mises en mouvement par l'excitation sonore possèdent de l'énergie cinétique liée à la vitesse et de l'énergie potentielle due à la pression ; la somme de ces deux énergies est appelée **énergie acoustique**. L'énergie est en fait un travail en réserve ; son unité est le **joule.**
La **puissance acoustique** P est le quotient de l'énergie acoustique transmise dans un intervalle de temps donné par la durée de cet intervalle. La puissance se mesure en **watts** :

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ joule} / 1 \text{ seconde}$$

Le décibel (1) (1 dB) est une unité relative d'intensité sonore ; il permet la comparaison de niveau sonore d'un son avec un son de référence.
On s'accorde avec l'*American Standard Association* à prendre le son de référence (niveau 0 dB) comme ayant une puissance acoustique de 10^{-12} watts ($P_0 = 10^{-12} = 0,000000000001$ W), l'autre ayant une puissance acoustique de P_1.
Au lieu de considérer le rapport $\frac{P_1}{P_0}$ qui, pour des sons audibles, pourrait varier de 1 à 10^{12} environ, on ne considère que le **logarithme décimal** de ce rapport.
Le logarithme est une notion très simple qui a déjà été abordée dans *Math-Jeunes* (n ° 68, par exemple). Ainsi, si $a^x = b$, alors on parle du **logarithme en base** a **de** b, noté $\log_a b$. On a :

$$a^x = b \iff \log_a b = x$$

Bien sûr, la définition ci-dessus n'est valable que moyennant certaines conditions. Nous les **ignorerons** purement et simplement dans cet article, parce qu'elles ne jouent aucun rôle dans l'application physique que nous abordons.
Donnons quelques exemples de ce concept nouveau :

$$\log_2 8 = 3 \text{ car } 2^3 = 8$$
$$\log_3 81 = 4 \text{ car } 3^4 = 81$$
$$\log_{10} 100\,000 = 5 \text{ car } 10^5 = 100\,000$$

Dès lors, $L_1 = \log_{10} \frac{P_1}{P_0}$ ne varie que de 0 à 12 et mesure le niveau sonore du son 1 par

(1) du nom de Alexander Graham BELL (1847-1922), inventeur et physicien américain d'origine anglaise. Il enseigna le langage par signes aux sourds-muets. En 1873, il devint professeur de physiologie vocale à l'université de Boston. Il construisit, en 1874, une oreille artificielle capable d'enregistrer les sons. Ses recherches pour faire entendre les sourds débouchèrent sur l'invention du téléphone (1876).

Math-Jeunes n° 71, 14–15, 1995

rapport au son de référence. Ce niveau est alors exprimé en **bels**.
Par exemple, lors d'une conversation normale, la puissance acoustique est d'environ 10^{-7} W.
Le niveau sonore d'une conversation normale vaut

$$\log_{10} \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = \log_{10} 10^{-7+12} = \log_{10} 10^5 = 5 \text{ bels}$$

On préfère exprimer le niveau sonore en **décibels** (dixième partie du bel) ; le niveau sonore d'une conversation normale est ainsi de 50 décibels (50 dB).
Donc la formule qui donne le niveau sonore en décibels est

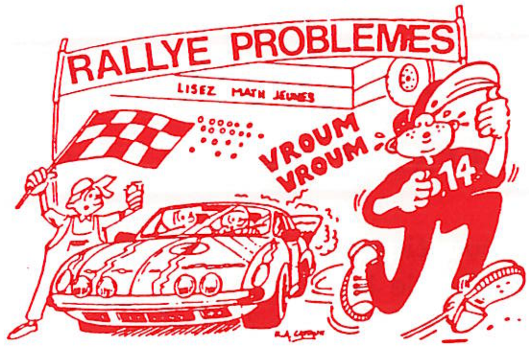
$$L_1 = 10 \times \log_{10} \frac{P_1}{P_0}$$

Un petit calcul que nous te recommandons d'effectuer te permettra de constater que, si la puissance d'un son est multipliée par 10, son niveau sonore n'augmente seulement que de 10 dB.
Voici quelques niveaux sonores :

0 dB	limite d'audibilité
20 dB	voix chuchotée
50 à 60 dB	conversation normale
80 dB	rue à gros trafic
130 à 140 dB	bruit d'un réacteur d'avion

Références :

Kane Sternheim, *Physique*, InterEditions
Appaix, *La prothèse auditive*
Stevens, *Le son et l'audition*
Encyclopédies *Larousse* et *Universalis*



C. Festraets

Le rallye problèmes 1995 – 1996 comportera trois étapes publiées dans les numéros 71, 72 et 73 de *Math-Jeunes*. Comme pour les Olympiades de 1996 (nouvelle formule), il y aura dorénavant trois catégories de questions : mini, midi, maxi. Les problèmes « mini » sont plus spécialement destinés aux élèves de première et de deuxième, les problèmes « midi » aux élèves de troisième et de quatrième et les problèmes « maxi », aux élèves de cinquième et de sixième années. Cependant, tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer la solution de n'importe quel problème ; certains des problèmes proposés ne nécessitent aucune connaissance mathématique pareticulière, il suffit d'avoir l'esprit logique et de trouver le bon raisonnement (évidemment, ce n'est pas toujours facile !) ; ces problèmes sont signalés par un astérisque.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, vous indiquerez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 8 décembre à C. FESTRAETS, rue J.-B. Vandercammen 36 à 1160 Bruxelles.

mini 1 En Écosse, un fermier élève des moutons. Il a trois béliers et autant de brebis et d'agneaux réunis que de nombres de trois chiffres qui ne sont divisibles ni par 7 ni par 11. Les brebis constituent le tiers du troupeau complet. Combien ce fermier possède-t-il d'agneaux ?

mini 2∗ Dans cette équipe de football, jouent trois garçons : André, Bernard et Claude. Leurs noms de famille sont Dupont, Durand et Duval. On sait qu'André ne s'appelle pas Duval, que le père de Bernard est ingénieur, que Bernard est en première année, que le garçon dont le nom de famille est Duval est en deuxième année et que le père du garçon dont le nom de famille est Dupont est instituteur. Pouvez-vous rendre à chacun son nom de famille ?

midi 1∗ Deux frères vendent un lot de moutons. Chacun des moutons est vendu au même prix : autant de dollars qu'il y a de moutons dans tout le lot. La vente terminée, les deux frères se partagent l'argent. L'aîné prend dix dollars, puis le cadet prend dix dollars, puis l'aîné reprend dix dollars et ainsi de suite. À la fin, lorsque c'est le tour du cadet de prendre sa part, il reste moins de dix dollars et l'aîné, pour compenser, lui donne son canif. Le partage est alors équitable. Combien vaut le canif ?

midi 2 Pierre a un devoir de mathématiques. Il doit montrer que quatre-vingt neuf et nonante sont des sommes de deux carrés parfaits et qu'il en est de même de leur produit quatre-vingt neuf fois nonante qui vaut bien sûr huit mille dix. À vrai dire, Pierre ne s'en tire pas trop bien.

1) Pourriez-vous l'aider ?

2) En est-il toujours ainsi : si a et b sont des nombres naturels tous deux sommes de deux carrés, leur produit $a \times b$ est-il aussi une somme de deux carrés ?

maxi 1∗ On considère la suite de nombres entiers de 1 jusqu'à un 1 000 000 000 inclus.

Chaque nombre est remplacé par la somme de ses chiffres. On obtient de la sorte une suite comportant un milliard de nouveaux nombres qui sont inférieurs ou égaux aux nombres de départ. Dans cette suite, chaque nombre est à nouveau remplacé par la somme de ses chiffres. Et on continue de cette manière jusqu'au moment où la suite ne comporte plus que des nombres d'un seul chiffre.

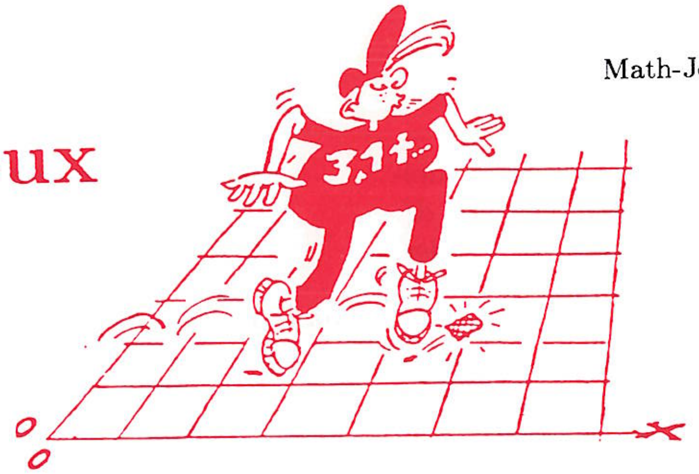
Dans la suite finale, le nombre de « 1 » est-il ou non plus grand que le nombre de « 2 » ?

maxi 2 Si chacun des côtés d'un triangle ABC a une longueur supérieure ou égale à $\sqrt{3}$ et inférieure ou égale à 2, alors démontrer que

1) les trois angles du triangle sont aigus ;

2) les longueurs des hauteurs ne sont pas plus petites que $\sqrt{2}$.

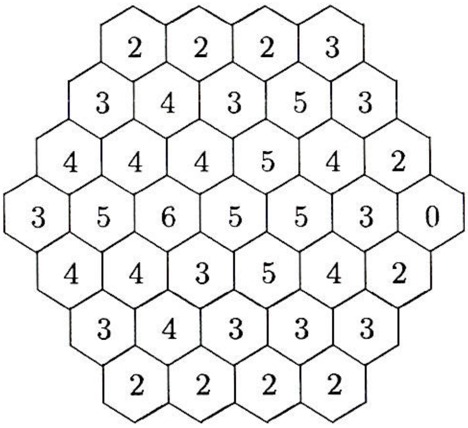
Jeux

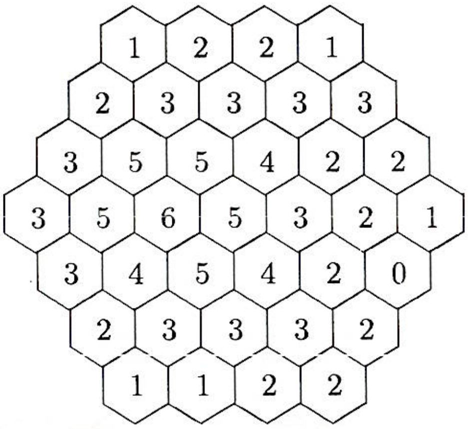


A. Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.





Additions cachées

Si tu remplaces les lettres des additions ci-dessous par des chiffres, sachant qu'à des lettres différentes sont associés des chiffres différents, peux-tu trouver une solution ?

Let's speak English

$$\begin{array}{r} \text{T H R E E} \\ +\ \text{F O U R} \\ \hline \text{S E V E N} \end{array}$$

Sprechen wir Deutsch

$$\begin{array}{r} \text{Z W E I} \\ +\ \text{D R E I} \\ \hline \text{F Ü N F} \end{array}$$

Produit croisé

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres–définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4	T		T			
5		T				
6						

Horizontalement

1. 324 000
2. 1 134 000
3. 5 266 800
4. 32 400
5. 28 000
6. 95 — 735

Verticalement

1. 3 249 000
2. 1 260 000
3. 50 000
4. 2 095 632
5. 540 — 84
6. 6300

Orthopôle d'une droite par rapport à un triangle

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

Comme promis dans le n° 69 de *Math-Jeunes* et dans le numéro spécial 95, nous poursuivons la présentation de quelques propriétés remarquables du triangle en introduisant une nouvelle notion : celle de l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle. En raison d'une propriété que nous rencontrerons, nous commencerons par rappeler ce qu'est le cercle d'EULER d'un triangle.

1. Introduction Cercle d'EULER [1]

> Dans tout triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant les sommets à l'orthocentre (« points eulériens ») sont *neuf* points cocycliques.

Ces *neuf* points sont sur le cercle d'EULER dont le centre ω est le milieu du segment $[OH]$ (joignant le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre) et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit (voir fig. 1).

Ajoutons encore que la droite OH porte le nom de « droite d'EULER », que le centre de gravité G du triangle est situé sur cette droite et que l'on a :

$$|HG| = 2 \cdot |GO|$$

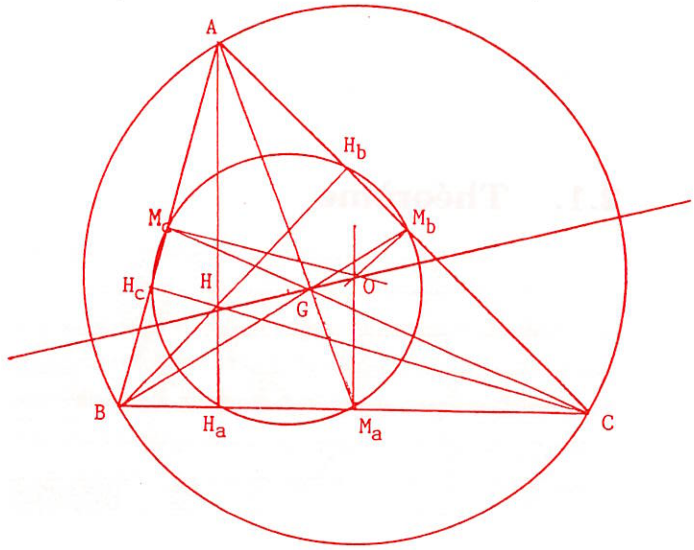


Fig. 1

L'ensemble de ces propriétés se démontre aisément en remarquant que la figure présente deux homothéties :

- l'une, de rapport négatif, de centre G, qui transforme le triangle ABC en le triangle $M_aM_bM_c$ (appelé « triangle complémentaire » de ABC),
- l'autre, de rapport positif, de centre H qui transforme le cercle circonscrit au triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle complémentaire (cercle d'EULER).

On retrouve ici toute la puissance des transformations et, plus particulièrement, de l'homothétie.

Ces quelques notes — volontairement abrégées — suffisent pour la compréhension de l'article. Nous nous promettons de revenir

[1] Leonhard EULER, mathématicien suisse (1707-1783). Élève de Jean BERNOULLI, autre mathématicien suisse célèbre, il rejoignit les fils (Daniel et Nicolas) de ce dernier à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg où il enseigna la physique et les mathématiques. Il fut également professeur à l'Académie de Berlin.
Selon Trajan LALESCO (Géométrie du Triangle, *Annales Roumaines de Mathématiques*), c'est EULER qui, le premier, et d'une manière intuitive, a groupé les propriétés des points remarquables classiques d'un triangle (orthocentre, centre de gravité, centre du cercle circonscrit, centres des cercles inscrit et exinscrits) autour d'**un** cercle : celui qui nous intéresse ici et auquel les géomètres ont attaché son nom. Il a ainsi donné à la géométrie du triangle le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature a été expliquée et exploitée dans les recherches ultérieures.

plus en détail sur ces notions dans un article ultérieur.

2. Orthopôle d'une droite

Nous en venons au sujet même de cet article : l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle. Cette notion a été introduite par J. NEUBERG (Professeur à l'Université de Liège, Fondateur de la revue *Mathesis*) dans une question proposée dans *Nouvelle Correspondance Mathématique*, Tome II, 1875, p. 189. Cette question a fait l'objet, par la suite, de nombreuses recherches donnant lieu à d'intéressants développements.

2.1. Théorème

> On projette orthogonalement les sommets A, B, C d'un triangle en A', B', C'' sur une droite quelconque d du plan ABC. On mène ensuite les doites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB du triangle. Ces droites concourent en un point Φ (prononcer *phi*). (2)

Le point Φ est appelé *orthopôle* de la droite d. Cette dernière est dite *droite orthopolaire* de Φ.
De très nombreuses démonstrations de ce théorème ont été proposées (3). Celle qui suit (due à Trajan LALESCO) repose sur les propriétés des « triangles S » (voir *Math-Jeunes* n° 69 ou numéro spécial 1995) ; elle a le double mérite de ne pas être artificielle et d'être quasi immédiate.

(2) On notera que cette propriété est un cas particulier des « triangles orthologiques » :
Si les perpendiculaires menées par les sommets A, B, C d'un triangle aux côtés $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ d'un second triangle concourent en un même point M, les perpendiculaires menées par A', B', C' aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC sont également concourantes en un point M'. Les points M et M' sont appelés les orthopôles *des deux triangles, dits* triangles orthologiques, *ABC et $A'B'C'$ (voir par exemple Dalle A. et De Waele C.,* Géométrie plane, *Exercice 288).*

(3) Par exemple, celle donnée par A. DALLE dans *2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie* (exercice n° 573) s'appuie essentiellement sur des applications répétées du théorème de PYTHAGORE.
Notons aussi qu'une démonstration analytique est très facile si l'on prend la droite d pour axe des x et une perpendiculaire comme axe des y.

Démonstration

Désignons par B_1 et C_1 les points d'intersection de la droite d avec le cercle circonscrit au triangle ABC et considérons le segment $[B_1C_1]$ comme un côté d'un « triangle S ». On peut toujours construire le troisième sommet A_1 de ce « triangle S » (cette construction est rappelée — en pointillés — sur la figure 2).

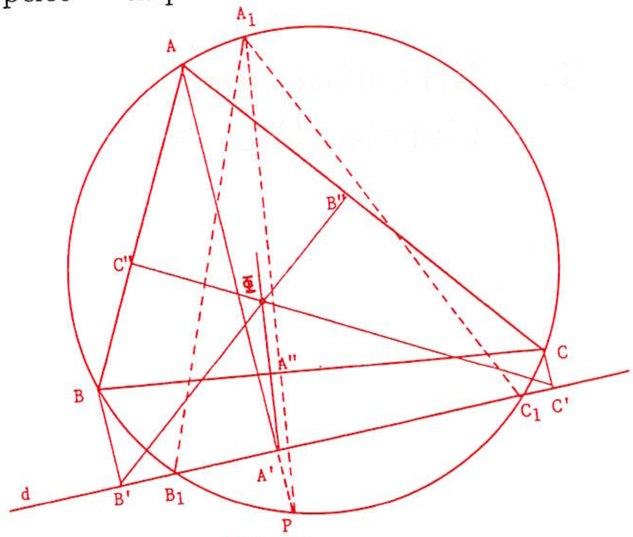


Fig. 2

Remarquant que, en raison de la propriété fondamentale des triangles S, la relation entre les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ est réciproque, on conclut que la droite $A'A''$ est la droite de SIMSON de A par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ (définition des triangles S). De même, les droites $B'B''$, $C'C''$ sont respectivement les droites de SIMSON des points B_1 et C_1 (propriété 1 des triangles S) ; or ces droites de SIMSON sont concourantes (propriété 2 des triangles S) ; donc ...
Il était difficile de trouver une démonstration plus simple et plus élégante de l'existence de l'orthopôle. Cette démonstration met en lumière, de façon éclatante, les liens étroits entre des propriétés apparemment étrangères l'une à l'autre. On notera, en outre, qu'en

présentant l'orthopôle de cette manière, ce point apparaît tout naturellement comme une conséquence directe de l'existence des triangles S et qu'il est loin d'être le résultat d'une construction artificielle.

2.2. Propriété

L'orthopôle d'un diamètre TT' du cercle circonscrit à un triangle se trouve sur le cercle d'EULER de ce triangle.

Nous avons retenu (aujourd'hui), parmi les nombreuses propriétés de l'orthopôle, celle dont l'énoncé précède. Cette propriété illustre parfaitement notre propos général : vous montrer à l'aide d'exemples concrets les liens étroits entre diverses notions touchant au triangle. Dans le cas présent seront réunis dans une seule propriété le cercle d'EULER, la droite de SIMSON et l'orthopôle (pas mal, non ?).

(a) Revenant à la droite de SIMSON, on a la propriété suivante :

L'angle formé par la droite de SIMSON d'un point et un côté du triangle est le complément du demi-angle au centre dont les côtés passent par le point et le sommet du triangle opposé au côté considéré.

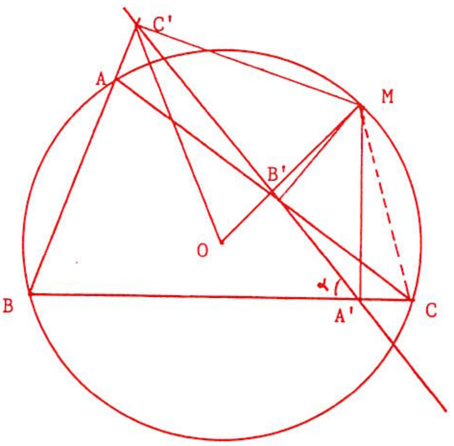


Fig. 3

En effet, dans le quadrilatère inscriptible $MB'A'C$, on a :

$$\widehat{MA'C'} = \widehat{MCA}$$

L'angle α de la droite de SIMSON de M avec le côté BC est donc le complément de l'angle $\widehat{MCA}$, lequel a même mesure que l'arc $\overset{\frown}{MA}$, etc.

(b) Corollaire

L'angle formé par les droites de SIMSON de deux points (pris sur le cercle circonscrit à un triangle) vaut la moitié de l'angle au centre déterminé par les rayons de ces points.

Nous vous engageons à démontrer ce corollaire (appliquer deux fois la propriété (a) ci-dessus).

(c) Ce corollaire prend tout son intérêt en considérant le cas particulier où les deux points sont diamétralement opposés. Dans ce cas, en effet, les deux droites de SIMSON sont perpendiculaires entre elles et nous aurons l'énoncé **complet** d'une nouvelle propriété :

Les droites de SIMSON de deux points M et N diamétralement opposés sur le cercle circonscrit sont perpendiculaires et se coupent (en k) sur le cercle d'EULER.

dont il s'agit de démontrer la seconde partie (figure 4).

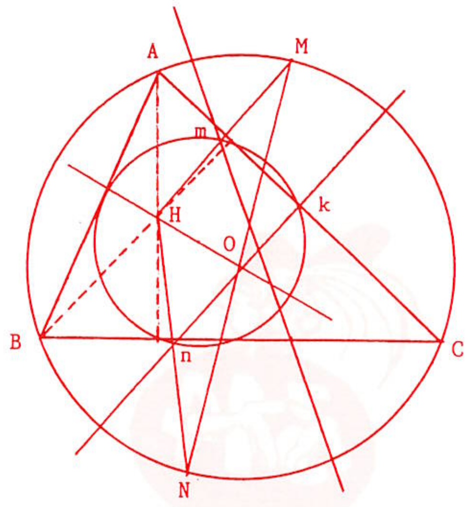


Fig. 4

Désignons par m et n les milieux des segments $[MH]$ et $[NH]$.

Ces points appartiennent aux droites de SIMSON de M et N (voir *Math-Jeunes* n°69 ou numéro spécial 95, propriété 2 des droites de SIMSON). Ces mêmes points appartiennent

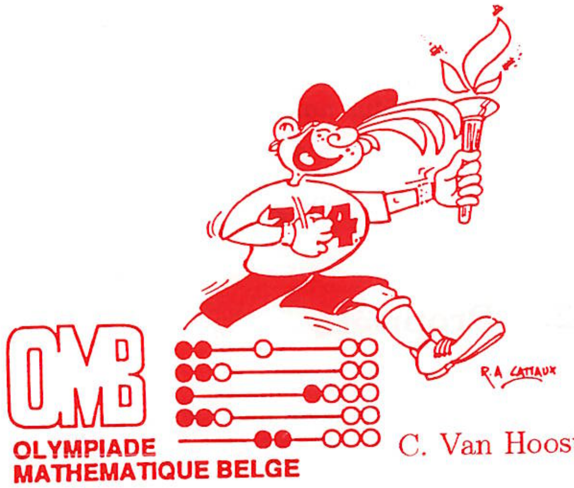
Math-Jeunes n° 71, 20–23, 1995

aussi au cercle d'EULER dont ils sont les extrémités d'un diamètre en raison de l'homothétie du cercle circonscrit et du cercle d'EULER (voir introduction).
L'angle $\widehat{mkn}$ étant droit, le point k appartient au cercle d'EULER.
(d) Il nous reste enfin à démontrer la propriété annoncée, à savoir que l'orthocentre d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle est sur le cercle d'EULER de ce dernier. Les préliminaires qui précèdent rendent cette démonstration immédiate.
La démonstration de l'existence de l'orthopôle Φ d'une droite d a montré que ce dernier était à l'intersection des droites de SIMSON des intersections de d avec le cercle circonscrit au triangle. Lorsque d est un diamètre, ces intersections sont des points diamétralement opposés et, en raison du (c) ci-dessus, leurs droites de SIMSON sont perpendiculaires et se coupent sur le cercle d'EULER.

*

* *

Prochainement, nous reviendrons en détail sur la droite d'EULER. Certains développements que nous donnerons vous permettront, de manière assez facile, de mener vos **propres** recherches et d'ainsi « découvrir » de **nouvelles** relations et propriétés ! En attendant, vos remarques et/ou questions sont bienvenues.



C. Van Hooste

Du nouveau pour l'OMB

Pour sa 21$^{\text{ème}}$ édition, l'Olympiade Mathématique Belge innove.
Jusqu'ici, elle présentait deux concours simultanés : la « MINI-Olympiade » et la « MAXI-Olympiade ». Dorénavant, il y en aura un troisième : la « MIDI-Olympiade ».
Précisons.
Comme chacun le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Cette épreuve sera divisée à partir de cette année en trois concours au lieu de deux. Ceux-ci se dérouleront en parallèle (comme par le passé). La « MINI-Olympiade » est réservée aux élèves de première et de deuxième années ; la « MIDI-Olympiade » accueillera les élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « MAXI-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.
Rappelons le principe commun à tous ces concours.
Pour chacun d'entre-eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.
Voici le calendrier de la 21ème Olympiade Mathématique Belge.

Mercredi 17 janvier 1996 : éliminatoire
Mercredi 6 mars 1996 : demi-finale
Mercredi 24 avril 1996 : finale (à Namur)
Samedi 11 mai 1996 : proclamation

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques-uns des problèmes posés l'an dernier. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire. Sache aussi que tu peux acquérir pour une somme relativement modique (235 francs), le tome 3 des OMB qui reprend toutes les questions posées de 1988 à 1993.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte.

Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demandent seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : cinq points pour une bonne réponse, zéro pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois deux points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Quelques questions de l'OMB 94-95

Voici les questions promises.
Essaie de les résoudre sans consulter les solutions proposées.

Mini-Éliminatoire

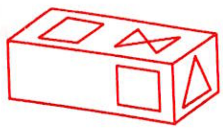
Question 7 Avec des « si »
Si je gagnais 50 francs, j'aurais le double de ce que je possèderais si je perdais 50 francs. Quel est mon avoir, en francs ?
(Sans réponse préformulée)

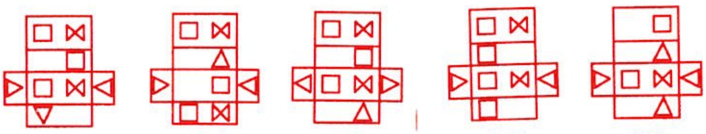
Solution
Un simple raisonnement arithmétique permet de résoudre cette question.
Il y a une différence de 100 francs entre ce que j'aurais si je gagnais 50 francs et ce que j'aurais si je perdais 50 francs. Or, mon avoir en cas de gain serait double de celui que j'aurais en cas de perte. J'aurais donc dans l'un ou l'autre cas, 200 francs ou 100 francs. Et mon avoir actuel est à mi-chemin entre ces deux sommes, soit 150 francs.
Mais certains préfèrent le confort d'une équation algébrique.
Si x est mon avoir actuel (en francs), alors la question engendre l'équation suivante :
$$x + 50 = 2(x - 50)$$
dont la solution est 150.

Réponse : 150.

Question 8 Ne vous laissez pas mettre en boîte

Un seul des développements est celui de la boîte en carton ci-contre. Lequel ?





(A) (B) (C) (D) (E)

Solution

Le triangle de la face droite de la boîte pointe sur un sablier. Le développement (B) ne possède pas cette caractéristique. Il doit donc être éliminé.

Un carré et un sablier doivent se trouver côte à côte sur des faces adjacentes. Les développements (D) et (E) n'ont pas cette particularité. Ils doivent donc être éliminés.

Sur le développement (A), un triangle pointe vers un sablier et celui-ci est voisin d'un carré situé sur une face adjacente ; mais l'orientation n'est pas correcte. En effet, en refermant le développement pour construire la boîte et en conservant comme face latérale droite le triangle qui pointe sur le sablier, la face avant contiendrait un triangle au lieu d'un carré. Ce développement doit aussi être rejeté.

Il ne reste plus que le développement (C) possible. Bien qu'apparemment, le triangle tourne le dos au sablier, ce développement est le bon. En effet, si l'on referme le développement, le triangle va alors pointer sur le second sablier et, cette fois, par rapport à l'orientation créée par le couple triangle-sablier, les deux carrés sont à la bonne place.

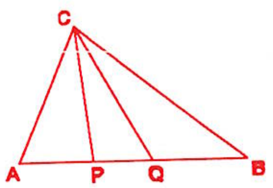
Réponse : C

Question 11 Quelle aire avez-vous ?

On considère le triangle ABC ; on marque les points P et Q sur $[AB]$, de telle manière que $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$ et $|BQ| = \frac{2}{5}|AB|$. Si a est l'aire du triangle ACP, b celle de CPQ et c celle de BCQ, alors

(A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $c < b < a$ (D) $b < a < c$ (E) $a < c < b$

Solution



Si l'on prend comme bases pour ces triangles les côtés inclus dans la droite AB, alors ils ont tous les trois la même hauteur. Par conséquent, seule la mesure de la base joue un rôle dans la comparaison de leurs aires : plus la base est grande, plus l'aire est grande. En termes mathématiques, on peut même dire que, pour des triangles de même hauteur, l'aire est proportionnelle à la mesure de la base.

Or, les mesures des bases des triangles ACP, BCQ et CPQ sont respectivement $|AP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{5}{15}|AB|$, $|BQ| = \frac{2}{5}|AB| = \frac{6}{15}|AB|$ et

$|PQ| = |AB| - |AP| - |BQ| = |AB| - \frac{5}{15}|AB| - \frac{6}{15}|AB| = \frac{4}{15}|AB|$.

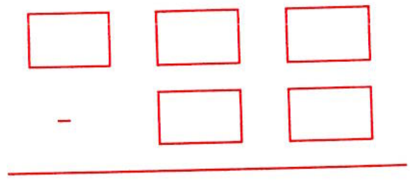
D'où, il vient

$$|PQ| < |AP| < |BQ| \text{ et } b < a < c.$$

Réponse : D

Question 27 Quelle est la différence ?

Quand chacun des chiffres 2, 4, 5, 6 et 9 est placé dans exactement une des cases de la soustraction suivante, quelle est la plus petite différence possible ?



(A) 58 (B) 123 (C) 149 (D) 171 (E) 176

Solution

Pour que la différence soit la plus petite possible, il faut que le nombre que l'on soustrait soit le plus grand possible et le nombre dont on soustrait le plus petit possible. Ici, le plus petit nombre de trois chiffres que l'on puisse former est 245 et le plus grand nombre de deux chiffres est 96. Leur différence est égale à 149.

Réponse : C

Maxi-Éliminatoire

Question 5 Un critère de divisibilité par 7

Soit n un nombre de trois chiffres dont le chiffre des centaines est x, celui des dizaines est y et celui des unités est z. Si n est divisible par 7, lequel des nombres suivants est certainement divisible par 7 ?

(A) z (B) $x + y + z$ (C) $x \cdot y \cdot z$ (D) $5x - y + 2z$ (E) $2x + 3y + z$

Solution

Le nombre n se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} n = 100x + 10y + z &= (98x + 7y) + (2x + 3y + z) \\ &= 7(14x + y) + (2x + 3y + z) \end{aligned}$$

Ceci montre très clairement que n est divisible par 7 si et seulement si $2x+3y+z$ est divisible par 7.

Réponse : E

Question 8 Que reste-t-il ?

Le reste de la division par 5 de $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$ est

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solution

Les cinq premiers termes de la somme proposée ont eux-mêmes pour somme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Et celle-ci est divisible par 5. Il en est d'ailleurs de même pour la somme des carrés de cinq entiers consécutifs. En effet, nous avons $(k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 = 5(k^2+2)$.

En associant les termes de la somme proposée en groupes de cinq termes consécutifs, celle-ci apparaît alors comme une somme de multiples de 5 ; elle est donc divisible par 5 et le reste de la division par 5 de cette somme est 0.

Réponse : A

Question 9 Aire d'un segment circulaire

Dans la figure ci-contre, l'aire de la partie ombrée est

(A) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ (C) $2\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ (D) $2\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ (E) $2\left(\frac{\pi}{3} - 2\right)$

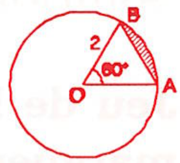
Solution

Pour obtenir l'aire d'un segment circulaire (partie ombrée), il suffit de soustraire de l'aire du secteur circulaire (quartier de tarte) correspondant, l'aire du triangle qui y est inscrit. Appelons O le centre du cercle, A et B les extrémités de la corde qui limite le segment circulaire. Nous avons

Aire segment circulaire =

aire secteur $\overset{\frown}{OAB}$ - aire triangle OAB

Comme l'angle au centre du secteur $\overset{\frown}{OAB}$ mesure $60\,^\circ$, l'aire de ce secteur vaut le sixième de l'aire du disque ; donc $\frac{1}{6}\pi 2^2 = \frac{2\pi}{3}$.



Quant au triangle OAB, il est équilatéral. Par une relation trigonométrique propre aux triangles rectangles, on en détermine aisément la hauteur en fonction du côté (cf. figure) :

$$h = c \cdot \cos 30\,^\circ = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, l'aire du triangle OAB vaut $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Finalement, l'aire du segment circulaire est $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

Réponse : B

Question 27

Soient x et y non nuls. Si $x^2 < y^2$ et $x + y = -1$, alors nécessairement

(A) $x^{-1} < y^{-1}$ (B) $x < y$ (C) $\frac{x}{y} > 1$ (D) $x^3 < -y^3$ (E) $x - y = 1$

Solution

De la condition $x + y = -1$, on tire

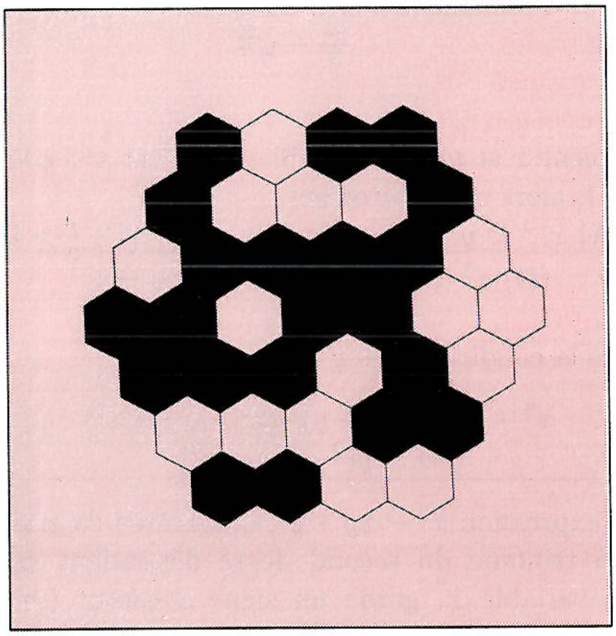
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \\ &= -(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

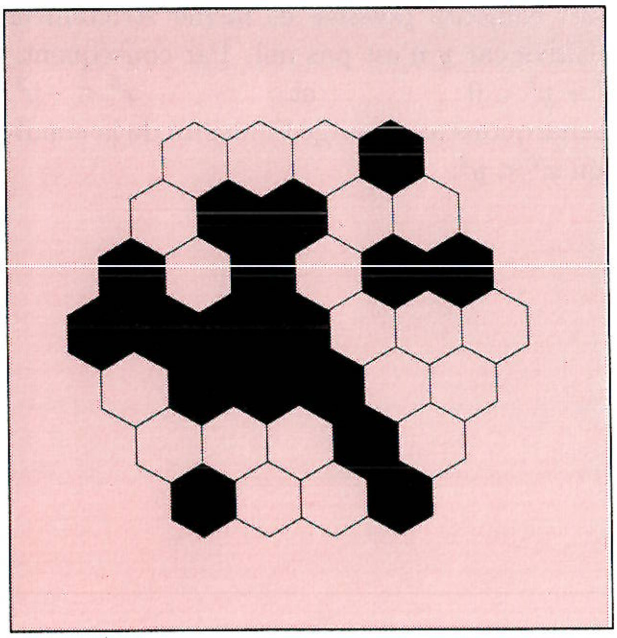
L'expression $x^2 - xy + y^2$, considérée comme un trinôme du second degré dépendant de la variable x, garde un signe constant (celui du coefficient de x^2) car son discriminant $\Delta = -3y^2$ est négatif. Cette expression est donc toujours positive et même strictement positive car y n'est pas nul. Par conséquent, $x^3 + y^3 < 0$ et $x^3 < -y^3$. Remarquons au passage l'inutilité de la condition $x^2 < y^2$.

Réponse : D

Solutions des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





Additions cachées

Let's speak English

Une solution est :

$E = 4$, $F = 7$, $H = 6$, $N = 9$, $O = 8$, $R = 5$, $S = 2$, $T = 1$, $U = 0$, $V = 3$

Sprechen wir Deutsch

$D = 5$, $E = 6$, $F = 8$, $I = 4$, $N = 2$, $R = 7$, $\ddot{U} = 9$, $W = 1$, $Z = 3$

Produit croisé

	1	2	3	4	5	6
1	R	E	E	L	L	E
2	E	N	T	I	E	R
3	S	T	E	V	I	N
4	T	I	T	I		E
5	E	T	E	N	D	
6	S	E		G	U	E