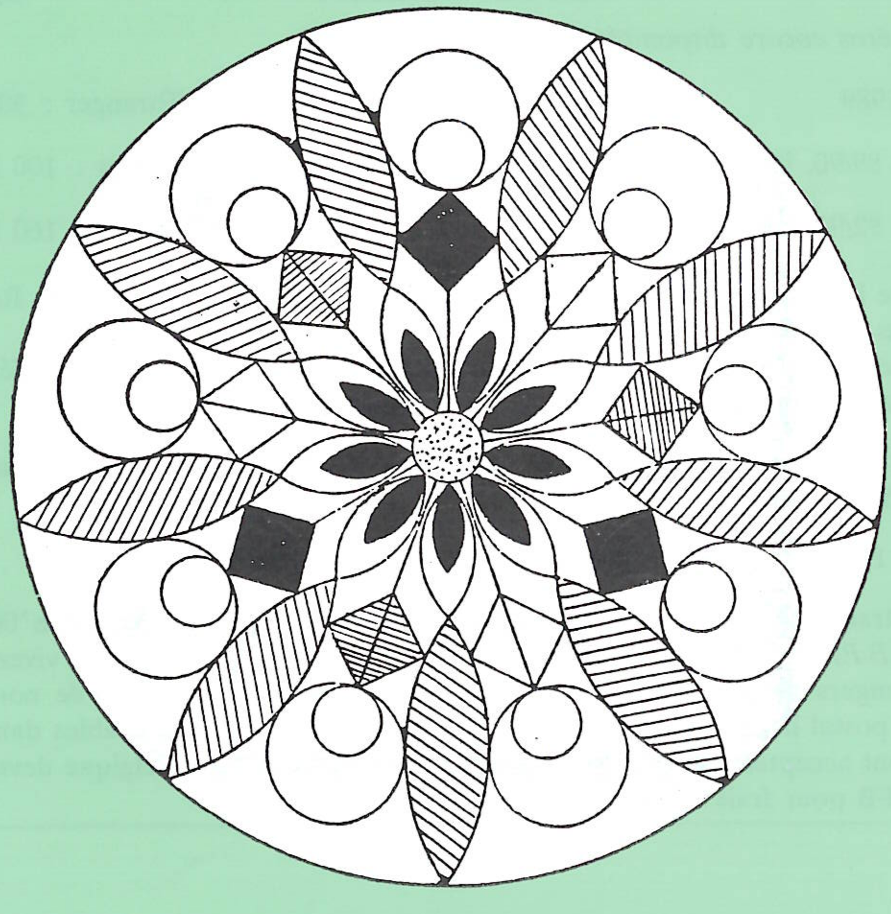
# MATH - JEUNES



17e année
Mars 1996 – n° 74
Bureau de dépôt : Mons X

# MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

*Rédaction, administration :* Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
*Comité de Rédaction :* M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, G.Noël, A.Parent, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
*Illustrations :* R.A.Cattaux
*Conception de la couverture :* K. Martroye

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

*Abonnements :*

| Belgique : | | Étranger : | |
|---|---|---|---|
| • Groupés (5 ex. au moins) : | 150 FB | • Groupés (5 ex. au moins) : | 250 FB (42 FF) |
| • Isolés : | 200 FB | • Isolés : | 330 FB (55 FF) |

*Anciens numéros encore disponibles :*

- Avant 1989 — Par numéro : 15 FB (Étranger : 30 FB ou 5 FF)
- Années 89/90, 90/91, 91/92 — Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB ou 17 FF)
- Années 92/93, 93/94, 94/95 — 80 FB (Étranger : 160 FB ou 27 FF)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

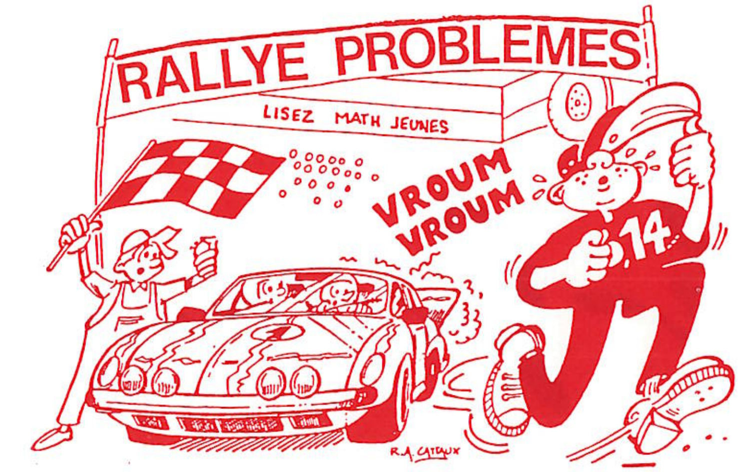
- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°74 Dix-septième année 1996

# Math-Jeunes

Math-Jeunes n°74, 74–78, 1996

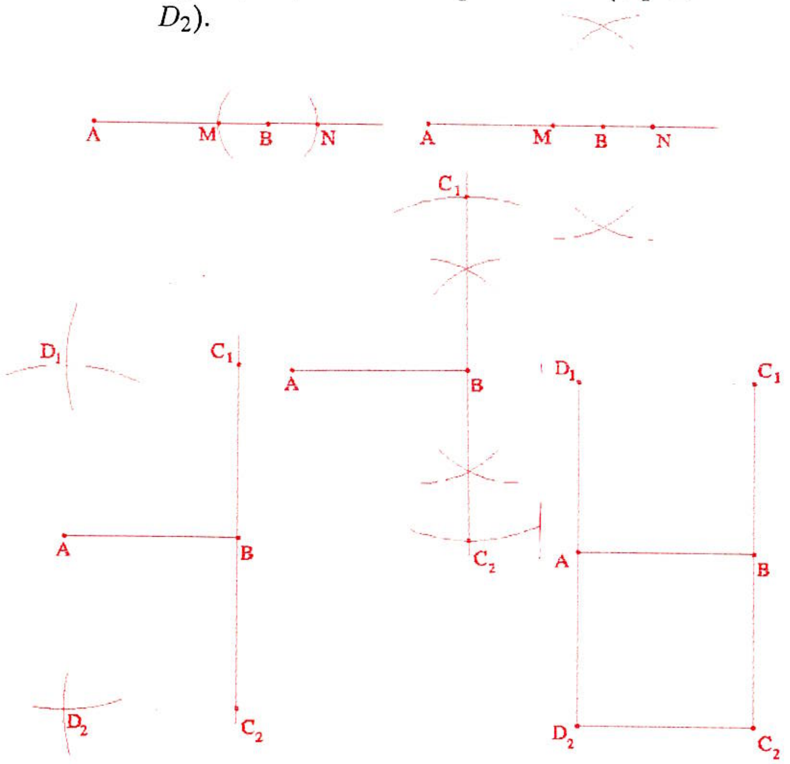



C. Festraets

Voici, pour le rallye 1995 - 1996, les solutions des problèmes proposés dans les numéros 72 et 73 de *Math-Jeunes*.

**mini 3 – solution**

Avec la règle, on prolonge le segment $[AB]$ au-delà de $B$ et avec le compas, on trace un arc de centre $B$ et de rayon arbitraire qui coupe la droite $AB$ en $M$ et en $N$. On construit ensuite la médiatrice de $[MN]$ : de $M$ comme centre, on trace un cercle de rayon plus grand que la moitié de $|MN|$ et de $N$ comme centre, on trace un cercle de même rayon; ces deux cercles se coupent en des points de la médiatrice de $[MN]$ et cette médiatrice passe par $B$. Sur cette médiatrice, on reporte avec le compas $|BC_1| = |BC_2| = |AB|$. Il reste à construire le sommet $D$. De $A$ comme centre et de $C$ ($C_1$ ou $C_2$) comme centre, on trace deux cercles de rayon $|AB|$ : ils se coupent en $D$ ($D_1$ ou $D_2$).



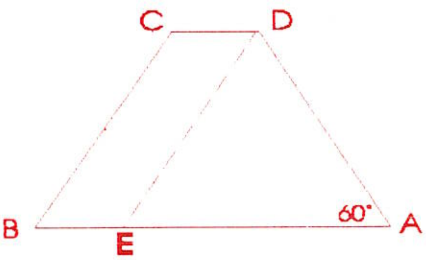

**mini 4 – solution**

- Si $x = -3$ et $y = 4$, on a
  $$3x + 7y = -9 + 28 = 19 \text{ et}$$
  $$43x+75y=-129+300=171=9\cdot 19$$
  Si $x = 4$ et $y = 1$, on a
  $$3x + 7y = 12 + 7 = 19 \text{ et}$$
  $$43x+75y=172+75=247=13\cdot 19$$
  Si $x = 11$ et $y = -2$, on a
  $$3x + 7y = 33 - 14 = 19 \text{ et}$$
  $$43x+75y=473-150=323=17\cdot 19$$
  Si $x = 18$ et $y = -5$, on a
  $$3x + 7y = 54 - 35 = 19 \text{ et}$$
  $$43x+75y=774-375=399=21\cdot 19$$
  Et ainsi de suite. Examine bien les valeurs successives de $x$ et de $y$. J'espère que tu vois comment on peut continuer à en obtenir d'autres.

  Prends une feuille de papier quadrillée et trace des axes de coordonnées $Ox$ et $Oy$. Place les points dont les coordonnées sont les couples $(x, y)$ obtenus ci-dessus, c'est-à-dire $(-3,4)$, $(4,1)$, $(11,-2)$, $(18,-5)$. Si tu as quelque esprit d'observation, tu remarqueras une propriété intéressante.

- Si $3x + 7y = 19$, alors, quels que soient les entiers $x$ et $y$, on a :
  $$\begin{aligned} 43x+75y &= 19x+19y+24x+56y \\ &= 19x+19y+8(3x+7y) \\ &= 19x+19y+8\cdot 19 \\ &= 19\cdot(x+y+8) \end{aligned}$$
  et $43x + 75y$ est toujours un multiple de 19 !

**mini 5 – solution**




Par $D$, construisons une droite parallèle à $CD$ et qui coupe $BA$ en $E$. $BCDE$ est un parallélogramme, car $CD//BE$ et $CB//DE$. Donc $|BC| = |DE| = a$ et $|BE| = |CD| = \frac{a}{3}$.

Puisque $|DE| = |DA| = a$, le triangle $EDA$ est isocèle et dans ce cas, $\widehat{DEA} = \widehat{EAD} = 60°$.

Mais on sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc, si deux a,gles valent 60°, le troisième vaut aussi 60° et le triangle est équilatéral, ce qui signifie que les trois côtés ont la même longueur $a$. Le périmètre du triangle est alors égal à

$$|AE| + |EB| + |BC| + |CD| + |DA| =$$
$$a + \frac{a}{3} + a + \frac{a}{3} + a = \frac{11a}{3}$$

**mini 6 – solution**

Il a un « 1 » à la première ligne et il y a deux « 1 » à chacune des lignes suivantes, donc le nombre de « 1 » sur les $n$ premières lignes vaut

$$N = 1 + 2 \cdot (n-1) = 2n - 1$$

Sur la troisième ligne, il y a un nombre qui n'est pas « 1 », sur la quatrième ligne, il y en a deux, sur la cinquième ligne, il y en a trois, ..., sur la n[e] ligne, il y en a $(n-2)$, donc le nombre de nombres qui ne sont pas des « 1 » sur les $n$ premières lignes vaut

$$M = 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2)$$

et le rapport de $M$ à $N$ vaut

$$\frac{M}{N} = \frac{1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2)}{2n-1}$$

Si tu as obtenu cette réponse, c'est déjà fort bien, mais il est possible d'écrire le numérateur sous une forme plus simple. Observons :

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$
$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$
$$\vdots$$

Il est ainsi raisonnable de faire l'hypothèse

$1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

mais il reste à prouver qu'elle est correcte. Adoptons la disposition suivante :

$$\begin{array}{lcccccccccc} M & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-3) & + & (n-2) \\ M & = & (n-2) & + & (n-3) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

et additionnons ces deux égalités. Il est facile de voir que la somme des termes placés l'un au-dessus de l'autre est toujours égale à $(n-1)$ et qu'il y a exactement $(n-2)$ telles sommes. On a donc :

$$2M = (n-2) \cdot (n-1)$$
$$M = \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}$$

Finalement, on a :

$$\frac{M}{N} = \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2 \cdot (2n-1)}$$

**midi 3 – solution**

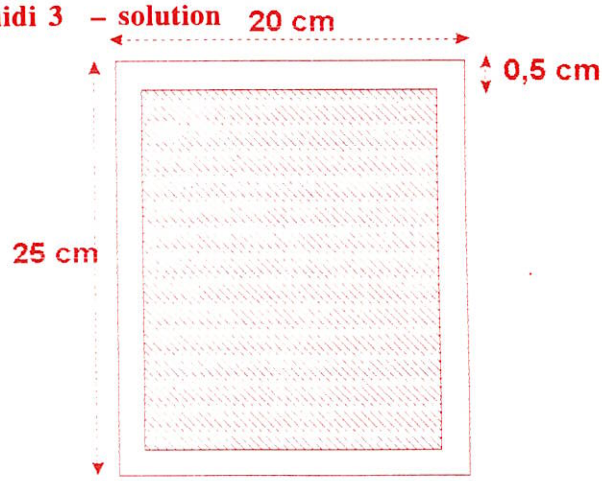



fig.1

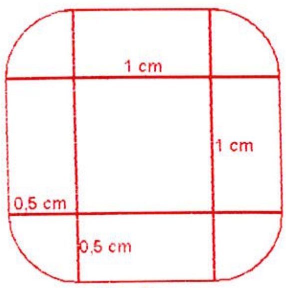



fig.2

Le cercle de rayon 0,5 cm doit satisfaire à deux conditions :

**1.** être à l'intérieur du rectangle de 20 cm × 25 cm ; son centre doit donc être dans le rectangle hachuré (fig. 1). L'aire de ce rectangle hachuré vaut

$$A_1 = 20\cdot 25 - 0,5\cdot(25+25+19+19) = 456$$

**2.** ne couper aucun des 120 carrés de côté 1 cm ; son centre doit donc être extérieur aux 120 figures isométriques à celle dessinée à la fig. 2 et construites sur chacun des carrés. L'aire de ces 120 figures vaut

$$\begin{aligned} A_2 &= 120\cdot(1+4\cdot 1\cdot 0,5+\pi\cdot(0,5)^2) \\ &= 120\cdot(3+\pi\cdot 0,25) \\ &= 360+30\pi < 360+30\cdot 3,15 \\ &< 454,5 < A_1 \end{aligned}$$

L'aire $A_2$ étant strictement inférieure à l'aire $A_1$, on peut placer le centre du cercle de manière à satisfaire aux deux conditions.

## midi 4 – solution

Posons $N = \overline{abcdef}$ le nombre de six chiffres. La somme de ces chiffres vaut 29 :

$$a+b+c+d+e+f = 29 \qquad (1)$$

$N$ est divisible par 11 :

$$\begin{aligned} N &= 100\,000a+10\,000b+1\,000c+100d+10e+f \\ &= 100\,001a+9\,999b+1\,001c+99d+11e \\ &\qquad -a+b-c+d-e+f \\ &= 11\cdot(9\,091a+909b+91c+9d+e) \\ &\qquad -a+b-c+d-e+f \end{aligned}$$

D'où, il existe un entier $k$ tel que :

$$-a+b-c+d-e+f = k\cdot 11 \qquad (2)$$

En additionnant et en soustrayant les égalités (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} 2b+2d+2f = 29+k\cdot 11 \\ 2a+2c+2e = 29-k\cdot 11 \end{cases}$$

Le premier membre étant pair, $k$ doit être impair. De plus, comme chaque chiffre est compris entre 0 et 9, on a :

$$0 \leqslant 2b+2d+2f \leqslant 54$$

c'est-à-dire $0 \leqslant 29+k\cdot 11 \leqslant 54$ et $k$ ne peut donc valoir que $-1$ ou 1. Ceci conduit à :

$$\begin{cases} b+d+f = 9 \\ a+c+e = 20 \end{cases} \text{ ou à } \begin{cases} b+d+f = 20 \\ a+c+e = 9 \end{cases}$$

**(1)** Si on veut que $N$ soit le plus grand possible, on doit prendre $a = b = 9$ ; le premier système permet de prendre $c = 9$, $d = 0$, $e = 2$ et $f = 0$, d'où $N = 999\,020$.

**(2)** Si on veut que $N$ soit le plus grand possible avec des chiffres différents, on doit prendre $a = 9$ et $b = 8$ ; le premier système permet alors de prendre $c = 7$, $d = 1$, $e = 4$ et $f = 0$, d'où $N = 987\,140$.

Le second système nous conduit à des valeurs de $N$ plus petites.

## midi 5 – solution

En désignant par $P_1$, $P_2$, $P_3$ les nombres d'élèves qui ont gagné respectivement un premier, un deuxième ou un troisième prix, l'énoncé se traduit par le système :

$$\begin{cases} P_1 = P_2 - 12 \\ P_3 = 2\cdot(P_1+P_2) \\ P_3 = P_1\cdot P_2 - 104 \end{cases}$$

Il est équivalent à :

$$\begin{cases} P_1 = P_2 - 12 \\ P_3 = 2(P_2 - 12 + P_2) \\ 2(P_2 - 12 + P_2) = (P_2 - 12)P_2 - 104 \end{cases}$$

La dernière équation s'écrit après simplification :

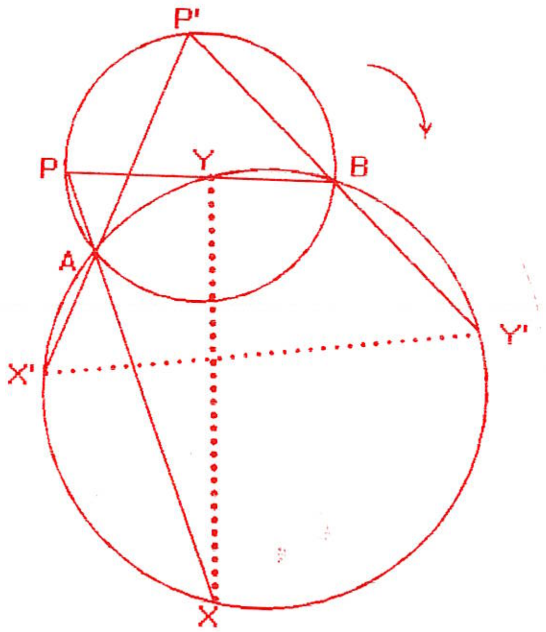
$$P_2^2 - 16P_2 - 80 = 0$$

C'est une équation du second degré ; le premier membre se factorise aisément :

$$(P_2 - 20)\cdot(P_2 + 4) = 0$$

Comme $P_2$ doit être positif, on obtient $P_2 = 20$ et en remplaçant dans le système, $P_1 = 8$ et $P_3 = 56$. Le nombre total de lauréats est donc 84.

**midi 6 – solution**




Sur le cercle $C_1$, plaçons arbitrairement deux points $P$ et $P'$. Nous devons démontrer que la corde $[XY]$ obtenue à partir de $P$ a même longueur que la corde $[X'Y']$ obtenue à partir de $P'$.

Dans le cercle $C_1$,

$$\widehat{PAP'} = \widehat{PBP'}$$

car ces angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{PP'}$. Or, $\widehat{PAP'} = \widehat{XAX'}$ et $\widehat{PBP'} = 180° - \widehat{Y'BY}$ ; d'où $\widehat{XAX'} = 180° - \widehat{Y'BY}$.

Dans le cercle $C_2$, l'angle $\widehat{XAX'}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{XX'}$ et l'angle $180° - \widehat{Y'BY}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{YY'}$. Donc

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{XX'} &= \overset{\frown}{YY'} \\ \overset{\frown}{XX'} + \overset{\frown}{X'Y} &= \overset{\frown}{X'Y} + \overset{\frown}{YY'} \\ \overset{\frown}{XY} &= \overset{\frown}{X'Y'} \end{aligned}$$

et les cordes $[XY]$ et $[X'Y']$ qui soustendent ces arcs ont bien la même longueur.

**maxi 3 – solution**

Si $X$ et $Y$ sont situés sur la même ligne alors, puisque $X$ est le plus petit soldat de sa ligne, on a $X < Y$.

Si $X$ et $Y$ sont situés sur la même colonne alors, puisque $Y$ est le plus grand soldat de sa colonne, on a $Y > X$.

Si $X$ et $Y$ ne sont situés ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, soit $Z$ le soldat placé à l'intersection de la ligne qui contient $X$ et de la colonne qui contient $Y$. $X$ et $Z$ sont sur la même ligne, donc $X < Z$, car $X$ est le plus petit de sa ligne. $Y$ et $Z$ sont sur la même colonne, donc $Y > Z$, car $Y$ est le plus grand de sa colonne. On a ainsi $X < Z$ et $Z < Y$, d'où $X < Y$ et le plus grand des deux est toujours $Y$.

**maxi 4 – solution**

En posant $2 \cdot 5^7 = a$ et $5 \cdot 2^7 = b$, l'expression donnée s'écrit :

$$\begin{aligned} (a-b)^{83} - \left(a^{83} - b^{83}\right) &= \\ & (a^{83} - C_{83}^{1} a^{82} b + C_{83}^{2} a^{81} b^2 - \cdots \\ & + C_{83}^{82} a b^{82} - b^{83}) - a^{83} + b^{83} \\ &= -C_{83}^{1} a^{82} b + C_{83}^{2} a^{81} b^2 - \cdots + C_{83}^{82} a b^{82} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{83}^{k} &= \frac{83!}{k!(83-k)!} \\ &= \frac{83 \cdot 82 \cdot \cdots \cdot (83-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

et cela $\forall k \in \{1, 2, \ldots, 82\}$.

83 est un nombre premier ; il est donc premier avec chacun des facteurs du dénominateur. Dès lors, chacun des coefficients binomiaux $C_{83}^{k}$ est un multiple de 83 et l'expression donnée est divisible par 83.

**maxi 5 – solution**

Soient $a_1$ le nombre de parties jouées le premier jour, $a_2$ le nombre total de parties jouées au cours des deux premiers jours, $a_3$ le nombre total de parties jouées durant les trois premiers jours, ..., $a_{77}$ le nombre total de parties jouées au cours des 77 premiers jours.

Comme chaque jour, il y a au moins une partie jouée, on a :

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{77}$$

En outre, comme 77 jours font 11 semaines et qu'en une semaine, il y a au plus 12 parties jouées,

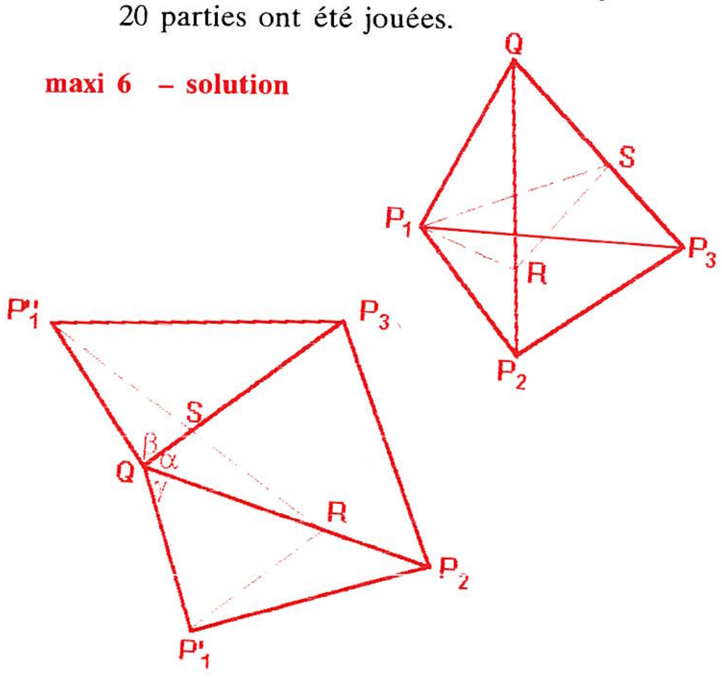
$$a_{77} < 11 \times 12 = 132.$$

De même, $a_1 + 20 < a_2 + 20 < a_3 + 20 < \cdots < a_{77} + 20 < 132 + 20 = 152$. Nous obtenons ainsi une suite $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{77}, a_1 + 20, a_2 + 20, a_3 + 20, \cdots, a_{77} + 20$ de 154 nombres entiers positifs tous inférieurs à 152. Il y en a forcément au moins deux qui sont égaux. Or les $a_i$ sont tous distincts et les $a_i + 20$ le sont aussi. Il faut donc que l'on ait, pour une certaine valeur de $i$ et de $k$,

$$a_i = a_k + 20$$

ce qui signifie qu'entre le $k^e$ et le $i^e$ jour, 20 parties ont été jouées.

**maxi 6 – solution**




Quel que soit le tétraèdre considéré, on a

$$0° < \alpha, \beta, \gamma < 180° \text{ et } \alpha + \beta + \gamma < 360°$$

**(1)** Si $\alpha + \beta \geqslant 180°$, alors, puisque $\gamma < 180°$, on a bien $\alpha + \beta > \gamma$.

**(2)** Si $\alpha + \beta < 180°$, alors « coupons » le tétraèdre suivant l'arête $P_1Q$ et développons-le (le point $P_1$ devient $P_1'$ sur la face $QP_1P_2$ et devient $P_1''$ sur la face $QP_1P_3$, dans ce développement).

Portons sur $QP_2$ un point $R$ tel que $|QR| = |QP_1|$. L'hypothèse $\alpha + \beta < 180°$ nous permet d'affirmer que $P_1''QR$ est un triangle. Soit $S$ le point d'intersection de $P_1''R$ et de $QP_3$.

$P_1'QR$ et $P_1''QR$ sont des triangles isocèles, donc

$$|P_1'R| = 2 \cdot |QR| \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \text{ et}$$
$$|P_1''R| = 2 \cdot |QR| \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

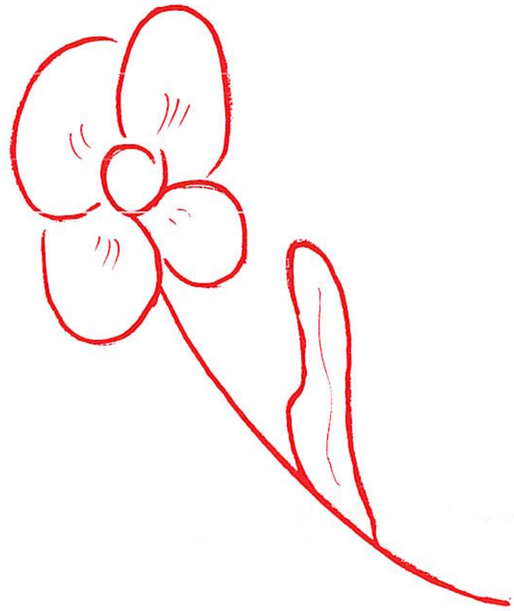
Refermons le tétraèdre. $P_1RS$ est un triangle dans lequel nous appliquons l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |RS| + |SP_1| &> |RP_1| \\ 2 \cdot |QR| \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} &> 2 \cdot |QR| \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} &> \sin\frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Les angles $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$ étant compris entre 0° et 90°, sinus est une fonction croissante, d'où

$$\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\gamma}{2}$$

et, en fin de compte, $\alpha + \beta > \gamma$.



Math-Jeunes n°74, 79–82, 1996



# Le cercle de Taylor d'un triangle

Guy Robert, *Centre FOPEMA, Namur*

Après avoir « étudié » le **triangle orthique** dans *Math-Jeunes* n° 73, nous vous proposons aujourd'hui de découvrir le **cercle de Taylor** d'un triangle. Ce cercle découle assez naturellement d'une étude plus approfondie de la figure formée par un triangle et son triangle orthique.

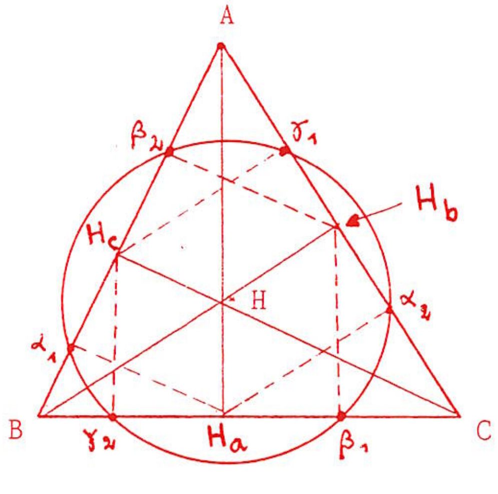



Figure 1

On projette les pieds $H_a$, $H_b$, $H_c$ des hauteurs d'un triangle $ABC$ en $\alpha_1$, $\alpha_2$ sur $AB$, $CA$; en $\beta_1$, $\beta_2$ sur $BC$, $AB$; en $\gamma_1$, $\gamma_2$ sur $CA$, $BC$.

> Les six points $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ sont situés sur une même circonférence qu'on appelle **cercle de Taylor** du triangle $ABC$.

Avant de passer à la démonstration de cette propriété, nous rappellerons la notion d'**antiparallèles** et son application au triangle orthique. En outre, nous donnerons quelques propriétés préliminaires.

## RAPPELS

### 1. Droites antiparallèles

**1.1. Définition** — L'antiparallèle $\Delta$ d'une droite $d$ par rapport aux côtés $b$ et $c$ d'un angle, forme avec $b$ l'angle que $d$ forme avec $c$ et inversement.

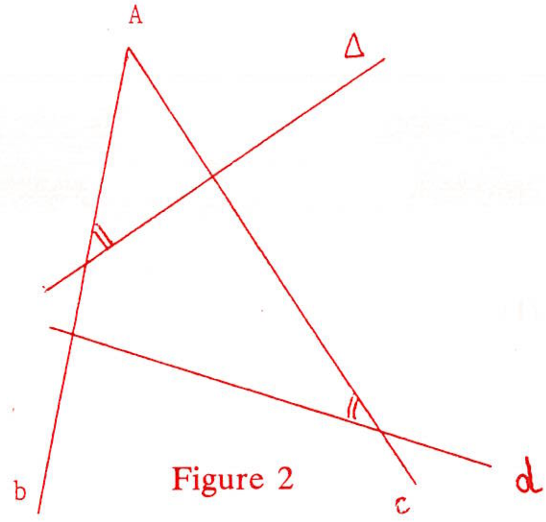



Figure 2

**1.2. Conséquences**

(a) Deux droites antiparallèles à une même troisième sont parallèles.

(b) Les points d'intersection de deux antiparallèles avec les côtés de l'angle sont cocycliques.

### 2. Triangle orthique

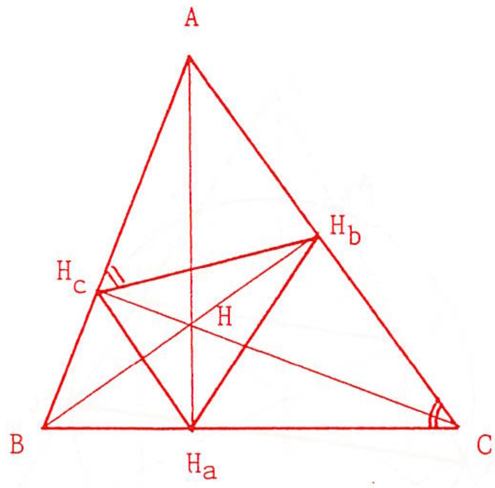



Figure 3

Les côtés du triangle orthique sont antiparallèles aux côtés du triangle de référence.

En effet, le quadrilatère $BH_cH_bC$ est inscriptible dans un cercle de diamètre $[BC]$. On en conclut :

$$A\widehat{H_c}H_b = \widehat{ACB}$$

d'où, d'après la définition (1.1) ci-dessus, l'antiparallélisme de $H_bH_c$ et de $BC$. La démonstration est analogue pour les deux autres côtés du triangle orthique.

## PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES

**(1)** Les segments $[\alpha_1\alpha_2]$, $[\beta_1\beta_2]$, $[\gamma_1\gamma_2]$ sont respectivement antiparallèles aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ (voir figure 1).

$[\alpha_1\alpha_2]$ est parallèle à $[H_bH_c]$. En effet, ces deux segments joignent les projections, sur les mêmes côtés de l'angle $\widehat{A}$, de deux points ($H_a$ et $H$) de la hauteur issue de $A$. Or le côté $[H_bH_c]$ du triangle orthique est antiparallèle au côté $[BC]$ du triangle (voir rappels). Il en résulte que $[\alpha_1\alpha_2]$ est aussi antiparallèle à $[BC]$. La démonstration est analogue pour les segments $[\beta_1\beta_2]$ et $[\gamma_1\gamma_2]$.

**(2)** Les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ passent par les milieux des côtés du triangle orthique.

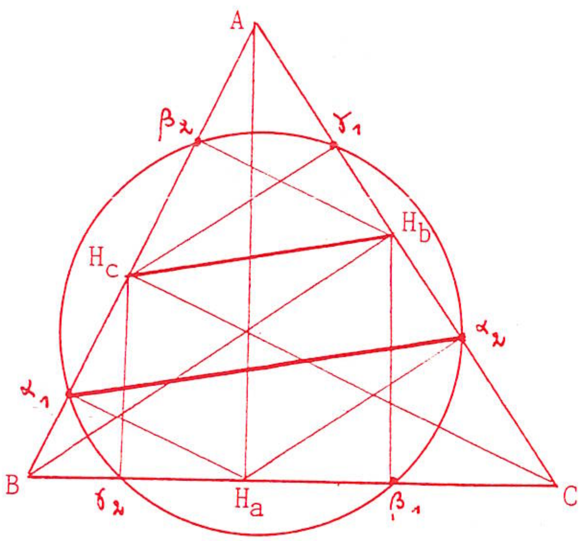



Figure 4

Démontrons par exemple que $[H_bH_c]$ est coupé en son milieu $P$ par le segment $[\gamma_1\gamma_2]$.

– $\gamma_1\gamma_2$ est antiparallèle à $AB$ (propriété 1)

$$\Rightarrow \ \widehat{\gamma_2\gamma_1H_b} = \widehat{B}$$

– $H_bH_c$ est antiparallèle à $BC$ (voir rappel)

$$\Rightarrow \ \gamma_1\widehat{H_b}H_c = \widehat{B}$$

Dans le triangle rectangle $H_c\gamma_1H_b$, l'égalité des angles $\widehat{\gamma_2\gamma_1H_b}$ et $\gamma_1\widehat{H_b}H_c$ montre que $\gamma_1\gamma_2$ passe par le milieu de l'hypoténuse. La démonstration est analogue pour les segments $[\alpha_1\alpha_2]$ et $[\beta_1\beta_2]$.

**Remarque** – Si nous désignons par $Q$ et $R$ les milieux respectifs des côtés $[H_cH_a]$ et $[H_aH_b]$ du triangle orthique, nous pouvons dire que :

Les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ forment le triangle complémentaire (1) du triangle orthique.

**(3)** Les segments $[\alpha_1\alpha_2]$, $[\beta_1\beta_2]$, $[\gamma_1\gamma_2]$ sont égaux entre eux.

Désignons par $Q$ le milieu du côté $[H_cH_a]$ du triangle orthique (figure 4) ; $[\gamma_1\gamma_2]$ passe par le point $Q$. On a donc :

$$|\gamma_1\gamma_2| = |\gamma_1P| + |PQ| + |Q\gamma_2|$$

Or $|\gamma_1P| = \dfrac{1}{2}|H_bH_c|$ (triangle rectangle $H_c\gamma_1H_b$), $|PQ| = \dfrac{1}{2}|H_aH_b|$ (« théorème du milieu » dans le triangle $H_aH_bH_c$) et $|Q\gamma_2| = \dfrac{1}{2}|H_cH_a|$ (triangle rectangle $H_a\gamma_2H_c$). D'où

$$|\gamma_1\gamma_2| = \frac{|H_bH_c| + |H_cH_a| + |H_aH_b|}{2}$$

c'est-à-dire le demi-périmètre du triangle orthique. La symétrie du résultat indique qu'il en sera de même pour les segments analogues $|\alpha_1\alpha_2|$ et $|\beta_1\beta_2|$. Les trois segments sont donc égaux.

**(4)** Les droites $\beta_2\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_1$, $\alpha_2\beta_1$ sont parallèles aux côtés du triangle $ABC$.

(1) On appelle *triangle complémentaire* d'un triangle $ABC$ le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de $ABC$ (triangle de référence).

Cette propriété est immédiate.

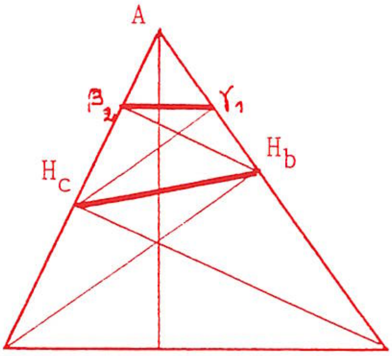



Figure 5

– $H_bH_c$ est antiparallèle à $BC$ (voir rappels sur le triangle orthique).

– $\beta_2\gamma_1$ est antiparallèle à $H_bH_c$ (il suffit de considérer le triangle $AH_bH_c$ dans lequel $\beta_2$ et $\gamma_1$ sont les pieds de deux hauteurs). Ainsi, on a le résultat annoncé puisque deux droites antiparallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

## THÉORÈME D'EXISTENCE DU CERCLE DE TAYLOR

Rappelons l'énoncé de la proposition :

> On projette les pieds $H_a$, $H_b$, $H_c$ des hauteurs d'un triangle $ABC$ en $\alpha_1$, $\alpha_2$ sur $AB$, $CA$ ; en $\beta_1$, $\beta_2$ sur $BC$, $AB$ ; en $\gamma_1$, $\gamma_2$ sur $CA$, $BC$.
> Les six points $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ sont situés sur une même circonférence, le **cercle de Taylor**.

**Démonstration**

$[\alpha_2\beta_1]$ est parallèle à $[AB]$ (voir propriété 4) et $[\gamma_1\gamma_2]$ est antiparallèle au même côté (voir propriété 1).

Il en résulte que $[\alpha_2\beta_1]$ et $[\gamma_1\gamma_2]$ sont antiparallèles et, dès lors, que les points $\alpha_2$, $\beta_1$, $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont concycliques.

D'autre part, le quadrilatère $\beta_2\gamma_1\beta_1\gamma_2$ est un trapèze isocèle puisque $\beta_2\gamma_1$ est parallèle à $\gamma_2\beta_1$ par la propriété 4, et que $|\beta_2\beta_1| = |\gamma_1\gamma_2|$ (diagonales du quadrilatère) par la propriété 3.

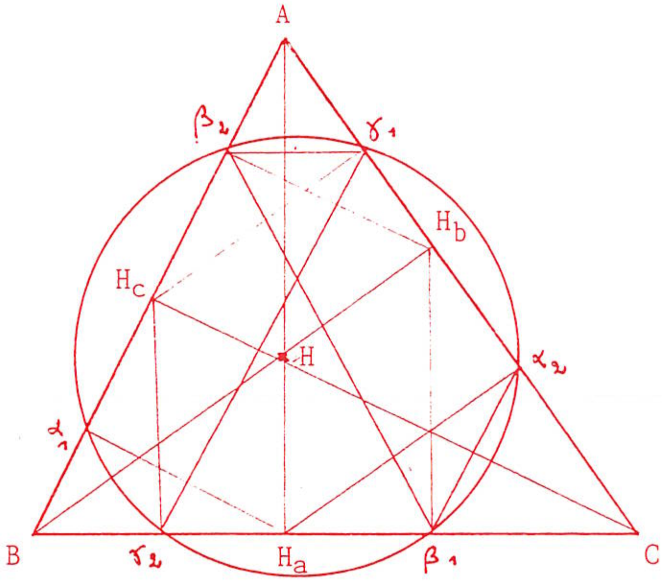



Figure 6

Étant isocèle, ce trapèze est inscriptible et $\beta_2$ appartient ainsi à la circonférence $\gamma_1\beta_1\gamma_2$. On montrerait de même que $\alpha_1$ appartient à la même circonférence, ce qui démontre que les six points $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ sont cocycliques.

## PROPRIÉTÉ

> Le centre du cercle de Taylor est le centre du cercle inscrit au triangle complémentaire du triangle orthique.

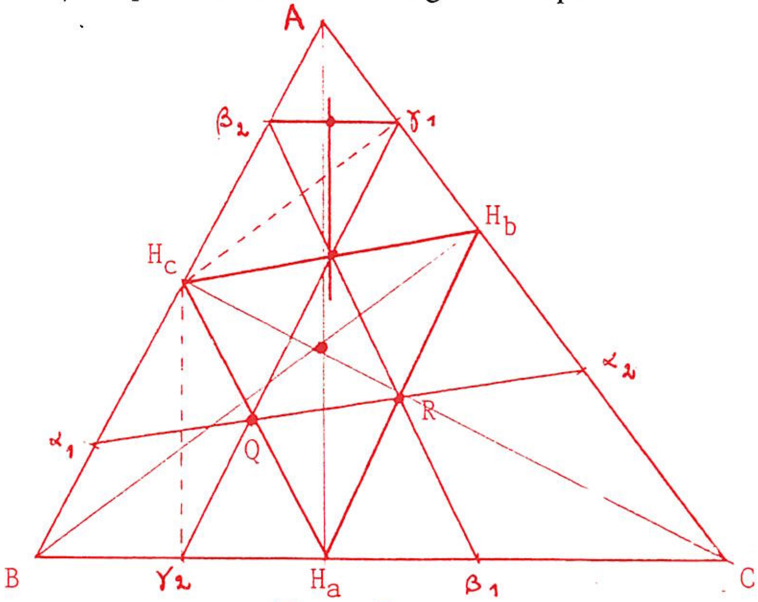



Figure 7

On sait (cf. propriété 2) que les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ et $\gamma_1\gamma_2$ passent par les milieux des côtés du triangle orthique. Si nous notons $P$, $Q$, $R$ les milieux respectifs de $[H_bH_c]$, $[H_cH_a]$ et $[H_aH_b]$, les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ et $\gamma_1\gamma_2$ forment donc le triangle $PQR$, complémentaire du triangle orthique.

Les triangles $P\beta_2\gamma_1$ et $\gamma_2P\beta_1$ étant isocèles — souvenez-vous, le quadrilatère $\beta_2\gamma_1\beta_1\gamma_2$ est un trapèze isocèle — la bissectrice de l'angle $\widehat{\beta_2P\gamma_1}$ ou $\widehat{PQR}$ est perpendiculaire au milieu de la corde $[\beta_2\gamma_1]$ du cercle de Taylor; dès lors, elle passe par le centre de ce dernier.

La propriété analogue existant pour les bissectrices des angles $\widehat{RQP}$ et $\widehat{PRQ}$, le centre du cercle de Taylor est donc le centre du cercle inscrit au triangle $PQR$, ce qui établit la propriété annoncée.

⋆

⋆ ⋆

## NOTE

1. Le **cercle de Taylor** aurait été envisagé pour la première fois dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* paru chez Vuibert en 1877, puis par Eugène CATALAN (*Théorèmes et Problèmes de Géométrie*) en 1879, par J. NEUBERG (*Mathesis*) en 1881 et ensuite, par H. TAYLOR (*The Messenger of Mathematics*) en 1882.

   Ce dernier auteur — dont le nom est resté attaché au fameux cercle — à repris la question en la développant considérablement par l'étude des cercles analogues des triangles $AHB$, $BHC$, $CHA$ qui ont, avec le cercle associé au triangle $ABC$, d'intéressantes relations géométriques, mais encore par des recherches sur les liens existant entre « son » cercle et d'autres éléments du triangle.

2. Nous nous sommes limités dans cet article à **une** propriété du cercle de Taylor. Il y en a une foule d'autres et nous y reviendrons peut-être :

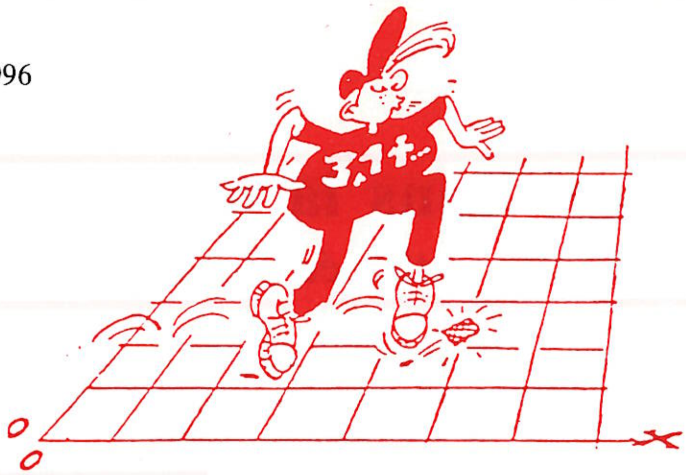
   (a) en voici une :
   Considérant les cercles de Taylor des triangles $AHB$, $CHA$, $CHB$ ($H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$), leurs centres sont les centres des trois cercles exinscrits au triangle complémentaire du triangle orthique.

   (b) les deux qui suivent sont proposées à vos recherches :

      i. Calculer le rayon du cercle de Taylor en fonction des éléments du triangle de référence $ABC$.

      ii. $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ désignant respectivement les projections de $H_a$, $H_b$ et $H_c$ sur les côtés $[CA]$, $[AB]$ et $[BC]$ du triangle $ABC$, démontrer que l'on a :
      $$\begin{aligned}\operatorname{tg} \widehat{\alpha_2\beta_2 A} &= \operatorname{tg} \widehat{\beta_2\gamma_2 B}\\ &= \operatorname{tg} \widehat{\gamma_2\alpha_2 C}\\ &= -\operatorname{tg} \widehat{A}\cdot\operatorname{tg} \widehat{B}\cdot\operatorname{tg} \widehat{C}\end{aligned}$$

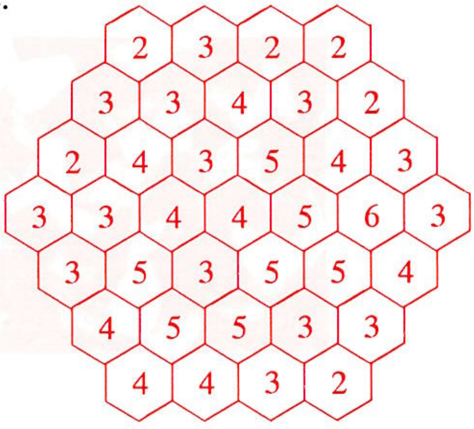
# Jeux

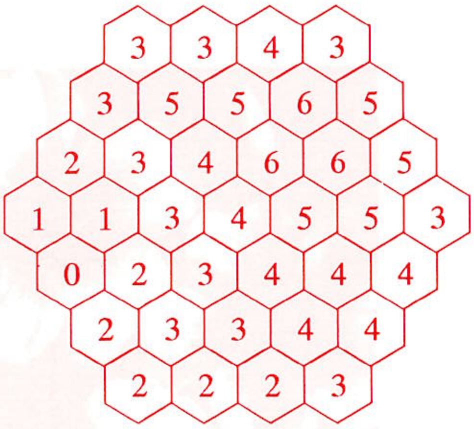


A. Parent

## Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.




## Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, ...). Chacun des nombres–définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | E | | |
| 4 | | E | | | |
| 5 | | | | | |

**Horizontalement**

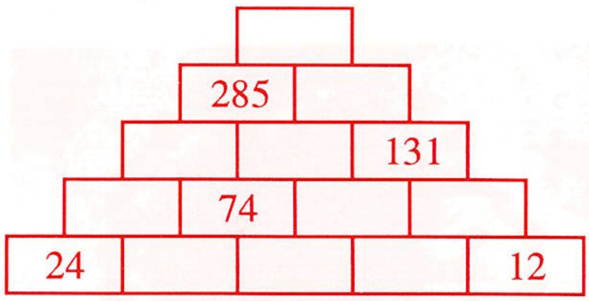
1. 359 100
2. 140 000
3. 1 120
4. 50 400
5. 128 250

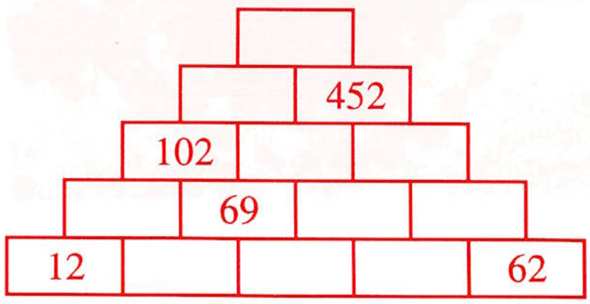
**Verticalement**

1. 70 – 240
2. 100 800
3. 171 000
4. 10 500
5. 119 700

## Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.



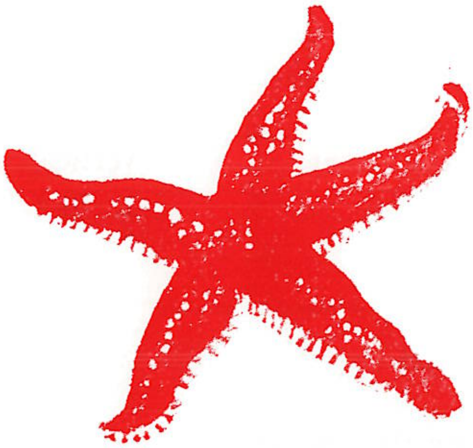



Math-Jeunes n°74, 84–85, 1996

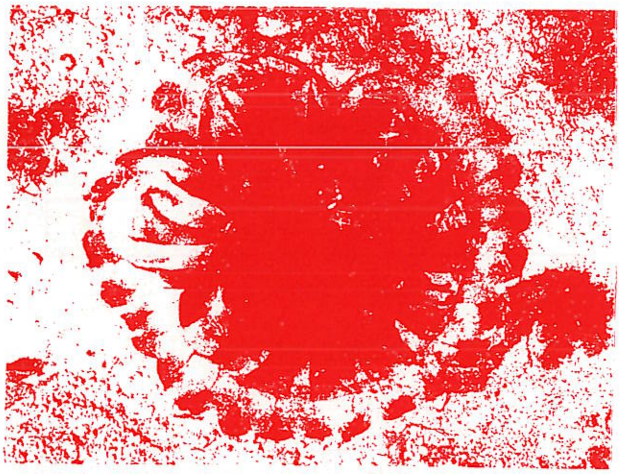
# Les rosaces dans la nature

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

*Math-Jeunes* t'a déjà fait voir beaucoup de rosaces ... Dans ce numéro 74, il te propose de regarder autour de toi, dans le monde où tu vis et ... si tu essaies de modéliser la nature qui t'environne, si tu consens un pas vers l'abstraction, tu verras encore beaucoup plus de rosaces ! Ce que nous te demandons là est l'essence même de la démarche scientifique ... Tu vas comprendre.
Dans le règne animal tout d'abord, regarde cette étoile de mer

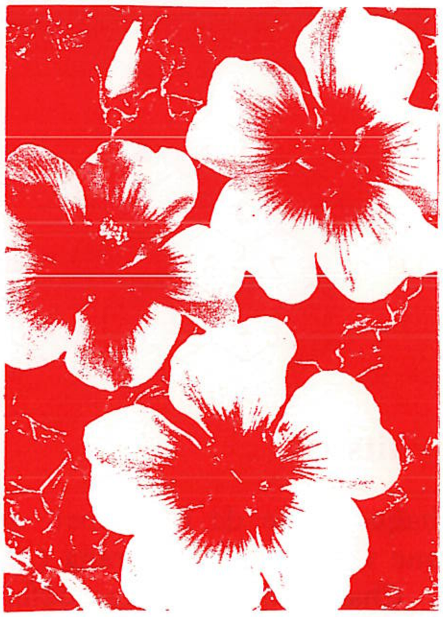


ou encore cette méduse



Et les exemples se multiplient si tu observes le monde végétal. Ces narcisses, par exemple

ou ces lavatères



Les dahlias ne sont pas mal non plus

La reine-marguerite est bien connue

ou le cosmos

Et tu en trouveras encore beaucoup d'autres lors de tes promenades à la campagne. C'est pour bientôt car ... voici venir le printemps !

Mais, me diras-tu, ce ne sont pas de vraies rosaces au sens mathématique ; elles ont toutes un « petit quelque chose » de non symétrique ...

Évidemment, ce sont des objets de la vie de tous les jours, pas des objets mathématiques ! Et voilà pourquoi nous t'avons demandé dès le départ de faire un petit effort – par exemple, pour associer l'étoile de mer à une vraie rosace mathématique à cinq pétales ou branches, ou ...

★

★ ★

Tout scientifique a besoin des mathématiques pour progresser dans la science qu'il pratique, qu'il s'agisse de physique, de chimie, de biologie, de sciences économiques, de l'art de l'ingénieur, ... C'est le monde des **mathématiques appliquées**. Et l'idée de base est d'associer aux phénomènes physiques observés un **modèle mathématique** acceptable, c'est-à-dire qui « colle » avec suffisamment de précision (c'est une notion très objective) aux expériences réalisées en laboratoire ou sur le terrain.

Tu peux ainsi facilement imaginer que rien n'est figé en sciences, que le modèle mathématique adopté peut évoluer et s'affiner au cours du temps. Mais ... discutes-en donc avec tes professeurs de sciences !

Math-Jeunes n°74, 86–87, 1996

# Le problème des unités en physique

Patrick Croquet, *Athénée Royal de Binche*

Cet article traite du problème de la conversion de multiples et de sous-multiples d'unités du système international lié aux puissances entières de 10.

## Les unités de base du Système International

Une difficulté souvent rencontrée dans le cours de physique, notamment en troisième année, est la conversion des multiples ou sous-multiples d'unités du système international (S.I.) en les unités du S.I.

C'est en 1960 que la Conférence Générale des Poids et Mesures adopte le Système International des unités (S.I.); celui-ci comporte sept unités de base correspondant à sept grandeurs de base (tableau 1).

| Grandeur | Nom | Symbole |
|---|---|---|
| longueur | mètre | m |
| masse | kilogramme | kg |
| temps | seconde | s |
| intensité (cour. électr.) | ampère | A |
| température (thermodynam.) | kelvin | K |
| quantité de matière | mole | mol |
| intensité lumineuse | candela | cd |

tableau 1

## Les unités dérivées

Les unités dérivées du S.I. sont exprimées en fonction des unités de base; elles possèdent souvent un nom et un symbole spécial (tableau 2).

| Grandeur | Nom | Symbole | Relation avec unité de base |
|---|---|---|---|
| fréquence | hertz | Hz | $1\ s^{-1}$ |
| force | newton | N | $1\ kg \cdot m/s^2$ |
| pression | pascal | Pa | $1\ N/m^2$ |
| énergie, travail | joule | J | $1\ N \cdot m$ |
| puissance | watt | W | 1 J/s |
| tension électrique | volt | V | 1 W/A |
| résistance électrique | ohm | $\Omega$ | 1 V/A |

tableau 2

Les multiples et sous-multiples sont formés d'un préfixe multiplicateur et d'une unité de base ou d'une unité dérivée. Voici les principaux préfixes utilisés :

| préfixe | symbole | facteur |
|---|---|---|
| zetta | Z | $10^{21}$ |
| exa | E | $10^{18}$ |
| peta | P | $10^{15}$ |
| téra | T | $10^{12}$ |
| giga | G | $10^{9}$ |
| méga | M | $10^{6}$ |
| kilo | k | $10^{3}$ |
| hecto | h | $10^{2}$ |
| déca | da | $10^{1}$ |
| déci | d | $10^{-1}$ |
| centi | c | $10^{-2}$ |
| milli | m | $10^{-3}$ |
| micro | $\mu$ | $10^{-6}$ |
| nano | n | $10^{-9}$ |
| pico | p | $10^{-12}$ |
| femto | f | $10^{-15}$ |
| atto | a | $10^{-18}$ |
| zepto | z | $10^{-21}$ |

tableau 3

Prenons un exemple : une longueur est mesurée à l'aide d'un instrument permettant une mesure au 1/1000 de mm. La mesure de la longueur pourra être exprimée en micromètres ($\mu$m) : $L = 25\ \mu$m.

$L$ est le symbole de la grandeur physique (dans notre exemple, une longueur) ;
$\mu$m est le symbole de l'unité (dans notre exemple, le micromètre) ;
25 est la valeur numérique de la grandeur physique.

Une grandeur peut être exprimée dans des unités différentes (multiples ou sous-multiples) ; **les valeurs numériques correspondantes sont entre elles dans le rapport inverse des unités.**

Si nous voulons exprimer la longueur précédente en millimètres, puisque le millimètre est mille fois plus grand que le micromètre, la valeur numérique sera mille fois plus petite et donc égale à 0,025 ou $25 \cdot 10^{-3}$.

**: 1000 (x $10^{-3}$)**

$$25\ \mu m = 25.10^{-3}\ mm$$

**x 1000 (x $10^{3}$)**

Si 1 mm $= 1 \cdot 10^{-3}$ m, alors 1 m $= 10^3$ mm.
25 $\mu$m $= 25 \cdot 10^{-6}$ m $= 25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3$ mm $= 25 \cdot 10^{-3}$ mm

# Rappels mathématiques

**R1.** $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$ avec $n \in \mathbf{Z}$

Si $n, m \in \mathbf{Z}$, $a, b \in \mathbf{R}_0$,

**R2.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

**R3.** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

**R4.** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

**R5.** $1 = 10^0 = 10^{-n} \cdot 10^n$

# Méthodes de conversion

**1. Les multiples et sous-multiples de l'unité de longueur, de pression, de puissance, de capacité, d'énergie, de fréquence, de résistance électrique, etc.**

Multiplier la valeur numérique par le facteur du préfixe.
Exemples :

45 mm $= 45 \cdot 10^{-3}$ m
1,2 km $= 1{,}2 \cdot 10^3$ m
1013 hPa $= 1013 \cdot 10^2$ Pa
5 GW $= 5 \cdot 10^9$ W
12 hl $= 12 \cdot 10^2$ l
1500 kJ $= 1500 \cdot 10^3$ J
237 MHz $= 237 \cdot 10^6$ Hz
15 k$\Omega$ $= 15 \cdot 10^3\ \Omega$

**2. Les multiples et sous-multiples de l'unité de surface ($m^2$)**

Multiplier la valeur numérique par la puissance 2 du facteur du préfixe.
Exemples :

$25\ cm^2 = 25 \cdot (10^{-2})^2\ m^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ m^2$
$150\ mm^2 = 150 \cdot (10^{-3})^2\ m^2 = 150 \cdot 10^{-6}\ m^2$

**3. les multiples et sous-multiples de l'unité de volume ($m^3$)**

Multiplier la valeur numérique par la puissance 3 du facteur du préfixe.
Exemples :

$25\ cm^3 = 25 \cdot (10^{-2})^3\ m^3 = 25 \cdot 10^{-6}\ m^3$
$150\ mm^3 = 150 \cdot (10^{-3})^3\ m^3 = 150 \cdot 10^{-9}\ m^3$

Convertir 25 $cm^2$ en $dam^2$ :
$25\ cm^2 = 25 \cdot (10^{-2})^2\ m^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ m^2$
Or $1\ dam^2 = 1 \cdot (10^1)^2\ m^2 = 1 \cdot 10^2\ m^2$, donc $1\ m^2 = 1 \cdot 10^{-2}\ dam^2$
d'où $25\ cm^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}\ dam^2 = 25 \cdot 10^{-6}\ dam^2$

Convertir 3,4 $dm^3$ en $km^3$ :
$3{,}4\ dm^3 = 3{,}4 \cdot (10^{-1})^3\ m^3 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3$
Or $1\ m^3 = 1 \cdot (10^{-3})^3\ km^3 = 1 \cdot 10^{-9}\ km^3$
d'où $3{,}4\ dm^3 = 3{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9}\ km^3 = 3{,}4 \cdot 10^{-12}\ km^3$.
Ces conversions débordent largement du cours de physique mais peuvent être vues comme application mathématique des puissances de 10.

# Bibliographie

*Unités et grandeurs. Symboles et normalisation*, B. DUPONT et J.-P. TROTIGNON, Nathan.

Math-Jeunes n°74, 88–91, 1996

# La datation nucléaire,

J.-P. Gobert – F. Drapier *I.S.T.C.F. Irchonwelz – Athénée Royal d'Ath*

## Préliminaires

• L'élément chimique $X$, possédant $z$ électrons (donc $z$ protons) et $a-z$ neutrons se note $X_z^a$.
Deux mêmes éléments chimiques ne différant que par leur nombre de neutrons s'appellent deux isotopes de cet élément.

• Le nombre d'AVOGADRO (1) est le nombre d'atomes contenus dans 12 grammes de l'isotope le plus abondant du carbone, l'isotope $C_6^{12}$. Ce nombre, noté $N_A$ vaut $6{,}023 \cdot 10^{23}$.

• La masse atomique d'un élément, exprimée en grammes, est la masse nécessaire pour former $N_A$ atomes de cet élément. Celle-ci se note souvent $m_a$.
Par exemple :

$$m_a(\mathrm{Ra}_{88}^{226}) = 226{,}0254 \text{ g}$$
$$m_a(\mathrm{Pb}_{82}^{206}) = 205{,}9745 \text{ g}$$
$$m_a(\mathrm{U}_{92}^{238}) = 238{,}0508 \text{ g}$$

On remarquera le lien entre ces valeurs, le nombre de protons et de neutrons de chaque élément.
On peut dire que 226 grammes de $\mathrm{Ra}_{88}^{226}$ sont équivalents à 206 grammes de $\mathrm{Pb}_{82}^{206}$ et à 238 grammes de $\mathrm{U}_{92}^{238}$. On appelle cela *la propriété de l'équivalence des masses atomiques.*

(1) Amedeo di Quaregna AVOGADRO, physicien italien né à Turin (1776-1856).

• On appelle demi-vie d'un élément, que l'on note $T$, le temps nécessaire pour que celui-ci diminue sa masse de moitié. Par exemple :

$$T(C_6^{14}) = 5\,730 \text{ années}$$
$$T(U_{92}^{238}) = 4{,}51 \cdot 10^9 \text{ années}$$

## La loi de désintégration d'un élément radioactif

### 1. La loi de RUTHERFORD-SODDY (1903) (2)

Si $N(t_0)$ et $N(t_1)$ représentent respectivement le nombre d'atomes radioactifs aux temps $t = t_0$ et $t = t_1 = t_0 + \Delta t$, alors

$$N(t_1) = N(t_0) \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t}$$

où $\lambda$ est la constante de désintégration propre à chaque élément.
La probabilité pour qu'un atome d'un élément chimique donné $X_z^a$ ne puisse se désintégrer en une unité de temps est donnée par l'égalité

$$\frac{N(t_0+1)}{N(t_0)} = e^{-\lambda(X_z^a)}$$

(2) Ernest RUTHERFORD of NELSON, physicien anglais, né à Nelson (Nouvelle-Zélande), 1871-1937. Il obtint le prix Nobel en 1908.
Frederick SODDY, physicien britannique né à Eastbourne, 1877-1956. Sa découverte de l'isotopie fut couronnée par un prix Nobel en 1921.

Donc, la probabilité qu'a un atome de ce même élément de se désintégrer en une unité de temps est $1 - e^{-\lambda(X_z^a)}$.
En particulier, si $t_0 = 0$ et $t_1 = t$, la loi de Rutherford-Soddy s'écrit

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Application
Le nombre d'atomes désintégrés en une seconde dans un gramme d'un élément chimique donné $X_z^a$ est $\frac{N_A}{m_a(X_z^a)} \cdot (1 - e^{-\lambda(X_z^a)})$.
Sachant que la constante de désintégration du $Ra_{88}^{226}$ est de $1,36 \cdot 10^{-11}$/s, en moyenne, 37 306 426 623 atomes de cet élément se désintègrent par seconde.

## 2. Conséquences

**• Calcul de la demi-vie d'un élément**
Si la constante de désintégration $\lambda$ est connue, il suffit alors, pour calculer la demi-vie d'un élément, de résoudre le système

$$\begin{cases} N(T) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot T} \\ N(T) = \frac{1}{2} \cdot N(0) \end{cases}$$

On trouve $T = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(2)$.

**• Calcul de la constante de désintégration**
Si la demi-vie $T$ d'un élément est donnée (l'ouvrage [4], de la bibliographie en fin de document, donne cette valeur pour chaque élément), alors $\lambda = \frac{1}{T} \cdot \ln(2)$.

**• Calcul de l'âge des restes d'un foyer préhistorique**
Si on suppose que ce foyer préhistorique possède encore $r\%$ d'un élément radioactif déterminé, l'âge $t$ de celui-ci vérifie l'équation

$$\frac{r}{100} \cdot N(0) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

ce qui permet de dégager

$$t = -\frac{\ln(r \cdot 10^{-2})}{\lambda}$$

**• Autre formulation de la loi de Rutherford-Soddy**

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

## 3. Exercices

Les solutions de ces exercices seront publiées dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

1. Démontrer que le nombre d'atomes désintégrés en une unité de temps dans un gramme d'un élément chimique donné $X_z^a$ est égal à

$$\frac{N_A}{m_a(X_z^a)} \cdot (1 - e^{-\lambda(X_z^a)})$$

2. Sachant que les demi-vies de l'uranium 238 et du plutonium 239 sont respectivement $4,51 \cdot 10^9$ et 24 400 années, on demande de calculer leur constante de désintégration.

3. Sachant que sur 8 000 particules de carbone 14, une se désintègre (en azote 14) après un an, on demande de calculer la constante de désintégration, ainsi que la demi-vie de cet élément.

4. À l'aide d'une structure répétitive *repeat ... until* ou *while ... do*, écrire un programme en langage Pascal permettant de calculer selon un menu :
a) l'âge des restes étant donnés la demi-vie d'un élément et le pourcentage de cet élément restant dans un corps ;
b) la constante de désintégration $\lambda$, en $s^{-1}$, d'un élément radioactif dont on lit la demi-vie $T$ en années ;
c) la demi-vie $T$, en années et en secondes, d'un élément radioactif dont on lit la constante de désintégration $\lambda$ en $an^{-1}$.

5. En utilisant encore une structure répétitive, écrire un programme en langage Pascal qui affiche sous forme d'un tableau à deux colonnes, en fonction du temps, la masse restante d'un corps radioactif en train de se désintégrer.

Exemple

Pour une quantité initiale 100 de carbone 14, voici un exemple d'un tel tableau :

| après $t$ ans | quantité restante |
|---|---|
| 1 000 ans | 88,61 |
| 1 500 ans | 83,41 |
| 2 000 ans | 78,51 |
| 2 500 ans | 73,90 |
| ⋮ | ⋮ |
| 7 000 ans | 42,88 |

# Le principe de datation des roches

## Principe de l'uranium 238

L'élément radioactif est l'uranium 238, $U_{92}^{238}$, qui se désintègre en plomb 206, c'est-à-dire $Pb_{82}^{206}$.

## Exemple

Une analyse a permis de déceler qu'une roche contient 8,7 grammes d'uranium 238 et 1,125 grammes de plomb 206.
Sachant que les masses atomiques de l'uranium 238 et du plomb 206 sont respectivement de 238,0508 et 205,9745 et que la demi-vie de l'uranium 238 est de $4,51 \cdot 10^9$ ans, on demande de calculer l'âge de cette roche ...

Il faut procéder en deux étapes : calculer la masse initiale en uranium 238 puis en déduire l'âge de la roche.

- Au temps $t = 0$, le plomb était de l'uranium. Par conséquent, vu le principe des masses équivalentes, 206 grammes de plomb étaient équivalents à 238 grammes d'uranium. Cela nous permet de dire que les 1,125 grammes observés en plomb représentaient, à l'état initial, 1,3 grammes d'uranium. Au temps $t = 0$, il y avait donc 10 grammes d'uranium 238.

- En utilisant la deuxième forme de la loi de désintégration pour l'uranium 238 avec $N(0) = 10$, $N(t) = 8,7$ et $T = 4,51 \cdot 10^9$ ans, on trouve :

$$t = -\frac{\ln(0,87)}{\ln(2)} \cdot 4,51 \cdot 10^9 \text{ ans} \approx 9,06 \cdot 10^8 \text{ ans}$$

# Principe de datation du bois

## Principe du carbone 14

L'élément radioactif est le carbone 14, $C_6^{14}$, qui se désintègre en azote 14, $N_7^{14}$ (3).

## Exemple

Une analyse a permis de déceler qu'un morceau de bois contient 12 grammes de carbone 14 et 8,6 grammes de nitrogène.
Sachant que les masses atomiques du carbone 14 et du nitrogène sont respectivement de 13,00335 et 14,00307 et que la demi-vie du carbone 14 est de 5 730 ans, on demande de calculer l'âge de ce morceau de bois ...

Ici aussi, il faut procéder en deux étapes : calculer la masse initiale en carbone 14 et puis en déduire l'âge du morceau de bois.

- Au temps $t = 0$, le nitrogène était du carbone. Par conséquent, vu le principe des masses équivalentes, 14 grammes de nitrogène étaient équivalents à 13 grammes de carbone. Cela nous permet de dire que les 8,6 grammes observés en nitrogène représentaient, à l'état initial, 8 grammes de carbone. Au temps $t = 0$, il y avait donc 20 grammes de carbone 14.
- En utilisant la deuxième forme de la loi de désintégration pour le carbone 14 avec $N(0) = 20$ et $T = 5\,730$ ans, on trouve :

$$t = -\frac{\ln(0,6)}{\ln(2)} \cdot 5\,730 \text{ ans} \approx 4\,223 \text{ ans}$$

(3) L'azote 14 est aussi appelé nitrogène.

# Bibliographie


[1] M. Crampin et B. Margolis, *Real exponential functions*, Mathematics Foundation Course (block II, unit 2), Open University, BBC-tv, 1987.

[2] W.F. Libby, *Datage au carbone 14* in L'Echo des savants, n° 168, Bruxelles, avril 1982.

[3] P. Lother, *La datation radioactive* in Math-Jeunes, n°7, Bruxelles, 1980.

[4] R.C. Weast Editor, *Handbook of Chemistry and Physics*, C.R.C. Press, Cleveland (U.S.A.), 1977.

Math-Jeunes n°74, 92–95, 1996

# Comment tailler une sphère dans un cube ?

Edmond Dony, *Ingénieur civil en retraite*

## 1. Le problème

Supposons qu'un sculpteur reçoive un bloc cubique, avec pour mission d'en faire une sphère.
Nous allons voir comment une catégorie de polyèdres peut efficacement guider notre sculpteur dans son travail.
Ces polyèdres sont dits « semi-réguliers » ; votre revue *Math-Jeunes* n° 67 vous en a déjà parlé.
Pour simplifier, disons que contrairement aux polyèdres réguliers, ils ont plusieurs types de faces (régulières) qui sont assemblées de manière identique en chaque sommet du polyèdre.
Comment notre sculpteur va-t-il commencer son travail ?

## 2. Le tracé

Il effectuera d'abord un tracé sur toutes les faces du cube.
Ce tracé est très simple, il ne nécessite qu'une latte et une équerre.

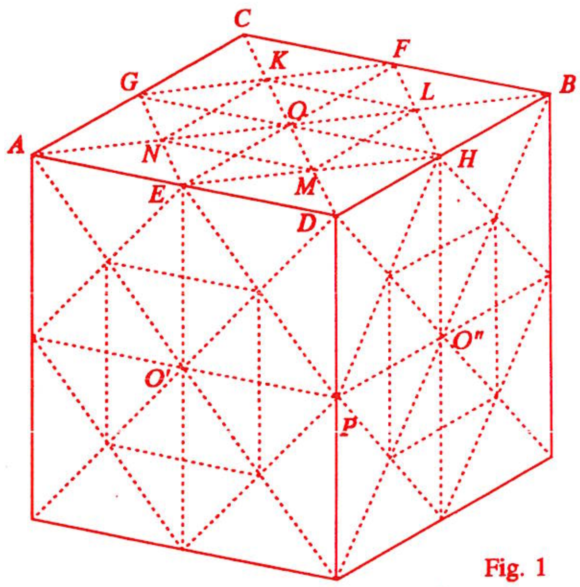



Fig. 1

À partir des diagonales $AB$ et $CD$, on obtient le centre $O$ de la face. Puis on trace par $O$ les deux perpendiculaires aux arêtes : $EF$ et $GH$.
On obtient ensuite le carré $EGFH$ et un petit carré $KLMN$ qui sera utile par la suite et dont les côtés sont la moitié de ceux du carré $ACBD$ (figure 1).
Comme la sphère demandée sera inscrite dans le cube, remarquons que nous avons déjà obtenu six points de la sphère : les centres $O$, $O'$, $O''$, ... des faces du cube.

Il faudra veiller à garder ces points intacts.

## 3. Première taille

Ce sont évidemment les sommets du cube qui sont les plus éloignés de la surface de la sphère finale.
Le sculpteur va donc enlever huit pyramides à bases triangulaires de type $DEPH$ (figure 2).
Le solide restant sera le premier polyèdre semi-régulier obtenu, il s'appelle **cuboctaèdre**.

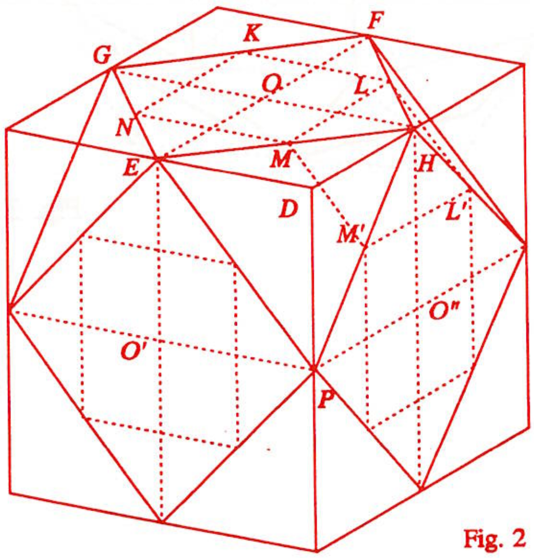



Fig. 2

Il a douze sommets, vingt-quatre arêtes et quatorze faces, dont six faces carrées et huit triangulaires.
Tous ses sommets sont identiques, à quatre faces, alternant un triangle, un carré, un triangle et un carré. On dit que ces sommets sont du type $(3,4,3,4)$.
On peut montrer (tu peux essayer de le faire) que la face triangulaire $EHP$ n'est pas tangente à notre future sphère. Elle en est écartée d'environ 15% du rayon de la sphère finale.

## 4. Deuxième taille

Une fois de plus, ce sont les sommets du polyèdre ($E$, $P$, $H$, …, voir figure 2) qui sont les plus éloignés de la sphère demandée.
Nous allons donc enlever douze pyramides à bases carrées de type $HMLL'M'$ et nous obtiendrons un nouveau polyèdre représenté à la figure 3.

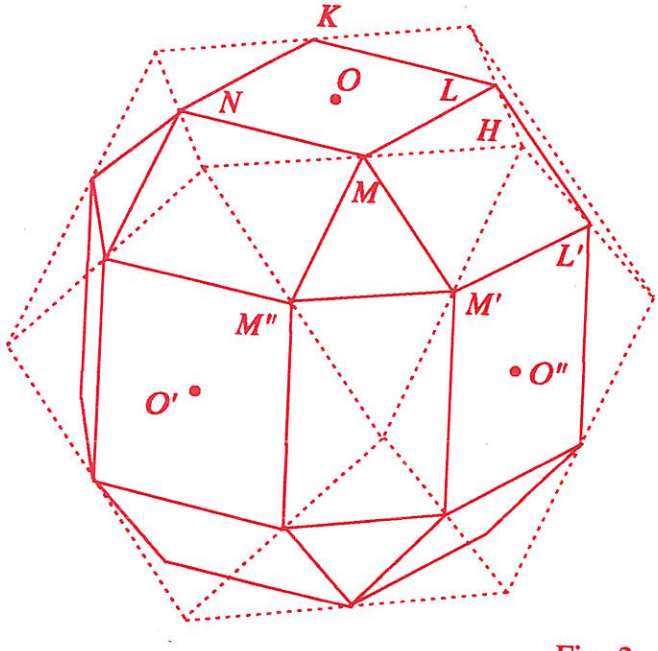



Fig. 3

Voyez-vous notre cube s'arrondir progressivement ?

Mais ce polyèdre n'est pas semi-régulier. En effet, si les six faces du type $KLMN$ sont carrées, il possède douze faces rectangulaires comme celle repérée $MLL'M'$.

Pour se convaincre qu'elles ne sont pas carrées, effectuons une coupe par un plan parallèle aux bases du cube initial et passant par son centre. Nous obtenons la figure 4.

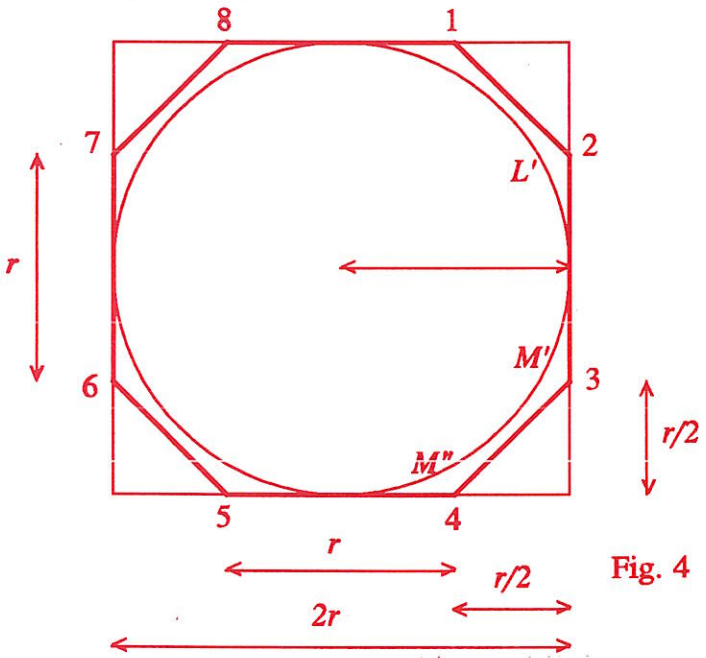
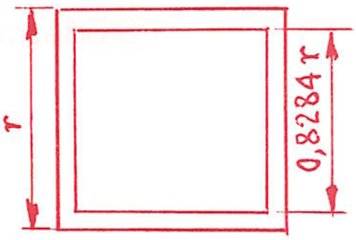



Fig. 4

Celle-ci montre que l'octogone $1 \to 8$ n'est pas régulier, il alterne les côtés de longueurs $r$ et $\frac{r\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 \cdot r$ (où $r$ est le rayon de la sphère).

Pour que cet octogone devienne régulier et circonscrit au cercle de rayon $r$, il faut que ses côtés soient de longueur $2 \cdot r\mathrm{tg}\ 22,5° \approx 0,8284 \cdot r$.

## 5. Troisième taille




Pratiquement, il suffit donc de tracer sur chaque face carrée de côté $r$ (telle que $KLMN$, figure 3) un carré plus petit, dont les côtés sont parallèles aux arêtes et mesurent $\approx 0,8284 \cdot r$ et de tailler ensuite les faces rectangulaires (type $MLL'M'$) parallèlement à elles-mêmes de manière à obtenir un polyèdre ayant dix-huit faces carrées isométriques et huit faces qui resteront des triangles équilatéraux. Il est représenté à la figure 5.
Ce polyèdre devenu semi-régulier s'appelle **rhombicuboctaèdre**.
Il possède vingt-quatre sommets, quarante-huit arêtes et vingt-six faces. Il a quatre faces par sommet qui forment la succession : une face triangulaire suivie de trois faces carrées, type $(3, 4, 4, 4)$. Intérêt pour le sculpteur : les dix-huit faces carrées sont tangentes à la sphère finale. Le polyèdre que l'on vient d'obtenir fournit donc dix-huit points de la sphère et leurs plans tangents.

## 6. Dernière taille et finition

Comme précédemment, ce sont les sommets du polyèdre obtenu qui sont les plus éloignés de la surface de la sphère; il faudrait donc les araser.
Pour ce faire, traçons sur chacune des faces carrées du polyèdre de la figure 5, un carré ayant ses sommets au milieu des côtés de la face, comme le montre la figure 6.

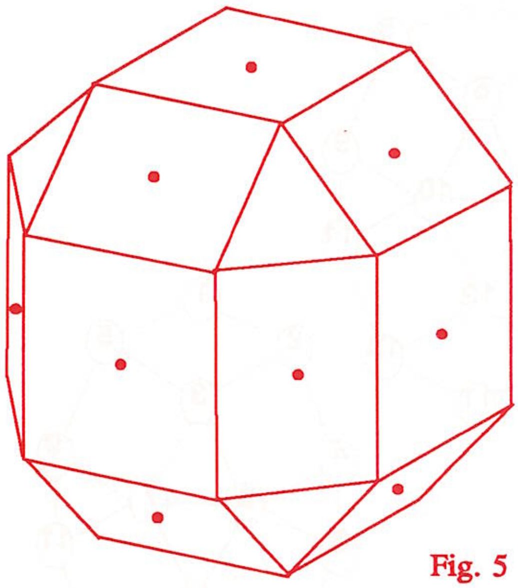


Fig. 5

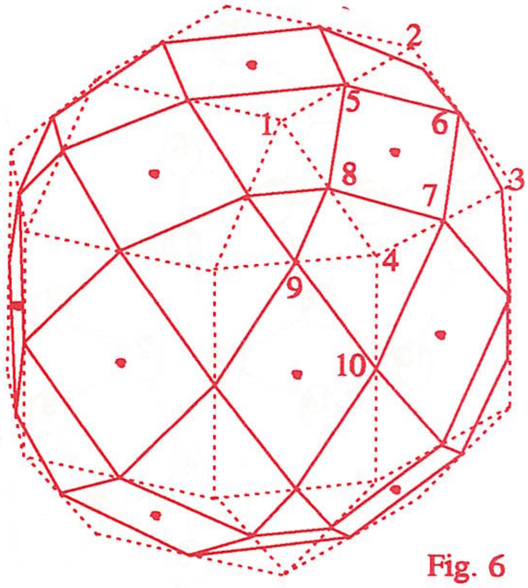
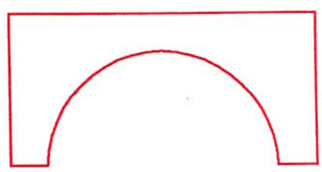



Fig. 6

Cette opération dégage autour de chaque sommet (type 4) un trapèze (7 8 9 10) qui, avec le sommet 4, forme une petite pyramide (il y en a vingt-quatre).
Ce sont elles que nous allons araser. Pratiquement, le travail est terminé !
Il reste plus qu'à « adoucir » les sommets et les arêtes restantes pour obtenir une sphère tout à fait correcte qu'il est prudent de contrôler avec un gabarit en demi-cercle que l'on promène sur toute la surface.



## Fédération Française des Jeux Mathématiques
## BP 157     7700 MOUSCRON

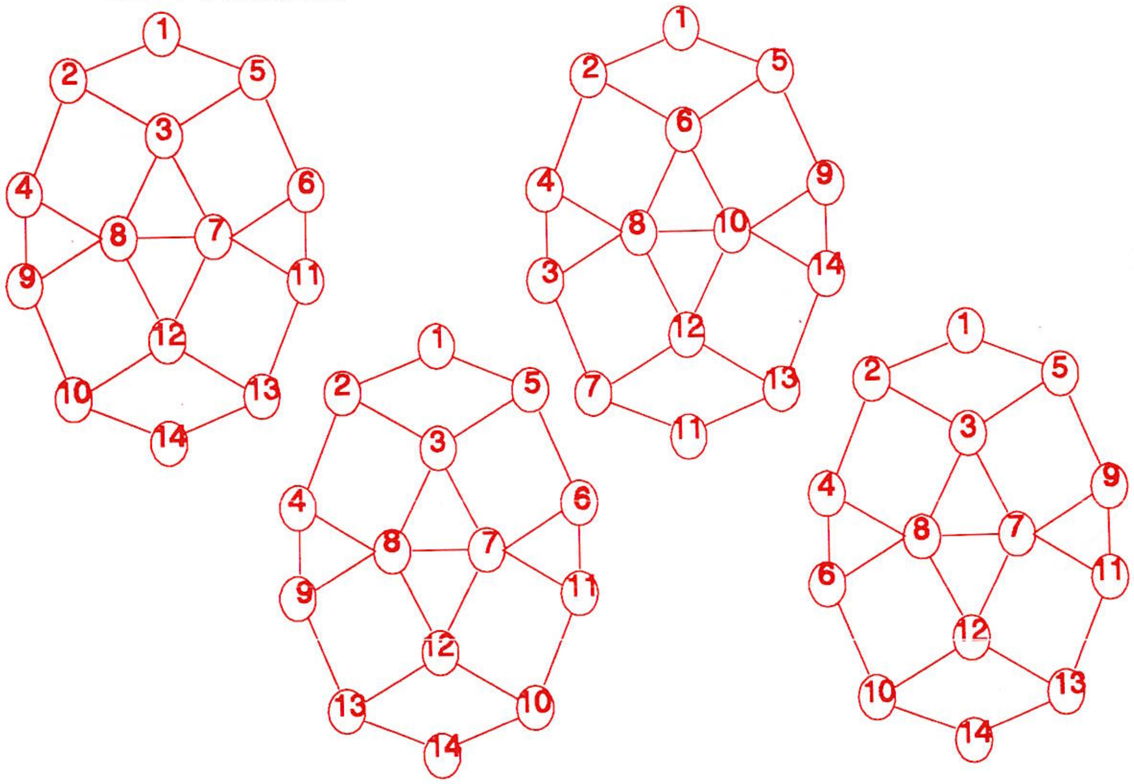
## Dixième championnat international des jeux mathématiques et logiques

## Quarts de finale individuels

Les questions sont parues dans l'encart central de *Math-Jeunes* numéro 71. Voici les

**Réponses :**

1. **Périple à Carréville** : 10 hectomètres
2. **La traversée** : 7 carrés de viande
3. **Le petit cahier** : le rectangle D
4. **Au cours préparatoire** : 2 solutions 0, 14, 56 ; 1, 3, 66
5. **Catastrophe chez Maia** : 43 parois
6. **L'alphabet borgne** : la lettre *i*
7. **X' inhabitable** : 4 carrés
8. **Autour de l'octogone** : $1+2+3+4+9+12+18+36=85$
9. **Quotient = ruesivid** : 2 solutions 175 et 571
10. **Le diamant** : 4 solutions



11. **Encyclonumériste** : 2 solutions 534 et 354
12. **La somme fatidique** : 3 signes d'addition (45, 67, 5051 ou 23, 89, 5051)
13. **Tout à 10 F au B.H.B.** : 2 solutions 4 fourchettes à 8 F pièce ou 9 fourchettes à 9 F pièce
14. **Coïncidences annulaires** : 4 solutions 1920, 1932, 1934, 1946
15. **Déflagration galopante** : 12 solutions 99, 98, 96, 95, 92, 90, 84, 80, 75, 60, 50, 20
16. **La pyramide de 1 à 16** : 8,5

# Solutions des jeux

## Jeu de l'hexagone et de la marguerite





## Produits croisés

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | N | S | O | R |
| 2 | N | E | T | T | E |
| 3 | | P | E | A | N |
| 4 | P | E | R | G | E |
| 5 | O | R | E | E | S |

## Le mur des nombres

570
285 285
131 154 131
57 74 80 51
24 33 41 39 12

746
294 452
102 192 260
33 69 123 137
12 21 48 75 62