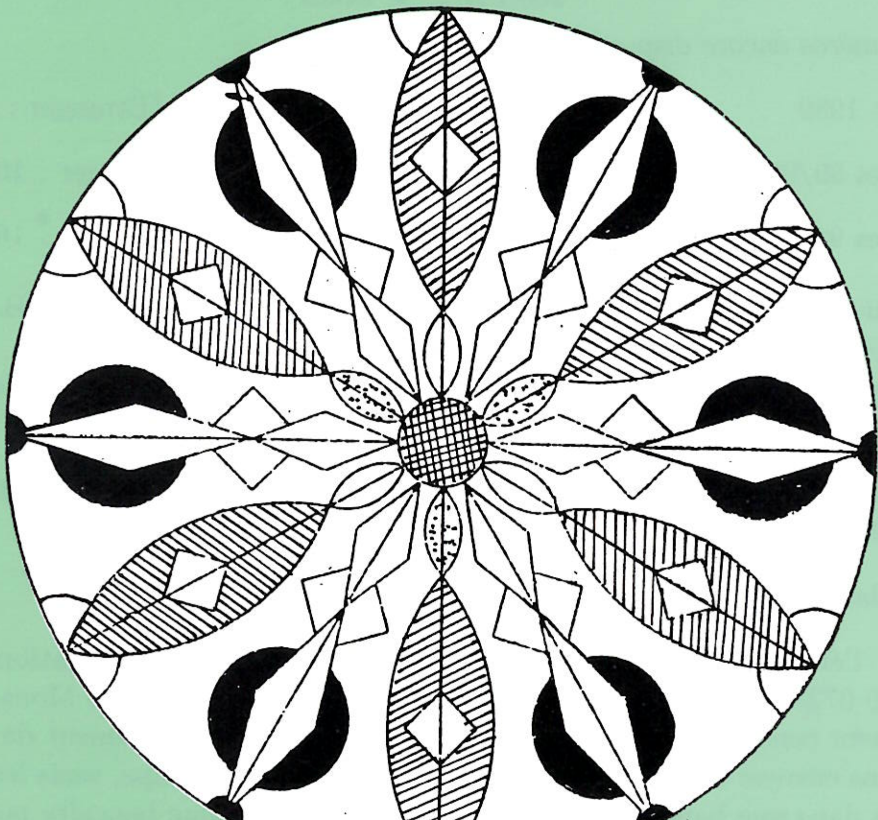
MATH - JEUNES



17e année
Novembre 1995 – n° 72
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (5 ex. au moins) : 150 FB
- Isolés : 200 FB

Étranger :

- Groupés (5 ex. au moins) : 250 FB (42 FF)
- Isolés : 330 FB (55 FF)

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1989 — Par numéro : 15 FB (Étranger : 30 FB ou 5 FF)
- Années 89/90, 90/91, 91/92 — Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB ou 17 FF)
- Années 92/93, 93/94, 94/95 — 80 FB (Étranger : 160 FB ou 27 FF)

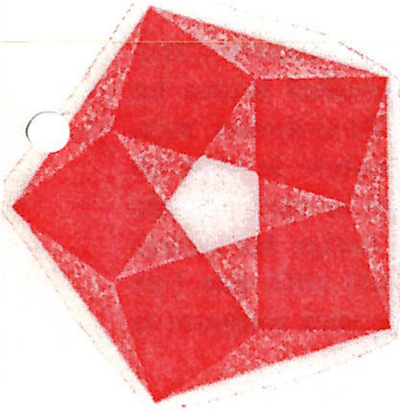
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

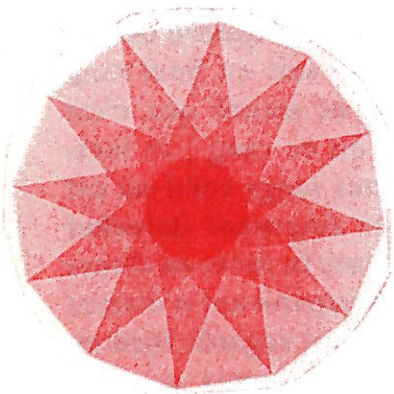
- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°72 Dix-septième année 1995

Math-Jeunes





Claude-Gaspar Bachet, **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres** 26

28 *Rallye Problèmes*

Jeux 29

30 *Vingt et unième Olympiade Mathématique Belge*

Jean Michel Slowik, **T'as pas l'aire !** 35

40 *Michel Ballieu,* **Rosaces de type « vitrail »**

Guy Robert, **La droite d'Euler d'un triangle** 43

46 *Miguel de Cervantes,* **Don Quichotte**

Math-Jeunes n°72, 26–27, 1995

Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres

Claude-Gaspar Bachet, *sieur de Méziriac*

Le problème qui suit porte le numéro XVIII ; il s'intitule *De plusieurs cartes disposées en divers rangs deviner laquelle on aura pensée.*
Nous l'avons extrait de l'ouvrage portant le titre *Problèmes plaisants et délectables* ... ci-dessus, édité par la LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE ALBERT BLANCHARD, 9, rue de Médicis, Paris. L'édition, qui est la cinquième, date de 1993.

Claude-Gaspar Bachet est né à Bourg-en-Bresse en 1581. Il a notamment vécu à Paris et à Rome. C'était un érudit qui avait beaucoup lu : œuvres poétiques, mathématiques, historiques ...
Lors de la fondation de l'Académie Française en 1634, il est désigné pour en faire partie.
Les manuscrits de plusieurs ouvrages qu'il a rédigés et qui n'avaient pas été édités sont malheureusement perdus. Il subsiste à la Bibliothèque de l'Institut de France le manuscrit des Elementorum Arithmeticorum Libri XIII.
Il meurt dans sa ville natale en 1638.

Prends 15 cartes et les dispose en trois rangs, si bien qu'il s'en trouve 5 en chaque rang ; et que quelqu'un pense laquelle qu'il voudra pourvu qu'il te déclare en quel rang elle est. Alors ramasse à part les cartes de chaque rang, puis joins-les toutes ensemble, mettant toutefois le rang où est la carte pensée au milieu des deux autres. En après derechef dispose toutes les cartes en trois rangs, en posant une au premier, puis une au second, puis une au troisième, et ainsi jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Alors demande en quel rang est la carte pensée, et ramasse comme auparavant chaque rang à part, mettant au milieu des autres celui où est la carte pensée ; et finalement dispose-les encore en trois rangs de la même sorte qu'auparavant, et demande auquel est-ce que se treuve la carte pensée, et sois assuré qu'elle se treuvera lors la troisième du rang où elle sera. Ainsi tu la devineras aisément.
Que si tu veux encore mieux couvrir l'artifice, tu peux ramasser derechef toutes les cartes en la façon que j'ai dit ci-dessus, mettant au milieu des deux autres le rang où est la carte pensée, et lors la carte pensée se treuvera au milieu de toutes les quinze cartes, si bien que, de quel côté que l'on commence à compter, elle sera toujours la huitième.

DÉMONSTRATION

Pour rendre raison infaillible de ceci, il me faut preuver que, disposant les cartes ainsi que j'ai dit par trois fois, enfin après la troisième fois la carte pensée est nécessairement la troisième du rang où elle se treuve. Or prends garde que la première fois ayant rangé en trois rangs quinze cartes, comme j'ai dit, quand tu sais en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des cinq qui sont en ce rang ; et mettant au milieu des autres rangs celui où est la carte pensée, et les disposant derechef comme j'ai enseigné, alors tu mets en divers rang les cinq cartes qui auparavant n'étaient qu'en un seul rang. Partant regarde bien en quelles places tombent les cartes du rang du milieu, entre lesquelles tu sais que doit être la carte pensée, et remarque ces cinq points :

1° Que la première tombe au second lieu du troisième rang.

2° Que la seconde tombe au troisième lieu du premier rang.

3° Que la troisième tombe au troisième lieu du second rang.

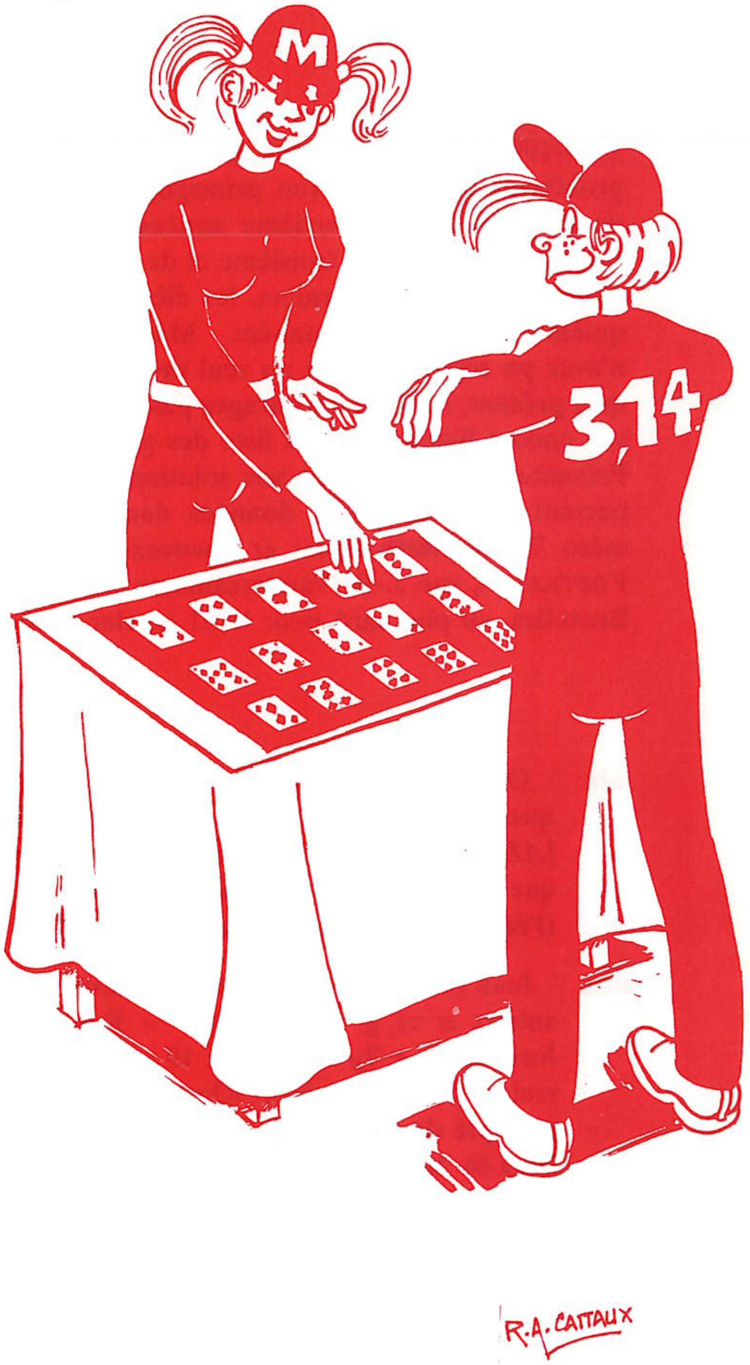
4° Que la quatrième tombe au troisième lieu du troisième rang.

5° Que la cinquième tombe au quatrième lieu du premier rang.

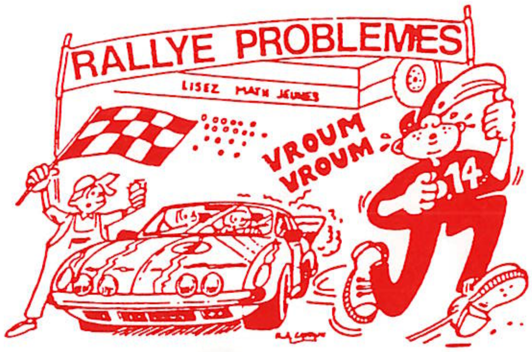
En représentant par des o les cartes où ne se trouve pas la carte pensée et par des 1 celles parmi lesquelles elle se trouve, on a la disposition suivante :

1er *rang.*	2^{e} *rang.*	3^{e} *rang.*
o	o	o
o	o	1
1	1	1
1	o	o
o	o	o

Donc si la carte pensée est lors au premier rang, tu es assuré que c'est la troisième ou quatrième d'icelui ; partant disposant derechef les cartes en la façon ordonnée, elle tombera nécessairement en la troisième place du second ou en la troisième du troisième rang.
Que si après la seconde disposition la carte pensée est au second rang tu es assuré que c'est la troisième du même rang ; partant dès lors tu la peux deviner ; mais quand bien tu rangeras derechef les cartes en la façon exposée, elle retombera toujours à la même place (c'est une propriété spéciale et évidente de la carte du milieu). Que si la carte pensée, après la seconde disposition, est au troisième rang, tu es assuré que c'est la seconde ou la troisième d'icelui ; partant rangeant derechef les cartes, elle tombera infailliblement en la troisième place du premier rang, ou en la troisième du second. Donc, quoi qu'il advienne, après la troisième fois, la carte pensée sera toujours la troisième du rang où elle se treuvera. Ce qu'il fallait démontrer.
...



Math-Jeunes n°72, 28–28, 1995



C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1995-1996. Rappelons que les deux premiers problèmes concernent (en principe) les élèves de première et de deuxième années, les deux suivants, les élèves de troisième et de quatrième années et les deux derniers, les élèves de cinquième et de sixième années. Même si vous n'avez pu répondre qu'à un seul problème jusqu'à présent, ne vous découragez pas, vous pouvez encore figurer dans la liste des gagnants. Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro 71 de *Math-Jeunes* et envoyez-les à C. Festraets, rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 31 janvier 1996.

mini 3 On donne un segment $[AB]$. Expliquer comment construire un carré de côté $[AB]$ en n'utilisant comme instruments que la règle **(non graduée)** et le compas **(l'équerre et le rapporteur sont interdits)**.

mini 4 Jean et Joseph ont choisi deux nombres entiers x et y. Jean dit : « Regarde Joseph, $3x + 7y$ est égal à 19 ». « C'est vrai, répond Joseph, et $43x + 75y$ est un multiple de 19 ».
Peux-tu trouver au moins deux couples d'entiers (x, y) qui pourraient avoir été choisis par Jean et Joseph ? Est-il vrai que, si $3x + 7y = 19$, alors, quels que soient les nombres entiers x et y, $43x+75y$ est toujours divisible par 19 ?

midi 3 Dans un rectangle de 20 cm $\times$ 25 cm, sont disposés 120 carrés de 1 cm de côté (les côtés des carrés ne sont pas nécessairement parallèles aux côtés du rectangle). Démontrer que, quelle que soit la disposition de ces carrés, on peut dessiner, à l'intérieur du rectangle, un cercle de diamètre 1 cm qui ne coupe aucun des carrés.

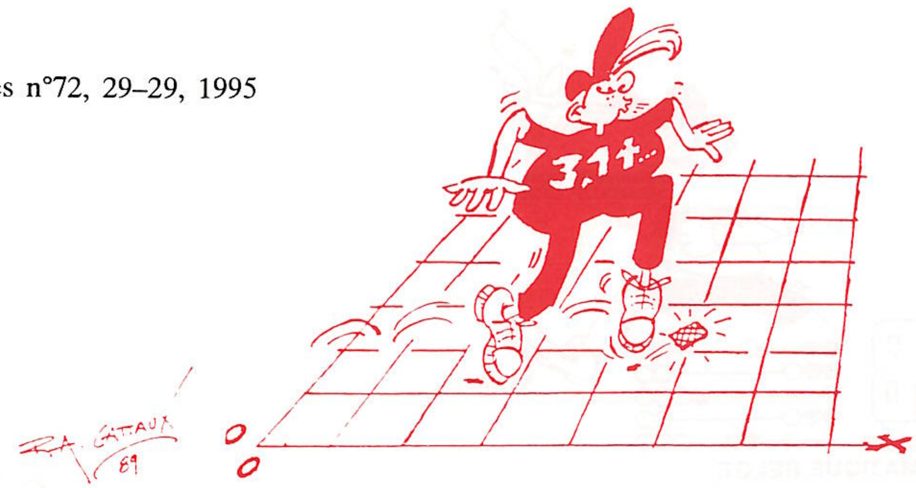
midi 4 Jean fait découvrir à Marie le nombre auquel il a pensé. C'est, lui dit-il, le plus grand nombre de six chiffres qui est divisible par 11 et dont la somme des chiffres vaut 29.
J'ai trouvé, dit Marie, mais les chiffres de ton nombre ne sont pas tous différents ; moi, je connais le plus grand nombre de six chiffres, divisible par 11, dont la somme des chiffres fait 29 et dont tous les chiffres sont différents.
Quels sont ces deux nombres ?

maxi 3∗ Deux cents soldats dont on a mesuré les tailles au millimètre près sont **tous** de tailles différentes. Ils sont disposés de manière à former un rectangle comprenant dix soldats sur chaque ligne et vingt soldats sur chaque colonne.
Dans chacune des vingt lignes, on choisit le plus petit soldat et, parmi ces vingt soldats, on choisit le plus grand ; appelons-le **soldat** X.
Dans chacune des dix colonnes, on choisit le plus grand soldat et, parmi ces dix soldats, on choisit le plus petit ; appelons-le **soldat** Y.
On sait que X et Y **ne sont pas** le même soldat. Mais, … quel est le plus grand des deux, X ou Y ?

maxi 4 Démontrer que

$$\left(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7\right)^{83}-\left(\left(2\cdot 5^7\right)^{83}-\left(5\cdot 2^7\right)^{83}\right)$$

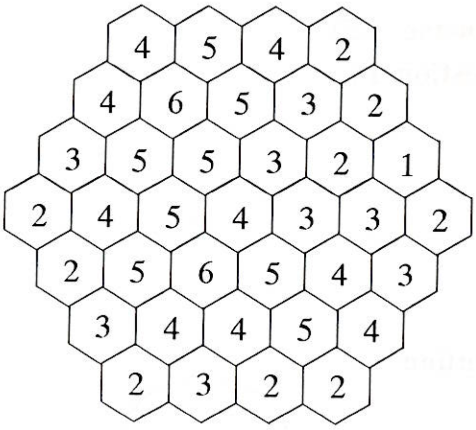
est **divisible par** 83.



A. Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



Additions cachées

Si tu remplaces les lettres des additions ci-dessous par des chiffres, sachant qu'à des lettres différentes sont associés des chiffres différents, peux-tu trouver une solution ?

Laten we Nederlands spreken

```
  V I E R
+ V I J F
---------
N E G E N
```

Parliamo Italiano

```
  S E I
+ T R E
-------
N O V E
```

Hablemos Español

```
  T R E S
+   D O S
---------
C I N C O
```

Produits croisés

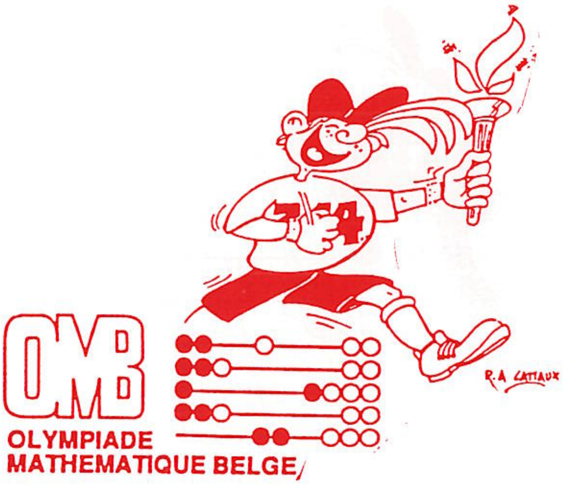
À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres–définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1			■			
2			I			
3			■			
4	I				I	
5						
6						■

Horizontalement
1. 18 – 1 425
2. 356 400
3. 171 – 1 710
4. 1 020 600
5. 760 000
6. 189 525

Verticalement
1. 1 292 760
2. 263 340
3. 900
4. 600 000
5. 1 462 050
6. 162 450

Math-Jeunes n°72, 30–34, 1995



C. Van Hooste

Faisant suite à l'article paru dans le n°71 de *Math-Jeunes*, voici, ami lecteur, quelques-unes des questions posées lors de la demi-finale 1995 de l'Olympiade Mathématique Belge. Nous te suggérons de résoudre les problèmes avant de consulter lesréponses proposées.

Demi-finale Mini

Question 3 Un carré dans un disque

Un carré est inscrit dans un cercle. Le rapport de l'aire du cercle à celle du carré vaut

Ⓐ 2 Ⓑ $\frac{\pi}{2}$ Ⓒ π Ⓓ 2π Ⓔ $\frac{4}{3}$

Solution

Soit c le côté du carré.

Le diamètre du cercle dans lequel est inscrit le carré a la même longueur que la diagonale du carré. On obtient la mesure d de celle-ci en appliquant le théorème de Pythagore :

$$d = \sqrt{c^2 + c^2} = c\sqrt{2}$$

Par suite, le rayon du cercle est $r = c\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le rapport de l'aire du cercle à celle du carré vaut

$$\frac{\pi\left(c\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{c^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Réponse : B

Question 9 Trains

Un train A part à treize heures de la ville V et se dirige vers la ville W, distante de 160 km, à la vitesse uniforme de 80 km/h. À mi-chemin, il croise un train B parti de W à treize heures vingt et roulant vers V, lui aussi à vitesse uniforme. Quelle est la vitesse du train B, en km/h ?

(*Sans réponse préformulée*)

Solution

Puisqu'ils se croisent à mi-chemin, A et B ont tous deux parcouru 80 km. Pour franchir cette distance, A a mis exactement une heure. Parti 20 minutes après A, B a donc roulé pendant 40 minutes (ou $\frac{2}{3}$ d'heure). Par conséquent, sa vitesse est $\frac{80}{\frac{2}{3}}$ km/h = 120 km/h.

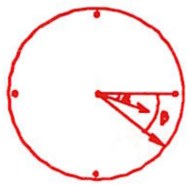
Réponse :120

Question 14 Trois heures dix-huit

Une montre (dont le cadran est divisé en douze heures) affiche trois heures dix-huit minutes. Quelle est la mesure en degrés de l'angle formé par l'aiguille des heures et celle des minutes ?

Ⓐ 8 Ⓑ 9 Ⓒ 10 Ⓓ 11 Ⓔ 12

Solution



Désignons respectivement par α et β les angles que forment la petite et la grande aiguilles avec la position marquant trois heures sur la montre lorsqu'il est trois heures dix-huit (cf. la figure ci-dessus).

L'aiguille des heures fait un tour complet en douze heures ; elle balaie donc un angle de 30° en une heure. Dès lors, on a :

$$\alpha = \frac{30° \times 18}{60} = 9°.$$

L'aiguille des minutes avance de 30° en 60 minutes. Comme elle balaie l'angle β en 3 minutes, on a

$$\beta = \frac{30° \times 3}{5} = 18°.$$

Par suite, l'angle formé par les deux aiguilles à trois heures dix-huit est

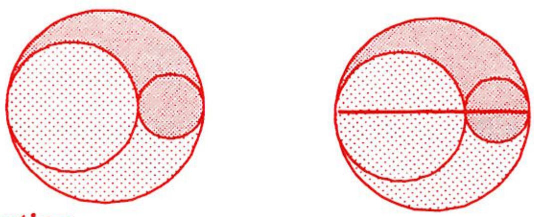
$$\beta - \alpha = 18° - 9° = 9°.$$

Réponse : B

Question 16 <u>Cercles</u>

Dans la figure ci-dessous, trois cercles, dont les rayons sont proportionnels à 1, 2 et 3, sont tangents deux à deux. Quel est le rapport de l'aire de la zone gris foncé à celle de la zone gris clair ?

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{4}{9}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{2}{3}$ Ⓔ $\frac{3}{4}$



Solution

Soient k, $2k$ et $3k$ les rayons des cercles. Après avoir tracé le diamètre passant par les centres des trois cercles, on constate que l'aire A de la zone gris foncé est équivalente à la somme des aires d'un demi-disque de grand rayon et d'un demi-disque de petit rayon, diminuée de l'aire d'un demi-disque de rayon moyen :

$$A = \frac{9\pi k^2}{2} + \frac{\pi k^2}{2} - \frac{4\pi k^2}{2} = 3\pi k^2.$$

L'aire B de la zone gris clair équivaut à la différence de l'aire du grand disque et de l'aire A :

$$B = 9\pi k^2 - 3\pi k^2 = 6\pi k^2.$$

Ainsi, le rapport des aires entre les deux zones grises est

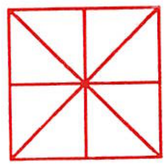
$$\frac{A}{B} = \frac{3\pi k^2}{6\pi k^2} = \frac{1}{2}.$$

Réponse : C

Demi-finale MAXI

Question 10 <u>Triangles</u>

La figure ci-contre consiste en un carré, ses diagonales et ses médianes. Le nombre total de triangles (de n'importe quelle taille, mais non aplatis) dans cette figure, est

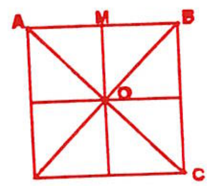


Ⓐ 18 Ⓑ 16 Ⓒ 14 Ⓓ 12 Ⓔ 10

Solution

On peut dénombrer dans ce carré :

- 8 triangles qui sont des « huitièmes de carré » (de la même forme que AMO)
- 4 triangles qui sont des « quarts de carré » (de la même forme que ABO)
- 4 triangles qui sont des « moitiés de carré » (de la même forme que ABC)

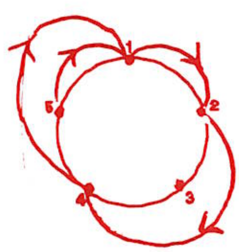


Il y donc au total 16 triangles.

Réponse : B

Question 12 <u>L'insecte sur le cercle</u>

Sur un cercle, cinq points sont numérotés 1, 2, 3, 4 et 5 dans le sens des aiguilles d'une montre. Un insecte saute de point en point dans le sens des aiguilles d'une montre ; s'il se trouve sur un point de numéro impair, il se déplace au point voisin et s'il se trouve sur un point de numéro pair, il se déplace deux points plus loin (en sautant un point).



S'il part du point 5, après 1995 sauts, il se trouvera sur le point

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4 Ⓔ 5

Solution

Observons les premiers sauts de l'insecte : partant du point 5, il passe successivement par les points

$$1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, \ldots$$

Il est clair que dès qu'il arrive sur un point par lequel il est déjà passé, le même cycle de points recommence. Comme il repasse par le point 1 au troisième saut, il reviendra nécessairement au point 1 tous les trois sauts.
Donc, il sera au point 1 aux $4^{\text{ème}}$, $7^{\text{ème}}$, $10^{\text{ème}}$, …, $1993^{\text{ème}}$ sauts ; puis au point 2 au $1994^{\text{ème}}$ saut et au point 4 au $1995^{\text{ème}}$ saut.

Solution : D

Question 14 Fonction affine

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application affine telle que

$$f(1) \leqslant f(2),\ f(3) \geqslant f(4) \text{ et } f(5) = 5.$$

Laquelle des affirmations suivantes est certainement vraie ?

Ⓐ $f(0) < 0$ Ⓑ $f(0) = 0$ Ⓒ $f(0) = 5$
Ⓓ $f(0) > 5$ Ⓔ $f(1) < f(0) < f(-1)$

Solution

Comme f est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est une application de la forme

$$f : x \mapsto mx + p$$

Une telle application est croissante si et seulement si m est positif et décroissante si et seulement si m est négatif.
De l'inégalité $f(1) \leqslant f(2)$, on déduit que f est croissante, donc que m est positif. Et de l'inégalité $f(3) \geqslant f(4)$, on déduit que f est décroissante, donc que m est négatif.
Or, le seul nombre à la fois positif et négatif est 0. Par conséquent, $m = 0$.
De ce fait, f est une application constante. L'égalité $f(5) = 5$ permet finalement de déterminer cette application constante :

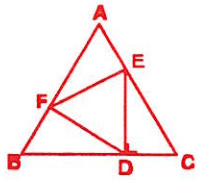
$$f : x \mapsto 5.$$

Ainsi, $f(0) = 5$.

Réponse : C

Question 17

Un triangle équilatéral DEF est inscrit dans un triangle équilatéral ABC de telle manière que $DE \perp BC$ (voir la figure). Le rapport de l'aire du triangle DEF à celle du triangle ABC est



Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{3}$ Ⓒ $\frac{1}{4}$ Ⓓ $\frac{2}{5}$ Ⓔ $\frac{1}{6}$

Solution

Posons $a = |BC|$, $b = |ED|$ et $x = |EC|$.
Comme deux triangles équilatéraux sont toujours semblables, le rapport de leurs aires est égal au rapport des carrés des mesures de leurs côtés. Ainsi, on a

$$\frac{\text{aire } DEF}{\text{aire } ABC} = \frac{b^2}{a^2}$$

Par ailleurs, dans le triangle rectangle DEC, l'angle de sommet C vaut 60° ; de ce fait, on a : $|DC| = |EC| \cdot \cos 60°$ ou $x = a - \dfrac{x}{2}$.

D'où $\quad x = \dfrac{2a}{3}$.

Dans ce même triangle, appliquons le théorème de Pythagore : $|EC|^2 = |ED|^2 + |DC|^2$.
De là, on tire successivement $x^2 = b^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ donc $\dfrac{4a^2}{9} = b^2 + \dfrac{a^2}{9}$ et donc $a^2 = 3b^2$.
Par suite, nous avons

$$\frac{\text{aire } DEF}{\text{aire } ABC} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}.$$

Réponse : B

Et, pour te donner une idée du niveau de la finale nationale :

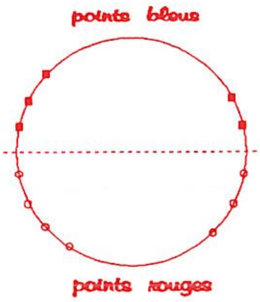
Finale Mini

Question 2 Points bleus, points rouges

Sur un cercle ont été colorés de manière quelconque, 1 995 points bleus et 1 994 points rouges. Soit b le nombre de paires de points bleus voisins et r le nombre de paires de points rouges voisins. La différence $b - r$ a-t-elle toujours la même valeur, quelle que soit le disposition des points colorés ? Si oui, quelle est cette valeur ?

Solution

Déterminons d'abord la différence $b - r$ pour une position particulière des points colorés. Plaçons tous les points bleus sur un demi-cercle et tous les points rouges sur l'autre demi-cercle (cf. figure ci-contre).



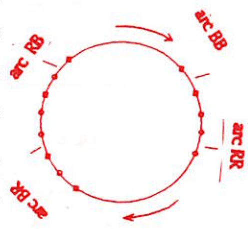
Comme les 1 995 points bleus sont voisins de proche en proche, il y a 1 994 paires de points bleus. De même, puisque les 1 994 points rouges sont aussi voisins de proche en proche, il y a 1 993 paires de points rouges. D'où, pour cette disposition particulière des points colorés,

$$b - r = 1\,994 - 1\,993 = 1$$

La différence $b - r$ reste-t-elle égale à 1 pour toutes les autres dispositions possibles des points colorés ?

Considérons une position quelconque des points colorés. Ceux-ci créent une partition du cercle en un certain nombre d'arcs.

En parcourant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, nous rencontrons quatre types d'arcs « orientés » selon la couleur des points qui en sont les extrémités :



- des arcs RR pour lesquels l'origine et l'extrémité sont rouges ;
- des arcs RB pour lesquels l'origine est rouge et l'extrémité bleue ;
- des arcs BR pour lesquels l'origine est bleue et l'extrémité rouge ;
- des arcs BB pour lesquels l'origine et l'extrémité sont bleues.

Désignons par x le nombre d'arcs orientés de type BR.

Ne considérons que les arcs orientés dont l'origine est bleue ; il y en a forcément 1 995. Ils se répartissent en b arcs de type BB et x arcs de type BR. D'où il vient :

$$b + x = 1\,995$$

Parcourons maintenant le cercle dans l'autre sens et comptons cette fois les arcs orientés dont l'origine est rouge ; il y en a évidemment 1 994. Ceux-ci se répartissent en r arcs de type RR et x arcs de type RB (car tout arc de type BR dans le sens des aiguilles d'une montre devient un arc de type RB dans l'autre sens). Il vient donc :

$$r + x = 1\,994$$

En soustrayant membre à membre les deux égalités que nous venons d'établir, nous obtenons :

$$b - r = 1$$

Ainsi, la différence $b - r$ est toujours égale à 1.

Finale Maxi

Question 3 Pavages

À l'aide de trapèzes qui sont des moitiés d'hexagones réguliers de côté 1, est-il possible de paver (c'est-à-dire de recouvrir sans lacune ni chevauchement)

a) un triangle équilatéral de côté entier ?

b) un hexagone régulier de côté entier ?

Solution

Dans ce qui suit, nous appellerons trapèze T, un trapèze de la forme décrite dans l'énoncé.

a) Considérons un triangle équilatéral de côté n ($n \in \mathbb{N}_0$).

Pour que ce triangle équilatéral soit pavable à l'aide de trapèzes T, il faut que n soit divisible par 3.

En effet, un trapèze T est composé de trois triangles équilatéraux de côté 1 (cf.

figure 1) et un triangle équilatéral de côté n est lui-même composé de n^2 triangles équilatéraux de côté 1 (cf. figure 2). Dès lors, pour que le triangle équilatéral de côté n puisse être pavé à l'aide de trapèzes T, il faut que n^2 soit divisible par 3, donc que n soit divisible par 3.

Si n est divisible par 3, alors un triangle équilatéral de côté n peut être pavé à l'aide de trapèzes T.

La figure 3 montre comment disposer trois trapèzes T pour paver un triangle équilatéral de côté 3.
Pour paver un triangle équilatéral de côté $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il suffit de le découper en triangles équilatéraux de côté 3 et de paver chacun d'eux à l'aide de trapèzes T (cf. figure 4).

Ainsi, **un triangle équilatéral de côté n peut être pavé par des trapèzes T si et seulement si n est divisible par 3.**

b) Considérons un hexagone régulier de côté n ($n \in \mathbb{N}_0$).

Les figures 5, 6 et 7 montrent comment disposer les trapèzes T pour paver cet hexagone lorsque n est égal à 1, à 2 et à 3.

Démontrons par récurrence qu'il est alors possible de paver l'hexagone quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Nous venons de voir que cette propriété est vraie pour n égal à 1.
Supposons que celle-ci soit encore vraie pour $n = k$ et, partant de là, démontrons qu'elle le reste pour $n = k + 1$.

Comme le montre la figure 8, l'hexagone régulier de côté $(k + 1)$ peut être découpé en deux parties : d'une part, un hexagone régulier de côté k qui peut être pavé à l'aide de trapèzes T par l'hypothèse de récurrence et, d'autre part, une « bande » périphérique composée de

$$6 \cdot (k + (k + 1)) = 6 \cdot (2k + 1)$$

triangles équilatéraux de côté 1, donc susceptible d'être recouverte par des trapèzes T, eux-mêmes composés de trois triangles équilatéraux de côté 1. Dans cette bande, il suffit de disposer les trapèzes T alternativement grande base vers l'extérieur, petite base vers l'extérieur. Deux trapèzes voisins recouvrent six triangles équilatéraux consécutifs. Il suffit donc de placer $(2k+1)$ paires de trapèzes T pour recouvrir la bande périphérique.
Les figures 9 et 10 montrent la disposition des trapèzes dans la bande périphérique selon que k est pair ou impair.

Ainsi, l'hexagone de côté $(k + 1)$ est entièrement pavable à l'aide de trapèzes T.

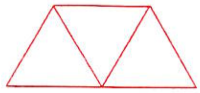


Fig. 1

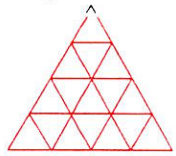


Fig. 2

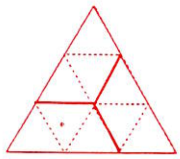


Fig. 3

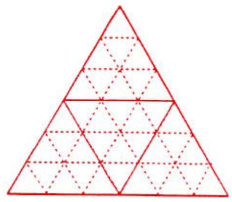


Fig. 4

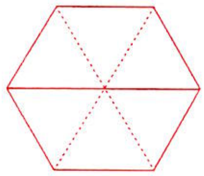


Fig. 5

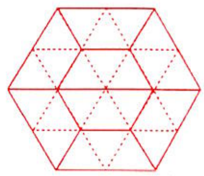


Fig. 6

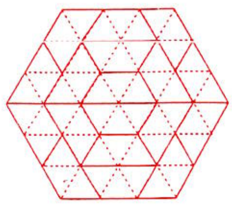


Fig. 7

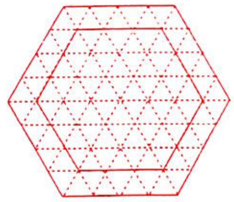


Fig. 8

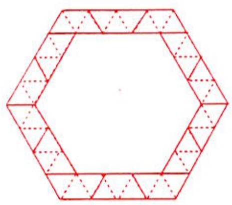


Fig. 9

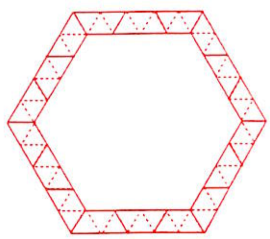


Fig. 10

Math-Jeunes n°72, 35–39, 1995

T'as pas l'aire !

Jean Michel Slowik, *Lycée Robespierre d'Arras*

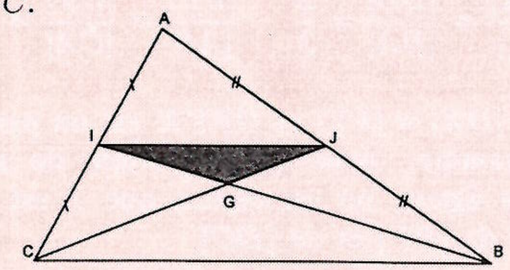
La Rédaction remercie Pierre Yves PIRA pour ses dessins humoristiques.

Nous allons nous poser des questions relatives à des calculs d'aire dans un triangle.
On s'apercevra que ces questions deviennent rapidement difficiles, surtout si on s'interdit le calcul barycentrique et les homothéties. Les seuls outils seront : théorème de Thalès, théorème des milieux, aire d'un triangle, ... Médianes et parallélogrammes compléteront la panoplie ...

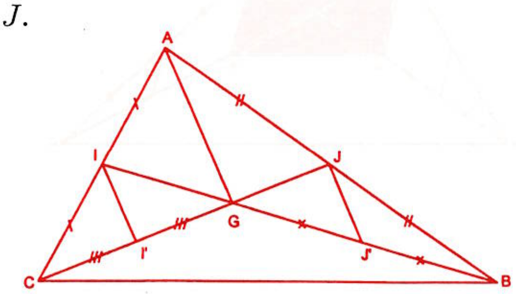
I

PROBLÈME 1

Soit ABC un triangle, et G son centre de gravité. Calculer l'aire du triangle hachuré en fonction de l'aire S du triangle ABC.



Considérons le triangle ABC et deux de ses médianes qui se coupent en G.
Traçons les parallèles à AG passant par I et J.



D'après le théorème des milieux dans le triangle ACG,

$$|CI'| = |I'G| \qquad |AG| = 2|II'|$$

D'après le théorème des milieux dans le triangle ABG,

$$|BJ'| = |J'G| \qquad |AG| = 2|JJ'|$$

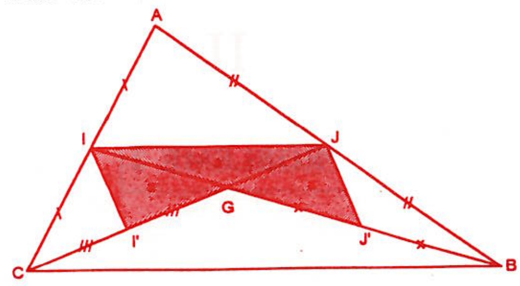
On en conclut que $|II'| = |JJ'|$ et, comme $II' \,//\, JJ'$ (puisque ces deux droites sont parallèles à AG), $IJJ'I'$ est un parallélogramme. Donc

$$|I'G| = |GJ| \qquad |IG| = |GJ'|$$

ce qui se traduit par

G est au tiers de $[CJ]$ et $[IB]$.

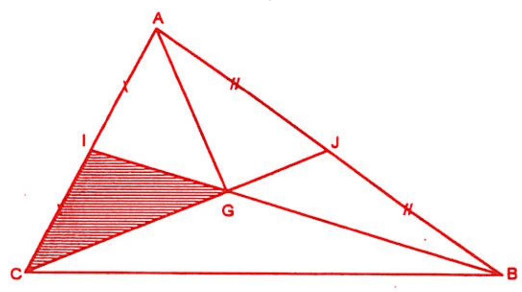
Mais, comme les diagonales du parallélogramme le partagent en 4 triangles de même aire ...



On pose :
Aire(IGJ) =Aire($II'G$) =Aire(GJJ') = s
Si on regarde le triangle ICG, II' est une médiane, donc partage le triangle en deux surfaces de même aire :

Aire($II'C$) = s et Aire(ICG) = $2s$

de même, Aire(GJB) = $2s$, mais alors ...



Dans le triangle ACG, IG est une médiane

Aire(AIG) =Aire(ICG) = $2s$

De même, Aire(AGJ) =Aire(JGB) = $2s$

Par ailleurs, les trois médianes d'un triangle le partagent en 6 triangles de même aire. Comme Aire(AIG) = $2s$, il vient :

$$\text{Aire}(ABC) = 12s$$

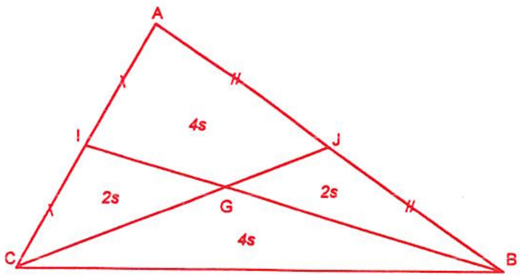
Si S est l'aire du triangle ABC, on a :

$$\boxed{\text{Aire}(IJG) = \frac{S}{12}}$$

On peut en déduire l'aire du triangle GBC :

$$\text{Aire}(BGC) = 12s - 2s - 2s - 4s = 4s$$

d'où la figure finale :

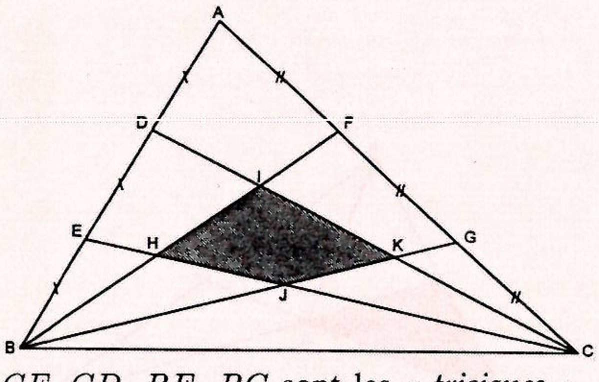


Et maintenant, ... Le problème **monumental** appelé : les *tricianes* d'un triangle.

II

PROBLÈME 2

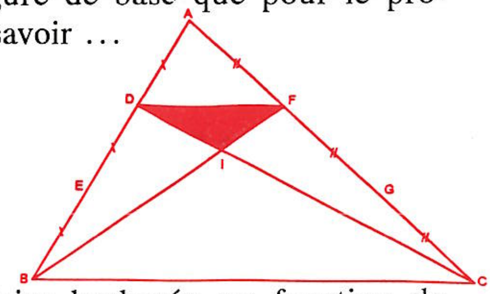
Soit ABC un triangle, D et E partagent $[AB]$ en trois segments égaux. De même F et G pour $[AC]$. Calculer l'aire du quadrilatère hachuré $IKJH$ en fonction de l'aire S du triangle ABC.



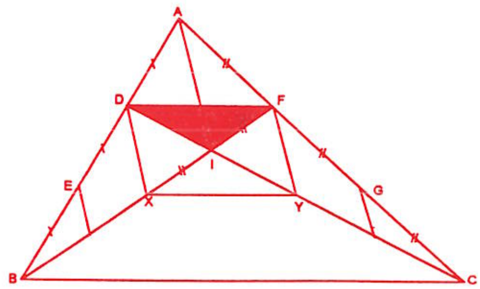
CE, CD, BF, BG sont les « *tricianes* ».

II.1

Nous allons commencer par travailler sur la même figure de base que pour le problème 1, à savoir ...



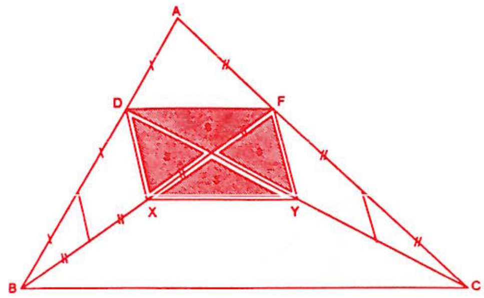
Calculons l'aire hachurée en fonction de l'aire du triangle ABC.



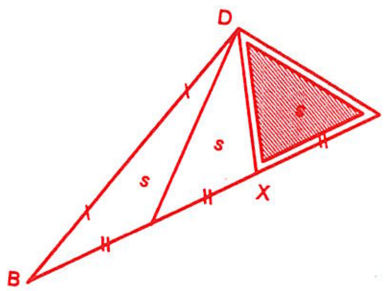
Traçons la parallèle à AI passant par F et celle passant par D.

$$\frac{|DX|}{|AI|} = \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{2}{3} \qquad \frac{|FY|}{|AI|} = \frac{|CF|}{|CA|} = \frac{2}{3}$$

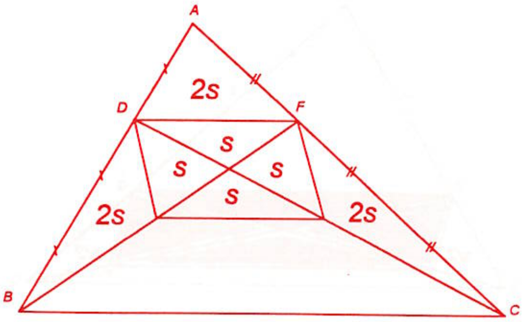
donc $|DX| = |FY|$ et $DFYX$ est un parallélogramme. Avec les projections de segments égaux, on en déduit que I est au quart de $[BF]$ et de $[DC]$.



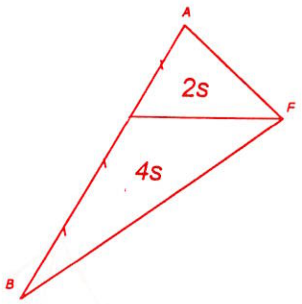
Les diagonales d'un parallélogramme partagent celui-ci en 4 triangles de même aire. Les surfaces hachurées ont même aire. En isolant le triangle BDI, on a On s'aperçoit que Aire(BDX) = $2s$.



D'où la figure simplifiée :



car
Aire(BFA) $= 6s$;
c'est le tiers de l'aire totale

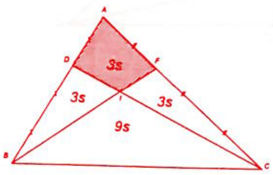


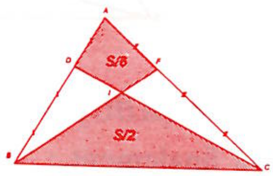
$$\boxed{S = 18s}$$

et

$$\boxed{s = \frac{1}{18}S}$$

En effectuant un découpage différent, on trouve





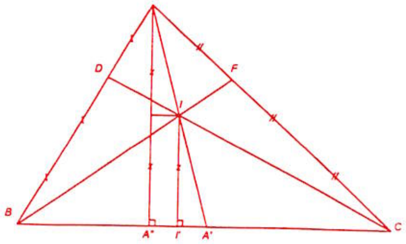
$$\text{Aire}(BIC) = 18s - 9s = 9s$$

On réutilisera ces informations. On aurait aussi pu se baser sur le fait que I est au quart de $[BF]$.

En particulier,

$$\text{Aire}(ABC) = 2\times\text{Aire}(BIC)$$

Mais alors ...

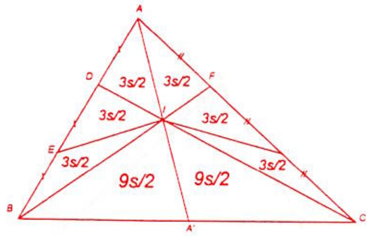


Les deux triangles ABC et BIC ont même base ; les hauteurs sont donc :

$$|AA''| = 2 \times |II'|$$

On montre alors aisément que I est le milieu de $[AA']$.

Effectuons alors une nouvelle division de la surface du triangle



- Pourquoi a-t-on
$$\text{Aire}(AID) = \frac{3s}{2} \text{ ?}$$

Car Aire(BID) $= 3s$. À cause de la médiane IE :

$$\text{Aire}(EDI) = \frac{3s}{2}$$

et, à nouveau grâce à la médiane ID :

$$\text{Aire}(AID) = \frac{3s}{2}.$$

- Pourquoi a-t-on
$$\text{Aire}(IBA') = \frac{9s}{2} \text{ ?}$$

Car BI est une médiane du triangle ABA' et que

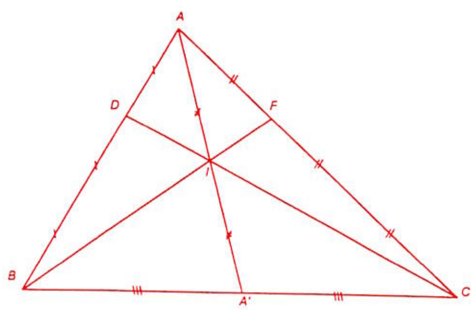
$$\text{Aire}(ABI) = \frac{9s}{2}.$$

On recommence de l'autre côté et on trouve :

$$\text{Aire}(ABA') = \text{Aire}(AA'C)$$

Donc $\boxed{A' \text{ est le milieu de } [BC]}$

On peut donc conclure, uniquement avec les deux tricianes hautes

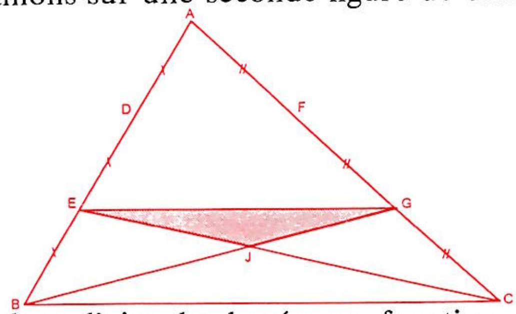


alors

$$\boxed{\begin{array}{c} I \text{ est au quart de } [FB] \\ I \text{ est au quart de } [DC] \\ I \text{ est le milieu de } [AA'] \\ A' \text{ est le milieu de } [BC] \end{array}}$$

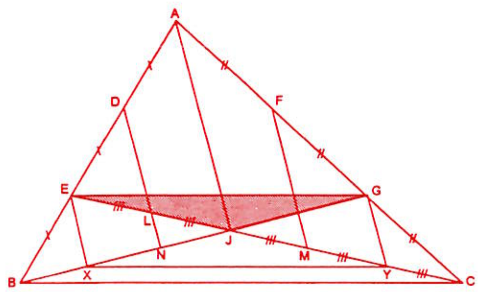
II.2

Travaillons sur une seconde figure de base :



Calculons l'aire hachurée en fonction de l'aire S du triangle ABC.

Traçons, comme tout à l'heure, quelques parallèles ...



$$\frac{|JX|}{|JB|} = \frac{|JY|}{|JC|} = \frac{2}{3}$$

à cause des projections de segments égaux.

Donc $XY \mathbin{//} BC$ et, comme

$$EG \mathbin{//} BC$$

il s'ensuit que $XY \mathbin{//} EG$.

Comme $EX \mathbin{//} GY$ par construction,

$EXYG$ est un parallélogramme

On a encore :

$$|EL| = |LJ| = \frac{|EJ|}{2} = \frac{|JY|}{2}$$

Mais $|JM| = |MY| = \dfrac{|JY|}{2}$, donc

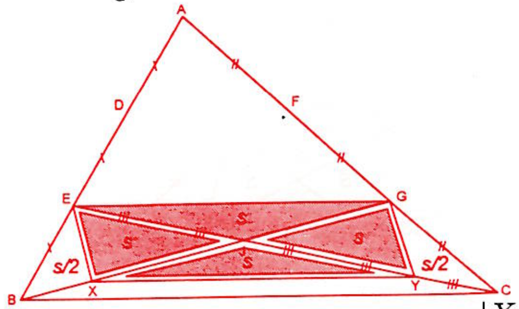
$$|EL| = |LJ| = |JM| = |MY|$$

Comme $|MY| = |YC|$, on voit que

J est aux trois cinquièmes de $[CE]$

J est aux trois cinquièmes de $[BG]$

d'où la figure en résumé



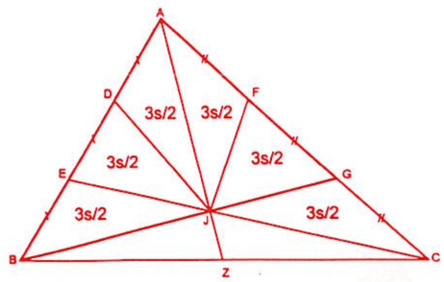
$$\text{Aire}(EBX) = \frac{s}{2} \text{ car } |BX| = \frac{|XJ|}{2}$$

Donc $\text{Aire}(IEB) = \dfrac{3s}{2}$. Il vient

$$\text{Aire}(BJA) = \text{Aire}(CJA) = \frac{9s}{2}$$

et

$$\text{Aire}(BAG) = \frac{15s}{2}$$



Donc

$$\text{Aire}(ABC) = S = \frac{15s}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{45}{4}s$$

D'où finalement :

$$\boxed{s = \frac{4}{45}S}$$

Mais alors ... on peut calculer l'aire de BJC par

$$S - 6 \times \frac{3}{2}s$$

On obtient :

$$\text{Aire}(BJC) = \frac{45}{4}s - \frac{36}{4}s = \frac{9}{4}s$$

Plus joli, encore ...

$$\boxed{\text{Aire}(BJC) = \frac{1}{5}S}$$

Avec les hauteurs, comme tout à l'heure, on voit que

J est au cinquième de $[ZA]$

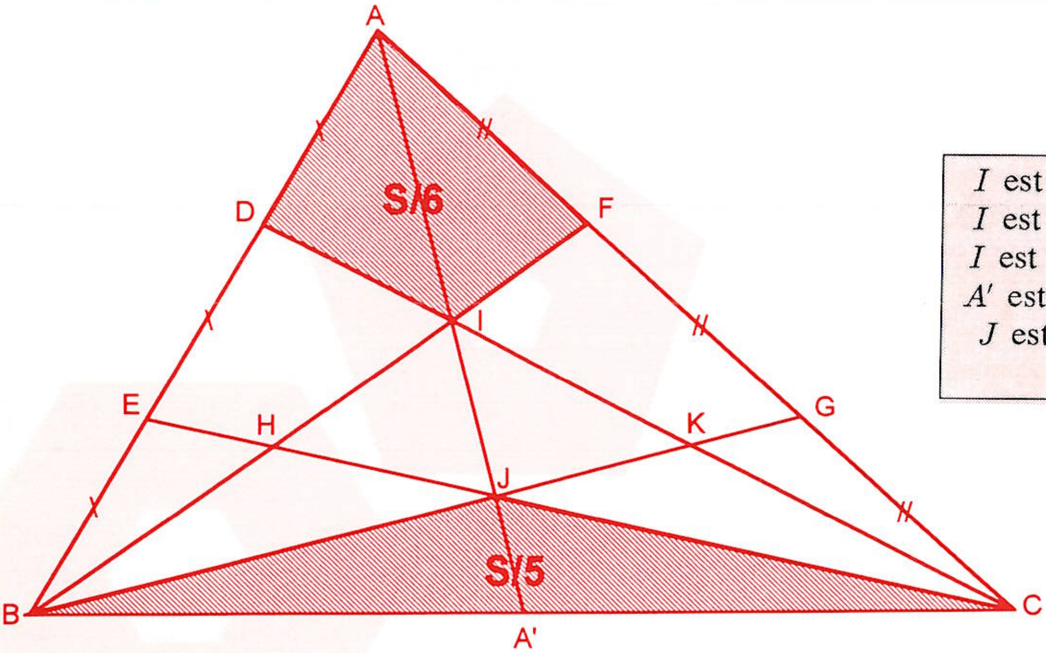
Mais, dans le triangle $AA'B$, on conclut que

$$\text{Aire}(BJZ) = \frac{9}{2}s \times \frac{1}{4} = \frac{9}{8}s$$

De même, l'aire de JZC vaut aussi $\frac{9}{8}s$. Il vient donc

$\text{Aire}(BJZ) = \text{Aire}(JZC)$ et Z **est le milieu de** $[BC]$ **; c'est** A' !!!

Résumons sur une figure unique la collecte de toutes nos informations :



I est au quart de $[FB]$
I est au quart de $[DC]$
I est le milieu de $[AA]'$
A' est le milieu de $[BC]$
J est au cinquième de $[A'A]$

À suivre ...

Math-Jeunes n°72, 40–42, 1995

Rosaces de type « vitrail »

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

C'est dans l'article *Window Patterns*, de William GIBBS (University of Leeds) in Mathematics in School, Vol. 24 No. 1 (January 1995) que nous avons puisé les deux méthodes décrites ci-dessous, qui permettent de créer des rosaces étoilées de type « vitrail ».

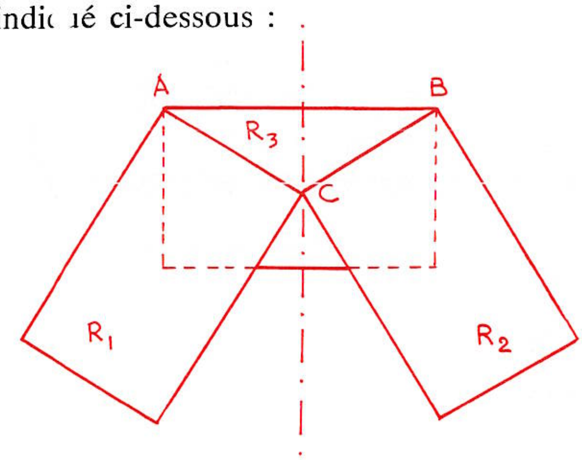
Les motifs sont obtenus par superposition de rectangles découpés dans du film coloré mince ; GIBBS signale d'ailleurs que celui qu'on peut se procurer chez W.H. Smiths donne d'excellents résultats : grâce à sa charge électrostatique, il est inutile d'utiliser de la colle pour maintenir les rectangles en place ...

Les formes ainsi obtenues sont particulièrement belles si on les observe face à une source lumineuse, comme par exemple, une fenêtre, d'où l'appellation « vitrail ».

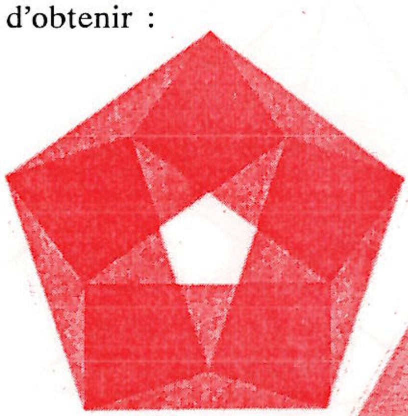
Les deux méthodes que nous avons retenues s'appellent « Ring Stars » ou étoiles-anneaux et « Strip Stars » ou étoiles-rubans.

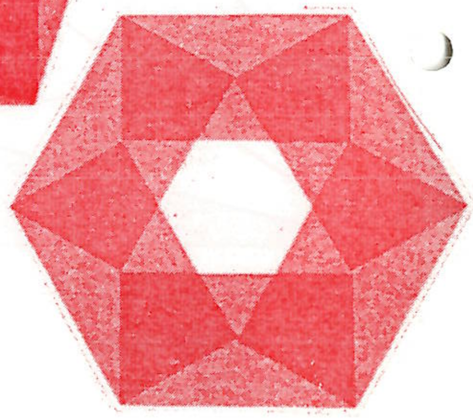
1. Étoiles-anneaux

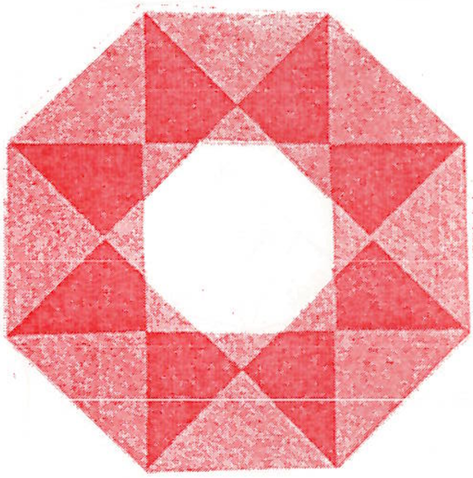
Il suffit de superposer les rectangles comme indiqué ci-dessous :



R_1 possède un coin commun avec R_3 : A ; de même, R_2 a un coin commun avec R_3 : B. Quant au point C, il est situé sur une médiane de R_3. Il est ainsi possible d'obtenir :



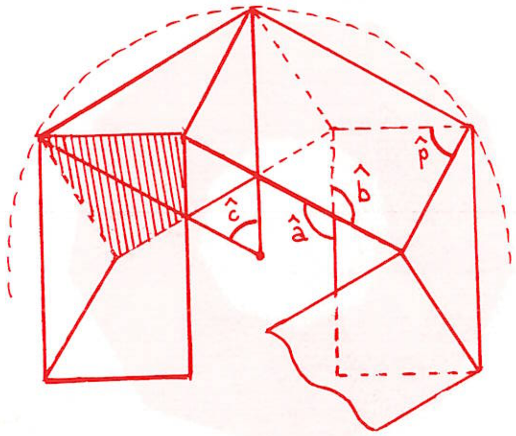




Remarquons le « trou central » qui justifie la terminologie « étoile-anneau ».

J'espère, ami lecteur, que tu as intuitivement ressenti que le nombre de branches de l'étoile était lié au « format » du rectangle ou, pour être plus précis, au rapport

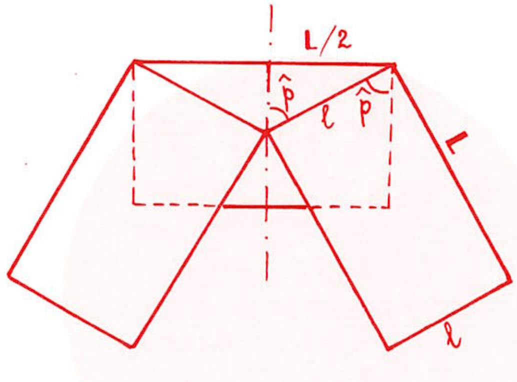
$\dfrac{\text{largeur}}{\text{longueur}} = \dfrac{\ell}{L}$ des dimensions de ce rectangle. Essayons d'y voir un peu plus clair ...



Si n est le nombre de branches de l'étoile, l'angle au centre $\hat{c}$ vaut évidemment $\dfrac{360}{n}$ degrés.
Je dis que, quel que soit n, $\hat{a} = 180° - \hat{c}$. Essaie de justifier cette affirmation ... C'est assez simple. Je dis aussi que $\hat{b} = \hat{a}$, ce qui est encore plus facile à voir. Je dis enfin que

$$\hat{p} = 180°-\hat{b} = 180°-\hat{a} = 180°-(180°-\hat{c}) = \hat{c}$$

Mais là, pour la justification, je pense qu'il faudra en discuter avec ton prof. de math., qui va sans doute te parler de quadrilatères inscriptibles. Ainsi, $\hat{p}$, l'angle de la pointe d'une branche de l'étoile vaut $\dfrac{360}{n}$ degrés. Bien ! Continuons ...



Si nous faisons appel à nos connaissances de trigonométrie dans le triangle rectangle, il vient :

$$\sin\hat{p} = \frac{\frac{L}{2}}{\ell} = \frac{L}{2\ell}$$

ou encore

$$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{2\sin\hat{p}}$$

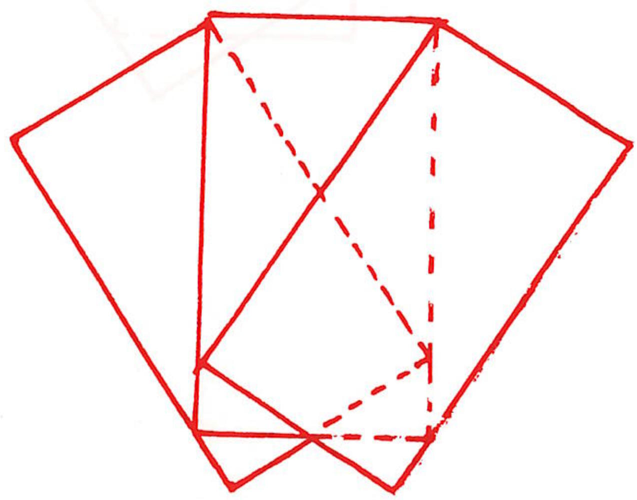
Ainsi, pour les différents exemples qui précèdent, nous avons :

étoile 5	$\hat{p} = 72°$	$\frac{\ell}{L} \approx \frac{10}{19}$
étoile 6	$\hat{p} = 60°$	$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{571}{989}$
étoile 8	$\hat{p} = 45°$	$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{70}{99}$
étoile 9	$\hat{p} = 40°$	$\frac{\ell}{L} \approx \frac{1019}{1310}$
étoile 12	$\hat{p} = 30°$	$\frac{\ell}{L} = 1$

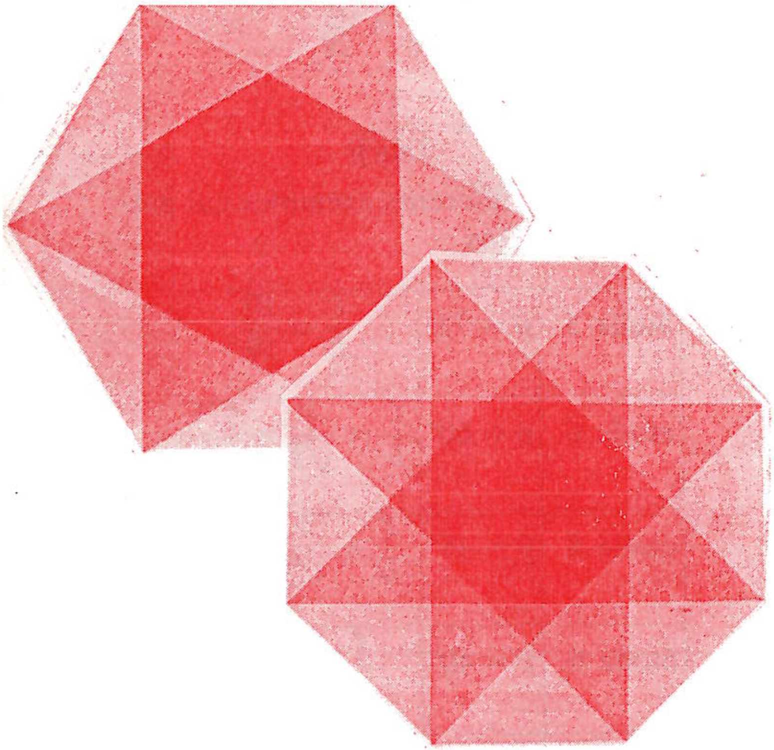
Remarquons que le rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ correspond au format A4.

2. Étoiles-rubans

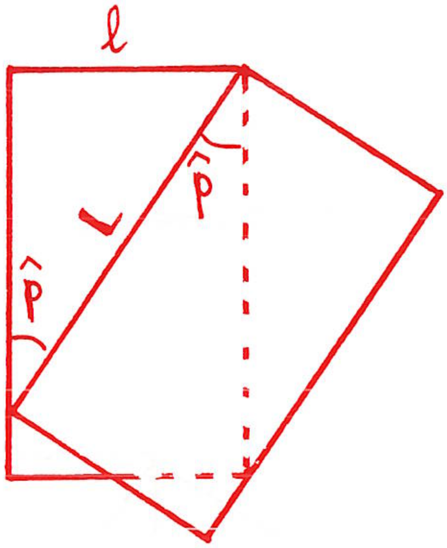
Elles s'obtiennent en superposant les rectangles de la manière suivante :



Voici deux exemples d'étoiles-rubans :



Ici encore, le motif est fonction du rapport $\frac{\ell}{L}$.



On a :

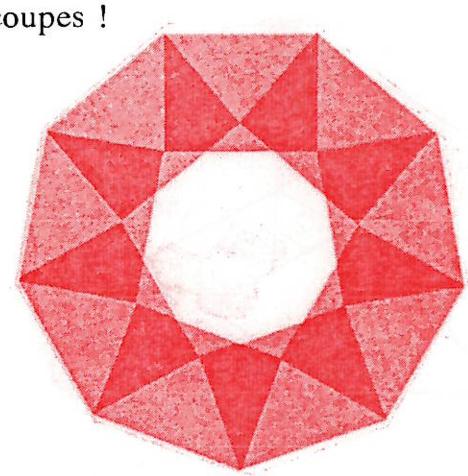
$$\sin \hat{p} = \frac{\ell}{L}$$

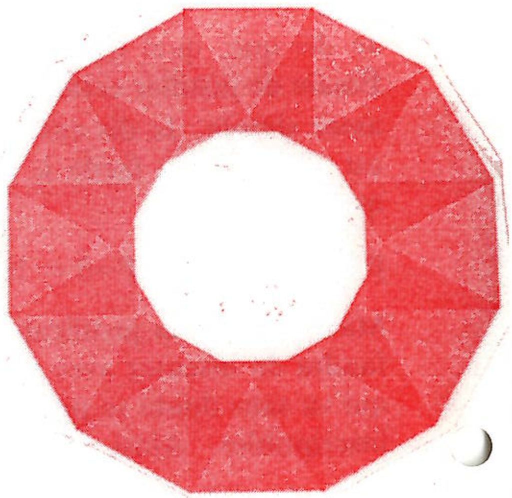
Ainsi,

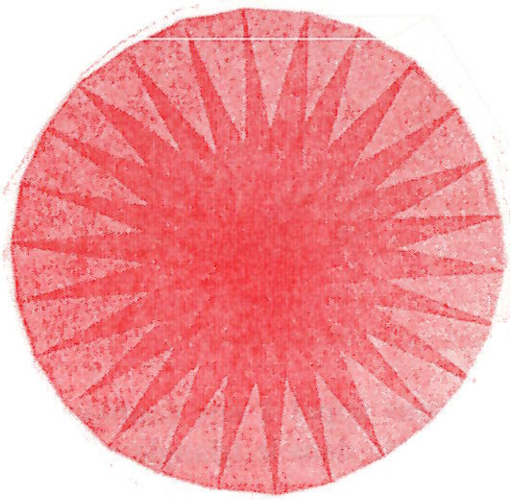
étoile 6	$\hat{p} = 60°$	$\frac{\ell}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{84}{97}$
étoile 8	$\hat{p} = 45°$	$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{70}{99}$

De nouveau, le format A4 donne une étoile à 8 branches.

La rédaction te souhaite d'excellentes découpes !







La droite d'Euler d'un triangle

Guy Robert, *Centre FOPEMA, F.U. N.-D. Paix, Namur*

Nous avions évoqué, dans *Math-Jeunes* n° 71, la *droite d'*EULER en nous promettant d'y revenir plus en détail : ce sera l'objet du présent article.

Définition

On appelle droite d'EULER *d'un triangle (non équilatéral) la droite passant par son orthocentre H et le centre de son cercle circonscrit O.*

Propriété fondamentale

Dans tout triangle (non équilatéral) le centre de gravité G (isobarycentre) appartient à la droite d'EULER. Autrement dit, les points H, G, O sont alignés.

Première démonstration

Notons (provisoirement) G le point d'intersection de la médiane AM_a et de la droite d'EULER OH.

Les triangles AGH et M_aGO sont semblables (rapport de similitude égal à 2) puisque $|AH| = 2|OM_a|$ (relation classique dans un triangle).

On en conclut que G coïncide avec le centre de gravité et l'on note que l'on a aussi : $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{OG}$

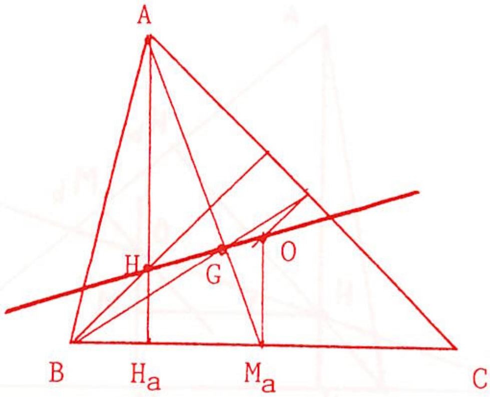


Fig. 1

Deuxième démonstration (1)

Soit, dans le plan du triangle, un point X tel que :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (1)$$

Désignant par M_a le milieu du côté $[BC]$, la relation (1) conduit successivement à :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{M_aB} + \overrightarrow{OM_a} + \overrightarrow{M_aC} \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{OM_a},\end{aligned}$$

d'où : $$\overrightarrow{AX} = 2 \cdot \overrightarrow{OM_a}$$

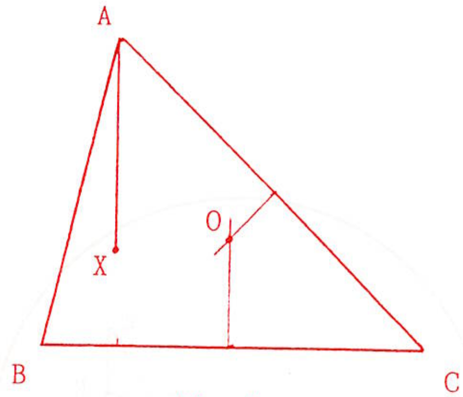


Fig. 2

Cette dernière relation montre que le point X appartient à la droite

- passant par A
- parallèle à la médiatrice de $[BC]$,

ce que nous traduirons par « X appartient à la hauteur issue de A ». Montrant de même que X appartient à la hauteur issue de B et à celle issue de C, on conclut finalement que X est le point de concours des hauteurs (l'orthocentre) et, en remplaçant X par H, nous avons :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

D'autre part, G étant l'isobarycentre du triangle, on a

$$3 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (3)$$

(1) D'après Y. et R. SORTAIS, *Géométrie du Triangle.*

Comparant (2) et (3) :

$$\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$$

ce qui montre que les points O, G, H sont alignés et tels que :

$$\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}$$

Troisième démonstration

Dans cette démonstration, nous commencerons par démontrer une propriété barycentrique générale : la droite d'EULER en est un cas particulier [2]

> On considère n points quelconques situés sur un cercle. Du barycentre de $(n-2)$ d'entre eux, on abaisse la perpendiculaire sur la corde qui joint les deux autres. Toutes les droites ainsi obtenues sont concourantes.

Notons O le centre du cercle, M et N deux quelconques des n points, g le barycentre des $(n-2)$ points autres que M et N, G le barycentre des n points, Q le milieu de la corde $[MN]$.

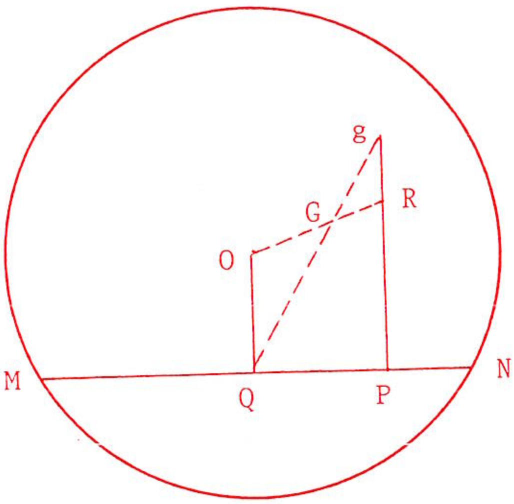


Fig. 3

Le point G est aussi le barycentre des points Q et g respectivement affectés des coefficients 2 et $(n-2)$. Dès lors :

$$(n-2) \cdot \overrightarrow{Gg} + 2 \cdot \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{O}$$

([2]) Cette généralisation est due à S. KANTOR, *Wiener Sitzungsberichte*, 1876.

et donc

$$\overrightarrow{Gg} = -\frac{2}{n-2} \cdot \overrightarrow{GQ}$$

Abaissons de g la perpendiculaire sur MN qui rencontre OG en R :

$$\overrightarrow{GR} = -\frac{2}{n-2} \cdot \overrightarrow{GO}$$

ce qui montre que R est un point fixe de OG, indépendant de la corde MN choisie.

> **Toutes les perpendiculaires telles que gP passent par ce point R.**

En particulier, si $n = 3$, les trois points déterminent un triangle dont G est le barycentre, g un sommet et gP une hauteur.
La propriété ci-dessus établit simultanément que :

1. les trois hauteurs sont concourantes (le point fixe R est l'orthocentre H du triangle)
2. les points G, O, $H(= R)$ sont alignés (droite d'EULER)
3. $\overrightarrow{GH} = -\frac{2}{3-2} \cdot \overrightarrow{GO}$ ou $\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}$.

Remarquons qu'on obtiendrait d'autres propriétés (pouvant être d'un certain intérêt) en attribuant à n d'autres valeurs particulières.

Relation angulaire

Nous nous proposons d'établir ici une relation générale entre les angles d'un triangle et les angles formés par ses côtés avec la droite d'EULER.

Cas général

Soit à déterminer l'angle $\widehat{\theta_a}$ formé par le côté BC et la droite d'EULER du triangle ABC.

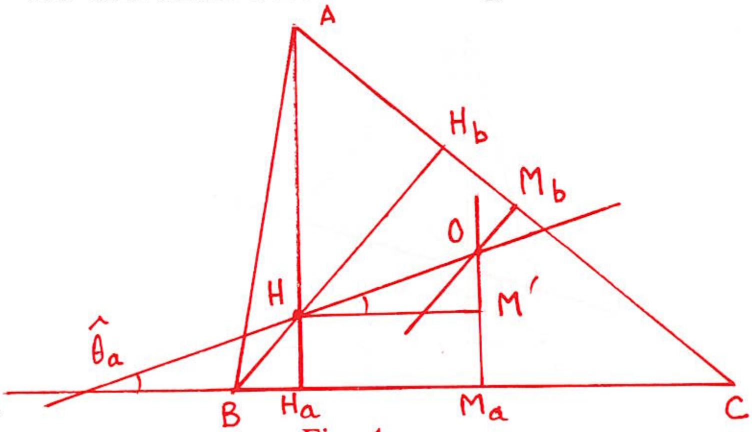


Fig. 4

Par H menons une parallèle à BC coupant OM_a en M'. L'angle $\widehat{OHM'}$ est égal à l'angle cherché $\widehat{\theta_a}$ et l'on a :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{M'O}{HM'} = \frac{M_aO - H_aH}{BM_a - BH_a} \qquad (1)$$

Or, on peut établir — demande à ton professeur de mathématiques — que ($R = |OA| = |OB| = |OC|$ = rayon du cercle circonscrit) :

$$M_aO = R\cdot\cos\widehat{A}$$
$$BM_a = \frac{BC}{2} = \frac{2\cdot R\cdot\sin\widehat{A}}{2} = R\cdot\sin\widehat{A}$$
$$H_aH = 2\cdot R\cdot\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}$$
$$BH_a = 2\cdot R\cdot\sin\widehat{C}\cdot\cos\widehat{B}$$

L'expression (1) peut donc s'écrire :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{R\cdot\cos\widehat{A} - 2\cdot R\cdot\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}}{R\cdot\sin\widehat{A} - 2\cdot R\sin\widehat{C}\cdot\cos\widehat{B}} \qquad (2)$$

D'autre part :
$\cos\widehat{A} = -\cos(\widehat{B}+\widehat{C}) = \sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C} - \cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}$
$\sin\widehat{A} = \sin(\widehat{B}+\widehat{C}) = \sin\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C} + \sin\widehat{C}\cdot\cos\widehat{B}$
Introduisant ces valeurs dans (2) on obtient (après avoir simplifié par R) :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{\sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C} - 3\cdot\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C} - \sin\widehat{C}\cdot\cos\widehat{B}}$$

Divisant alors numérateur et dénominateur du second membre par $\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}$:

$$\boxed{\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{\operatorname{tg}\widehat{B}\cdot\operatorname{tg}\widehat{C} - 3}{\operatorname{tg}\widehat{B} - \operatorname{tg}\widehat{C}}} \qquad (3)$$

Telle est la relation générale recherchée. On obtiendrait, de même, les expressions analogues des angles formés par la droite d'EULER avec les autres côtés du triangle :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_b} = \frac{\operatorname{tg}\widehat{C}\cdot\operatorname{tg}\widehat{A} - 3}{\operatorname{tg}\widehat{C} - \operatorname{tg}\widehat{A}}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_c} = \frac{\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} - 3}{\operatorname{tg}\widehat{A} - \operatorname{tg}\widehat{B}}$$

Cas particuliers

- Lorsque le triangle est équilatéral : $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ et $\operatorname{tg}\widehat{A} = \operatorname{tg}\widehat{B} = \operatorname{tg}\widehat{C} = \sqrt{3}$, la relation (3) devient :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{0}{0}$$

traduisant le fait que le triangle n'a pas de droite d'EULER (H, G, O sont trois points confondus).

- Lorsque le triangle est isocèle : $\widehat{B} = \widehat{C}$ et $\operatorname{tg}\widehat{B} = \operatorname{tg}\widehat{C}$, la relation (3) s'écrit :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} - 3}{0}$$

La droite d'EULER est perpendiculaire au côté BC (elle est confondue avec la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet A).

Complément

Nous nous attarderons sur un troisième cas particulier conduisant à d'intéressants développements :

Lorsque $\operatorname{tg}\widehat{B}\cdot\operatorname{tg}\widehat{C} = 3$ (4),
la relation (3) s'écrit :

$$\operatorname{tg}\widehat{\theta_a} = \frac{0}{\operatorname{tg}\widehat{B} - \operatorname{tg}\widehat{C}} = 0$$

de sorte que : **la droite d'EULER est parallèle au côté BC.**

- Notant α le rapport de section de l'orthocentre relativement à la hauteur AH_a, nous aurons :

$$\alpha = \frac{AH}{HH_a} - \frac{2\cdot R\cdot\cos\widehat{A}}{2\cdot R\cdot\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}}$$
$$= \frac{\cos\widehat{A}}{\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}} \qquad (5)$$

et aussi :

$$\alpha + 1 = \frac{-\cos(\widehat{B}+\widehat{C})}{\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}} + 1 = \operatorname{tg}\widehat{B}\cdot\operatorname{tg}\widehat{C}$$

de sorte que d'après (4), la droite d'EULER est parallèle au côté BC lorsque

$$\alpha = \frac{AH}{HH_a} = 2$$

ou encore d'après (5) lorsque

$$\boxed{\cos\widehat{A} = 2\cdot\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C}} \qquad (6)$$

Cette dernière relation est donc caractéristique de tout triangle dans lequel la droite d'EULER est parallèle au côté BC.

Math-Jeunes n°72, 46–48, 1995

- Nous dirons que la relation (6) est « spécifique » de la « famille de triangles » dans lesquels la droite d'EULER est parallèle au côté BC. ([3])

- Cette relation (6) peut être soumise à des transformations trigonométriques conduisant, chacune, à une nouvelle relation spécifique de la famille. On peut aussi rechercher ce que deviennent certaines « formules » générales lorsqu'on les applique à ce cas particulier. Il est possible encore, en tenant compte à la fois des relations découvertes et de la figure illustrant la définition géométrique de la famille, de trouver d'autres propriétés géométriques. Enfin, on peut se proposer de rechercher les lieux géométriques de points remarquables du triangle lorsqu'un élément (le côté BC, par exemple) est donné et que ce triangle doit toujours être tel que sa droite d'EULER soit parallèle à BC.

Voici, parmi beaucoup d'autres, trois exemples de « découvertes » ; nous vous invitons à les démontrer :

> Lorsque, dans un triangle, la droite d'EULER est parallèle au côté BC :
>
> 1°. On a les relations angulaires :
>
> $$\operatorname{tg} \widehat{B} + \operatorname{tg} \widehat{C} = 2 \cdot \operatorname{tg} \widehat{A}$$
> $$\sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) = 2 \cdot \sin(2\widehat{A})$$
>
> 2°. Les côtés du triangle orthique ([4]) sont en progression arithmétique.
>
> 3°. Le lieu géométrique du sommet A lorsque le côté BC reste fixe est une ellipse (à traiter par la géométrie analytique).

N'hésitez pas à vous lancer dans vos propres recherches : vous aurez, très certainement, la bonne fortune de « découvrir » de nouvelles relations et/ou propriétés. Faites-nous part de vos résultats : nous ne manquerons pas de les publier !

([3]) Pour un aperçu plus complet de ce qu'il faut entendre par « famille de triangles », voir G. ROBERT in *Mathématique et Pédagogie*, 1993, n° 91, p. 27 – 41 et n° 92, p. 17 – 26.

([4]) « Triangle orthique » : triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

Don Quichotte

Miguel de Cervantes,

Chapitre LI

Miguel de Cervantes est né à Alcalá de Henares en 1547. Après avoir été élève d'un disciple d'Érasme, il cherche fortune dans les armes. Il aura une vie assez mouvementée. En 1589, accusé de s'être attaqué aux biens de l'Église, il sera arrêté et excommunié. Ceci ne l'empêchera pas, après d'autres péripéties, d'entrer dans le Tiers-Ordre de Saint-François. Il meurt à Madrid en 1616. Son ouvrage le plus connu, El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha*, probablement écrit entre 1598 et 1604 est un récit en prose, considéré comme l'un des chefs-d'œuvre de la littérature mondiale. Une seconde partie paraîtra dix ans plus tard ; elle sera en quelque sorte l'illustration, l'interprétation et la conclusion définitive de la première. Le but de Cervantes a été d'écrire un roman de chevalerie capable de se détacher de tous les autres, qui étaient très répandus à cette époque.*

On trouve, dans le récit, un **paradoxe logique***. Pour rester simple, nous dirons qu'un « paradoxe » est un résultat mathématique tellement contraire à l'intuition et au bon sens qu'il provoque une grande surprise. C'est un peu comme un tour de magie : très souvent, l'étonnement qu'il engendre induit le désir pressant d'en connaître le « truc ».*

Le paradoxe de la pendaison se trouve au chapitre LI du second livre du Don Quichotte. Sancho Panza, valet de Don Quichotte, est devenu … gouverneur d'une île …

CHAPITRE LI

Des progrès du gouvernement de Sancho Panza, ainsi que d'autres événements tels quels.

Le jour vint après la nuit de la ronde du gouverneur, nuit que le maître d'hôtel avait passée sans dormir, l'esprit tout occupé du visage et des attraits de la jeune fille déguisée. Le majordome en employa le reste à écrire à ses maîtres ce que faisait et disait Sancho Panza, aussi surpris de ses faits que de ses dires ; car il entrait dans ses paroles et dans ses actions comme un mélange d'esprit et de bêtise. Enfin le Seigneur gouverneur se leva, et, par ordre du docteur Pédro Récio, on le fit déjeuner avec un peu de conserve et quatre gorgées d'eau froide, chose que Sancho eût volontiers troquée pour un quignon de pain et une grappe de raisin. Mais, voyant qu'il fallait faire de nécessité vertu, il en passa par là, à la grande douleur de son âme et à la grande fatigue de son estomac ; Pédro Récio lui faisant croire que les mets légers et délicats avivent l'esprit, ce qui convient le mieux aux personnages constitués en dignité et chargés de graves emplois, où il faut faire usage moins des forces corporelles que de celles de l'intelligence. Avec cette belle argutie, le pauvre Sancho souffrait la faim, et si fort qu'il maudissait, à part lui, le gouvernement, et même celui qui le lui avait donné.

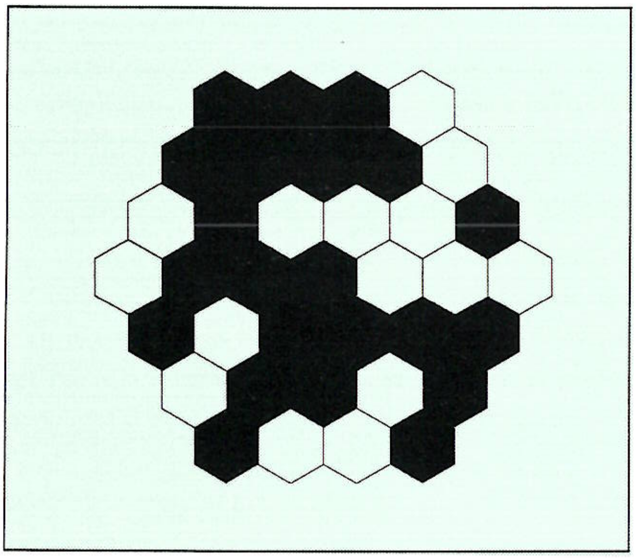
Toutefois, avec sa conserve et sa faim, il se mit à juger ce jour-là ! et la première chose qui s'offrit, ce fut une question que lui fit un étranger en présence du majordome et de ses autres acolytes. Voici ce qu'il exposa : « Seigneur, une large et profonde rivière séparait deux districts d'une même seigneurie ; et que Votre Grâce me prête attention, car le cas est important et passablement difficile à résoudre. Je dis donc que sur cette rivière était un pont, et au bout de ce pont une potence, ainsi qu'une espèce de salle d'audience où se tenaient d'ordinaire quatre juges chargés d'appliquer la loi qu'avait imposée le seigneur de la rivière, du pont et de la seigneurie ; cette loi était ainsi conçue : « Si quelqu'un passe sur ce pont d'une rive à l'autre, il devra d'abord déclarer par serment où il va et ce qu'il va faire. S'il dit vrai, qu'on le laisse passer ; s'il ment, qu'il meure pendu à la potence, sans aucune rémission. » Cette loi connue, ainsi que sa rigoureuse condition, beaucoup de gens passaient néanmoins, et, à ce qu'ils déclaraient sous serment, on reconnaissait s'ils disaient la vérité ; et les juges, dans ce cas, les laissaient passer librement. Or il arriva qu'un homme auquel on demandait sa déclaration prêta serment et dit : « Par le serment que je viens de faire, je jure que je vais mourir à cette potence, et non à autre chose. » Les juges réfléchirent à cette déclaration, et se dirent : « Si nous laissons librement passer cet homme, il a menti à son serment, et, selon la loi, il doit mourir ; mais si nous le pendons, il a juré qu'il allait mourir à cette potence, et, suivant la même loi, ayant dit vrai, il doit rester libre. » On demande à Votre Grâce, seigneur gouverneur, ce que feront les juges de cet homme, car ils sont encore à cette heure dans le doute et l'indécision. Comme ils ont eu connaissance de la finesse et de l'élévation d'entendement que déploie Votre Grâce, ils m'ont envoyé supplier de leur part, Votre Grâce de donner son avis dans un cas si douteux et si embrouillé.

— Assurément, répondit Sancho, ces seigneurs juges qui vous ont envoyé près de moi auraient fort bien pu s'en épargner la peine, car je suis un homme qui a plus d'épaisseur de chair que de finesse d'esprit. Cependant, répétez-moi une autre fois l'affaire, de manière que je l'entende bien ; peut-être ensuite pourrais-je trouver le joint. » Le questionneur répéta une et deux fois ce qu'il avait d'abord exposé. Sancho dit alors : « À mon avis, je vais bâcler cette affaire en un tour de main, et voici comment : cet homme jure qu'il va mourir à la potence, n'est-ce pas ? et, s'il meurt, il aura dit la vérité ; et, d'après la loi, il mérite d'être libre et de passer le pont ? Mais si on ne le pend pas, il aura dit un mensonge sous serment, et, d'après la même loi, il mérite d'être pendu ? —

C'est cela même, comme dit le seigneur gouverneur, reprit le messager ; et, quant à la parfaite intelligence du cas, il n'y a plus à douter ni à questionner. — Je dis donc à présent, répliqua Sancho, que de cet homme on laisse passer la partie qui a dit vrai et qu'on pende la partie qui a dit faux ; de cette manière s'accomplira au pied de la lettre la condition du passage. — Mais, seigneur gouverneur, repartit le porteur de question, il sera nécessaire qu'on coupe cet homme en deux parties, la menteuse et la véridique, et si on le coupe en deux, il faudra bien qu'il meure. Ainsi l'on n'aura rien obtenu de ce qu'exige la loi, qui doit pourtant s'accomplir de toute nécessité. — Venez ici, seigneur brave homme, répondit Sancho. Ce passager dont vous parlez, ou je ne suis qu'une cruche, ou a précisément autant de raison pour mourir que pour passer le pont ; car, si la vérité le sauve, le mensonge le condamne. Puisqu'il en est ainsi, mon avis est que vous disiez à ces messieurs qui vous envoient auprès de moi que les raisons de le condamner ou de l'absoudre étant égales dans les plateaux de la balance, ils n'ont qu'à le laisser passer, car il vaut toujours mieux faire le bien que le mal ; et cela, je le donnerais signé de mon nom, si je savais signer. D'ailleurs, je n'ai point, dans ce cas-ci, parlé de mon cru ; mais il m'est revenu à la mémoire un précepte que, parmi beaucoup d'autres, me donna mon maître don Quichotte, la nuit avant que je vinsse être gouverneur de cette île ; lequel précepte fut que, quand la justice serait douteuse, je n'avais qu'à pencher vers la miséricorde et à m'y tenir. Dieu a permis que je m'en souvinsse à présent, parce qu'il va comme au moule à cette affaire. — Oh ! certainement, ajouta le majordome, et je tiens, quant à moi, que Lycurgue lui-même, celui qui donna les lois aux Lacédémoniens, n'aurait pu rendre une meilleure sentence que celle qu'a rendue le grand Sancho Panza. Finissons là l'audience de ce matin, et je vais donner ordre que le seigneur gouverneur dîne tout à son aise. — C'est là ce que je demande, et vogue la galère ! s'écria Sancho ; qu'on me donne à manger, et puis qu'on fasse pleuvoir sur moi des cas et des questions : je me charge de les éclaircir à vol d'oiseau. » Le majordome tint parole, car il se faisait un vrai cas de conscience de tuer de faim un si discret gouverneur. D'ailleurs, il pensait en finir avec lui cette nuit même, en lui jouant le dernier tour qu'il avait mission de lui jouer. Or il arriva qu'après que Sancho eut dîné ce jour-là contre les règles et les aphorismes du docteur Tirtéafuéra, au moment du dessert entra un courrier avec une lettre de don Quichotte pour le gouverneur. Sancho donna l'ordre au secrétaire de la lire d'abord tout bas, et de la lire ensuite à voix haute, s'il n'y voyait rien qui méritât le secret. Le secrétaire obéit, et, quand il eut parcouru la lettre : « On peut bien la lire à haute voix, dit-il, car ce qu'écrit à Votre Grâce le Seigneur don Quichotte mérite d'être gravé en lettres d'or. Le voici : ...

Solutions des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Additions cachées

Laten we Nederlands spreken

Une solution est :

$E = 4,\ F = 3,\ G = 5,\ I = 2,\ J = 9,\ N = 1,\ R = 8,\ V = 7$

Parliamo Italiano

$E = 5,\ I = 0,\ N = 1,\ O = 2,\ R = 8,\ S = 7,\ T = 4,\ V = 3$

Hablemos Español

$C = 1,\ D = 6,\ E = 3,\ I = 0,\ N = 2,\ O = 8,\ R = 5,\ S = 4,\ T = 9$

Produit croisé

	1	2	3	4	5	6
1	R	A		O	S	E
2	E	V	I	D	E	R
3	S	I		E	R	S
4	I	N	I	T	I	E
5	D	E	T	T	E	S
6	U	S	E	E	S