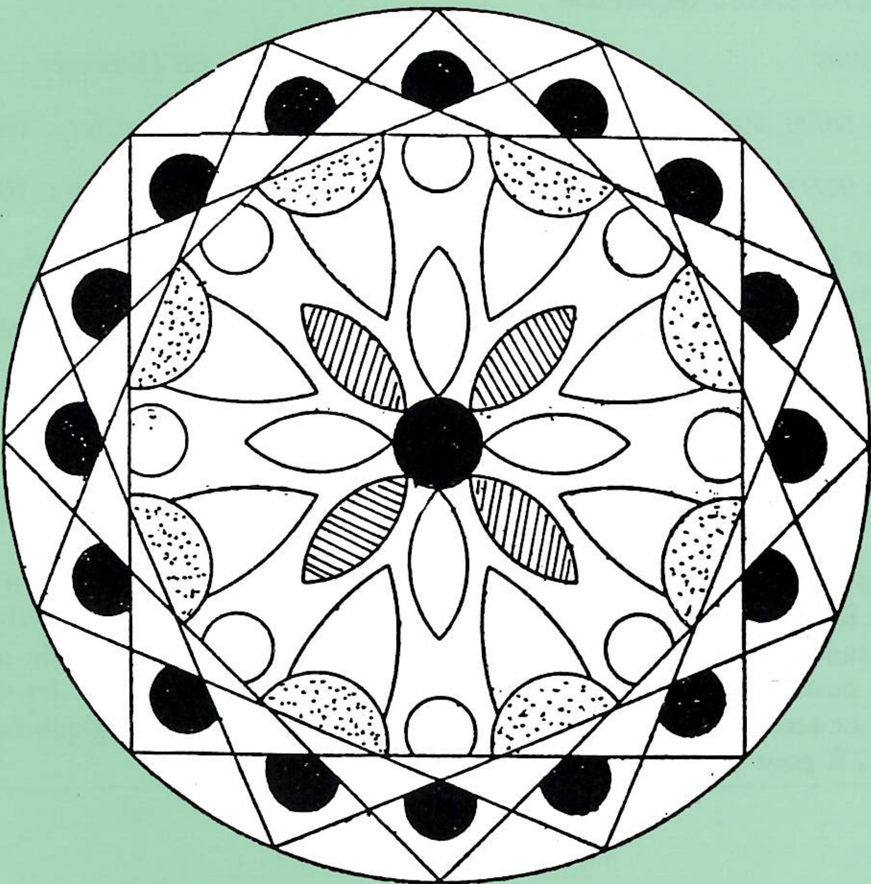
MATH - JEUNES



17^e année
Janvier 1996 – n° 73
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, G.Noël, A.Parent, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux
Conception de la couverture : K. Martroye

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Étranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	150 FB	• Groupés (5 ex. au moins) :	250 FB (42 FF)
• Isolés :	200 FB	• Isolés :	330 FB (55 FF)

Anciens numéros encore disponibles :

- Avant 1989 — Par numéro : 15 FB (Étranger : 30 FB ou 5 FF)
- Années 89/90, 90/91, 91/92 — Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB ou 17 FF)
- Années 92/93, 93/94, 94/95 — 80 FB (Étranger : 160 FB ou 27 FF)

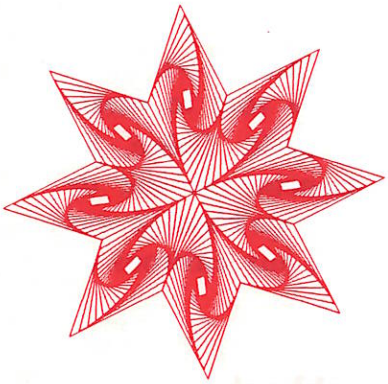
Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

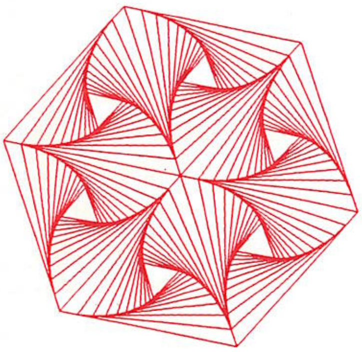
- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

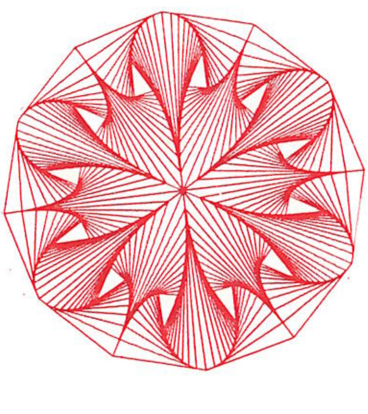
Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°73 Dix-septième année 1996

Math-Jeunes







Math-Jeunes n°73, 50–52, 1996

La règle de trois

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

1. Introduction

Certains parmi vous se rappellent peut-être un certain Léonard de Pise encore connu sous le nom de Fibonacci. Ta revue préférée a déjà plusieurs fois présenté une suite de nombres entiers qui porte son nom (*suite* ou *nombres de Fibonacci*) et qui l'a rendu célèbre :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Elle est liée à la descendance d'un couple de lapins placé dans des conditions très particulières. C'est un problème qu'on peut qualifier de « récréation mathématique » et que Fibonacci présente au chapitre 12 d'un de ses ouvrages les plus connus, le *liber abbaci* publié en 1202 et revu en 1228. Ce livre écrit en latin, langue des savants en Occident à cette époque, est avant tout un traité d'arithmétique (chapitres 1 à 7) par lequel l'auteur espère convaincre ses contemporains de la supériorité du système de numération positionnelle (que nous utilisons toujours) face au système littéral des Romains qui était encore très en vogue à l'époque mais nécessitait l'usage d'abaques (espèces de bouliers compteurs) pour opérer la moindre multiplication. Les chapitres 8 à 11 concernent l'arithmétique commerciale et l'auteur y applique les théories enseignées dans les chapitres précédents. Au chapitre 12, on trouve, comme nous venons de le voir des « récréations mathématiques ». Enfin, les trois derniers chapitres clôturent l'œuvre par l'étude des règles de fausse position dont *Math-Jeunes* espère te parler un jour, l'extraction des radicaux carrés et cubiques et l'introduction de l'algèbre, pur produit arabe du début du neuvième siècle de notre ère.

On possède peu de renseignements sur Léonard de Pise autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *liber abbaci*. Son père était *publicus scriba* c'est-à-dire scribe (celui qui tient les écritures comptables) pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie en Kabylie, dans le nord-est de l'Algérie — là où on fabriquait de petites chandelles ; il fit venir son fils auprès de lui afin de lui apprendre, au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen des figures indiennes (ce que nous appelons « chiffres arabes »). Plus tard, Fibonacci parcourra tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence) pour étancher sa soif de savoir. On peut considérer qu'il est né vers 1170 et qu'il vivait encore aux environs de 1240.

2. Extrait du liber abbaci

Incipit capitulum octauum de reperiendis pretiis mercium per maiorem guisam.

In omnibus itaque negotiationibus quattuor numeri proportionales semper reperiuntur ex quibus tres sunt noti reliquus uero est ignotus primus quidem illorum est numerus uenditionis cuislibet mercis siue constet numero siue pondere siue mensura. Numero quidem ut centum coria uel centum beccune et similium pondera quoque ut cantarum uel centum uel libre aut unce et similium. Mensura quidem ut metra olei sextaria frumenti et canne panni et similium. Secundum autem est pretium illius uenditionis hoc est illius primi numeri siue sit quantitas quorumlibet denariorum siue bizantiorum siue tarenorum uel alicuis alie currentis monete. Tertius uero quandoque erit aliqua eiusdem uendite mercis quantitas cuius pretium scilicet quartus numerus ignoratur et quandoque erit aliqua similis quantitas secundi pretii cuius merces scilicet quartus ignotus numerus iterum ignorabitur. Quare ut ignotus numerus per notos reperiatur talem in omnibus tradimus regulam uniuersa-

lem uidelicet ut in capite tabule in dextera parte scribas primum numerum scilicet mercem retro in eadem linea ponas pretium ipsius mercis uidelicet secundum numerum. Tertium quoque si fuerit mercis scribe eum sub merce scilicet sub primo et si fuerit pretium scribe eum sub pretio uidelicet sub secundo. Ita tamen ut sicut fuit ex genere ipsius sub quo scribendum est ita etiam sit ex qualitate uel ex quantitate ipsius in numero uel in pondere uel in mensura hoc est si superior numerus sub quo scribendus est fuerit numerus rotulorum fiat rotulorum si librarum librarum si uncearum uncearum si cannarum cannarum. Et si fuerit numerus sol(i)dorum et ipse sit numerus sol(i)dorum si denariorum denariorum si tarenorum tarenorum. Et si bizantiorum bizantiorum. Quibus ita descriptis euidentissime apparebit quod duo illorum positi erunt semper ex aduerso qui insimul multiplicentur et summa multiplicationis eorum si per reliquum tertium numerum diuidatur quartus ignotus nimirum inuenietur et ut hoc apertius intelligatur cum diuersis mercibus et pretiis in sequentibus explanabimus. Sed primum ostendam unde hic modus procedat ...

3. Traduction

Ici commence le chapitre huit qui traite de la méthode pour trouver les prix des marchandises de la meilleure manière.

Ainsi, dans toutes les transactions commerciales, on trouve toujours quatre nombres proportionnels parmi lesquels trois sont connus alors que le dernier est inconnu. Et le premier de ces trois nombres connus est le nombre d'unités qui vont être proposées à la vente de n'importe quelle marchandise, que cela se traduise par un nombre, un poids ou une mesure, ... comme par exemple cent peaux ou cent peaux de bouc, ... mais aussi par des poids comme un cantar, un cent, des livres ou des onces, ... ou encore une mesure comme une métrète d'huile, des setiers de blé, des aunes d'étoffe, etc. Le second nombre est en fait le prix des unités ci-dessus c'est-à-dire du premier nombre et c'est une certaine quantité de deniers ou de besants ou de tarens ou de n'importe quelle autre monnaie courante. Quant au troisième nombre, tantôt ce sera une certaine quantité d'unités vendues de cette même marchandise dont le prix, à savoir le quatrième nombre est inconnu, tantôt ce sera quelque chose de la même nature que le prix donné en second lieu pour lequel cette fois, on ignorera la quantité de marchandise vendue, à savoir le quatrième nombre inconnu. C'est pourquoi, pour trouver le nombre inconnu à partir des nombres connus, nous te donnons, dans tous les cas, la règle universelle suivante : écris en haut de ta tablette [1] et à droite le premier nombre à savoir la [quantité de] marchandise [proposée à la vente]; derrière et sur la même ligne, indique le prix de cette marchandise, à savoir le deuxième nombre. Quant au troisième nombre, si c'est une quantité de marchandise, écris-le sous la marchandise, c'est-à-dire sous le premier nombre et si c'est un prix, indique-le sous le prix c'est-à-dire sous le deuxième nombre. Cependant, de façon à ce qu'il soit du même genre que celui sous lequel il est écrit, il faut encore qu'il soit de la qualité ou de la quantité de ce nombre – que ce soit nombre, poids ou mesure. C'est-à-dire que si le nombre du dessus sous lequel il est écrit est un nombre de rotuli, de la même manière, il faut qu'il soit exprimé en rotuli; si c'est un nombre de livres, en livres; d'onces, en onces; d'aunes, en aunes. Et si c'est un nombre de sous, il doit être exprimé en sous; si c'est un nombre de deniers, en deniers; de tarens, en tarens; de besants, en besants. Après avoir tracé ceci, il apparaîtra très clairement que deux des trois nombres placés seront toujours à l'opposite; on doit les multiplier et, si on divise le résultat de leur multiplication par le troisième nombre restant, on trouve à coup sûr le quatrième nombre

[1] Fibonacci conseille, dans un chapitre qui précède, de travailler avec les doigts sur une tablette couverte de poussière que l'on peut donc effacer à loisir.

Math-Jeunes n°73, 52–55, 1996

inconnu et, pour faire comprendre ceci plus clairement, nous le développerons en considérant divers prix et marchandises dans ce qui va suivre, mais d'abord je dois montrer d'où cette méthode est venue …

4. Exemple

Le premier exemple dont FIBONACCI se sert pour illustrer sa méthode est très simple — mais il est suivi par une foule d'autres. Le voici :

Un cantar pisan se compose de cent parties, chacune d'elles s'appelant rotulus.
Sachant qu'un cantar se vend 40 livres, combien valent 5 rotuli ?

Et il l'illustre ainsi :

ℓ		Rt
40		100
	↘	
		5

ℓ		Rt
40		100
	↙	
2		5

As-tu compris, ami lecteur ? De nos jours, nous appelons cela une **règle de trois :**

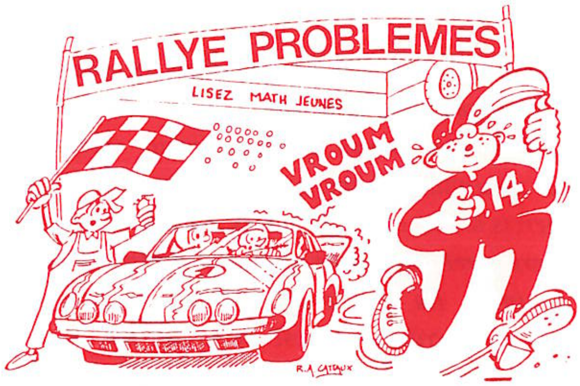
$$\begin{array}{ccc} 100 & \longleftrightarrow & 40 \\ 1 & \longleftrightarrow & \dfrac{40}{100} \\ 5 & \longleftrightarrow & \dfrac{40}{100} \times 5 = 2 \end{array}$$

Bibliographie

• DU CANGE, *Glossarium Mediae et Infimae Latinitatis*, Akademische Druck. U. Verlagsaustalt, Graz (Austria), 1954.

• LEONARDO PISANO, *liber abbaci*, Codex Magliabechiano, Conversi Soppressi C.I. 2616, Nr 73 (Badia Fiorentina), Biblioteca Nazionale Firenze.

• LEONARDO PISANO, *liber abbaci*, Manuscrit I.72 SUP., Biblioteca Ambrosiana Milano.



C. Festraets

Voici les derniers problèmes de ce rallye 1995-1996, ainsi que les solutions des problèmes proposés dans le numéro 71 de *Math-Jeunes.*
N'oubliez pas d'envoyer vos solutions sur des feuilles séparées (ne mettez pas la solution d'un problème au recto et d'un autre problème au verso de la même feuille). Elles doivent parvenir au plus tard le 15 mars à C. FESTRAETS, rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles.

mini 5 Un quadrilatère $ABCD$ possède les propriété suivantes :

1. $AB // DC$ et $AD \not\parallel BC$;
2. $|AB| = |BC| = 3 \cdot |DC| = a$ où a est une longueur donnée ;
3. $\widehat{BAD} = 60°$.

Que vaut le périmètre de ce quadrilatère ?

mini 6 Le triangle de PASCAL est le tableau illimité de nombres entiers que voici :

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ &&&&& \cdots &&&&& \end{array}$$

Il est construit de la manière suivante :

• la première ligne comprend un élément, la deuxième, deux éléments, la troisième, trois éléments, et ainsi de suite ;

- chaque ligne commence et se termine par 1 ;
- à l'intérieur du triangle, tout nombre est la somme des deux nombres situés immédiatement au-dessus de lui, à sa gauche et à sa droite (par exemple, $10 = 4 + 6$).

Soit N le nombre de « 1 » des n premières lignes du triangle et soit M le nombre de nombres qui ne sont pas des « 1 » dans ces n premières lignes. Que vaut le rapport $\frac{M}{N}$?

midi 5 À l'Olympiade Mathématique, il y a eu des premiers prix, des deuxièmes prix et des troisièmes prix. Le nombre d'élèves qui ont gagné un premier prix est inférieur de 12 au nombre d'élèves qui ont gagné un deuxième prix. Le nombre d'élèves qui ont gagné un troisième prix est égal au double du nombre total d'élèves qui ont gagné un premier ou un deuxième prix mais est inférieur de 104 au produit du nombre d'élèves qui ont gagné un premier prix par le nombre d'élèves qui ont gagné un deuxième prix. Quel est le nombre total de lauréats ?

midi 6 Deux cercles C_1 et C_2 se coupent en A et B. Un point P se trouve sur l'arc du cercle C_1 situé à l'extérieur de C_2. Les droites PA et PB coupent C_2 respectivement en X et Y.

Démontrer que, quelle que soit la position de P sur l'arc, la longueur de la corde $[XY]$ est toujours la même.

maxi 5* Lors de son entraînement, un joueur d'échecs doit jouer au moins une partie chaque jour et au plus douze parties par semaine (pour éviter une trop grosse fatigue mentale). Il s'entraîne pendant six mois. Prouver que pendant cette période, il y a une suite de jours consécutifs pendant lesquels il a joué exactement vingt parties.

maxi 6 Soient P_1, P_2, P_3, Q les sommets d'un tétraèdre. On désigne les angles $P_2\widehat{Q}P_3$, $P_3\widehat{Q}P_1$, $P_1\widehat{Q}P_2$ respectivement par α, β, γ. Démontrer que

$$\alpha + \beta > \gamma$$

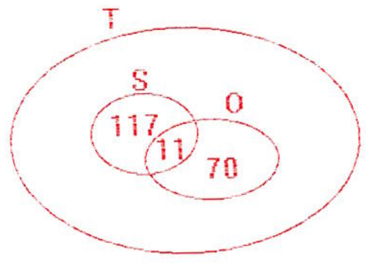
mini 1 – solution

Il y a 900 nombres de trois chiffres (de 100 à 999). Parmi ces nombres de trois chiffres,

- le plus petit et le plus grand multiples de 7 sont 105 ($= 7 \times 15$) et 994 ($= 7 \times 142$) ; il y en a donc $142 - 15 + 1 = 128$ divisibles par 7 ;
- le plus petit et le plus grand multiples de 11 sont 110 ($= 11 \times 10$) et 990 ($= 11 \times 90$) ; il y en a donc $90 - 10 + 1 = 81$ divisibles par 11 ;
- le plus petit et le plus grands multiples à la fois de 7 et de 11, c'est-à-dire de 77 sont 154 ($= 77 \times 2$) et 924 ($= 77 \times 12$) ; il y en a donc $12 - 2 + 1 = 11$ divisibles par 7 et par 11.

Voici un diagramme représentant la situation :

T est l'ensemble des nombres de trois chiffres, S est l'ensemble des multiples de 7 (128 au total) et O est l'ensemble des multiples de 11 (81 au total). L'intersection de S et de O est l'ensemble des multiples à la fois de 7 et de 11 et comprend 11 éléments.



D'où le nombre de brebis et d'agneaux :

$$900 - 117 - 11 - 70 = 702.$$

Le troupeau complet est de $702 + 3 = 705$ moutons dont le tiers, c'est-à-dire 235, sont des brebis. Il y a donc

$$702 - 235 = 467 \text{ agneaux.}$$

mini 2 – solution

Bernard est en première et le garçon qui s'appelle Duval est en deuxième, donc Bernard ne s'appelle pas Duval. Or André ne s'appelle pas non plus Duval. Il ne reste qu'une possibilité : Claude Duval.

Le père de Bernard est ingénieur, donc Bernard ne s'appelle pas Dupont sinon son père serait instituteur. Dès lors, le nom de famille de Bernard est Durant et celui d'André, Dupont.

midi 1 – solution

Posons n le nombre de moutons. Chaque mouton est donc vendu pour n dollars et le montant total de la vente est n^2 dollars.

On sait que les deux frères ont puisé dans le montant de la vente un nombre *impair* de fois 10 dollars (l'aîné, puis le cadet, puis l'aîné, puis le cadet, ..., puis en fin de compte l'aîné), donc quand on divise n^2 par 10, on obtient un quotient impair et un certain reste qui va nous permettre de connaître le prix du canif.

Écrivons n sous la forme $10d + u$ (d est le nombre de dizaines et u le chiffre des unités de n). On obtient :

$$n^2 = (10d + u)^2 = 100d^2 + 20du + u^2 = 20(5d^2 + du) + u^2$$

c'est-à-dire un nombre *pair* de fois 10 dollars plus u^2.

Or $u \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, donc

$$u^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

ce qui nous donne deux possibilités : $u^2 = 16$ ou $u^2 = 36$ pour que le quotient entier de la division de n^2 par 10 soit impair.

On peut alors conclure qu'il ne reste que 6 dollars pour le cadet. Comme l'aîné lui donne son canif et qu'à ce moment les deux parts sont égales, c'est que le canif vaut 2 dollars.

midi 2 – solution

1) $$89 = 25 + 64 = 5^2 + 8^2$$
$$90 = 9 + 81 = 3^2 + 9^2$$

$$8010 = \begin{cases} 441 + 7569 = 21^2 + 87^2 \\ 4761 + 3249 = 69^2 + 57^2 \end{cases}$$

2) Supposons que a est la somme du carré de x et du carré de y et que b est la somme du carré de z et du carré de t (x, y, z, t sont des nombres entiers). On a

$$\begin{aligned} a &= x^2 + y^2 \\ b &= z^2 + t^2 \\ ab &= (x^2 + y^2) \cdot (z^2 + t^2) \\ &= x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 \\ &= (x^2z^2 + 2xyzt + y^2t^2) \\ &\quad + (x^2t^2 - 2xyzt + y^2z^2) \\ &= (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $a \cdot b$ est aussi une somme de deux carrés.

maxi 1 – solution

En effectuant les sommes des chiffres de cette manière, on obtient en fin de compte, soit le reste de la division par 9 du nombre considéré si ce reste est non nul, soit 9 si le reste est 0. Par exemple,

1) le nombre est 67 409 326

$$6 + 7 + 4 + 0 + 9 + 3 + 2 + 6 = 37$$
$$3 + 7 = 10 \text{ et } 1 + 0 = 1$$

1 est le reste de la division de 67 409 326 par 9 ;

2) le nombre est 521 329 410

$$5 + 2 + 1 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 0 = 27$$

$$2 + 7 = 9$$

le reste de la division par 9 de 521 329 410 vaut 0.

Il suffit donc de voir combien il y a de nombres qui donnent 1 comme reste ou 2 comme reste quand on les divise par 9.

Dans les nombres de 1 jusque 999 999 999, il y en a autant qui, divisés par 9, donnent comme restes 0, 1, 2, ..., 9. Et 1 000 000 000 donne 1 comme reste. Donc il y a un « 1 » de plus dans la suite finale.

maxi 2 – solution

Désignons par a, b, c les longueurs des trois côtés du triangle.

1) On connaît la relation

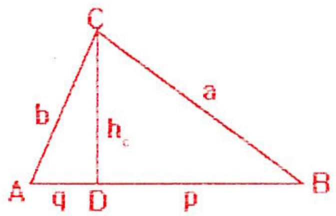
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\text{d'où } \quad 2bc \cdot \cos \widehat{A} = b^2 + c^2 - a^2 \geqslant 3 + 3 - 4 = 2$$

car $b \geqslant \sqrt{3}$, $c \geqslant \sqrt{3}$, $a \leqslant 2$.

$\cos \widehat{A}$ est donc strictement positif et $\widehat{A}$ est un angle aigu. Il en va de même pour $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

2) Le triangle est acutangle, donc D est entre B et C.



Avec les notations de la figure, on a

$$p^2 = a^2 - h_c^2 \text{ et } q^2 = b^2 - h_c^2$$

Si h_c était plus petit que $\sqrt{2}$, alors on aurait

$$p^2 > 3 - 2 = 1 \text{ et } q^2 > 3 - 2 = 1$$

car $a \geqslant \sqrt{3}$ et $b \geqslant \sqrt{3}$, ce qui entraînerait $c = p + q > 2$, relation fausse par hypothèse. Donc $h_c \geqslant \sqrt{2}$ et il en va de même des deux autres hauteurs.

Triangle orthique

Guy Robert,

Centre FOPEMA, Namur

Erratum : Dans *Math-Jeunes* n° 71, page 20, ligne 8 de la colonne de gauche, on lira « orthopôle » au lieu de « orthocentre ».

Notre dernier article (*Math-Jeunes* n° 72, p. 43-46) se terminait par la suggestion de mener vos propres recherches à propos des triangles dans lesquels la *droite d'Euler* est parallèle au côté BC. Il était signalé notamment, qu'une des propriétés à « découvrir » était :

Les côtés du triangle orthique d'un tel triangle sont en progression arithmétique.

À propos de cette suggestion, nous attendons — de pied ferme — que vous nous fassiez parvenir vos découvertes, trouvailles, idées, ... Les meilleurs envois seront récompensés par une disquette contenant une série de programmes détaillant les relations, les propriétés, les lieux géométriques, ... de ces triangles spéciaux, le tout avec figures et démonstrations ! Vos contributions originales y seraient incluses, avec mention expresse de leurs auteurs.

D'autre part, en raison de l'allusion qui est faite au triangle orthique, nous consacrons cet article à quelques (premiers) développements complémentaires concernant ce triangle particulier.

Triangle orthique
Définition
Propriétés — Applications

Quelques rappels préliminaires

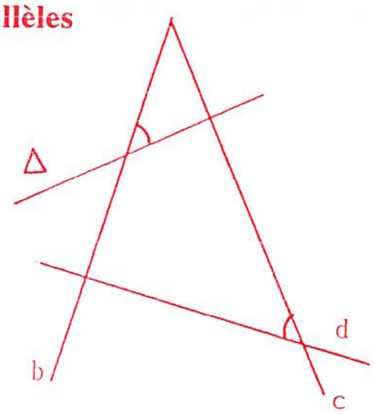
1. Orthocentre

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point de concours, habituellement noté H, est appelé **orthocentre**.

2. Groupe orthocentrique

Les trois sommets A, B, C d'un triangle et son orthocentre H forment un **groupe orthocentrique** : chaque triangle formé par trois de ces points a pour orthocentre le quatrième point. Vous vérifierez par exemple, que le triangle BHC a pour orthocentre le point A.

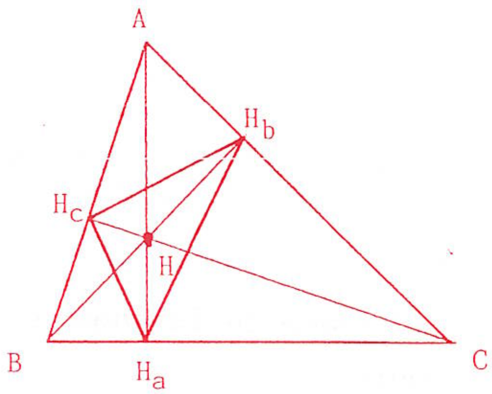
3. Antiparallèles



L'antiparallèle Δ d'une droite d par rapport aux côtés b et c d'un angle, forme avec b l'angle que d forme avec c et inversement.

Cette notion joue un rôle essentiel en **Géométrie du triangle** ; elle est même à l'origine de nombreux et importants développements dont nous aurons sans doute l'occasion de parler.

Définition

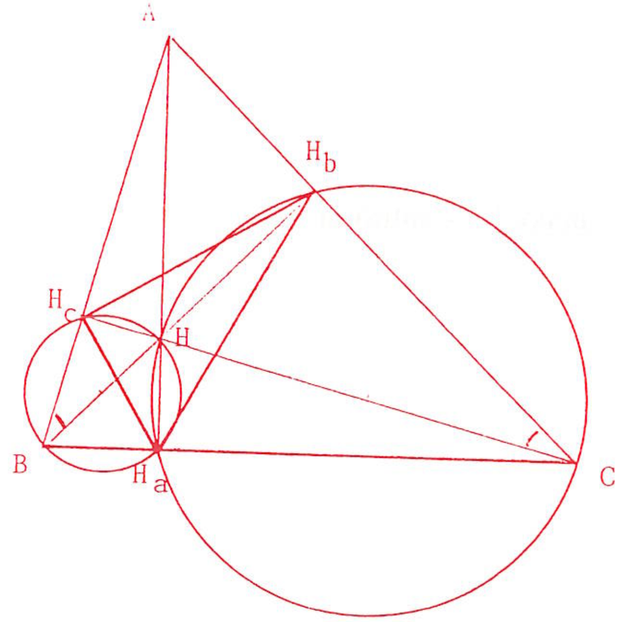


On appelle **triangle orthique** d'un triangle ABC (ce dernier sera nommé **triangle de référence**), le triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs de ABC.

Dans la figure ci-dessus, $H_aH_bH_c$ est le triangle orthique du triangle ABC ([1])

Propriétés

1. Les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices de son triangle orthique $H_aH_bH_c$.



Montrons, par exemple, que AH_a (hauteur issue de A dans le triangle ABC) est bissectrice de l'angle formé par les côtés H_aH_b et H_aH_c, c'est-à-dire que l'on a :

$$H_c\widehat{H_a}H = H_b\widehat{H_a}H$$

1) Les angles $A\widehat{B}H_b$ et $A\widehat{C}H_c$ sont égaux car chacun est le complément de $\widehat{A}$:

$$\boxed{H_c\widehat{B}H = H_b\widehat{C}H \qquad (1)}$$

2) D'autre part, le quadrilatère H_bBH_cH est inscriptible car deux angles opposés sont supplémentaires et l'on a :

([1]) Le point de concours des trois hauteurs a été nommé « orthocentre » par M. BESANT dans son ouvrage *Geometrical Conics* (1869). En France, M. MOREL a introduit ce terme dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1879) à l'occasion d'une traduction d'un livre de James BOOTH. Les mêmes auteurs ont nommé $H_aH_bH_c$ « triangle orthocentrique » ; actuellement, on dit plus simplement « orthique ».

$$\boxed{H_c\widehat{B}H = H_c\widehat{H_a}A \quad (2)}$$

De même, le quadrilatère H_aCH_bH est inscriptible, ce qui entraîne :

$$\boxed{H_b\widehat{C}H = H_b\widehat{H_a}H \quad (3)}$$

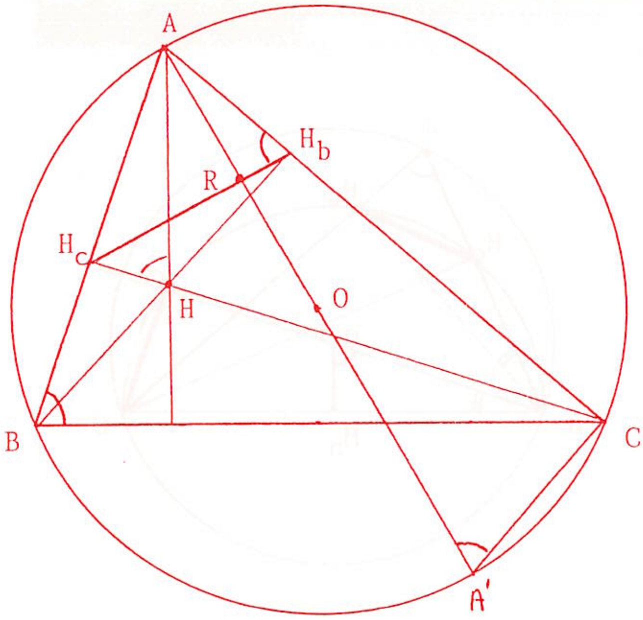
3) Si on compare (2) et (3) à l'égalité (1), il vient immédiatement :

$$\boxed{H_c\widehat{H_a}H = H_b\widehat{H_a}H}$$

ce qui démontre, comme annoncé, que AH_a est bissectrice de l'angle en H_a du triangle orthique. Cette propriété peut être considérée comme fondamentale.

2. Les rayons $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ du cercle circonscrit au triangle ABC sont respectivement perpendiculaires aux côtés H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b du triangle orthique.

Théorème de NAGEL (2)



Désignons par R le point d'intersection du rayon OA et du côté H_bH_c du triangle orthique. Il s'agit de démontrer que

$$A\widehat{R}H_b = \frac{\pi}{2}$$

(2) NAGEL, mathématicien allemand (1803-1882), Recteur à la Real-Schule de Ulm.

Le quadrilatère AH_bHH_c est inscriptible puisque les angles en H_b et H_c sont droits. On a donc :

$$A\widehat{H_b}R = A\widehat{H}H_c$$

D'autre part, $A\widehat{H}H_c = A\widehat{B}H_a$

comme ayant le même complément $B\widehat{A}H_a$. Cela étant, prolongeons le rayon $[OA]$ jusqu'en A' sur le cercle circonscrit.
On a $A\widehat{B}H_a = A\widehat{A'}C$. Si on considère maintenant les deux triangles ARH_b et ACA', on note que

- les angles en A' et H_b sont égaux (voir ci-dessus) ;
- l'angle en A est commun.

Il en résulte que les angles en R et C sont égaux. Or l'angle en C est droit, puisque AA' est un diamètre du cercle circonscrit. On a donc bien

$$A\widehat{R}H_b = \frac{\pi}{2}$$

Un raisonnement identique s'applique, bien entendu, aux rayons $[OB]$ et $[OC]$.

Remarque

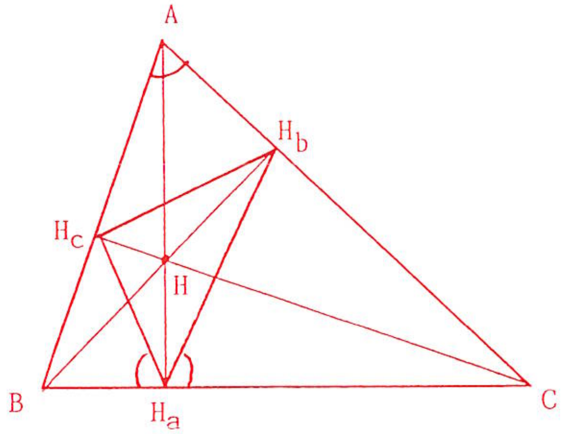
La démonstration qui précède a montré que le côté H_bH_c du triangle orthique était antiparallèle à BC par rapport à l'angle $\widehat{A}$, ce qui signifie que $A\widehat{H_b}H_c = A\widehat{B}C$. Cette remarque sera utilisée plus loin ; elle est par ailleurs fréquemment invoquée en **Géométrie du triangle**.

Calcul des éléments (angles et côtés) du triangle orthique

Il importe de noter que lorsqu'un triangle est obtusangle, son orthocentre est à l'extérieur du triangle et que deux des sommets du triangle orthique sont sur les prolongements de deux côtés. Faites une figure qui correspond à ce cas ... Il en résulte que, dans le calcul des éléments du triangle orthique, il conviendra de faire la distinction selon que le triangle ABC est acutangle ou obtusangle. Que se passe-t-il lorsque le triangle est rectangle ?

1. Cas où le triangle ABC est acutangle

Calculons d'abord les angles.



H_bH_a étant antiparallèle à AB, on a

$$H_b\widehat{H_a}C = \widehat{A}$$

et, pour une raison identique (H_cH_a est antiparallèle à CA) :

$$H_c\widehat{H_a}B = \widehat{A}$$

On en tire immédiatement que

$$H_c\widehat{H_a}H_b = \pi - 2\widehat{A}$$

On obtient évidemment de la même manière :

$$H_a\widehat{H_b}H_c = \pi - 2\widehat{B} \quad \text{et} \quad H_b\widehat{H_c}H_a = \pi - 2\widehat{C}$$

Calculons maintenant les côtés. En raison de l'antiparallélisme de H_bH_c et BC d'une part, de H_aH_b et AB d'autre part, les deux triangles AH_bH_c et H_aH_bC sont semblables. On a donc :

$$\frac{|H_bH_c|}{a} = \frac{|AH_c|}{b}$$

Or $|AH_c| = b \cdot \cos\widehat{A}$ (triangle rectangle AH_cC), de sorte que la dernière relation s'écrit :

$$|H_bH_c| = a \cdot \cos\widehat{A}$$

Si nous tenons compte du fait que cette expression de H_bH_c peut revêtir d'autres formes et si nous y adjoignons les formules analogues pour les deux autres côtés du triangle orthique, nous avons le tableau :

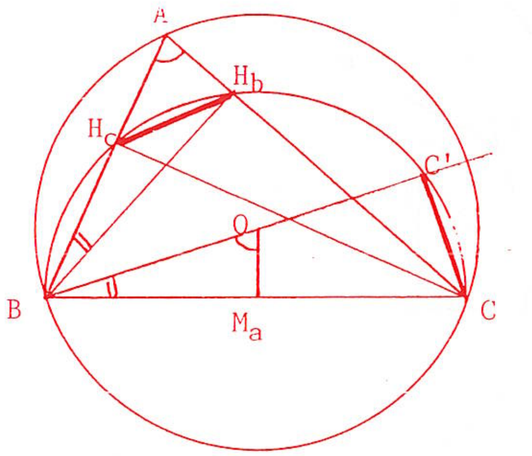
$$\begin{array}{lcccccc}
|H_bH_c| & = & a\cos\widehat{A} & = & h_a\sin\widehat{A} & = & R\sin 2\widehat{A} \\
|H_cH_a| & = & b\cos\widehat{B} & = & h_b\sin\widehat{B} & = & R\sin 2\widehat{B} \\
|H_aH_b| & = & c\cos\widehat{C} & = & h_c\sin\widehat{C} & = & R\sin 2\widehat{C}
\end{array}$$

2. Cas où le triangle ABC est obtusangle

Nous vous laissons le soin d'adapter au triangle obtusangle les résultats obtenus ci-dessus. Une méthode « pratique » consiste à considérer (dans le cas où l'angle $\widehat{A}$ est obtus) le triangle acutangle BHC dans lequel A est l'orthocentre [3].

Applications

1. La longueur du segment de droite qui joint les pieds de deux hauteurs d'un triangle est égale à la distance de l'un des sommets correspondants à la droite joignant l'autre au centre de la circonférence circonscrite au triangle.



1) Les angles $B\widehat{H_c}C$, $B\widehat{H_b}C$ et $B\widehat{C'}C$ sont des angles droits : les points H_c, H_b et C' sont donc sur une même circonférence.
2) D'autre part, les angles $\widehat{A}$ et $B\widehat{O}M_a$ sont égaux : leurs compléments respectifs $\widehat{ABH_b}$ et $\widehat{CBC'}$ le sont donc également.

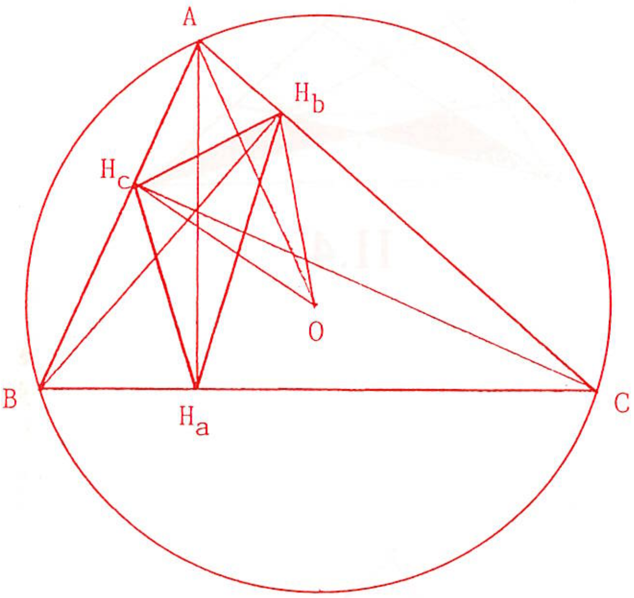
(3) cf. dans les préliminaires, le groupe orthocentrique.

Les angles inscrits $A\widehat{B}H_b$ et $C\widehat{B}C'$ (dans la circonférence sur laquelle se trouvent H_b, H_c et C') interceptent des cordes égales ...

> 2. L'aire d'un triangle acutangle est égale au produit du rayon du cercle circonscrit par le demi-périmètre du triangle orthique.

Notant par p_H le demi-périmètre du triangle orthique, il s'agit de démontrer que

$$S = p_H \cdot R$$



Le triangle étant acutangle, le centre O de la circonférence circonscrite est intérieur au triangle et l'aire de ce dernier est égale à la somme des aires des quadrilatères OH_bAH_c, OH_cBH_a et OH_aCH_b.
Rappelons que le rayon OA est perpendiculaire au côté H_bH_c du triangle orthique (propriété 2 ou théorème de NAGEL). Considérons le quadrilatère OH_bAH_c dont l'aire est égale à la somme des aires des triangles OH_bA et OAH_c :

$$\begin{aligned} \text{aire } OH_bAH_c &= \text{aire } OH_bA + \text{aire } OAH_c \\ &= \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |H_bH_c| \\ &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot H_bH_c| \end{aligned}$$

On montrerait de même que

$$\text{aire } OH_cBH_a = \frac{1}{2} \cdot R \cdot |H_cH_a|$$

$$\text{aire } OH_aCH_b = \frac{1}{2} \cdot R \cdot |H_aH_b|$$

Si nous additionnons ces trois expressions membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} \text{aire } ABC &= \frac{1}{2}R(|H_bH_c| + |H_cH_a| + |H_aH_b|) \\ &= R \cdot p_H \end{aligned}$$

Note

Cette application a montré un « lien » entre l'aire d'un triangle et le périmètre de son triangle orthique. Cette relation, associée à l'une des très nombreuses expressions de l'aire S d'un triangle, conduit à une « nouvelle » relation ou propriété.
Par exemple, on sait que $S = p \cdot r$, où r désigne le rayon du cercle inscrit. En égalant cette expression de l'aire à celle obtenue plus haut, on obtient :

$$R \cdot p_H = p \cdot r \quad \text{ou} \quad \frac{p_H}{p} = \frac{r}{R}$$

de sorte que :

> Dans un triangle acutangle, le rapport des périmètres du triangle orthique et du triangle de référence est égal au rapport des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle.

Il faut encore remarquer que cette dernière relation réunit les côtés d'un triangle (p), les hauteurs (par l'intermédiaire du triangle orthique), les bissectrices (grâce au cercle inscrit) et les médiatrices (cercle circonscrit) !!!

À vous de trouver d'autres « nouvelles » relations en partant de la remarque ci-dessus à propos des diverses expressions de l'aire d'un triangle. De toute manière, à bientôt pour d'autres propriétés du triangle orthique (avec des développements moins connus).

Math-Jeunes n°73, 60–64, 1996

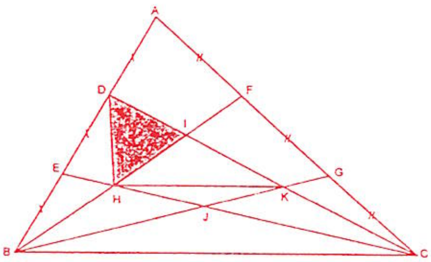
T'as pas l'aire ! (suite)

Jean Michel Slowik, *Lycée Robespierre d'Arras*

La Rédaction remercie Pierre Yves PIRA pour ses dessins humoristiques.

II.3

Montrons que $[HK]$ est parallèle à $[BC]$.



Utilisons l'aire hachurée du triangle DHI comme aire de référence.

$$\text{aire}\,(DHI) = r$$

Comme I est au quart de $[DC]$, on a :

$$|CD| = 4|ID| \text{ et aire}\,(DHC) = 4r$$

Comme CE est une médiane du triangle BDC,

$$\text{aire}\,(DHC) = \text{aire}\,(BHC) = 4r$$

Mais $|IC| = 3|ID|$ et donc aire $(HIC) = 3r$.
On en conclut :

$$\frac{\text{aire}\,(BHC)}{\text{aire}\,(HIC)} = \frac{4r}{3r} = \frac{4}{3} \text{ ou}$$

$$\boxed{\frac{|BH|}{|IH|} = \frac{4}{3}}$$

car les deux triangles ont même hauteur.
De même, de l'autre côté; puisque I est au quart de $[BF]$, on trouverait encore, mais nous vous laissons le soin de l'écrire :

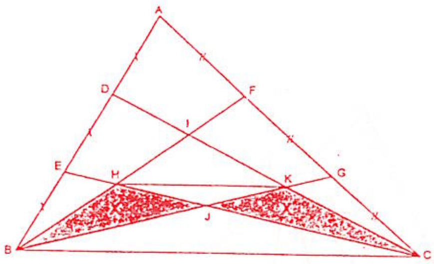
$$\boxed{\frac{|CK|}{|IK|} = \frac{4}{3}}$$

Il vient donc $\dfrac{|CK|}{|IK|} = \dfrac{|BH|}{|IH|}$ et, d'après la réciproque du théorème dit de THALÈS, HK **est parallèle à** BC.

Riche de cette information, nous en concluons que :

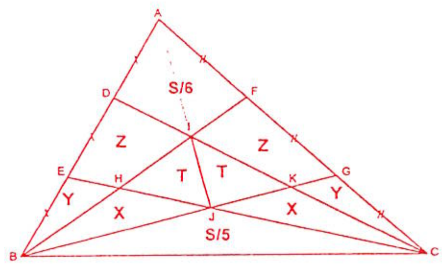
$$\text{aire}\,(HBJ) = \text{aire}\,(KJC) \text{ (pourquoi ?)}$$

soit, sur la figure ...



II.4

et grâce aux nombreuses parallèles — donc applications du théorème dit de THALÈS — et aux médianes, nous pouvons en déduire de nombreuses égalités d'aires (rappelons-nous que S désigne l'aire du triangle ABC) :



De $\dfrac{|BH|}{|IH|} = \dfrac{4}{3}$, on déduit que $|IH| = \dfrac{3}{4}|BH|$ et, en passant aux aires :

$$\boxed{T = \frac{3}{4}X}$$

Il ne reste alors plus qu'à effectuer des calculs algébriques ... en utilisant le fait que

$$\text{aire}\,(BIC) = 2 \cdot (T + X) + \frac{1}{5}S = \frac{1}{2}S$$

$$\text{soit } T + X = \frac{3}{20}S$$

<u>L'ÂNE ROUGE</u>

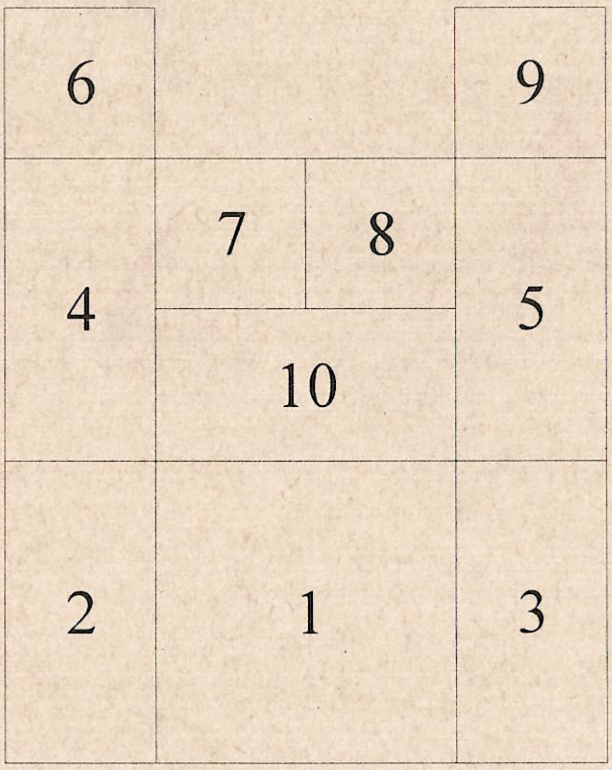
La Rédaction te souhaite une bonne et heureuse année 1995 et t'offre, dans cet encart central, ce jeu traditionnel.
Découpe d'abord les dix pièces à l'effigie de Mathieu, ensuite dépose-les sur le calendrier en respectant la disposition illustrée ci-dessous.
Le principe du jeu est simple: il consiste à faire sortir le grand carré en faisant glisser les pièces à l'intérieur du cadre.
Convenons du code suivant pour noter les déplacements des différentes pièces:

9 ← signifie: faire glisser la pièce 9 vers la gauche
9 ← ← signifie: faire glisser la pièce 9 vers la gauche de deux emplacements
7 ↑ → signifie: faire glisser la pièce 7 vers le haut puis vers la droite

Envoie à la rédaction ta solution en numérotant les différents mouvements comme ci-dessous:

1.- 8 ↑
2.- 8 ←
3.- 9 ← ↓
4.- 5 ↑
5.- *10* →

La solution nécessitant le nombre de mouvements le moins élevé sera récompensée.
Notons encore que les cinq mouvements de l'exemple concernent six déplacements.



1996

MATH
-
JEUNES

JANVIER

	1	2	3	4	5
L	1	8	15	22	29
M	2	9	16	23	30
M	3	10	17	24	31
J	4	11	18	25	
V	5	12	19	26	
S	6	13	20	27	
D	7	14	21	28	

FÉVRIER

	5	6	7	8	9
L		5	12	19	26
M		6	13	20	27
M		7	14	21	28
J	1	8	15	22	29
V	2	9	16	23	
S	3	10	17	24	
D	4	11	18	25	

MARS

	9	10	11	12	13
L		4	11	18	25
M		5	12	19	26
M		6	13	20	27
J		7	14	21	28
V	1	8	15	22	29
S	2	9	16	23	30
D	3	10	17	24	31

AVRIL

	14	15	16	17	18
L	1	8	15	22	29
M	2	9	16	23	30
M	3	10	17	24	
J	4	11	18	25	
V	5	12	19	26	
S	6	13	20	27	
D	7	14	21	28	

MAI

	18	19	20	21	22
L		6	13	20	27
M		7	14	21	28
M	1	8	15	22	29
J	2	9	16	23	30
V	3	10	17	24	31
S	4	11	18	25	
D	5	12	19	26	

JUIN

	22	23	24	25	26
L		3	10	17	24
M		4	11	18	25
M		5	12	19	26
J		6	13	20	27
V		7	14	21	28
S	1	8	15	22	29
D	2	9	16	23	30

JUILLET

	27	28	29	30	31
L	1	8	15	22	29
M	2	9	16	23	30
M	3	10	17	24	31
J	4	11	18	25	
V	5	12	19	26	
S	6	13	20	27	
D	7	14	21	28	

AOUT

	31	32	33	34	35
L		5	12	19	26
M		6	13	20	27
M		7	14	21	28
J	1	8	15	22	29
V	2	9	16	23	30
S	3	10	17	24	31
D	4	11	18	25	

SEPTEMBRE

	35	36	37	38	39	40
L		2	9	16	23	30
M		3	10	17	24	
M		4	11	18	25	
J		5	12	19	26	
V		6	13	20	27	
S		7	14	21	28	
D	1	8	15	22	29	

OCTOBRE

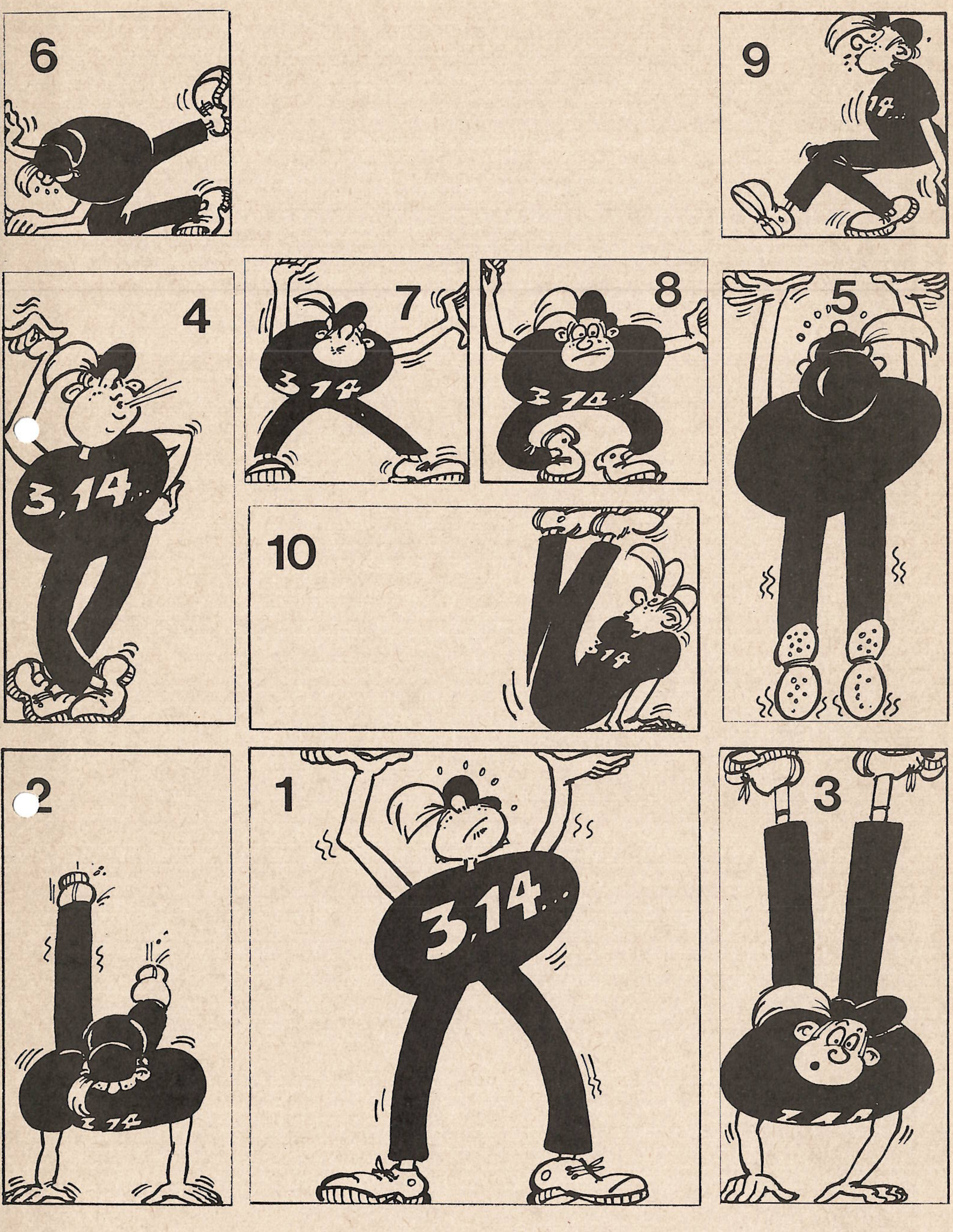
	40	41	42	43	44
L		7	14	21	28
M	1	8	15	22	29
M	2	9	16	23	30
J	3	10	17	24	31
V	4	11	18	25	
S	5	12	19	26	
D	6	13	20	27	

NOVEMBRE

	44	45	46	47	48
L		4	11	18	25
M		5	12	19	26
M		6	13	20	27
J		7	14	21	28
V	1	8	15	22	29
S	2	9	16	23	30
D	3	10	17	24	

DÉCEMBRE

	48	49	50	51	52	
L		2	9	16	23	30
M		3	10	17	24	31
M		4	11	18	25	
J		5	12	19	26	
V		6	13	20	27	
S		7	14	21	28	
D	1	8	15	22	29	


6
9
4
7
8
5
10
2
1
3
3,14...

on résoud le système $\begin{cases} T + X = \dfrac{3}{20}S \\ T = \dfrac{3}{4}X \end{cases}$ et on trouve $\boxed{X = \dfrac{3}{35}S \text{ et } T = \dfrac{9}{140}S}$

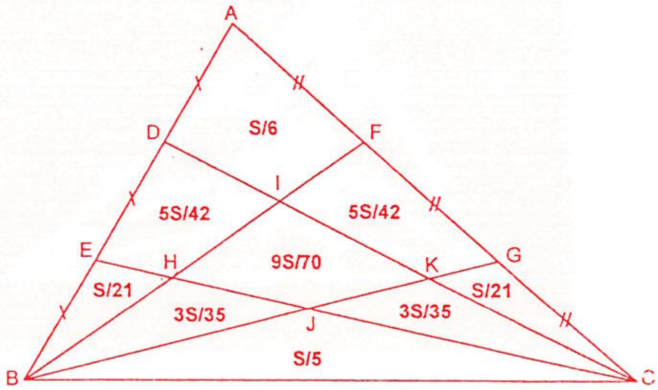
L'aire demandée du quadrilatère $IHJK$ vaut donc $\boxed{\text{aire}\,(IHJK) = \dfrac{9}{70}S}$

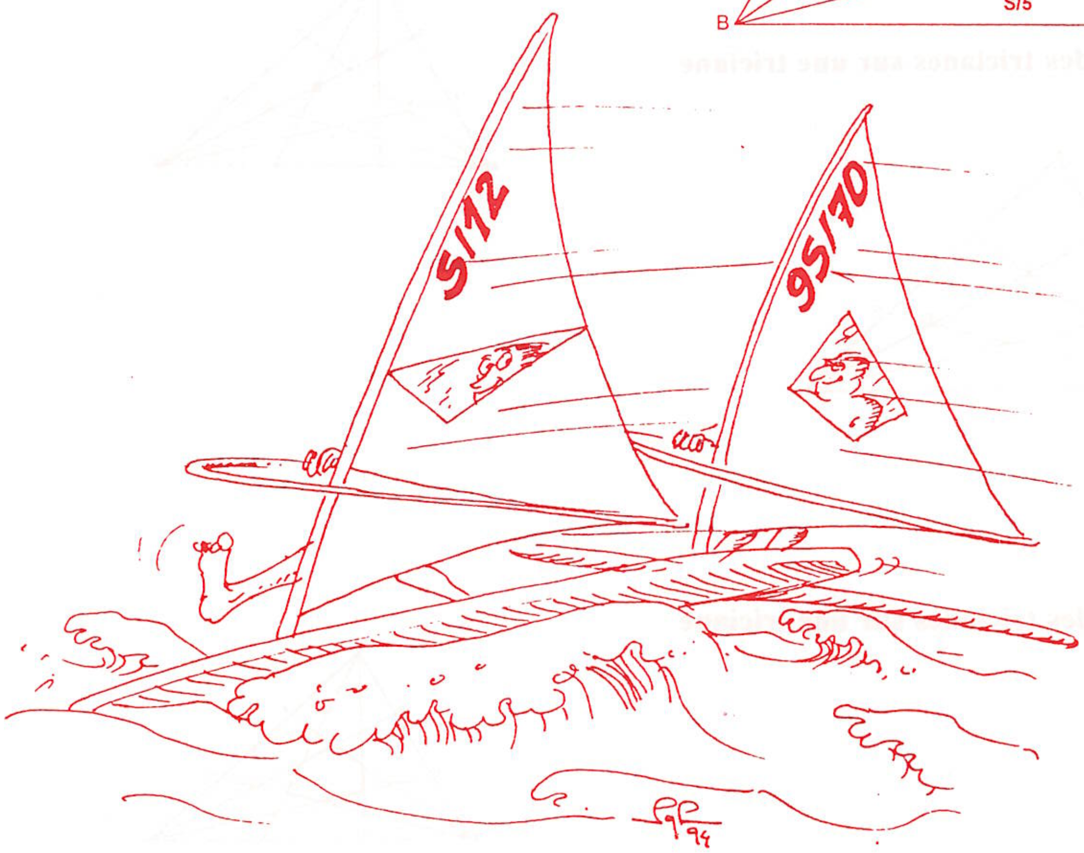
... tant de travail pour ça ! Mais nous n'allons pas nous arrêter en si bon chemin ! Calculons Y et Z.
Recherchons l'aire de BEC de deux manières, ce qui donne $X + Y + \dfrac{1}{5}S = \dfrac{1}{3}S$

d'où il vient immédiatement $\boxed{Y = \dfrac{1}{21}S}$

De même, en calculant de deux manières l'aire de ABF, on a $Z + Y + \dfrac{1}{6}S = \dfrac{1}{3}S$

d'où il vient tout aussi immédiatement $\boxed{Z = \dfrac{5}{42}S}$. Moralité :





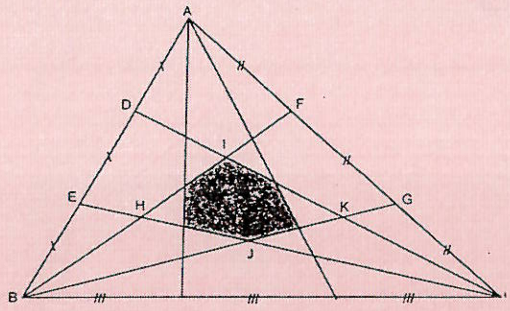
où l'on fait intervenir les résultats précédents pour calculer les aires délimitées par les six tricianes.

III.1

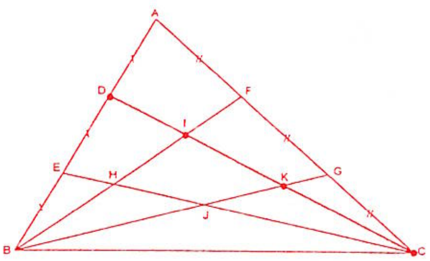
Pour quelques tricianes de plus ...

PROBLÈME 3

Soit ABC un triangle; on trace les six tricianes. Calculer l'aire du quadrilatère hachuré en fonction de l'aire S du triangle ABC.



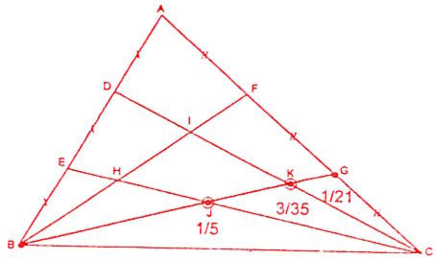
1. Découpage des tricianes sur une triciane haute



I est au quart de $[DC]$ et K aux quatre septièmes de ce même $[DC]$. Pour vous en convaincre, il suffit de relire les pages précédentes.

2. Découpage des tricianes sur une triciane basse

De même, si nous nous concentrons sur une triciane basse, en écrivant des rapports d'aires de triangles de même hauteur, nous obtenons les rapports des bases, ce qui donne



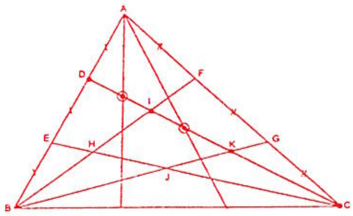
$$\frac{\text{aire}\,(BJC)}{\text{aire}\,(JKC)} = \frac{1/5}{3/35} = \frac{7}{3} = \frac{|BJ|}{|JK|}$$

$$\frac{\text{aire}\,(JKC)}{\text{aire}\,(KGC)} = \frac{3/35}{1/21} = \frac{9}{5} = \frac{|JK|}{|KG|}$$

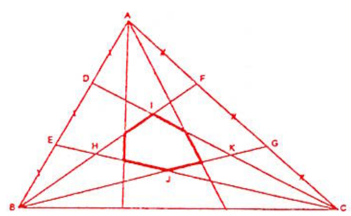
Par un calcul simple, on trouve que K est au septième de $[GB]$ et que J est aux deux cinquièmes de $[GB]$.

3. Avec les six tricianes

Quitte à tourner la feuille, une triciane peut être considérée comme haute ou comme basse, ce qui donne la disposition sur une triciane quelconque.



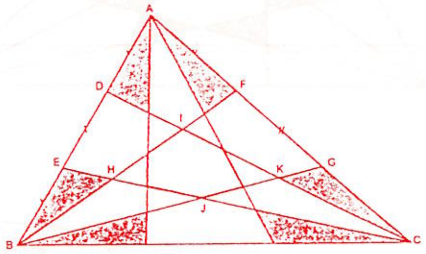
Il apparaît un point au septième puis au quart puis aux deux cinquièmes et enfin aux quatre septièmes ($\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$) et ceci pour toutes les tricianes. Ce qui signifie que la figure obtenue par les six tricianes est *irrémédiablement* celle ci-dessus, quel que soit le triangle. On obtient toujours un **hexagone** au centre.



III.2
À la recherche d'aires égales

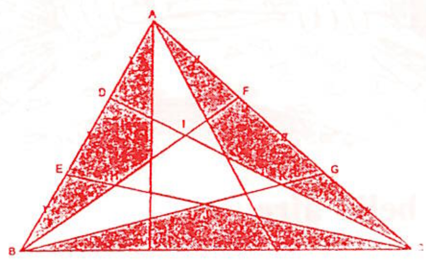
1.

Nous ne sommes pas au bout de nos surprises ! Derrière la figure ci-dessous se cachent beaucoup de triangles de même aire.



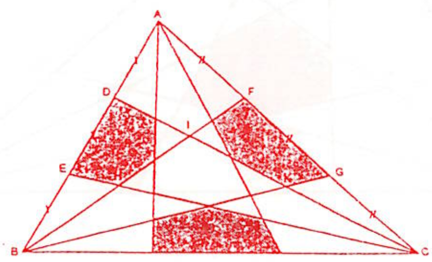
Les six aires hachurées valent $\frac{S}{21}$; il vous suffit de faire tourner la figure pour retrouver cette même aire $\frac{S}{21}$ du **II**.

2.



Les trois aires hachurées valent $\frac{S}{5}$; il vous suffit de faire tourner la figure pour retrouver cette même aire $\frac{S}{5}$ du **II**.

3.

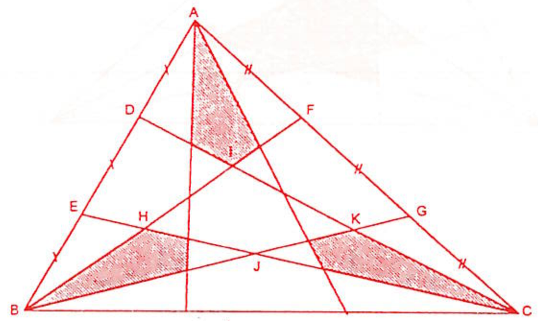


Une opération simple à partir des deux premières figures :

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{21}\right) S = \frac{11}{105} S$$

et chacune des trois aires hachurées vaut donc $\frac{11}{105} S$

4.

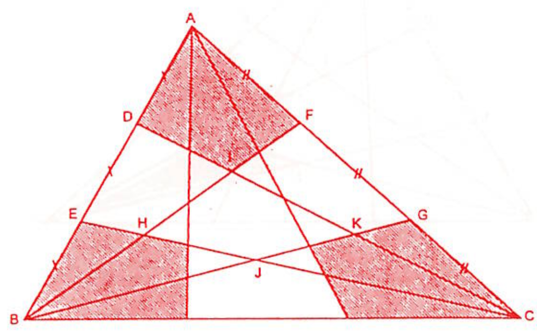


En utilisant **II** et **III.2.3**, on voit que chacune des aires hachurées vaut

$$\left(\frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{21}\right) S = \frac{1}{14} S$$

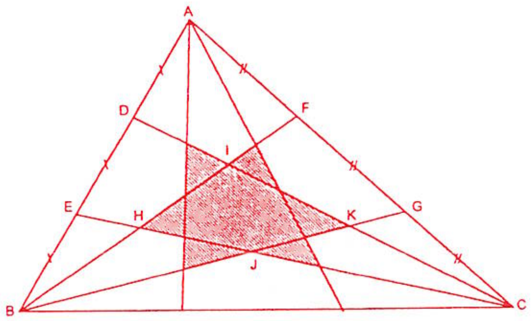
5. Aire du polygone étoilé

On en déduit par une simple soustraction l'aire du polygone étoilé central



Les trois aires hachurées valent $\frac{S}{6}$; il vous suffit de faire tourner la figure pour retrouver cette même aire dans **II**.

L'aire étoilée demandée vaut donc



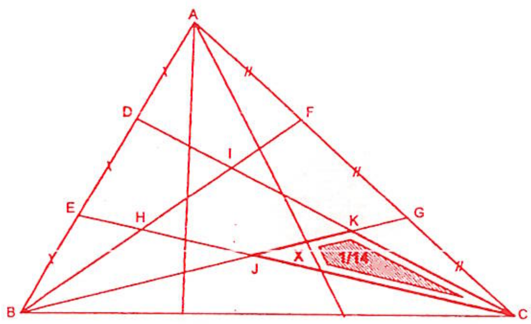
$$\left[1-\left(3\times\frac{1}{6}+3\times\frac{11}{105}\right)\right]S=\frac{13}{70}S$$

On aurait aussi pu faire le calcul ainsi :

$$\left[1-\left(3\times\frac{1}{14}+3\times\frac{1}{5}\right)\right]S=\frac{13}{70}S$$

Voyez vous pourquoi ?

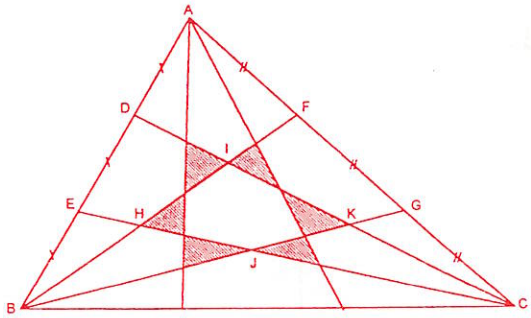
6. Six triangles de même aire ...



En regroupant les informations précédentes, on peut calculer l'aire du petit triangle X.

$$\text{aire}\,(X)=\left(\frac{3}{35}-\frac{1}{14}\right)S=\frac{1}{70}S$$

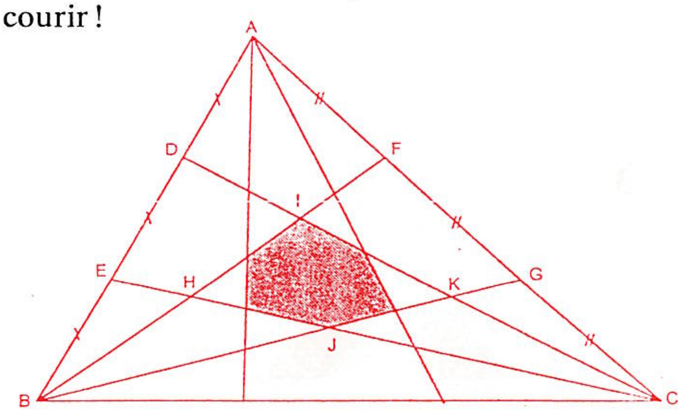
Ce que l'on vient de faire sur ce côté, on peut le faire sur les autres côtés, quitte à tourner la figure :



On obtient six triangles de même aire $\frac{S}{70}$

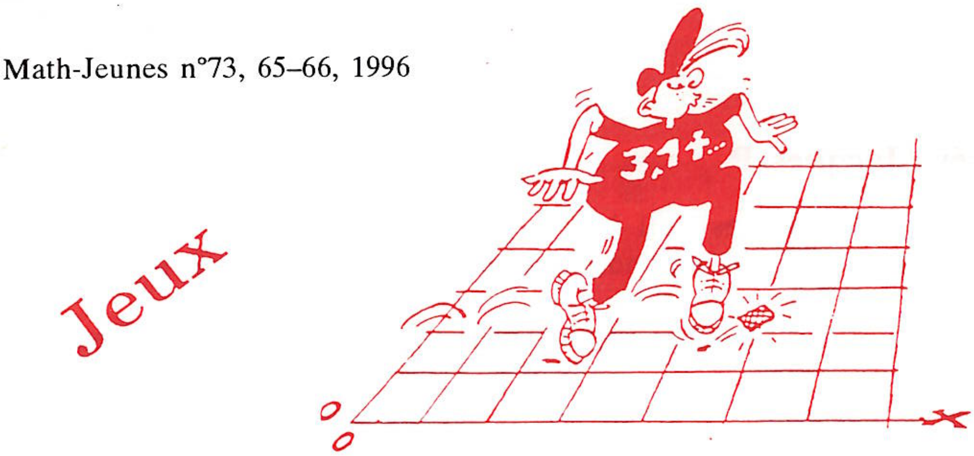
7. La belle aire ...

L'aire du polygone étoilé, de laquelle on retire les six aires des six petits triangles, donne le résultat final qui nous a tant fait courir !



L'aire de l'hexagone hachuré vaut

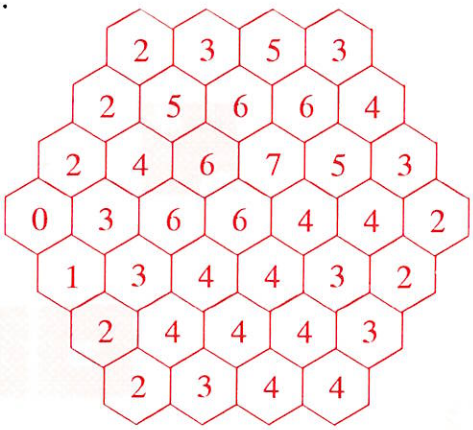
$$\left(\frac{13}{70}-\frac{6}{70}\right)S=\frac{S}{10}$$

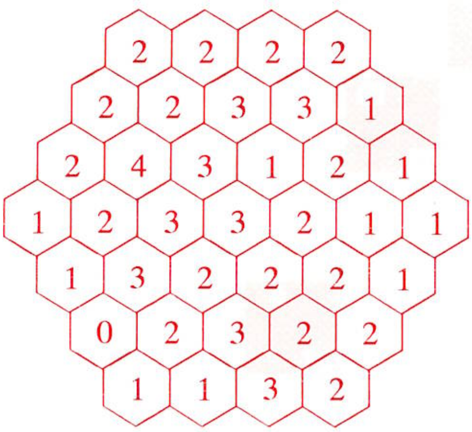


A. Parent

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.





Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres–définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

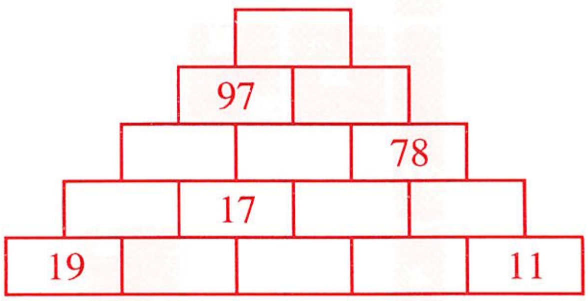
	1	2	3	4	5
1			I		
2					
3		I			
4					
5					

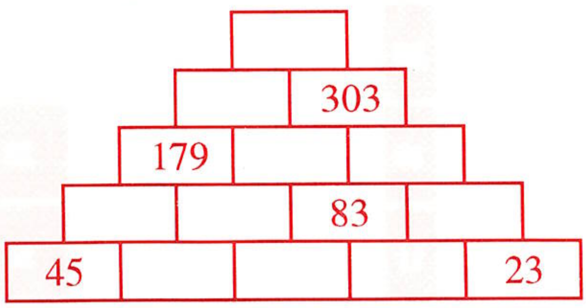
Horizontalement
1. 122 850
2. 113 400
3. 307 800
4. 500
5. 171 475

Verticalement
1. 117 000
2. 2 835
3. 205 200
4. 31 500
5. 162 450

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.





Les chiffres croisés (Jacques Peeters)

1. Compléter la grille avec les chiffres de 1 à 9.
2. La somme de ces chiffres doit correspondre à la valeur du nombre en regard de la ligne ou de la colonne.
3. On ne peut utiliser deux fois le même chiffre dans la décomposition additive d'un nombre.
4. La même séquence de chiffres ne peut apparaître qu'une seule fois dans la décomposition de deux mêmes nombres (en gras et souligné). Par exemple, si le nombre 5 se trouve deux fois dans une grille, il devra être décomposé en 1 + 4 et 2 + 3.

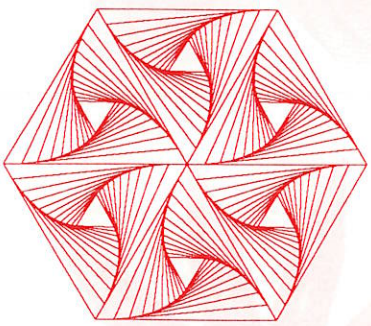
	37	44	7	13	28	**38**		**18**	17	34
39	↓ → A0	↓ A1	↓ A2	↓ A3	↓ A4	↓ A5	**18**	↓ → A7	↓ A8	↓ A9
21	→ B0	B1	B2	B3	B4	B5	21 / **36**	→ B7	↓ B8	↓ B9
17	→ C0	C1	28 / 39	→ C3	C4	C5	↓ C6	C7	C8	C9
34	→ D0	D1	↓ D2	D3	D4	D5	D6	16 / **36**	→ D8	D9
24	→ E0	E1	E2	25 / 41	→ E4	E5	E6	↓ E7	E8	E9
39	→ F0	F1	F2	↓ F3	F4	F5	F6	F7	36	43
30	→ G0	G1	G2	G3	16 / **38**	→ G5	G6	G7	↓ G8	↓ G9
35	→ H0	H1	H2	H3	↓ H4	10 / 23	→ H6	H7	H8	H9
	15	42 / 33	→ I2	I3	I4	↓ I5	I6	I7	I8	I9
37	↓ → J0	↓ J1	J2	J3	J4	J5	6 / 27	→ J7	J8	J9
4	→ K0	K1	42 / 9	→ K3	K4	K5	↓ K6	K7	K8	K9
38	→ L0	L1	↓ L2	L3	L4	L5	L6	3 / 9	→ L8	L9
10	→ M0	M1	M2	22	→ M4	M5	M6	↓ M7	M8	M9
11	→ N0	N1	N2	33	→ N4	N5	N6	N7	N8	N9

Math-Jeunes n°73, 67–70, 1996

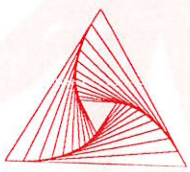
Des polygones et des rosaces

G. Noël, *Université de Mons-Hainaut*

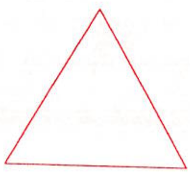
Examinons ensemble la figure suivante :



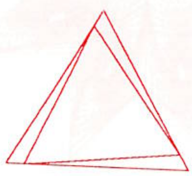
Vous avez reconnu une rosace d'ordre 6 : elle est appliquée sur elle-même par une rotation de 60°. Isolons son motif :



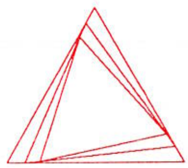
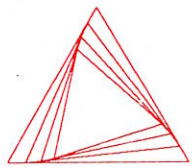
Voyez-vous comment nous l'avons obtenu ? Un grand triangle équilatéral est d'abord dessiné.



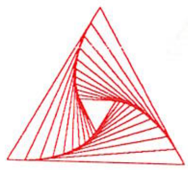
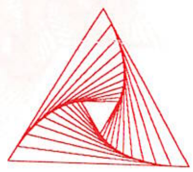
On choisit un sens de parcours de ses côtés. Un second triangle équilatéral est obtenu en joignant les points situés au dixième des côtés du premier triangle. (Voyez-vous pourquoi il est aussi équilatéral ?)



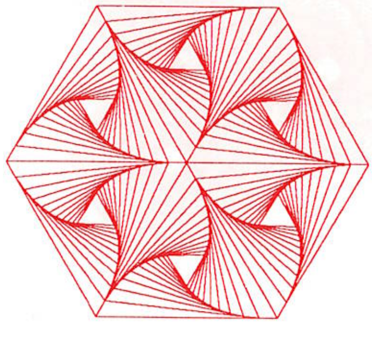
D'autres triangles équilatéraux s'obtiennent de la même façon, chacun à partir du précédent.

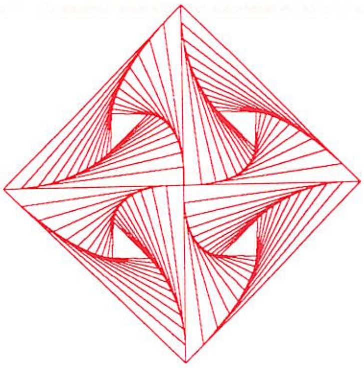
Nous pouvons imbriquer de cette façon autant de triangles que nous le voulons. Nous aurions pu choisir le sens de parcours opposé. Le motif obtenu est alors symétrique du précédent.

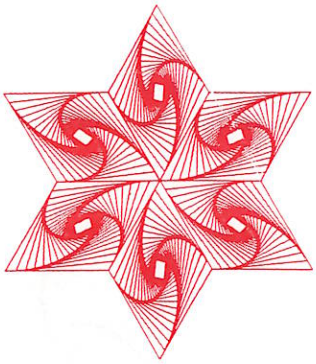
En alternant les deux motifs symétriques, nous obtenons une rosace qui n'est plus que d'ordre 3, mais qui possède trois axes de symétrie :



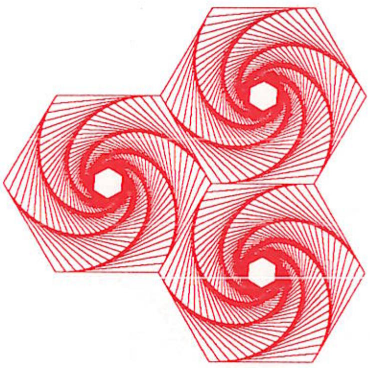
Rien ne nous oblige à utiliser un triangle équilatéral. Pourquoi pas un triangle rectangle isocèle ? (Les triangles emboîtés dans un motif sont-ils tous rectangles et isocèles ?)



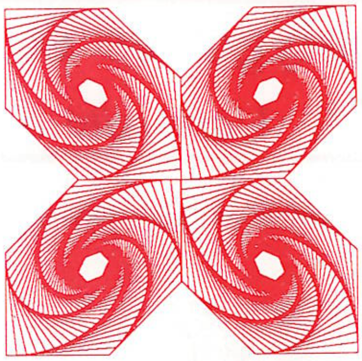
Rien ne nous oblige non plus à utiliser des triangles. Pourquoi pas des losanges ?

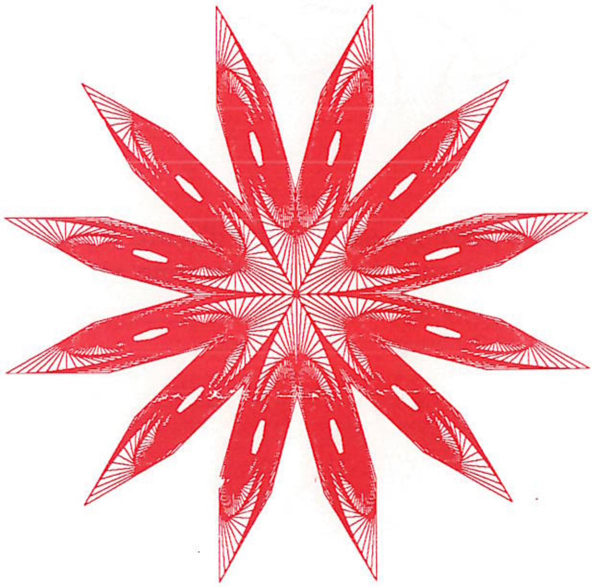


Ou encore des hexagones :

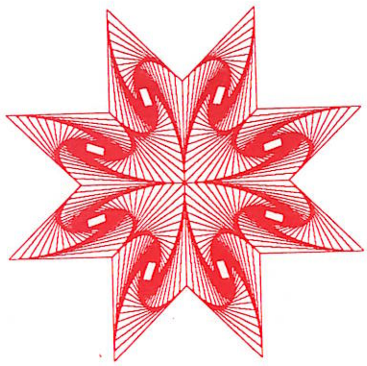


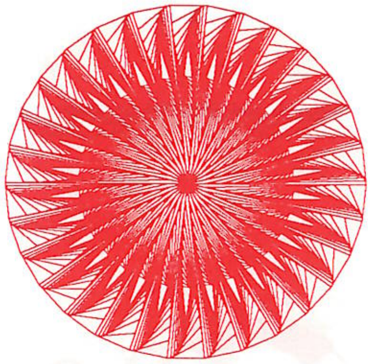
En variant les angles des triangles, losanges ou hexagones, les angles des rotations qui conservent la rosace changeront aussi. Nous pouvons aussi décider que la rosace admet ou n'admet pas d'axes de symétrie. De cette façon, nous pouvons réaliser de nombreuses figures différentes. En voici quelques exemplaires :

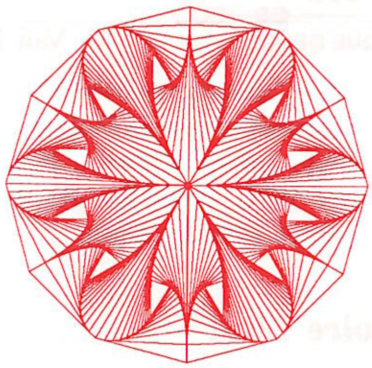


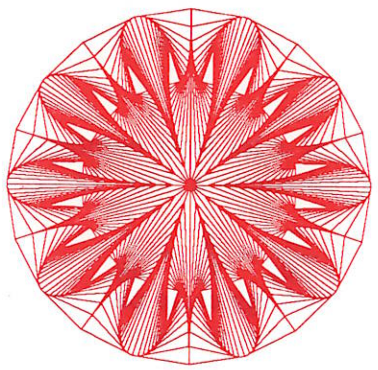


Pour chacune de ces rosaces, pouvez-vous déterminer quel en est le motif, et quels en sont les éléments de symétrie : quelles rotations conservent la rosace, quels sont les axes de symétrie ?









Si vous êtes amateur d'informatique, vous pouvez sans trop de peine dessiner toutes ces rosaces. Les dessins qui ornent ce *Math-Jeunes* ont été réalisés en Postscript, mais en s'inspirant des techniques de programmation en Logo, ce langage que certains d'entre vous connaissent et qui permet de piloter une "tortue". Bien d'autres langages ayant des instructions graphiques adéquates pourraient être utilisés.

Pour les "mordus" qui ont déjà quelques connaissances en Logo, voici les procédures permettant de dessiner les rosaces à motifs triangulaires, transposées en WINLOGO et précédées de quelques explications :

Le programme principal est ROSACE. Il admet deux paramètres : :N, l'ordre de la rosace et :S qui vaut 1 si la rosace ne doit pas comporter d'axes de symétries, 0 dans le cas contraire. Quand on lance ROSACE, l'ordinateur teste si :S vaut 1 ou non et selon le cas, exécute :N fois soit le dessin d'un motif, soit le dessin d'un motif et du motif symétrique.

Le dessin d'un motif (ou de son symétrique) est réalisé par la procédure MOTIFTRI. Selon que le premier paramètre :E vaut 1 ou -1, les côtés des triangles seront parcourus dans le sens trigonométrique ou dans le sens opposé (si :E = -1, l'instruction TG :A*:E provoque un virage à droite plutôt qu'un virage à gauche). On dessine d'abord le triangle extérieur, ensuite une série de dix triangles emboîtés, déterminés à l'aide de SUBDIVISER (qui calcule les coordonnées des sommets du nouveau triangle) et TRIANGLE (qui le dessine).

La dernière routine est un peu plus technique : DIXIEME détermine le point situé au dixième d'un segment. Elle est basée sur le fait que si le point p est au dixième du segment $[ab]$ (à partir de a), alors

$$\begin{cases} x_p = \frac{9}{10}x_a + \frac{1}{10}x_b \\ y_p = \frac{9}{10}y_a + \frac{1}{10}y_b \end{cases}$$

```
POUR TRIANGLE
FPOS :P1
FPOS :P2
FPOS :P3
FPOS :P1
FIN
```

```
POUR MOTIFTRI :E :NN
DONNE "A 90 + 180/:NN
DONNE "P1 POS
AV :L
TG :A*:E
DONNE "P2 POS
AV 2*:L*SIN (180/:NN)
TG -:A*:E
DONNE "P3 POS
FPOS :P1
REPETE 10 [ SUBDIVISER TRIANGLE]
FIN
```

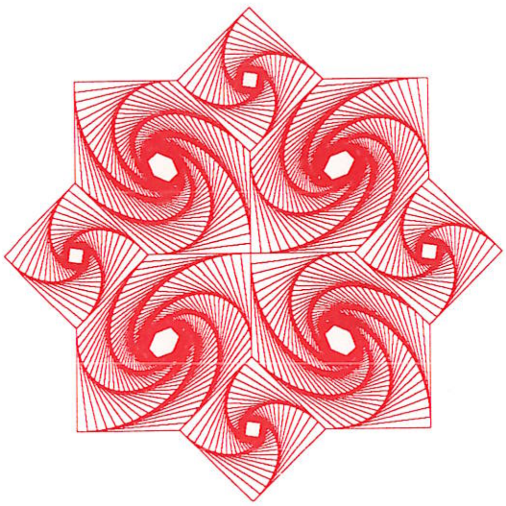
```
POUR ROSACE :N :S
VE
SI :S = 1 [REPETE :N [DONNE "DIR CAP
MOTIFTRI 1 :N LC ORIGINE FCAP :DIR BC TG
360/:N]] [REPETE :N [DONNE "DIR CAP
MOTIFTRI 1 2*:N LC ORIGINE FCAP :DIR BC
```

```
MOTIFTRI -1 2*:N LC ORIGINE FCAP :DIR BC
TG 360/:N]]
FIN

POUR DIXIEME :X :Y
RENDS LISTE 0.9*(PREMIER :X) +
0.1*(PREMIER :Y) 0.9*(DERNIER :X) +
0.1*(DERNIER :Y)
FIN

POUR SUBDIVISER
DONNE "P0 :P1
DONNE "P1 DIXIEME :P1 :P2
DONNE "P2 DIXIEME :P2 :P3
DONNE "P3 DIXIEME :P3 :P0
FIN
```

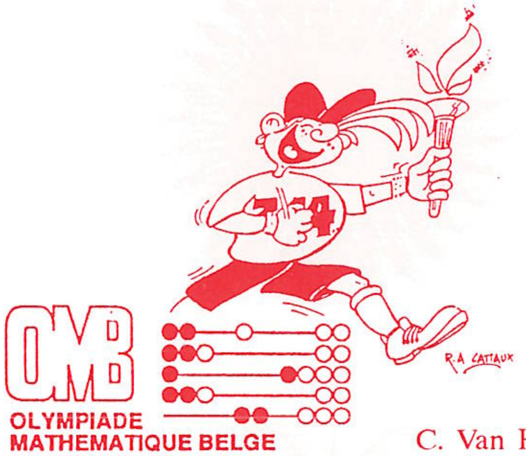
Il suffit de donner à `:L` une valeur puis d'exécuter `ROSACE 10 0` pour obtenir la dernière des figures précédentes.

Pouvez-vous modifier le programme ci-dessus pour dessiner les rosaces dont les motifs sont des losanges ou des hexagones ?

Et pouvez-vous réaliser la rosace suivante :



Math-Jeunes n°73, 70–72, 1996



C. Van Hooste

Voici, ami lecteur, quelques-unes des questions posées lors de l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge qui vient d'avoir lieu ce mercredi 17 janvier 1996. Nous les avons choisies dans les catégories Mini et Midi.

Éliminatoire Mini

Question 24 Proportions (sans réponse préformulée)

Trois nombres sont proportionnels à 150, 72 et 48. Leur somme vaut 3510. Quel est le plus petit des trois ?

Solution

Appelons x, y et z les trois nombres. Comme ils sont proportionnels à 150, 72 et 48, nous avons :

$$\frac{x}{150} = \frac{y}{72} = \frac{z}{48}$$

Ces fractions étant égales, le plus petit des trois nombres x, y et z est nécessairement celui qui correspond au plus petit dénominateur ; donc z.

À partir de ces fractions, nous pouvons exprimer x et y en fonction de z :

$$x = \frac{150z}{48} \quad \text{et} \quad y = \frac{72z}{48}$$

Exploitons maintenant le fait que la somme des trois nombres vaut 3 510 :

$$\frac{150z}{48} + \frac{72z}{48} + z = 3\,510$$

D'où, après réduction au même dénominateur et addition, nous tirons :

$$\frac{270z}{48} = 3\,510 \text{ ou encore :}$$

$$z = \frac{3\,510 \times 48}{270} = 39 \times 16 = 624$$

Réponse : 624.

Question 26 Photo de groupe

De combien de manières peut-on disposer 3 garçons et 3 filles pour une photographie de groupe si les garçons doivent s'asseoir côte à côte, les filles se tenant debout derrière eux ?

Ⓐ $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Ⓑ $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Ⓒ $(3 \cdot 2 \cdot 1)^2$
Ⓓ $(3 \cdot 2 \cdot 1)^{3 \cdot 2 \cdot 1}$ Ⓔ $3^2 \cdot 3^2$

Solution

Appelons A, B et C les trois garçons. Comme ils doivent être assis côte à côte pour la photographie, donc groupés, ils ne peuvent que permuter entre eux. Dès lors, les différentes dispositions possibles des trois garçons sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} A\,B\,C & A\,C\,B & B\,A\,C \\ B\,C\,A & C\,A\,B & C\,B\,A \end{array}$$

Ainsi, le nombre de dispositions différentes des garçons vaut 6 ; ce nombre est égal à $3 \cdot 2 \cdot 1$.

Mais pourquoi l'écrire $3 \cdot 2 \cdot 1$, au lieu de 6 ?

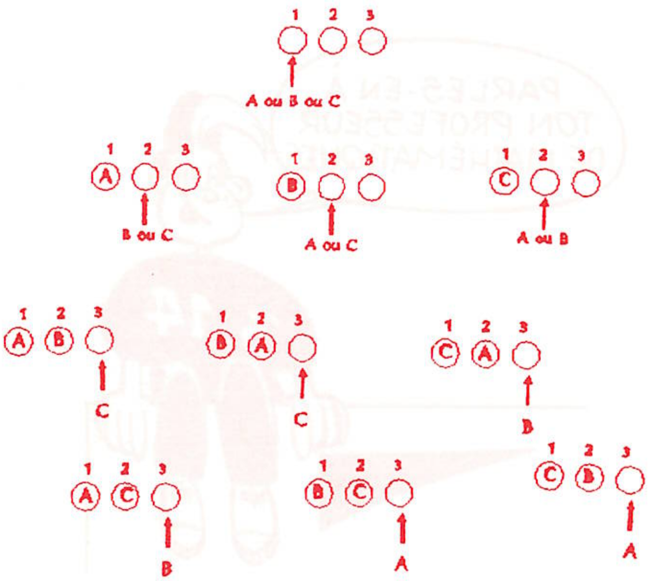
Tout simplement parce qu'au lieu d'être le résultat de l'énumération de tous les cas possibles, il est aussi le fruit d'un raisonnement très rapide. Imaginons la scène durant laquelle les trois garçons prennent place sur les chaises mises à leur disposition.

1) L'un des trois s'assied sur la chaise numéro 1, soit A, soit B, soit C.

2) Celui-là étant assis, l'un des deux autres occupe alors la chaise numéro 2.

3) Il ne reste qu'un seul garçon debout qui va forcément s'installer sur la chaise numéro 3.

Représentons tout cela par un schéma.



Ainsi, il y a $3 \cdot 2 \cdot 1$ dispositions possibles des garçons.

Le même problème se pose pour les filles qui doivent rester groupées, debout derrière les garçons. Il y a donc aussi $3 \cdot 2 \cdot 1$ dispositions possibles des filles.

Les filles et les garçons pouvant s'installer séparément de manière indépendante, à chaque disposition des garçons, on peut associer n'importe quelle disposition des filles. Par conséquent, il y a

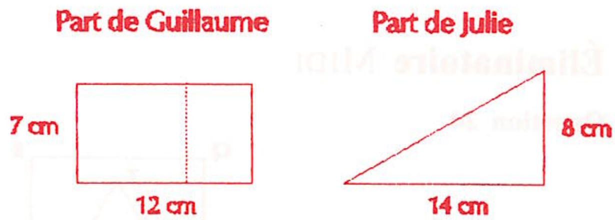
$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \times (3 \cdot 2 \cdot 1) = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2$$

dispositions possibles pour l'ensemble des filles et des garçons.

Réponse : C

Question 29 Tarte aux pommes

Guillaume et Julie contemplent leurs parts de tarte aux pommes. Julie est triste car elle s'aperçoit que son morceau est plus petit que celui de Guillaume. Celui-ci coupe un morceau comme indiqué par les pointillés sur la figure, et les deux enfants ont alors des parts équivalentes. Quelle est, en cm, la largeur du morceau que Guillaume a coupé pour Julie ?



Ⓐ 2 Ⓑ 3,5 Ⓒ 4 Ⓓ 4,33 Ⓔ 12

Solution

Au total, les parts de Julie et de Guillaume font

$$\left(7 \cdot 12 + \tfrac{14 \cdot 8}{2}\right) \text{cm}^2 = (84 + 56)\,\text{cm}^2 = 140\,\text{cm}^2$$

Pour que leurs parts soient équivalentes, celles-ci devraient compter

$$\frac{140}{2}\ \text{cm}^2 = 70\ \text{cm}^2$$

Pour cela, il faut que Guillaume cède à Julie un morceau ayant

$$(84 - 70)\ \text{cm}^2 = 14\ \text{cm}^2$$

soit un morceau rectangulaire de 7 cm sur 2 cm.

Réponse : A

Question 30 Trois disques (sans réponse préformulée)

Trois disques ont pour rayons r, $r + 5$ et $r + 10$. L'aire du plus grand vaut la somme des aires des deux autres. Quel est, en cm, le rayon du petit disque ?

Solution

Les disques ont respectivement pour aires

$$\pi r^2,\ \pi(r + 5)^2 \text{ et } \pi(r + 10)^2.$$

Comme l'aire du plus grand vaut la somme des aires des deux autres, nous avons

$$\pi(r + 10)^2 = \pi r^2 + \pi(r + 5)^2$$

En divisant les deux membres de l'égalité par le nombre π, nous obtenons

$$(r + 10)^2 = r^2 + (r + 5)^2$$

En effectuant, il vient :

$$r^2 + 20r + 100 = r^2 + r^2 + 10r + 25$$

Certains termes se neutralisant, nous avons finalement

$$r^2 = 10r + 75$$

Comme cette question est donnée sans réponse préformulée, r doit être un nombre entier dans $[0;999]$. De plus, le second membre de l'égalité ci-dessus est divisible par 5 mais pas par 10. Dès lors, r est obligatoirement un multiple de 5, non multiple de 10.

Pour $r = 5$, $r^2 = 25$ tandis que $10r + 75 = 125$.

Pour $r = 15$, $r^2 = 225$ et $10r + 75 = 225$.

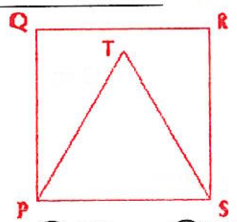
Le rayon du petit disque vaut donc 15 cm.

Réponse : 15

Éliminatoire MIDI

Question 24 Un triangle dans un carré

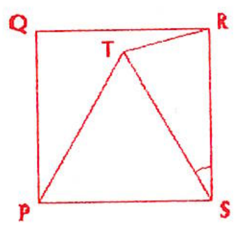
Dans la figure (inexacte) ci-contre, $PQRS$ est un carré et PTS un triangle équilatéral. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{RTS}$?



Ⓐ 75° Ⓑ 77° Ⓒ 80° Ⓓ 85° Ⓔ 90°

Solution

Le triangle SRT est isocèle. En effet, d'une part, $[SR]$ et $[SP]$ sont des côtés du carré et, d'autre part, $[SP]$ et $[ST]$ sont des côtés du triangle équilatéral. On a donc



$$|SR| = |SP| = |ST|$$

Dans ce triangle SRT,

$$\widehat{S} = \widehat{PSR} - \widehat{PST} = 90° - 60° = 30°$$

Comme les deux autres angles de ce triangle ont la même amplitude, on a

$$\widehat{RTS} = \frac{180° - \widehat{S}}{2} = 75°$$

Réponse : A

Question 25 Le chiffre des unités

Si a est un nombre entier, le chiffre des unités de $a^5 - a$ est

Ⓐ toujours 0 Ⓑ toujours 2 Ⓒ toujours 4 Ⓓ toujours 8 Ⓔ dépend de a

Solution

Portons dans un tableau le chiffre des unités de a^2, a^4, a^5 et $a^5 - a$ en fonction du chiffre des unités de a.

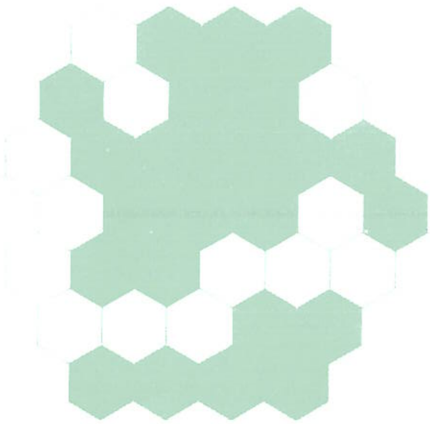
Chiffre des unités				
a	a^2	a^4	a^5	$a^5 - a$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	0
2	4	6	2	0
3	9	1	3	0
4	6	6	4	0
5	5	5	5	0
6	6	6	6	0
7	9	1	7	0
8	4	6	8	0
9	1	1	9	0

Ainsi, le chiffre des unités de $a^5 - a$ est toujours 0. Voilà une propriété très particulière de notre système de numération. Au passage, il est bon d'observer que certains chiffres seulement peuvent être chiffre des unités d'un carré.

Réponse : A

Solutions des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Le mur des nombres

232
97 135
40 57 78
23 17 40 38
19 4 13 27 11

668
365 303
179 186 117
76 103 83 34
45 31 72 11 23

Les chiffres croisés

4	5	6	7	8	9	-	8	3	7
3	4	1	2	6	5	-	9	4	8
9	8	-	3	4	7	5	1	2	6
2	3	6	1	5	8	9	-	7	9
7	9	8	-	2	3	7	8	1	4
1	2	5	7	3	4	8	9	-	-
6	7	9	8	-	2	1	3	4	6
5	6	7	9	8	-	2	1	3	4
-	-	1	5	6	2	4	7	8	9
4	9	3	6	7	8	-	2	1	3
1	3	-	4	3	5	9	6	7	8
5	8	6	2	9	1	7	-	2	1
2	7	1	-	1	4	3	2	5	7
3	6	2	-	4	3	8	7	6	5

Produits croisés

	1	2	3	4	5
1	M	O	I	N	E
2	E	U	L	E	R
3	T	I	E	R	S
4	R		T	E	E
5	E	S	S	E	S