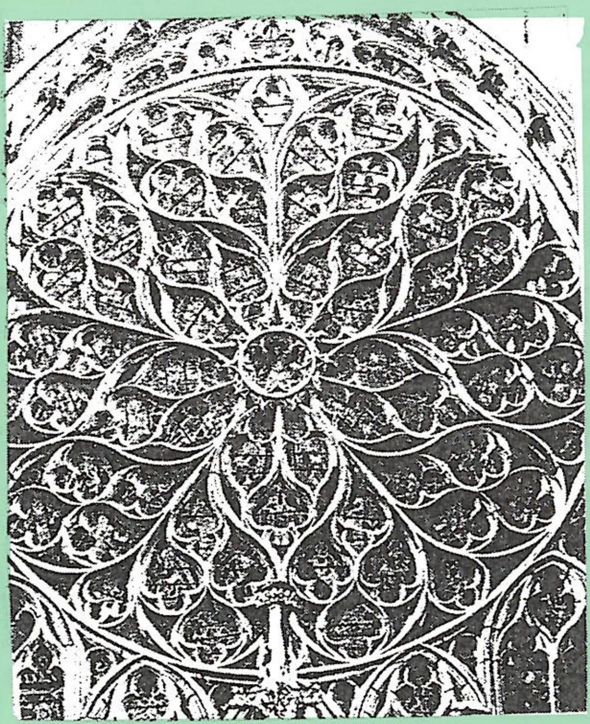
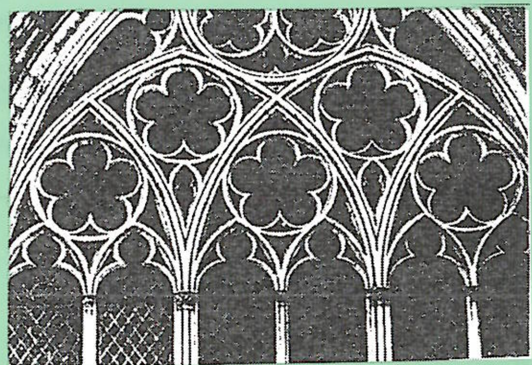
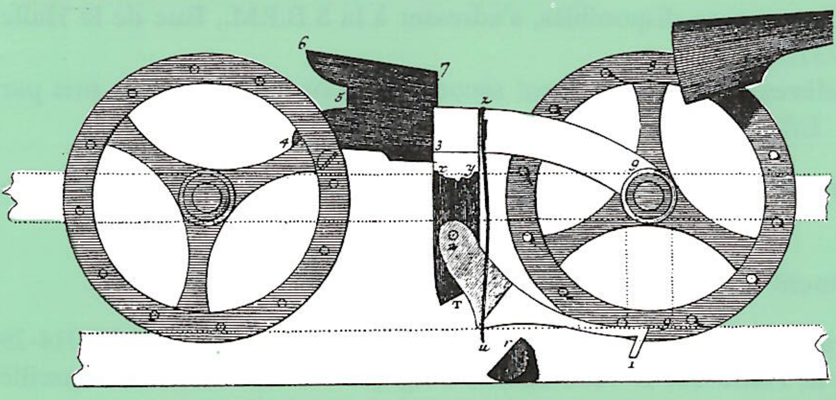
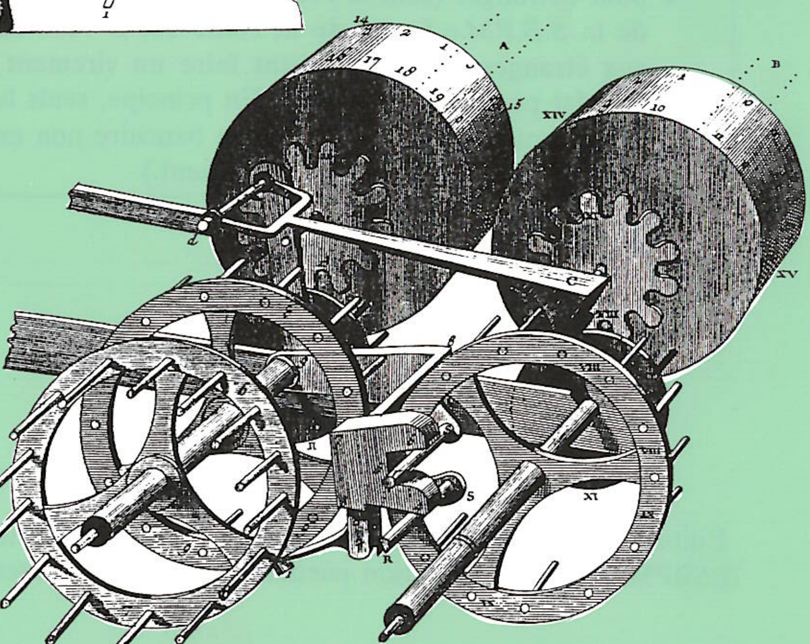
MATH - JEUNES









17^e année
Mai 1996 – n° 75
Bureau de dépôt : Mons X

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :		Étranger :	
• Groupés (5 ex. au moins) :	150 FB	• Groupés (5 ex. au moins) :	250 FB (42 FF)
• Isolés : —	200 FB	• Isolés :	330 FB (55 FF)

Anciens numéros encore disponibles :

• Avant 1989	Par numéro : 15 FB (Étranger : 30 FB ou 5 FF)
• Années 89/90, 90/91, 91/92	Par année : 50 FB (Étranger : 100 FB ou 17 FF)
• Années 92/93, 93/94, 94/95	80 FB (Étranger : 160 FB ou 27 FF)

Pour connaître la liste des numéros encore disponibles, s'adresser à la S.B.P.M., Rue de la Halle 15, 7000 Mons (Tél. 32-(0)65-373729).
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N°75 Dix-septième année 1996

Math-Jeunes

Math-Jeunes n°75, 98–101, 1996

La datation nucléaire (suite et fin)

J.-P. Gobert – F. Drapier, *I.S.T.C.F. Irchonwelz – Athénée Royal d'Ath*

Voici, comme promis, les solutions des exercices proposés dans *Math-Jeunes* n° 74.

1. *Démontrer que le nombre d'atomes désintégrés en une unité de temps dans un gramme d'un élément chimique donné X_z^a est égal à* $\frac{N_A}{m_a(X_z^a)} \cdot (1 - e^{-\lambda(X_z^a)})$

Par définition de la masse atomique de l'élément X_z^a, m_a grammes de celui-ci contiennent N_A atomes.

Donc, $(1 - e^{-\lambda})$ grammes représentent bien $\frac{N_A}{m_a} \cdot (1 - e^{-\lambda})$ atomes.

2. *Sachant que les demi-vies de l'uranium 238 et du plutonium 239 sont respectivement* $4,51 \cdot 10^9$ *et 24 400 années, on demande de calculer leur constante de désintégration.*

$\lambda(U_{92}^{238}) \approx 1,54 \cdot 10^{-10}$/an et $\lambda(Pu_{94}^{239}) \approx 2,84 \cdot 10^{-5}$/an.

3. *Sachant que sur 8 000 particules de carbone 14, une se désintègre (en azote 14) après un an, on demande de calculer la constante de désintégration, ainsi que la demi-vie de cet élément.*

Si au temps $t = 0$ on dispose de 8 000 particules de carbone 14, après un an, il en reste 7 999. Ainsi, si $N(t)$ représente un certain nombre de particules de carbone 14 après un certain temps t en années, on aura

$$\begin{cases} N(1) &= N(0) \cdot \frac{7\,999}{8\,000} \\ N(2) &= N(0) \cdot \left(\frac{7\,999}{8\,000}\right)^2 \\ & \vdots \\ N(t) &= N(0) \cdot \left(\frac{7\,999}{8\,000}\right)^t \end{cases}$$

Ainsi, la loi de désintégration du carbone 14 est donnée par la formule $N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{8\,000}{7\,999}\right)^{-t}$ Donc,

$$\begin{cases} \lambda(C_6^{14}) &= \ln\left(\frac{8\,000}{7\,999}\right) \approx 1,25 \cdot 10^{-4}/\text{an} \\ T(C_6^{14}) &= \frac{1}{\lambda(C_6^{14})} \cdot \ln(2) \approx 5\,545\text{ans} \end{cases}$$

Signalons que l'ouvrage [4] (voir *Math-Jeunes* 74) donne 5 730 ans comme valeur de la demi-vie du carbone 14.

4. *À l'aide d'une structure répétitive repeat ... until ou while ... do, écrire un programme en langage Pascal permettant de calculer selon un menu :*

a) l'âge des restes étant donnés la demi-vie d'un élément et le pourcentage de cet élément restant dans un corps ;

b) la constante de désintégration λ, en s^{-1}, d'un élément radioactif dont on lit la demi-vie T en années ;

c) la demi-vie T, en années et en secondes, d'un élément radioactif dont on lit la constante de désintégration λ en an^{-1}.

```
PROGRAM caracteristiques_d_un_element_radioactif;
USES crt;
VAR lambda, demi_vie, fraction, age : real;
    choix : char;
PROCEDURE menu;
BEGIN
  REPEAT
    ClrScr;
    WriteLn ('menu : ');
    WriteLn;
    WriteLn ('1. âge des restes');
    WriteLn ('2. constante de désintégration');
    WriteLn ('3. période de l''élément');
    WriteLn ('4. terminer');
    WriteLn;
    write ('votre choix : ');
    ReadLn (choix)
  UNTIL choix IN ['1','2','3','4']
END;
PROCEDURE calcul;
BEGIN
  ClrScr;
  CASE choix OF              {début de CASE ... OF}
  '1' : BEGIN
          write ('Demi-Vie de l''élément (années) : ');
          ReadLn (demi_vie);
          write ('% de l''élément restant          : ');
          ReadLn (fraction);
          fraction := fraction/100.0;
          age := -demi_vie*ln(fraction)/ln(2.0);
          WriteLn;
          Write    ( 'âge des restes              : ');
          WriteLn  (age : 7:0,' années')
        END;
  '2' : BEGIN
          write    ('Demi-vie de l''élément (années) : ');
          ReadLn (demi_vie);
          lambda := ln (2.0)/demi_vie;
          WriteLn;
          write ('constante de désintégration  : ');
          WriteLn (lambda:10,'/an');
          lambda :=lambda/365/24/3600;
          WriteLn (' ' : 33, lambda : 10,'/sec')
        END;
  '3' : BEGIN
        write ('constante de désintégration (/an) : ');
        ReadLn (lambda);
        WriteLn;
```

```
        demi_vie := ln(2.0)/lambda;
        write ('Demi-vie de l''élément                : ');
        WriteLn (demi_vie:17:0,' années');
        WriteLn (' ' : 36,demi_vie*3600*24*365,' sec.')
      END
  END;                    {fin de CASE ... OF}
  ReadLn
END;
        { P R O G R A M M E   P R I N C I P A L }
BEGIN
  menu;
  WHILE choix <>'4' DO
    BEGIN
      calcul;
      menu
    END;
  ClrScr;
  GoToXY(31,10);
  WriteLn ('A U  R E V O I R')
END.
```

5. *En utilisant encore une structure répétitive, écrire un programme en langage Pascal qui affiche sous forme d'un tableau à deux colonnes, en fonction du temps, la masse restante d'un corps radioactif en train de se désintégrer.*

Algorithme

a) lire la quantité initiale $N(0)$ du corps radioactif, sa demi-vie T, le nombre total d'années et le pas des intervalles en années ;

b) après chaque année de référence t, calculer $N(t)$ et imprimer ces deux valeurs ;

c) demander si l'on désire un autre calcul. Si oui retourner en (a), si non, arrêter le programme.

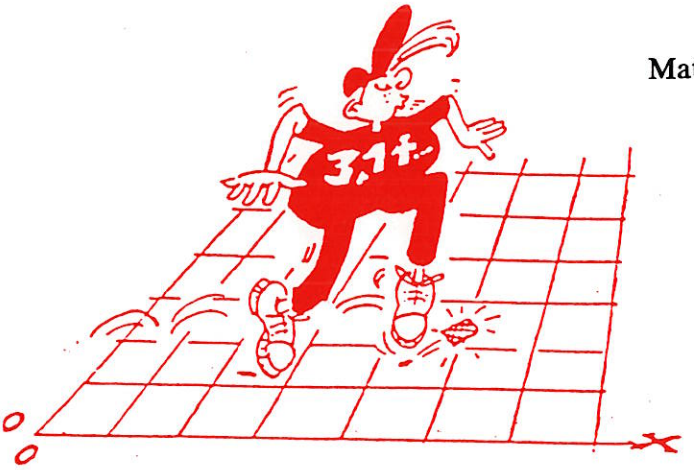
Solution

```
PROGRAM masse_restante_d_un_element;
USES crt;
VAR x, masse_init, masse, demi_vie, pas, t0, t1 : real;
  choix : char;
  corps : STRING[12];
PROCEDURE menu;
BEGIN
  REPEAT
  ClrScr;
  write   (' ':14,' Calcul de la masse restante ');
  WriteLn ('d''un élément radioactif');
  Write   (' ':14,'-----------------------------');
  WriteLn ('------------------------');
  WriteLn;
  WriteLn (' ':20,'<1> nouveau calcul;');
  WriteLn (' ':20,'<2> fin.           ');
```

```
  WriteLn;
  write   (' ':20,'Votre choix : ');
  ReadLn  (choix)
UNTIL choix IN ['1','2']
END;
PROCEDURE lecture_des_donnees;
BEGIN
  ClrScr;
  write ('Nom de l''élément : ');
  ReadLn (corps);
  write (Masse initiale    : ');
  ReadLn (masse_init);
  write ('Demi-vie          : ');
  ReadLn (demi_vie);
  write ('Année initiale    : ');
  ReadLn (t0);
  write ('Pas               : ');
  ReadLn (pas);
  write ('Année finale      : ');
  ReadLn (t1)
END;
PROCEDURE affichage;
BEGIN
  ClrScr;
  WriteLn ('Désintégration du ',corps);
  WriteLn;
  WriteLn (' Après t ans   |   quant. rest.');
  WriteLn (' --------------|---------------');
  WriteLn (t0-t0:9:0,'     |',masse_init:12:2);
  WHILE t0<=t1 DO
    BEGIN
      x := -t0/demi_vie;
      masse := masse_init * exp(x * ln(2));
      WriteLn (t0:9:0,'     |',masse:12:2);
      t0 := t0 + pas
    END;
  ReadLn
END;
        { P R O G R A M M E   P R I N C I P A L }
BEGIN
  REPEAT
    lecture_des_donnees;
    affichage;
    menu
  UNTIL choix='2';
  ClrScr; GoToXY (31,10); WriteLn ('A U   R E V O I R')
END.
```

Math-Jeunes n°75, 102–102, 1996

Jeux



A. Parent

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement
1. 9 880
2. 5 400
3. 252
4. 2 250
5. 126 000

Verticalement
1. 180
2. 151 200
3. 18 200
4. 60 – 15
5. 111 150

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

	294			
106				
	70			
15				27

394				
		111		
	99			
73				15

Le mot caché (CéVé)

Trouvez les mots donnés dans la grille, en serpentant horizontalement ou verticalement en tous sens mais pas en oblique. Chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le mot caché. Quel est-il ?

Mots à composer : **ABAQUE, CUBE, CONE, CYLINDRE, DECAEDRE, PARALLELIPIPEDE, PYRAMIDE, TORE**

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	U	E	A	C	I	N	D	R
2	Q	A	B	Y	L	C		E
3	U	B	E	E	N	O	Y	P
4	C	P	A	R	M	A	R	D
5	E	L	L	A	I	D	E	E
6	L	E	D	E	E	R	A	C
7	I	P	C	U	L	D	E	T
8	P	I	L	A	C	E	R	O

Les rosaces dans les réalisations humaines

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Tu as peut-être déjà entendu citer l'expression « style gothique ». Sans vouloir donner ici un cours d'histoire de l'art, nous allons quelque peu aborder le sujet.

Certaines activités humaines faisant appel à des facultés sensorielles, esthétiques, intellectuelles, ... appartiennent à ce qu'on appelle l'**art**; il comprend entre autres la peinture, la sculpture, la musique, l'architecture, ... C'est à cette dernière forme que nous allons nous intéresser. L'expression de ces différentes activités va varier au cours des siècles et, même s'il est toujours difficile de délimiter dans le temps et dans l'espace, une période de l'histoire de l'art, nous avons cependant tous entendu parler d'art byzantin, de style roman, gothique, renaissance, classique, ... pour n'en évoquer que quelques-uns qui ont marqué notre civilisation occidentale.

L'art byzantin est effectivement présent chez nous; nous pouvons voir à Ravenne, en Italie, de très belles **mosaïques** datant du début du VI^e^ siècle. L'art roman lui succède vers les XI^e^ - XII^e^ siècles. Son architecture est caractérisée par des **voûtes en berceau** et des **arcs en plein cintre**, mais ce n'est là qu'un résumé très simpliste; pour achever la caricature, disons qu'en ce qui concerne les voûtes, les portes et les fenêtres, l'art roman est « rond ». Il sera progressivement remplacé dès le XII^e^ siècle et jusqu'à la Renaissance, par l'art gothique qui connaîtra lui-même plusieurs époques. L'architecture gothique est plus élancée, moins lourde; cela est lié aux progrès accomplis dans l'art de bâtir. La voûte sur **croisée d'ogives** et l'**arc brisé** sont deux caractéristiques du gothique mais ici encore, ces affirmations ne sont que caricature. Dans la forme **rayonnante** de l'art gothique, qui débute vers 1250, la rosace envahit la partie médiane de la façade. Nous y voilà ! ... Sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, tu peux voir, en haut à gauche, la rosace du portail nord de la cathédrale de Sens (France) et à droite, un détail de fenêtre de celle de Caen (France).

À côté des arts, il y a les techniques. Dans le bas de la couverture de ta revue, tu vois des engrenages, des roues dentées; ce sont aussi des rosaces. Elles appartiennent au mécanisme interne d'une machine à calculer conçue au dix-septième siècle, la « Pascaline ». Ces éléments de planche sont extraits de l'*Encyclopédie* de DIDEROT et D'ALEMBERT, publiée dans la deuxième moitié du dix-huitième siècle.

La Pascaline, dont l'inventeur fit don à la reine Christine de Suède, consacra la réputation scientifique du jeune Blaise PASCAL alors âgé de dix-neuf ans. Il créa cette machine arithmétique pour soulager son père dans les calculs longs et compliqués auxquels l'astreignait sa tâche de collecteur des taxes et impôts en Normandie. La Pascaline permet d'additionner et de soustraire. Les autres opérations arithmétiques sont laborieuses; la multiplication par exemple, ne s'opère que par additions successives.

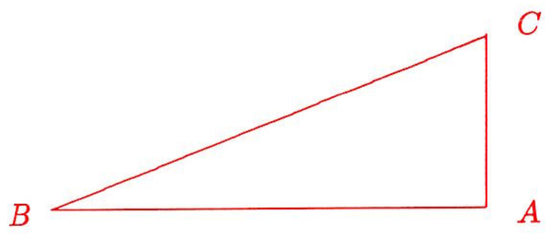
Blaise PASCAL était né le 19 juin 1623 à Clermont en Auvergne. Mathématicien, physicien, philosophe, ... il est célèbre dans le cours de mathématiques, par son « Triangle », sa contribution à la « Théorie des Probabilités » (ces deux sujets sont liés), dans le cours de français, par ses « Pensées ». Mais de nouveau, ceci est très caricatural et nous espérons que, tout au long de tes études, tu découvriras d'autres facettes de ce génie mort à Paris en 1662.

Math-Jeunes n°75, 104–108, 1996

Les débuts de la trigonométrie

Simone Trompler

Que représente pour un jeune de quatorze ans le mot « trigonométrie » ? Le premier contact avec cette partie des mathématiques se fait généralement par le biais de considérations sur les triangles rectangles.
Un beau (?) jour, l'élève apprend que, dans un tel triangle, le rapport entre la longueur du côté opposé à un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse s'appelle le **sinus** de cet angle.



$$\sin \widehat{B} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Souvent, il apprend en même temps la définition du **cosinus** et de la **tangente**.

$$\cos \widehat{B} = \frac{|AB|}{|BC|} \qquad \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Viennent alors des exercices qui consistent à rechercher des angles à partir de côtés et vice versa.
Pour cela, il faut disposer d'une calculette qui nous donne un angle si nous lui fournissons son sinus, son cosinus ou sa tangente, et réalise les opérations réciproques si nécessaire.

⋆

⋆ ⋆

Mais est-ce ainsi que la trigonométrie a débuté ? ...
Quels en étaient les buts ? ...
Qui a mesuré avec tant de précision le sinus des angles jusqu'à tenir compte des minutes et des secondes ? ...

C'est ce que nous allons tenter d'élucider.

La trigonométrie doit son origine à l'étude du ciel.

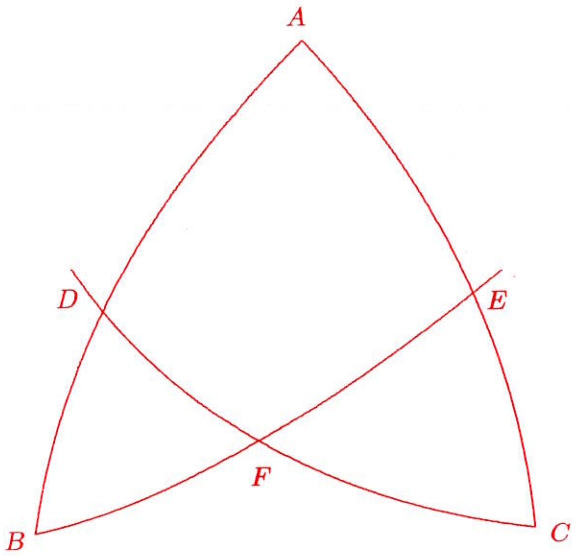
Ce qui intéressait les Anciens c'était de mesurer le temps, comprendre le pourquoi des saisons, prévoir le retour de la lune ou des planètes (religion, astrologie), se repérer grâce aux étoiles (navigation, voyages de nuit). Il leur fallait dès lors évaluer des latitudes et des longitudes, mesurer des angles entre des objets célestes, en conclure la valeur des arcs ou des angles inconnus.
On sait que les Babyloniens avaient déjà une bonne connaissance du ciel, obtenue par des observations étonnamment précises (vers -2000).
Les Grecs arrivaient à prédire une éclipse solaire (THALÈS DE MILET vers -585).
Des œuvres perdues de HIPPARQUE DE NICÉE (IIe siècle av. J.-C.) ont certainement contenu des tables de cordes d'arcs, d'après des citations d'auteurs plus tardifs, mais le livre le plus ancien qui nous soit parvenu et qui prépare la trigonométrie est la *Spherica* de MENELAÜS (Ie siècle de notre ère).
Il y donne la définition de ce qu'il appelle un triangle sphérique :

Un triangle sphérique est l'aire délimitée par des arcs de grands cercles sur la surface d'une sphère, avec la restriction que chacun des côtés du triangle est un arc inférieur à un demi-cercle.

Il en étudie les propriétés, les cas d'égalité et les compare aux triangles plans. Il démontre un théorème très fameux connu sous le nom de **Théorème de la Transversale**, qui servira de base à la résolution de ces triangles et permettra ainsi les calculs d'arcs et d'angles entre les astres.

Là est la naissance de la trigonométrie : elle a été sphérique avant d'être plane.

MENELAÜS envisage un triangle sphérique ACD et un arc de grand cercle $\widehat{BFE}$ qui le traverse et démontre l'équivalent de



$$\frac{\sin\widehat{CF}}{\sin\widehat{FD}} \times \frac{\sin\widehat{DB}}{\sin\widehat{AB}} \times \frac{\sin\widehat{AE}}{\sin\widehat{EC}} = 1$$

Dans son ouvrage, il n'est pas question de sinus d'un arc, mais bien de la corde qui soustend l'arc double. Il en sera ainsi pendant longtemps encore.

Dessinez donc un cercle de centre O et de rayon unité et considérez un angle α dont le sommet est le centre O du cercle. En utilisant vos connaissances de trigonométrie dans le triangle rectangle, quel est le rapport entre $\sin\alpha$ et la longueur de la demi-corde qui soustend l'arc 2α ?

PTOLÉMÉE (IIe siècle) nous a laissé un traité intitulé « Syntaxe mathématique ». C'est beaucoup plus tard, fin VIIIe, début IXe siècle, que les Arabes ont créé, à partir de leur article défini *al* et du superlatif grec *μέγιστος*, le mot *al-magistī* c'est-à-dire « le plus grand » qui devint « Almageste », nom sous lequel nous connaissons ce fameux traité. PTOLÉMÉE y calcule les cordes des arcs sur la sphère céleste, de demi-degré en demi-degré, et clôt le chapitre par une table reprenant toutes ces valeurs :

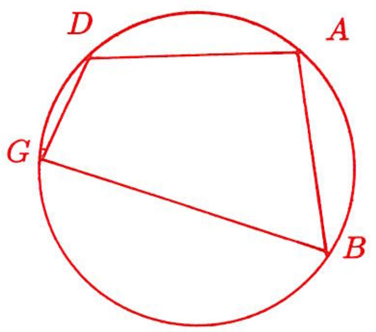
> *... pour la facilité de la pratique, nous allons construire une table des valeurs de ces droites, en partageant la circonférence en 360 degrés. Tous les arcs de notre table iront en croissant d'un demi-degré, constamment, et nous donnerons pour chacun de ces arcs la valeur de la soustendante, en supposant le diamètre partagé en 120 parties ... Nous emploierons en général la numération sexagésimale pour éviter l'ennui des fractions.*

PTOLÉMÉE commence par calculer la corde qui soustend les côtés du pentagone, du décagone réguliers, du carré, du triangle équilatéral, de l'hexagone régulier, bien connus à l'époque.
Il explique très clairement sa méthode et nous donne les résultats de ses premiers calculs.

> *... La droite qui soustend 90 degrés de la circonférence, sera en longueur à peu près de 84 parties 51 minutes et 10 secondes des parties dont le diamètre en contient 120; et celle qui soustend 120 degrés sera de 103 parties 55 minutes 23 secondes de ces mêmes parties de diamètre.*

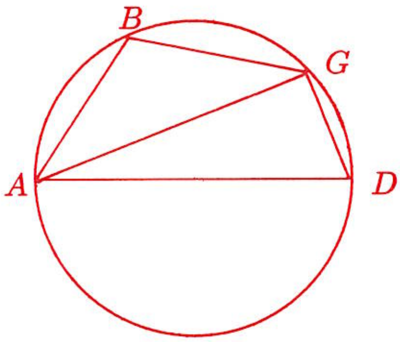
Faites vous aussi le calcul; vous pourrez ainsi apprécier la précision obtenue par PTOLÉMÉE et la sagesse de ses choix d'unité et de système de numération.
Il démontre un théorème, passé dans l'Histoire comme le **théorème de Ptolémée** :

Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle $ABGD$; soient menées les diagonales AG et BD : il s'agit de prouver que le rectangle construit sur AG et BD est égal aux deux rectangles des côtés opposés AB GD et AD BG.



$$|AG| \times |BD| = |AB| \times |GD| + |AD| \times |BG|$$

Il en déduit, dans le cas où AD est un diamètre, le calcul de la soustendante de l'arc $\overset{\frown}{BG}$, connaissant les soutendantes des arcs $\overset{\frown}{AG}$ et $\overset{\frown}{AB}$. En d'autres termes, connaissant deux arcs, il trouve la soustendante de leur différence.



Sans difficulté, nous « voyons » à partir de ce dessin que :

$$\sin(\widehat{\beta} - \widehat{\alpha}) = \sin \widehat{\beta} \cos \widehat{\alpha} - \sin \widehat{\alpha} \cos \widehat{\beta}$$

Il appliquera la même méthode pour trouver la soustendante de la somme de deux arcs. Il peut de même calculer la soustendante de la moitié d'un arc. Et ainsi, il construit sa table, de demi-degré en demi-degré.

Pour calculer des arcs il reprend le théorème de MENELAÜS et l'utilise sur la sphère céleste.

Il réalise ainsi, pour la première fois, la résolution d'un triangle sphérique rectangle et ouvre la voie à la trigonométrie sphérique qui précédera la trigonométrie plane.

Mais il ne fait pas une étude systématique des triangles, il ne démontre que les théorèmes qui sont nécessaires à la résolution spécifique de problèmes astronomiques. En Inde, ses travaux seront continués et améliorés.

L'astronomie y était importante pour le rituel. Celui-ci, en effet, prévoyait des sacrifices à intervalles fixes et ainsi, une mesure précise du temps était nécessaire. Les horoscopes, très prisés, exigeaient une connaissance de la position des planètes à tout moment.

Ce sont les astronomes d'Inde qui introduisirent le sinus et, dans un manuel astronomique datant du IVᵉ ou Vᵉ siècle, appelé *Surya Siddhanta* (Système du Soleil), les valeurs en sont données de trois degrés trois-quarts en trois degrés trois-quarts, valeur obtenue en divisant 90 par 24, de 0 à 90 degrés.

Mais, ne nous y trompons pas, il ne s'agit pas encore de nos sinus !

Il s'agit toujours d'une longueur, celle de la demi-corde qui soustend un arc, non d'un rapport.

Nous n'arrivons toujours pas à la définition donnée au début de cet article. Pour cela, il faudra attendre le dix-huitième siècle !

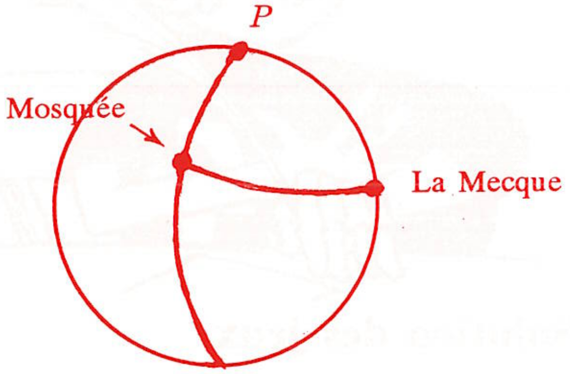
Le cosinus et le sinus-verse (R-Rcos) datent aussi de cette époque.

Les Arabes, à leur tour, feront progresser la trigonométrie, mais toujours comme science inféodée à l'astronomie.

Comme les pays musulmans sont très ensoleillés, le cadran solaire a sa place dans les lieux publics et la « gnomonique » ou art de construire ces cadrans, est très à la mode.

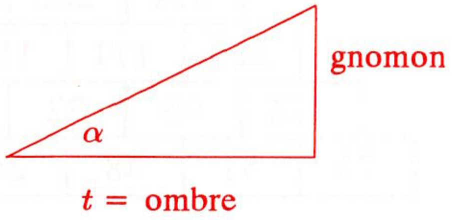
Les Musulmans récitent leurs prières le visage tourné vers La Mecque. La direction dans laquelle elle se trouve est indiquée dans chaque mosquée par une niche appelée *Qibla*. Il était donc essentiel de connaître la direction de La Mecque.

La latitude et la longitude de la mosquée et de La Mecque sont connues (mesurées par les astrolabes). Il s'agit dès lors de calculer l'angle entre le Nord et La Mecque, dans le triangle sphérique constitué par le pôle nord, La Mecque et la mosquée, donc de résoudre ce triangle.



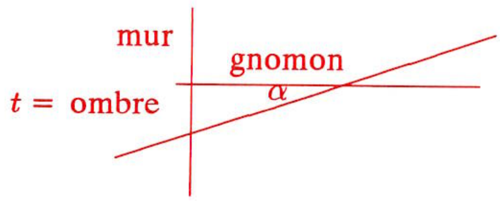
Dès le VIII[e] siècle, les Arabes disposaient de traductions d'un *Siddhanta* indien et, un peu plus tard, de l'*Almageste* de Ptolémée et des *Sphériques* de Menelaüs. C'est grâce à ces travaux qu'ils réussirent à résoudre tous les cas de triangles sphériques et plans.

De nouvelles fonctions font leur apparition, au plus tard au IX[e] siècle : on les trouve notamment dans l'œuvre de al-Battānī (v. 850 - 929). Prenons la hauteur h de la barre verticale d'un gnomon et observons la longueur t de son ombre au cours de la journée. Cette longueur permet de déterminer la hauteur du soleil (angle avec l'horizon). Une table des valeurs de t, « ombre directe » pour $h = 60'$ fut établie pour les angles, à la seconde près, et la **cotangente** ainsi définie :



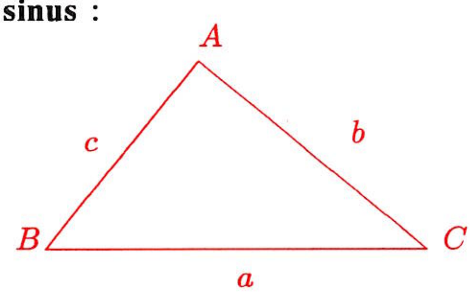
$t = \text{cotg}\,\alpha$

Comme le gnomon était aussi parfois fixé horizontalement sur un mur vertical, une autre table fut obtenue, celle des « ombres inverses » qui définit la **tangente** :



$t = \text{tg}\,\alpha$

Tangentes et cotangentes, ainsi que sécantes et cosécantes, introduites par Abu-l-Wafā (v. 940 - v. 998) ne furent cependant ainsi nommées qu'à la fin du XVI[e] et au XVII[e] siècle par Th. Fink et E. Gunter. al-Birūnī (973 - 1048) étudia systématiquement les triangles plans et démontra la **loi des sinus** :



$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Il écrivit un traité d'astronomie et de mathématique, dont le nom indique bien les préoccupations de ses contemporains : *Le Livre pour faire comprendre les principes de l'astrologie.* On y trouve rassemblées les connaissances de son époque, dont certaines lui sont dues.

La systématisation de la trigonométrie plane et sphérique est finalement mise au point par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201 - 1274). Son livre *Traité sur le quadrilatère complet*, écrit en 1260, est le premier dans lequel la résolution d'un triangle est étudiée pour elle-même, et il s'agit du premier exposé complet de l'ensemble de la trigonométrie, indépendamment de l'astronomie.

Ce livre a eu une immense influence, mais le monde occidental n'en a malheureusement eu connaissance que vers 1450.
Le mot **trigonométrie** (mesure d'un triangle) apparaît pour la première fois dans un ouvrage de Bartholomaeus PITISCUS en 1595.
Depuis, la trigonométrie a encore fait de nombreux progrès et son champ d'application s'est largement étendu ... mais ceci dépasse l'objet de cet article.

Bibliographie

[1] ARYABHATA, *The Aryabhatiya of Aryabhata* (translated by W.E. CLARK), The University of Chicago Press, 1930.

[2] J. L. BERGGREN, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer Verlag, 1986.

[3] *Encyclopedia Britannica*

[4] *Enciclopedia Italiana*

[5] *Encyclopedia Universalis*

[6] ENRIQUES et SANTILLANA, *Mathématique et Astronomie de la période hellénistique*, Hermann, 1939.

[7] Gino LORIA, *Storia delle matematiche dell'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, U. Hoepli, Milano, 1950.

[8] MENELAOS D'ALEXANDRIE, *Die Sphärik in der Verbesserung von Abu Nasr Mansur*, Weidmann, Berlin, 1936.

[9] Claude PTOLÉMÉE, *Composition mathématique*, (traduit pour la première fois de grec en français sur les manuscrits originaux de la Bibliothèque Impériale de Paris par M. HALMA), Hermann, Paris, 1927.

[10] A. M. WILSON, *The Infinite in the Finite*, Oxford University Press, 1995.

[11] Adolf P. YOUSCHKEVITCH, *Les mathématiques arabes* (VIIIe – XVe siècles), Éd. Vrin, Paris, 1976.

Solution des jeux

Produits croisés

	1	2	3	4	5
1	A	H	M	E	S
2	R	E	A	L	E
3	A	R	N		M
4	B	O	E	C	E
5	E	N	T	E	R

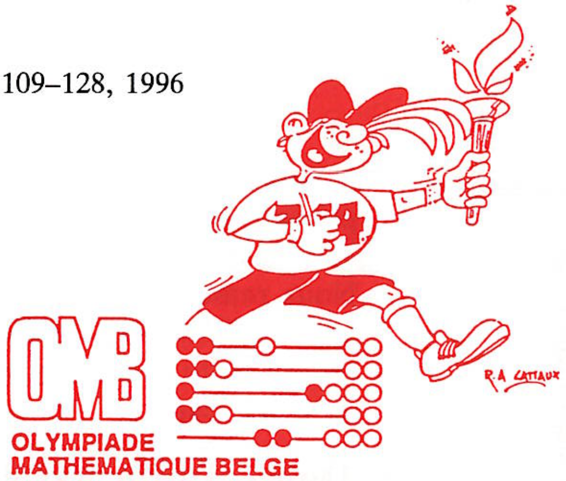
Le mur des nombres

552				
258	294			
106	152	142		
36	70	82	60	
15	21	49	33	27

676				
394	282			
223	171	111		
124	99	72	39	
73	51	48	24	15

Le mot caché : **CALCUL**

Math-Jeunes n°75, 109–128, 1996



C. Van Hooste

Une fois de plus, l'Olympiade Mathématique Belge a recueilli un admirable succès. Le passage de deux à trois niveaux (Mini, Midi et Maxi) a certainement été apprécié puisqu'on a enregistré cette année une augmentation de plus de 13 % du nombre de participants au stade des éliminatoires. En effet, vous étiez, cette année, 20 975 concurrents pour 18 505 l'an dernier. Parmi les plus costauds (en mathématique) d'entre vous, 2 608 ont été retenus pour les demi-finales du 6 mars.

Ami lecteur, tu trouveras ci-dessous les solutions à certaines des questions posées lors de ces demi-finales. Comme d'habitude, je t'invite à participer, à ce moment-ci aussi, en apportant ta contribution à la rédaction de cette rubrique. En effet, si tu estimes que tu possèdes une solution meilleure ou simplement différente ou encore une solution intéressante correspondant à une autre question, tu peux nous l'envoyer et nous la publierons.

Grilles des réponses correctes

Questionnaire MINI Éliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	D	11	E	21	A
2	A	12	D	22	624
3	D	13	D	23	B
4	C	14	E	24	C
5	E	15	B	25	E
6	D	16	360	26	C
7	A	17	A	27	15
8	A	18	C	28	C
9	E	19	D	29	B
10	33	20	E	30	A

Questionnaire MINI Demi-finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	101	11	E	21	D
2	E	12	B	22	C
3	C	13	B	23	D
4	E	14	C	24	7
5	C	15	A	25	B
6	C	16	C	26	E
7	B	17	D	27	B
8	64	18	D	28	D
9	B	19	E	29	D
10	E	20	315	30	C

Questionnaire MIDI Éliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	B	11	D	21	D
2	C	12	D	22	B
3	26	13	E	23	B
4	D	14	B	24	A
5	C	15	C	25	A
6	72	16	D	26	A
7	E	17	D	27	C
8	5	18	16	28	C
9	E	19	B	29	D
10	C	20	B	30	E

Questionnaire MIDI Demi-finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	101	11	A	21	B
2	E	12	72	22	E
3	B	13	D	23	D
4	C	14	B	24	B
5	72	15	C	25	D
6	E	16	C	26	B
7	B	17	D	27	B
8	A	18	B	28	E
9	E	19	E	29	E
10	64	20	D	30	E

Questionnaire MAXI Éliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	B	11	D	21	C
2	6	12	C	22	E
3	B	13	A	23	B
4	C	14	D	24	E
5	243	15	B	25	D
6	C	16	C	26	C
7	D	17	D	27	14
8	C	18	D	28	D
9	72	19	D	29	E
10	C	20	B	30	E

Questionnaire MAXI Demi-finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	E	11	D	21	E
2	D	12	C	22	B
3	72	13	D	23	B
4	A	14	B	24	B
5	613	15	E	25	B
6	C	16	25	26	B
7	E	17	C	27	C
8	A	18	D	28	15
9	D	19	D	29	D
10	C	20	D	30	B

Erratum

L'an dernier, dans le numéro 70 de votre revue préférée, à la page 83, nous avions voulu vous donner la grille des réponses correctes de la demi-finale MINI. Malheureusement, nous nous sommes trompés de grille. C'est le moment de réparer cette erreur :

Q	R	Q	R	Q	R
1	B	11	C	21	E
2	D	12	18	22	A
3	B	13	E	23	B
4	B	14	B	24	D
5	C	15	D	25	7
6	A	16	C	26	C
7	43	17	A	27	C
8	B	18	A	28	E
9	120	19	C	29	B
10	B	20	C	30	C

la grille qui précède est donc celle des **réponses correctes de la demi-finale MINI 1995.**

Nous remercions bien aimablement le lecteur vigilant, M. Charles VIDICK, qui a repéré cette mauvaise information et nous en a fait part.

Demi-finale MINI

Question 3. Inégalité triangulaire

Si P désigne le périmètre du triangle ABC et $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ les longueurs de ses côtés, laquelle des relations suivantes est correcte ?

Ⓐ $|AB| = \frac{P}{3}$ Ⓑ $|AB| \leqslant \frac{P}{3}$ Ⓒ $|AB| \leqslant \frac{P}{2}$

Ⓓ $|AB| + |AC| = \frac{2P}{3}$ Ⓔ $|AB| + |AC| \geqslant \frac{2P}{3}$

Base théorique

Dans tout triangle, la longueur d'un côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Solution

Ainsi, dans le triangle ABC, on a

$$|AB| < |AC| + |BC|$$

En ajoutant $|AB|$ dans chaque membre de cette inégalité, il vient

$$2 \cdot |AB| < |AB| + |AC| + |BC|$$

ou $2 \cdot |AB| < P$ et donc, $|AB| < \frac{P}{2}$.

Réponse : C

Question 9. L'aire d'un cube

De combien augmente l'aire totale d'un cube lorsque la longueur de chacune des arêtes augmente de 50% ?

Ⓐ50% Ⓑ125% Ⓒ225% Ⓓ237,5% Ⓔ2500%

Bases théoriques

1. Soit c la longueur du côté d'un carré. L'aire de ce carré vaut $A = c^2$. Multiplions la longueur du côté par le nombre k. L'aire du carré vaut maintenant

$$A' = (k \cdot c)^2 = k^2c^2 = k^2 \cdot A$$

Ainsi, **si on multiplie la longueur des côtés d'un carré par un nombre k, son aire est multipliée par k^2.**

2. Soit q un nombre réel. Augmentons-le de $x\%$; il devient

$$q' = q + \frac{x}{100} \cdot q = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot q$$

Donc, **augmenter un nombre de $x\%$ revient à le multiplier par $1 + \frac{x}{100}$.**

Solution
Soit c la longueur de l'arête d'un cube.
Augmenter c de 50% revient à multiplier cette longueur par $1 + \frac{50}{100} = 1,5$.
L'aire de chaque face du cube est alors multipliée par $1,5^2 = 2,25$.
Par conséquent, l'aire totale du cube, égale à six fois l'aire d'une face, est elle aussi multipliée par $2,25 = 1 + \frac{125}{100}$. Elle augmente donc de 125 %.
Réponse : B

Question 24. Division dans $\mathbb{N}$ (sans réponse préformulée)
Pour un certain nombre naturel n, $2n + 3$ est un diviseur de $6n + 43$. Que vaut n?
Base théorique
Si un naturel en divise deux autres, il divise aussi leur somme et leur différence. Ainsi, si n divise a et b, alors il divise

$$a + b,\ a - b,\ a + 2b,\ 3a - 2b,\ \ldots$$

n divise tout naturel de la forme $pa + qb$ ou de la forme $pa - qb$, où p et q sont eux-mêmes des naturels.
Solution
Si $2n + 3$ divise $6n + 43$, alors $2n + 3$ divise aussi

$$(6n + 43) - 3 \cdot (2n + 3) = 34$$

Ainsi, $2n + 3$ ne peut être qu'un diviseur de 34, à savoir 1, 2, 17 ou 34.
Si l'on tient compte que, n étant un naturel, $2n + 3$ est plus grand ou égal à 3 et que $2n + 3$ est impair, on a nécessairement $2n + 3 = 17$, d'où l'on tire $n = 7$.
Réponse : 7

Question 28. Course poursuite
Lors d'un championnat de poursuite, deux cyclistes partent en même temps de deux points diamétralement opposés d'un vélodrome de 250 m de tour. Le vainqueur a rattrapé son rival après avoir parcouru 8 tours. Quel est le rapport de la vitesse moyenne du vainqueur à celle du perdant?

Ⓐ $\frac{9}{8}$ Ⓑ $\frac{8}{7}$ Ⓒ $\frac{17}{16}$ Ⓓ $\frac{16}{15}$ Ⓔ $\frac{7}{8}$

Base théorique
La vitesse moyenne v d'un mobile est le rapport de la distance d parcourue par celui-ci au temps t mis à couvrir cette distance

$$v = \frac{d}{t}$$

De cette formule, on en tire une autre :

$$t = \frac{d}{v} \qquad (*)$$

Solution
Le vainqueur a accompli 8 tours; il a donc parcouru 8×250 m $= 2\,000$ m.
Pendant le même laps de temps son rival, moins rapide, a fait un demi-tour de moins; il n'a donc couvert que $(2\,000 - 125)$ m $= 1\,875$ m.
Si nous appliquons la relation $(*)$ à nos deux cyclistes, en nous rappelant que la durée de leur parcours sur la piste est la même, nous avons

$$\frac{2\,000}{V} = \frac{1\,875}{v},$$

où V et v sont respectivement les vitesses moyennes du vainqueur et de son adversaire.
De là, il vient

$$\frac{V}{v} = \frac{2\,000}{1\,875} = \frac{16}{15}.$$

Réponse : D

Demi-finale MIDI

Question 5. Tangentes à un cercle (sans réponse préformulée)
Soit dans le plan :

- un cercle Γ de centre O et de rayon 45;
- un point A dont la distance à O vaut 75;
- les points de contact B et C des tangentes à Γ issues de A.

Quelle est la distance des points B et C?
Base théorique
Dans un triangle rectangle (cf. fig. 1), la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est

$$h = \frac{b \cdot c}{a}$$

où a, b et c sont respectivement les mesures de l'hypoténuse et des côtés de l'angle droit.

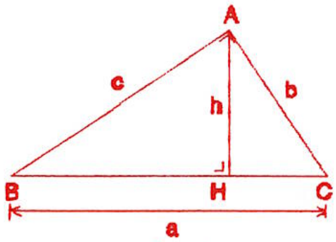


fig. 1

Pour démontrer cette proposition, il suffit de calculer l'aire du triangle rectangle de deux manières différentes ou de travailler avec une paire de triangles semblables.

Solution

(?) Les triangles rectangles BAO et CAO sont isométriques (cf. fig. 2).

(?) De là, on déduit que OA est la médiatrice de $[BC]$.

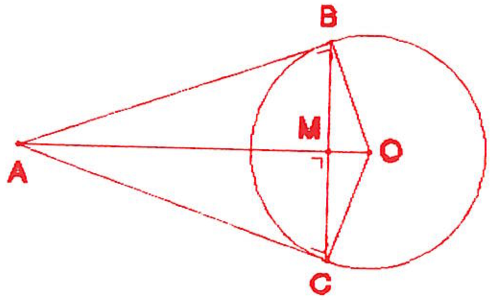


fig. 2

Le milieu M de $[BC]$ appartient donc à la droite OA et $[BM]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse dans le triangle rectangle BAO. On a donc

$$|BM| = \frac{|BA| \cdot |BO|}{|OA|}$$

Appliquons le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$$\begin{aligned} |BA|^2 &= |OA|^2 - |OB|^2 = 75^2 - 45^2 \\ &= (75-45)\cdot(75+45) \\ &= 30 \times 120 = 60^2 \end{aligned}$$

D'où, $|BA| = 60$ et $|BM| = \dfrac{60 \times 45}{75} = 36.$

Enfin, nous avons

$$|BC| = 2 \times |BM| = 72$$

Réponse : 72

Question 12. PGCD et PPCM (sans réponse préformulée)

En divisant le plus petit commun multiple de trois nombres par chacun de ces nombres, les quotients obtenus sont 10, 12 et 15. De plus, le plus grand commun diviseur des trois nombres est 12. Quel est le plus grand des trois nombres ?

Bases théoriques

1. **Décomposition canonique d'un naturel :** tout naturel n peut s'écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

   $$m = p^k \cdot q^\ell \cdot \ldots \cdot r^m$$

   Si on convient que tous les exposants sont strictement supérieurs à 0 et qu'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, cette décomposition est même unique.
   Par exemple, $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$.

2. Si un nombre naturel n est un multiple des naturels $a, b, \ldots, c$, alors n est un multiple du plus petit commun multiple (PPCM) de ceux-ci.
   Soit m le PPCM de $a, b, \ldots, c$.
   Comme tout naturel, m peut se mettre sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

   $$m = p^k \cdot q^\ell \cdot \ldots \cdot r^m$$

   Chaque facteur de cette décomposition est nécessairement un diviseur de l'un des naturels $a, b, \ldots, c$, qui est lui-même un diviseur de n. Dès lors, ce facteur est un diviseur de n. Il s'ensuit que le produit de ces facteurs, c'est-à-dire m, est un diviseur de n.

3. Des nombres naturels $x, y, \ldots, z$ sont **premiers entre eux** si et seulement si leur plus grand commun diviseur (PGCD) est égal à 1.
   Les naturels 6, 10 et 15 n'ont aucun facteur commun; leur PGCD est égal à 1. Par définition, ces nombres sont donc premiers entre eux.

Solution

Soient x, y et z les trois nombres, classés dans l'ordre croissant. Appelons m leur PPCM. On doit avoir

$$\frac{m}{x} = 15 \qquad \frac{m}{y} = 12 \qquad \frac{m}{z} = 10$$

D'où, il vient

$$m = 15x = 12y = 10z$$

Ainsi, m doit être un multiple de 15, de 12 et de 10; donc m doit être un multiple de 60, le PPCM de ces trois nombres. Autrement dit, il existe un naturel k tel que

$$m = 60k$$

Revenons aux nombres x, y, z :

$$x = \frac{m}{15} = 4k \quad y = \frac{m}{12} = 5k \quad z = \frac{m}{10} = 6k$$

Comme 4, 5 et 6 sont premiers entre eux, le PGCD de x, y et z est alors k. Par conséquent, nous avons $k = 12$ et $m = 720$.

Le plus grand des trois nombres est alors $z = 6k = 72$.

Réponse : 72

Question 18. Le prix des livres

Sur un rayonnage sont rangés 31 livres, par ordre de prix croissants. À partir du deuxième, chaque livre vaut 25 F de plus que son voisin de gauche. Le livre le plus à droite vaut autant que, ensemble, celui du milieu et l'un de ses voisins. Alors,

(A) le voisin en question est le dix-septième livre à partir de la gauche. (B) le prix du livre le plus cher est 775 F. Ⓒle prix du livre du milieu est 450 F. Ⓓle prix du livre le moins cher ne peut être déterminé. Ⓔaucune des affirmations précédentes n'est vraie.

Base théorique

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont en **progression arithmétique** si, à partir du second, chacun de ces nombres est égal à la somme du précédent et d'un nombre constant r, que l'on appelle la **raison.**

$$\forall k = 2, 3, \ldots, n : a_k = a_{k-1} + r$$

Ainsi, les nombres 7, 12, 17, 22, 27, ..., 97 sont en progression arithmétique ; la raison de cette progression est 5.

Dans la définition ci-dessus, chacun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est défini par référence au précédent. Cela n'est pas commode car, pour connaître l'un d'entre eux, il faut nécessairement déterminer tous ceux qui le précèdent.

Pourtant, il est possible de donner le k^e nombre de cette progression en fonction du premier terme et de la raison. En effet, puisque pour passer d'un nombre au suivant, on ajoute la raison, il faut ajouter $(k-1)$ fois la raison pour passer du premier au k^e nombre :

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} a_k$$

Donc,

$$\forall k = 2, 3, \ldots, n : a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$$

Solution

Les prix des livres $P_1, P_2, \ldots, P_{31}$ sont en progression arithmétique de raison 25. De plus, on doit avoir

$$P_{31} = P_{16} + P_{15} \text{ ou } P_{31} = P_{16} + P_{17}$$

La seconde de ces égalités donne

$$P_1 + 30 \times 25 = P_1 + 15 \times 25 + P_1 + 16 \times 25$$
$$\text{ou } P_1 = (30 - 15 - 16) \times 25 = -25,$$

ce qui n'est pas très raisonnable pour le prix d'un livre. La seconde égalité n'est donc pas la bonne et la réponse (A) doit être rejetée.

Par contre, de la première égalité, on tire

$$P_1 + 30 \times 25 = P_1 + 15 \times 25 + P_1 + 14 \times 25$$
$$\text{ou } P_1 = (30 - 15 - 14) \times 25 = 25.$$

Ainsi, le livre le moins cher coûte 25 F, ce qui permet d'exclure la réponse (D).

Le prix du livre du milieu est

$$\begin{aligned} P_{16} &= P_1 + 15 \times 25 \\ &= 25 + 15 \times 25 \\ &= 16 \times 25 = 400. \end{aligned}$$

et celui du livre le plus cher est

$$\begin{aligned} P_{31} &= P_1 + 30 \times 25 \\ &= 25 + 30 \times 25 \\ &= 31 \times 25 = 775. \end{aligned}$$

Réponse : B

Question 29.

Recherches dans un triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A et $ADHE$ est un rectangle.

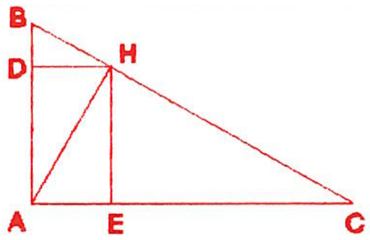


fig. 3

Posons

$$a = |BC| \quad b = |AC| \quad c = |AB|$$
$$x = |DH| \quad \text{et} \quad y = |EH|$$

Laquelle des relations suivantes est parfois fausse ?

Ⓐ $cx + by = bc$ Ⓑ $x^2 + y^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$ Ⓒ $\frac{y}{x} = \frac{b}{c}$ Ⓓ $xy = \frac{b^3c^3}{a^4}$ Ⓔ $a = \sqrt{xy}$

Solution

Posons $h = |AH|$

? Les triangles EAH et ABC sont semblables ; nous en déduisons que

$$\frac{|EA|}{|AB|} = \frac{|EH|}{|AC|} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

De là, il vient

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{b}{c}}$$

La relation (C) est donc toujours vraie.

Dans le triangle rectangle EAH, le théorème de Pythagore donne

$$|AH|^2 = |AE|^2 + |EH|^2 \quad \text{ou} \quad h^2 = x^2 + y^2$$

En tenant compte de la relation énoncée dans la base théorique de la question 5, cette dernière égalité devient

$$\boxed{x^2 + y^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}}$$

Ainsi, la relation (B) est toujours vraie.

? Les triangles DBH et ABC sont semblables; par conséquent, nous avons

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|DH|}{|AC|} \quad \text{ou} \quad \frac{c-y}{c} = \frac{x}{b}$$

D'où, on tire

$$\boxed{xc + yb = bc}$$

La relation (A), aussi, est toujours vraie.

? Les triangles DHA et ABC sont semblables; ainsi, nous avons

$$\frac{|DH|}{|AB|} = \frac{|HA|}{|BC|} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{c} = \frac{h}{a}$$

De là, il vient $x = \dfrac{hc}{a}$.

Si nous nous servons de la relation $h = \dfrac{bc}{a}$ (base théorique de la question 5), nous obtenons $x = \dfrac{bc^2}{a^2}$

? De même, nous avons aussi $y = \dfrac{b^2c}{a^2}$, de sorte que

$$\boxed{xy = \frac{b^3c^3}{a^4}}$$

À son tour, la relation (D) est toujours vraie.

Il reste à montrer que la relation (E) est parfois fausse.

Si elle était vraie, elle donnerait, associée à la relation (D),

$$a^2 = \frac{b^3c^3}{a^4}$$

D'où, on tirerait successivement

$$a^6 = b^3c^3 \text{ et } a^2 = bc,$$

ce qui est manifestement faux pour le triangle 3-4-5.

Réponse : E

Demi-finale MAXI

Question 20. Équation

Quel est le produit des racines de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}\,?$$

(A) -18 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 720

Base théorique

Le produit des éventuelles solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est $p = \dfrac{c}{a}$

Solution

Posons $y = x^2 + 18x + 30$. L'équation s'écrit alors

$$y = 2\sqrt{y + 15}$$

Elle est successivement équivalente à

$$y^2 = 4 \cdot (y + 15) \wedge y \geqslant 0$$
$$y^2 - 4y - 60 = 0 \wedge y \geqslant 0$$
$$(y = -6 \vee y = 10) \wedge y \geqslant 0$$
$$y = 10$$

L'équation de départ est alors équivalente à

$$x^2 + 18x + 30 = 10$$
ou
$$x^2 + 18x + 20 = 0$$

Cette équation admet deux solutions réelles différentes (car son discriminant est strictement positif) et le produit de celles-ci est égal à 20.

Réponse : D

Question 27.

Moyennes arithmétique et géométrique

Si x, y et z sont des réels, laquelle des conditions suivantes est suffisante pour que l'inégalité

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{1}{3}(x + y + z)$$

soit vraie ?

(A) $xyz \geqslant 0$ (B) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0$ (C) $x, y, z \in [0, 1]$
(D) $x, y, z \in \mathbb{R}^*_-$ (E) $x = y = -z$

Solution

Des contre-exemples permettent d'écarter quatre des réponses proposées.

Pour $x = y = -1$ et $z = 1$, on obtient $\sqrt[3]{xyz} = 1$ et $\frac{1}{3}(x + y + z) = -\frac{1}{3}$, ce qui exclut les réponses (A) et (E).

Pour $x = -1$, $y = -2$ et $z = -4$, on a $\sqrt[3]{xyz} = -2$ et $\frac{1}{3}(x + y + z) = -\frac{7}{3}$. Cette fois, c'est la réponse (D) qui doit être éliminée.

La réponse (B) exprime une condition toujours vraie; elle équivaut à dire que l'inégalité proposée est elle-même toujours vraie. Les contre-exemples qui précèdent prouvent le contraire. Cette réponse est donc à rejeter aussi.

En fait, l'inégalité est vraie quels que soient les réels positifs x, y et z (cf. le prolongement ci-dessous). La condition énoncée dans la réponse (C) est donc bien suffisante.

Réponse : C

Prolongement

La moyenne géométrique de trois nombres réels positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique.

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a + b + c}{3}}$$

Partant du fait que $(a-b)^2 \geqslant 0$, on obtient

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

De même, on a

$$b^2 + c^2 \geqslant 2bc$$
et
$$a^2 + c^2 \geqslant 2ac$$

En additionnant membre à membre ces trois inégalités, on obtient

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca)$$
ou
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$$

De là, il vient successivement

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geqslant (ab + bc + ca)(a + b + c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geqslant a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

Comme cette inégalité est vraie quels que soient les réels positifs a, b et c, elle le reste lorsqu'on remplace ces nombres respectivement par $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ et $\sqrt[3]{c}$. On obtient alors

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

et de là, l'inégalité annoncée.

Notons encore que, dans cette relation, l'égalité n'a lieu que si les nombres a, b et c sont égaux.

Question 29. Et pourtant ça « roule » !

Si le carré $ABCD$, de côté a, « roule » sur la droite $d = CD$, la portion du plan comprise entre celle-ci et la trajectoire du sommet D est la partie ombrée de la figure ci-dessous.

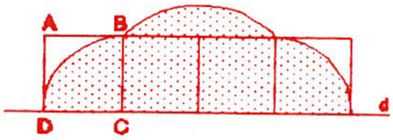


fig. 1

Si, de manière analogue, un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté a « roule » sur la droite $d = EF$, quelle sera l'aire de la région comprise entre d et la trajectoire de F ?

Ⓐ $(\pi + \frac{5}{2}\sqrt{3})a^2$ Ⓑ $(\pi + 3\sqrt{3})a^2$ Ⓒ $(2\pi + \frac{7}{2}\sqrt{3})a^2$
Ⓓ $(2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3})a^2$ Ⓔ $2(\pi + \sqrt{3})a^2$

Bases théoriques

(1) L'aire A d'un secteur circulaire de rayon R et dont l'angle a une amplitude de α radians est

$$A = \frac{1}{2}R^2\alpha$$

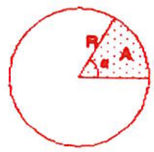


fig. 2

(2) L'aire S d'un triangle vaut la moitié du produit des longueurs de deux de ses côtés et du sinus de l'angle que forment ceux-ci.

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$$

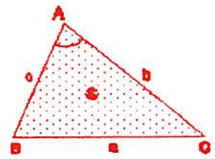


fig. 3

Solution

La figure 4 ci-dessous donne la trajectoire du point F lorsque l'hexagone $ABCDEF$ accomplit un tour complet en « roulant » sur d. La partie ombrée de cette figure montre la portion du plan située sous cette trajectoire.

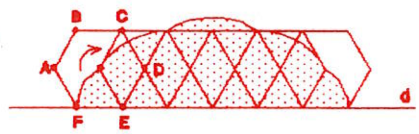


fig. 4

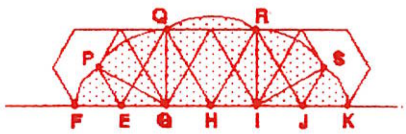


fig. 5

La trajectoire de F est composée de cinq arcs de cercle (cf. fig. 5) de centres respectifs E, G, H, I et J.

La surface sous la trajectoire est alors une juxtaposition de secteurs circulaires et de triangles :

(a) le secteur EFP de rayon a et d'angle 60°,

(b) le triangle EPG,

(c) le secteur GPQ de rayon $a\sqrt{3}$ et d'angle 60°,

(d) le triangle GQH,

(e) le secteur HQR de rayon $2a$ et d'angle 60°,

(f) le triangle IRH, isométrique au triangle GQH,

(g) le secteur IRS, isométrique au secteur GPQ,

(h) le triangle JIS, isométrique au triangle EPG,

(i) le secteur JSK, isométrique au secteur EFP.

Or, on a

$$\text{aire } EFP = \text{aire } JSK = \frac{1}{2}a^2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}a^2$$
$$\text{aire } EPG = \text{aire } JIS = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$
$$\text{aire } GPQ = \text{aire } IRS = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot a^2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}a^2$$
$$\text{aire } GQH = \text{aire } IRJ = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$
$$\text{aire } HQR = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot a^2\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}a^2$$

Ainsi, l'aire sous la trajectoire vaut

$$2\frac{\pi}{6}a^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{\pi}{2}a^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 2\frac{\pi}{3}a^2 = \left(2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)a^2$$

Réponse : D

Question 30. Combien de nombres ?
Combien d'entiers naturels sont de la forme $u \cdot 2^v \cdot 3^w$ avec $u, v, w \in \{1, 2, \ldots, 101\}$?

Ⓐ 303 Ⓑ 352 001 Ⓒ 999 900 Ⓓ 1 030 301 Ⓔ 1 042 001

Base théorique

Soient n un naturel quelconque, p et q des nombres premiers.

(?) Le nombre de naturels inférieurs à n qui ne sont divisibles ni par p, ni par q est

$$n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p \cdot q} \right\rfloor$$

Par exemple, le nombre de naturels, inférieurs à 101, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3 est

$$101 - \left\lfloor \frac{101}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{101}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{101}{6} \right\rfloor = 101 - 50 - 33 + 16 = 34$$

Solution

Il s'agit d'un simple problème de dénombrement ; mais, encore faut-il bien s'organiser pour le réaliser convenablement.

C'est le facteur u qui se trouve au cœur de ce problème. En effet, u peut lui-même contenir des facteurs 2 et 3 ; en fait, il peut se mettre sous la forme $u = k \cdot 2^a \cdot 3^b$ dans laquelle k est un naturel qui n'est divisible ni par 2, ni par 3.

Le tableau ci-dessous fait le décompte, cas par cas, des naturels de la forme imposée en fonction des nombres k, a, b déterminant u, ainsi que des valeurs de v et de w.

On notera que lorsque a (resp. b) n'est pas nul, alors la valeur de v (resp. w) se trouve bloquée à 101 afin de ne pas compter une nouvelle fois des nombres de la forme imposée qui ont déjà été comptabilisés dans les cas précédents.

L'écriture 1..101 signifie que tous les naturels de 1 à 101 sont à prendre en considération.

Enfin, dans la quatrième colonne, on trouve le nombre de valeurs possibles du facteur k ; ce nombre s'obtient en utilisant la formule énoncée dans la base théorique.

a	b	k	Nombre de valeurs de k	v	w	Nombre de naturels du type imposé
0	0	$k \leqslant 101$	34	1..101	1..101	34×101^2
1	0	$k \leqslant 50$	17	101	1..101	17×101
2	0	$k \leqslant 25$	9	101	1..101	9×101
3	0	$k \leqslant 12$	4	101	1..101	4×101
4	0	$k \leqslant 6$	2	101	1..101	2×101
5	0	$k \leqslant 3$	1	101	1..101	1×101
6	0	$k \leqslant 1$	1	101	1..101	1×101
0	1	$k \leqslant 33$	11	1..101	101	11×101
1	1	$k \leqslant 16$	5	101	101	5
2	1	$k \leqslant 8$	3	101	101	3
3	1	$k \leqslant 4$	1	101	101	1
4	1	$k \leqslant 2$	1	101	101	1
5	1	$k \leqslant 1$	1	101	101	1
0	2	$k \leqslant 12$	4	1..101	101	4×101
1	2	$k \leqslant 5$	2	101	101	2
2	2	$k \leqslant 2$	1	101	101	1
3	2	$k \leqslant 1$	1	101	101	1
0	3	$k \leqslant 3$	1	1..101	101	1×101
1	3	$k \leqslant 1$	1	101	101	1
0	4	$k \leqslant 1$	1	1..101	101	1×101

En totalisant les nombres de la quatrième colonne, on retrouve 101, ce qui montre que toutes les valeurs possibles du facteur u ont bien été envisagées.
D'après ce tableau, le nombre de naturels de la forme $u \cdot 2^v \cdot 3^w$ avec $u, v, w \in \{1, 2, \ldots, 101\}$ est

$$34 \times 101^2 + 51 \times 101 + 16 = 352\,001.$$

Réponse : B

Finale MINI

Question 1. L'aire du premier mouvement

Soit ABC un triangle rectangle en A, dont l'aire vaut 1. Si A', B' et C' sont respectivement les symétriques de A, B et C par rapport aux côtés opposés, que vaut l'aire du triangle $A'B'C'$?

Solution

Désignons respectivement par H et par H', les points d'intersection de la droite AA' avec les droites BC et $B'C'$ (cf. fig. 1).

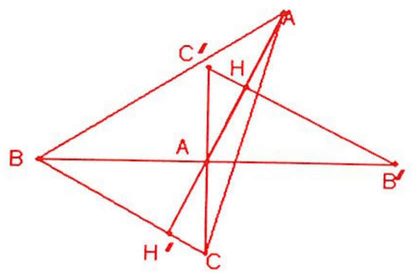


Fig. 1

Par leur construction et par le fait que le triangle ABC est rectangle en A, les points B' et C' sont respectivement les images de B et de C par la symétrie de centre A, de sorte que le triangle $AB'C'$ est l'image du triangle ABC par cette même symétrie. Il s'ensuit que $[B'C']$ et $[BC]$ sont parallèles et ont la même longueur.

Par ailleurs, comme A et A' sont symétriques par rapport à BC, la droite AA' est perpendiculaire à BC et $|A'H| = |AH|$. Par suite, AA' est perpendiculaire à $B'C'$ et $[AH']$ est la hauteur issue de A du triangle $AB'C'$.

Remarquons encore que $[AH]$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.

? La symétrie de centre A applique aussi H sur H'. Par conséquent, les segments $[AH']$ et $[AH]$ ont la même longueur et

$$|A'H'| = |A'H| + |HA| + |AH'| = 3|AH|$$

Ce qui précède nous suffit pour calculer l'aire du triangle $A'B'C'$:

$$\begin{aligned} \text{aire } A'B'C' &= \tfrac{1}{2}|B'C'| \cdot |A'H'| = \tfrac{1}{2}|BC| \cdot 3|AH| \\ &= 3 \times \text{aire } ABC = 3 \end{aligned}$$

Question 2. La calculatrice de Mathieu

Les touches de la calculatrice de Mathieu sont disposées de façon classique :

7	8	9
4	5	6
1	2	3
0		

Toutes ces touches s'étant détachées de leurs alvéoles, Mathieu les replace ainsi :

3	6	9
2	5	8
1	4	7
0		

En calculant le produit de deux naturels, il obtient 1996, alors qu'il s'attendait à obtenir un nombre de trois chiffres. Quel est ce nombre ?

Base théorique

Un nombre premier est un naturel qui possède exactement deux diviseurs naturels, ni plus, ni moins.
Ainsi, 23 est un nombre premier : ses seuls diviseurs étant 1 et 23. Par contre, 1 et 25 ne sont pas des nombres premiers; 1 n'a qu'un seul diviseur (lui-même) tandis que 25 en possède trois (1, 5 et 25).
Pour s'assurer qu'un naturel est premier, il faut vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

Solution

Analysons le résultat obtenu par Mathieu. Décomposons 1 996 en facteurs premiers (cf. base théorique) :

$$1\,996 = 2^2 \times 499$$

Ainsi, 1996 n'a pu être trouvé qu'en effectuant l'une des multiplications suivantes :

$$1 \times 1\,996 \quad \text{ou} \quad 2 \times 998 \quad \text{ou} \quad 4 \times 499$$

Le premier cas est à exclure tout de suite puisque Mathieu s'attendait à obtenir un nombre de trois chiffres; il n'aurait donc pu logiquement introduire un nombre de quatre chiffres comme opérande.
Avec les touches bien placées, la seconde multiplication aurait dû être 4×996; Elle aurait donné un nombre de quatre chiffres comme produit. Elle est donc à exclure aussi.
Finalement, la troisième multiplication est celle réellement effectuée par Mathieu, en lieu et place de 2×229 qui fournit 558 comme résultat. C'est ce nombre qu'attendait Mathieu.

Question 3.

On sait que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Est-il possible de trouver une décomposition de 1 en une somme de fractions différentes dont le numérateur est 1 et dont le dénominateur est un entier naturel non nul

a) si cette somme compte deux termes ?
b) si cette somme compte quatre termes ?
c si cette somme compte dix termes ?

Solution

Il est évident que, dans toute décomposition de ce type, les dénominateurs des différentes fractions sont strictement supérieurs à 1.

a) Les fractions de la forme $\frac{1}{a}$, où a est un naturel plus grand que 1, sont dans l'ordre décroissant des valeurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ La plus grande somme que l'on puisse obtenir en additionnant deux fractions de cette forme est donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Il s'ensuit qu'il n'est pas possible de décomposer 1 en une somme de deux fractions de cette forme.

b) Il existe une décomposition de 1 en une somme de quatre fractions de la forme décrite ci-dessus. Pour en obtenir une, il suffit d'user de la décomposition donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

c) Une décomposition en une somme de dix termes existe aussi. On y arrive, en partant de la décomposition trouvée en b), par un procédé mécanique passant successivement par des décompositions en cinq, six, sept, huit et neuf termes.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \\ 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{384} + \frac{1}{768}$$

Prolongement

? En réalité, il est possible de décomposer le nombre 1 en une somme de n fractions de la forme mentionnée dans l'énoncé, quel que soit le naturel n plus grand ou égal à 3 :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}$$

Pour y arriver, il suffit de reproduire le procédé exploité en b) et en c) autant de fois que nécessaire. Notons encore qu'il existe d'autres décompositions (en une somme de fractions de la forme imposée) que celle-ci.

Voici une décomposition en une somme de cinq termes, autre que celle que nous avons obtenue en c) :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}.$$

Question 4. Construction d'un hexagone équiangle

Existe-t-il un hexagone dont les côtés sont de longueurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et dont les six angles intérieurs sont égaux ?

Solution

Soit $ABCDEF$ un hexagone ayant tous ses angles intérieurs de même amplitude (cf. fig. 2).

Comme la somme des angles d'un hexagone convexe vaut $4 \times 180° = 720°$, chacun des angles de l'hexagone $ABCDEF$ vaut un sixième de cette somme, soit 120°.

En prolongeant un côté sur deux de cet hexagone, construisons un triangle PQR.

Tous les angles de ce triangle valent 60°. Vérifions-le pour l'angle $\widehat{P}$. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ du triangle PAB sont les suppléments de deux des angles intérieurs de l'hexagone ; leur amplitude est donc égale à 60°. Par suite, $\widehat{P}$ est aussi un angle de 60°.

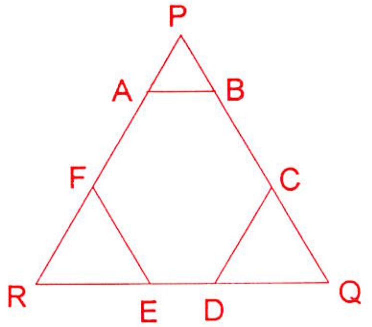


Fig. 2

Dès lors, le triangle PQR est équilatéral. En outre, les triangles PAB, QCD et REF sont également équilatéraux.
Désignons par a la longueur des côtés du triangle PQR.
Nous devons avoir

$$|PA| + |AF| + |FR| = |RE| + |ED| + |DQ| = |QC| + |CB| + |BP| = a$$

$$\text{ou } |AB| + |AF| + |FE| = |FE| + |ED| + |DC| = |DC| + |CB| + |BA| = a$$

En additionnant membre à membre ces trois dernières égalités, nous obtenons

$$2 \cdot (|AB| + |CD| + |EF|) + (|BC| + |DE| + |AF|) = 3a.$$

Si les côtés de l'hexagone sont de longueurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6, alors

$$(|AB| + |CD| + |EF|) + (|BC| + |DE| + |AF|) = 21.$$

Dès lors, nous avons

$$|AB| + |CD| + |EF| + 21 = 3a \text{ ou } |AB| + |CD| + |EF| = 3 \cdot (a - 7).$$

Ainsi, la somme $|AB| + |CD| + |EF|$ est divisible par 3. Par ailleurs, cette somme doit être au moins égale à 6. En prenant $|AB| = 1$, $|CD| = 2$ et $|EF| = 3$, elle vaut exactement 6. Alors, $a = 9$ et

$$|BC| = 9 - |AB| - |CD| = 6, \quad |ED| = 9 - |CD| - |EF| = 4, \quad |AF| = 9 - |AB| - |EF| = 5$$

Il ressort de ce qui précède qu'il existerait bien un hexagone répondant aux conditions imposées. Pour s'en assurer complètement, il reste à le construire.
À cet effet, considérons un triangle équilatéral PQR dont les côtés sont de longueur 9. Sur les côtés de celui-ci, plaçons les points A, B, C, D, E et F (cf. fig. 3) tels que

$$|PA| = |PB| = 1, \quad |QC| = |QD| = 2 \quad \text{et} \quad |RE| = |RF| = 3.$$

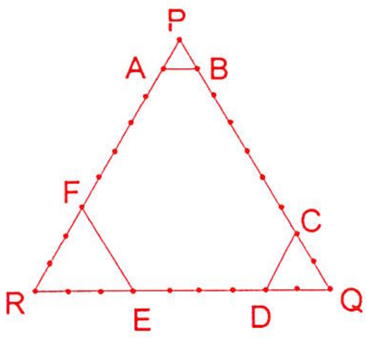


Fig. 3

L'hexagone $ABCDEF$ répond à la question.

? En effet, les angles intérieurs de cet hexagone ont tous la même amplitude (120°) et ses côtés sont de longueur 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Remarque

Cette question est un exemple-type de ce que l'on appelle en géométrie un **problème de construction.** La méthode traditionnellement suivie pour résoudre ce genre de problème comporte quatre étapes : l'analyse, la construction, la preuve de la validité de cette construction et une discussion sur le nombre de solutions possibles. L'analyse est la phase essentielle d'un tel problème : partant de l'hypothèse qu'une solution existe, une figure représentant approximativement l'objet à construire est tracée, dans laquelle on cherche à découvrir les éléments qui peuvent être déterminés par la seule connaissance des données du problème. Cette analyse doit fournir la marche à suivre pour la construction de l'objet demandé.
Il y a gros à parier qu'il existe plusieurs solutions au problème de construction soulevé par la question 4. Pourrais-tu en déterminer le nombre exact en te référant à l'analyse faite ci-dessus ?

Finale MIDI

Question 1.

Si x, y et z sont trois nombres réels tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Que vaut $x^4 + y^4 + z^4$?

Base théorique

Le carré de la somme de plusieurs termes est égal à la somme des carrés de chacun de ces termes, augmentée de la somme des doubles produits de ces termes pris deux à deux.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Solution

En élevant au carré les deux membres de la première des deux égalités données, nous avons

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$$

d'où, en tenant compte de la seconde égalité donnée, il vient $xy + xz + yz = -2$. De là, par une nouvelle élévation au carré, nous obtenons

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z) = 4$$

ou, la somme entre parenthèses étant nulle, $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4$.
Enfin, partant de $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 16$, nous avons $x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 16$ qui, en tenant compte du résultat précédent, donne

$$x^4 + y^4 + z^4 = 8$$

Question 2.

Une feuille de papier de format rectangulaire a pour longueur 5 cm. Lorsqu'elle est pliée de telle manière que deux sommets opposés soient appliqués l'un sur l'autre, la longueur du pli est de $\sqrt{6}$ cm. Quelle est la largeur de cette feuille ?

Solution

Soit $ABCD$ le rectangle constitué par la feuille de papier et $[PQ]$le segment « dessiné » par le pli obtenu lorsqu'on plie cette feuille de manière à appliquer A sur C (cf. fig. 1).

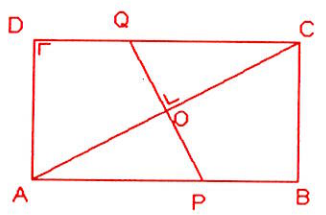


Fig. 1

Ce pliage peut être regardé comme une concrétisation locale d'une rotation (de l'espace) d'un demi-tour dont l'axe est la droite PQ ou d'une symétrie axiale ayant la droite PQ comme axe. Ainsi, A et C sont symétriques par rapport à la droite PQ et, par suite, PQ est la médiatrice de $[AC]$. Cela étant, le milieu O de $[AC]$ appartient à PQ et AC est perpendiculaire à PQ.
Les triangles DAC et OQC sont rectangles, respectivement en D et en O. De plus, ils ont un angle commun. Par conséquent, les angles de ces triangles sont deux à deux de même amplitude et ces triangles sont donc semblables.
Ainsi, les côtés homologues de ces triangles sont de longueurs proportionnelles :

$$\frac{|DA|}{|OQ|} = \frac{|DC|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|QC|} \qquad (\star)$$

? Comme O est aussi le centre du rectangle, P et Q sont symétriques par rapport à O. De ce fait, $|OQ| = \frac{1}{2}|PQ| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
Si nous désignons par x la largeur du rectangle $ABCD$, nous avons

$$|OC| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{\sqrt{x^2+25}}{2}$$

en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DAC.
L'égalité entre les deux premiers rapports de $(\star)$ débouche alors sur une équation dont l'inconnue est x :

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{x^2+25}}{2}}$$

Cette équation est successivement équivalente à $x\sqrt{x^2+25} = 5\sqrt{6}$, $x^4 + 25x^2 - 150 = 0$, $x^2 = 5$, qui admet deux solutions, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$; seule la solution positive nous intéresse : la largeur de la feuille de papier vaut $\sqrt{5}$ cm.

Question 3.
Un après-midi, Xavier, Yves et Zoé jouent au tennis de table. Après chaque partie, le perdant cède sa place à celui qui ne jouait pas. Le soir, Xavier a joué dix parties, Yves, quinze, et Zoé, dix-sept.

a) Combien de parties ont été jouées en tout ?

b) Qui a perdu la deuxième partie ?

Solution
a) En additionnant les nombres de parties jouées par chacun, on compte chaque partie deux fois. Par conséquent, le nombre total de parties est égal à $\frac{10+15+17}{2} = 21$.
b) Chacun des trois joueurs a disputé au moins une partie sur deux. En effet, lorsqu'il n'a pas pris part à l'une des parties, il succède à celui qui perd cette partie pour disputer la suivante.
Ainsi, selon qu'il participe à la première partie ou non, chaque joueur pourra disputer au moins 10 ou 11 parties. Pour que ce nombre n'augmente pas par la suite, il doit perdre toutes les parties auxquelles il participe.
Comme Xavier a joué exactement 10 parties, il est certain que ce garçon a disputé et perdu la seconde partie, ainsi que toutes les parties de rang pair.

Question 4.
Soient n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tous égaux soit à 1, soit à -1. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la somme

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

peut être nulle ?

Solution
Les n termes de la somme $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ ne peuvent prendre que deux valeurs : 1 ou -1. Pour que cette somme soit nulle, il faut qu'elle contienne autant de termes égaux à 1 que de termes égaux à -1. Il doit donc y avoir un nombre pair de termes ou encore n doit être un **entier pair**. Posons donc $n = 2k$.
Lorsqu'un terme de la somme ci-dessus vaut -1, cela signifie qu'il y a changement de signe entre deux termes consécutifs de la suite (finie) $a_1, a_2, \ldots a_n, a_1$. Comme cette suite commence et finit par le même

nombre, il ne peut s'y produire qu'un nombre pair de changements de signe entre termes consécutifs. Par conséquent, k est un nombre pair et n un multiple de 4.
Il reste à montrer que si n est multiple de 4, il existe bien n nombres vérifiant les conditions énoncées. Si $n = 4p$, la suite de nombres a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, \dots, 1, -1, -1, 1, \dots$$

obtenue en reproduisant p fois les quatre entiers 1,-1,-1,1, fournit bien une somme $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ nulle. En fait, cette somme se compose bien d'un nombre pair de termes alternativement égaux à 1 et à -1.

Finale MAXI

Question 1.

À la gare de formation des trains de voyageurs, la seule consigne à respecter est la suivante : deux voitures de première classe ne peuvent jamais se suivre. De combien de manières peut être composée une rame de quinze voitures, si l'on dispose d'au moins quinze voitures de chacune des deux classes ?
N.B. On suppose les voitures de première classe indiscernables entre elles, de même que celles de seconde classe.

Solution

Désignons par T_k le nombre de manières de composer une rame de k voitures ($k \leqslant 15$) selon la consigne imposée. Il est évident qu'il n'y a que deux façons de composer une rame d'une seule voiture. D'où $T_1 = 2$.
Les seules rames autorisées de deux voitures sont 2-2, 1-2 et 2-1. Ainsi, $T_2 = 3$.
En accrochant un troisième wagon au bout des rames décrites ci-dessus, nous pourrons former toutes les rames possibles à trois voitures. Lorsque la rame à deux voitures se termine par un wagon de seconde classe, la troisième voiture peut être indifféremment de première classe ou de seconde classe ; par contre, si la rame à deux voitures finit par un wagon de première classe, on ne peut y adjoindre qu'une voiture de seconde classe. De la sorte, il y a exactement cinq rames composées de trois voitures : 2-2-1, 2-2-2, 1-2-1, 1-2-2 et 2-1-2. Donc $T_3 = 5$.
Appelons encore S_k et P_k le nombre de rames à k voitures qui se terminent repectivement par une voiture de seconde classe et par une voiture de première classe. Bien entendu, nous avons $T_k = S_k + P_k$.
En reprenant le raisonnement tenu pour expliquer le passage du nombre de rames à deux voitures au nombre de rames à trois voitures, nous avons

$$T_{k+1} = 2 \cdot S_k + P_k \qquad S_{k+1} = S_k + P_k = T_k$$

$$\text{et} \qquad T_{k+2} = 2 \cdot S_{k+1} + P_{k+1} = T_{k+1} + S_{k+1} = T_{k+1} + T_k$$

Nous obtenons là une relation de récurrence qui va nous permettre de calculer de proche en proche le nombre de manières de composer une rame de quinze voitures :

$$T_4 = T_3 + T_2 = 8, \ T_5 = T_4 + T_3 = 13 \ \text{ et ainsi de suite } T_6 = 21, \ T_7 = 34, \ \dots, \ T_{15} = 1\,597.$$

Remarque

Les nombres T_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ sont des termes consécutifs de la célèbre suite de FIBONACCI. À cet égard, tu peux (re)lire l'article intitulé *Applications des nombres de Fibonacci*, signé Jacques BAIR, paru dans le *Math-Jeunes* numéro 54 de 1992 (p. 22-26).

Question 2.

Soit $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal (ou inférieur au sens large) à x. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que

$$\lfloor a_0 \rfloor = \lfloor a_1 \rfloor = \dots = \lfloor a_9 \rfloor = 0 \ \text{ et } \ \lfloor a_{10} \rfloor = 1,$$

quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre a_{1996} ?

Solution

Appelons r la raison de la suite arithmétique décrite dans l'énoncé.

Les termes a_0, a_9 et a_{10} de cette suite sont tels que $0 \leqslant a_0 < 1$, $0 \leqslant a_9 < 1$ et $1 \leqslant a_{10} < 2$.
De là, il vient $a_0 + 9 \cdot r < 1$ et $1 \leqslant a_0 + 10 \cdot r$ ou $r < \dfrac{1-a_0}{9}$ et $r \geqslant \dfrac{1-a_0}{10}$. Ainsi, la raison de la suite vérifie la double inégalité $\dfrac{1-a_0}{10} \leqslant r < \dfrac{1-a_0}{9}$.
Comme $a_{1996} = a_0 + 1996 \cdot r$, il s'ensuit que $a_0 + 1996 \cdot \dfrac{1-a_0}{10} \leqslant a_{1996} < a_0 + 1996 \cdot \dfrac{1-a_0}{9}$ ou

$$\frac{1996 - 1986a_0}{10} \leqslant a_{1996} < \frac{1996 - 1987a_0}{9}.$$

En tenant compte que $0 \leqslant a_0 < 1$, nous obtenons finalement $1 < a_{1996} < \dfrac{1996}{9}$.
Ainsi, nécessairement, $a_{1996} \in \left]1, \dfrac{1996}{9}\right[$.
Mais tout nombre réel appartenant à l'intervalle $]1, \frac{1996}{9}[$ peut-il vraiment être une valeur possible de a_{1996} ? Soit a un nombre appartenant à cet intervalle. Montrons qu'il existe alors une suite arithmétique, satisfaisant à toutes les conditions énoncées, telle que $a_{1996} = a$.
Si $a \leqslant \dfrac{1996}{10}$, considérons la suite arithmétique dont la raison et le premier terme sont respectivement $r = \dfrac{a-1}{1986}$ et $a_0 = \dfrac{1996-10a}{1986}$. Puisque $1 < a \leqslant \dfrac{1996}{10}$, nous avons $r > 0$,

$$\frac{1996 - 10\frac{1996}{10}}{1986} \leqslant a_0 < \frac{1996 - 10 \cdot 1}{1986} \quad \text{ou} \quad 0 \leqslant a_0 < 1,$$

$$a_9 = a_0 + 9 \cdot r = \frac{1996-10a}{1986} + 9 \cdot \frac{a-1}{1986} = \frac{1987-a}{1986} < 1,$$

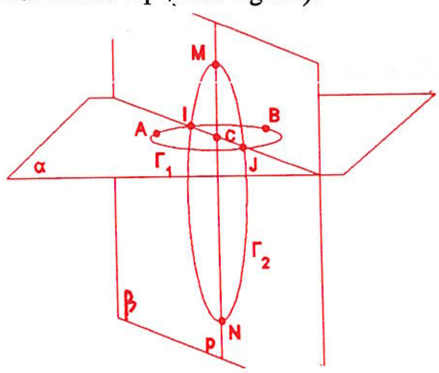
$$a_{10} = a_9 + r = \tfrac{1987-a}{1986} + \tfrac{a-1}{1986} = 1 \text{ et } a_{1996} = a_0 + 1996 \cdot r = \tfrac{1996-10a}{1986} + 1996\tfrac{a-1}{1986} = a.$$

Si $a > \dfrac{1996}{10}$, considérons alors la suite arithmétique dont la raison et le premier terme sont respectivement $r = \dfrac{a}{1996}$ et $a_0 = 0$. Puisque $\dfrac{1996}{10} < a < \dfrac{1996}{9}$, nous avons $r > 0$,

$$a_9 = a_0 + 9 \cdot r = \frac{9a}{1986} < 1, \; a_{10} = a_0 + 10 \cdot r = \frac{10a}{1986}$$

donc $1 < s_{10} < \dfrac{10}{9} < 2$ et $a_{1996} = a_0 + 1996 \cdot r = \dfrac{1996a}{1996} = a$.

Question 3.
Quelles sont les parties non vides de l'espace, dont l'intersection avec tout plan est soit l'ensemble vide, soit un cercle ?
N.B. Un ensemble réduit à un point est considéré comme un cercle dégénéré ou une sphère dégénérée.
Solution
Soit σ une partie de l'espace possédant la propriété énoncée.
Tout ensemble qui ne comprend qu'un seul point vérifie cette propriété. Ainsi, σ pourrait être une sphère de rayon nul.
Supposons que σ comprenne plus d'un point. Considérons alors un plan α comprenant deux points A et B de σ. Comme l'intersection de α et de σ n'est pas vide, celle-ci est un cercle Γ_1 (voir figure).
Par le centre C de ce cercle, élevons la perpendiculaire p à α.
Considérons ensuite un plan β contenant la droite p. La droite commune aux plans α et β comprenant C coupe Γ_1 en deux points I et J. Par conséquent, l'intersection de σ et de β comprend les points I et J; n'étant pas vide, elle est un cercle Γ_2 dont $[IJ]$ est une corde.
Dans le plan β, comme p est la médiatrice de $[IJ]$, p est un diamètre de Γ_2. Cela étant, le centre O de Γ_2 appartient à p et de plus, p coupe Γ_2 en deux points M et N diamétralement opposés.
À présent, montrons que σ s'identifie à la sphère Σ de diamètre $[MN]$.



Soit P un point de Σ, différent de M et N. Le plan π déterminé par p et P, coupe σ selon un cercle Γ comprenant les points M et N. Ainsi qu'il a été dit pour Γ_2, Γ est un cercle de diamètre $[MN]$. Il coïncide nécessairement avec le cercle de la sphère Σ comprenant P. De ce fait, P appartient aussi à σ. Et par conséquent, Σ est une partie de σ.

Soit Q un point de σ différent de M et N. Ce point ne peut appartenir à la droite $p = MN$. En effet, l'intersection de σ et d'un plan ne peut être que l'ensemble vide ou un cercle, donc ne peut jamais comprendre trois points alignés. Considérons alors le plan déterminé par p et Q ; au même titre que β et π, il coupe σ selon un cercle Γ de diamètre $[MN]$. Comme ce cercle Γ comprend Q et est évidemment inclus dans Σ, Q est un point de Σ. En conséquence, σ est une partie de Σ.
La preuve est maintenant établie que σ et Σ sont un seul et même ensemble.
Finalement, σ est toujours une sphère, éventuellement dégénérée (lorsque σ est réduit à un seul point).

Question 4.

De la somme des inverses des nombres naturels non nuls inférieurs à n, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, sont ôtés tous les termes dont le dénominateur comporte le chiffre 9.

a) Démontrer que, quel que soit n, la somme restante est inférieure à 80.

b) Démontrer que, quel que soit n, cette somme est inférieure à 28.

Solution

a) Soit S la somme des inverses des naturels non nuls, inférieurs à n dont l'écriture décimale ne comprend pas le chiffre 9 :
$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{28}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{88}\right) + \cdots + \frac{1}{n}$
Déterminons d'abord un majorant de la somme S_k des inverses des naturels non nuls dont l'écriture décimale comporte exactement k chiffres autres que 9.
Chacun de ces naturels est au moins égal à 10^{k-1} et il y a $8 \cdot 9^{k-1}$ naturels de cette sorte. Nous avons donc $S_k < \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$.
En supposant que l'écriture décimale de n comporte k chiffres ($k \geqslant 1$), nous avons alors

$$\begin{aligned} S &\leqslant S_1 + S_2 + \cdots + S_k \\ &< 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \cdots + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k}{1 - \frac{9}{10}} \\ &< 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 80 \end{aligned}$$

b) Il est possible de trouver un meilleur majorant pour S que 80. Pour cela, nous allons évaluer correctement S_1 et établir l'inégalité suivante : $S_k \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} S_1$.
Nous avons $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} = \frac{761}{280} = 2,72$.
Quant à l'inégalité, elle est évidemment vraie pour $k = 1$. Il reste à vérifier que si elle est vraie pour $k = p$ ($p \geqslant 1$), elle l'est encore pour $k = p + 1$.
À chaque terme de la forme $\frac{1}{a}$ figurant dans S_p, on peut faire correspondre neuf termes de la somme S_{p+1} : $\frac{1}{10a}, \frac{1}{10a+1}, \ldots, \frac{1}{10a+8}$ dont la somme est strictement inférieure à $9 \cdot \frac{1}{10a} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{a}$.
Nous avons ainsi $S_{p+1} < \frac{9}{10} S_p \leqslant \frac{9}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{p-1} S_1 = \left(\frac{9}{10}\right)^p S_1$.
Cela étant, nous pouvons maintenant donner un majorant de S, bien meilleur que 80 :

$$\begin{aligned} S &\leqslant S_1 + S_2 + \cdots + S_k \\ &< \left(\frac{9}{10}\right)^0 S_1 + \left(\frac{9}{10}\right)^1 S_1 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} S_1 = \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k}{1 - \frac{9}{10}} \cdot S_1 \\ &< \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \cdot S_1 = 10 S_1 < 27,3 \end{aligned}$$

Palmarès 1996 de la vingt et unième Olympiade

MINI	MIDI	MAXI
Premier Prix	**Premier Prix**	**Premier Prix**
Georges BAATZ	Jérôme LEVIE	Éric VANDENBUSSCHE
Deuxième Prix	**Deuxièmes Prix**	**Deuxièmes Prix**
Tom SCHAUL	Antoine VIGIER	Xuan Hien NGUYEN
	Dominic PINTO	Grégory SOYEZ
Troisièmes Prix	**Troisièmes Prix**	**Troisièmes Prix**
Johan LEPERS	Zhe HAN	Jean-François MACQ
Pierre GRAMME	Paul-Olivier DEHAYE	Saji MASSON
Benoît DELAHAUT	Laure NINOVE	Jean VAN SCHAFTINGEN
Nicolas FRANCO	Sarah VAN BOGAERT	Christophe BECCO
Ming-Koon HSU		
Quatrièmes Prix	**Quatrièmes Prix**	**Quatrièmes Prix**
Vincent DE CORTE	Nicolas DELANNAY	Caroline DESSAUVAGES
Nicolas BOUTET	François STAUDT	Laurent DOYEN
Guillaume DUMONT	Dimitri ARENDT	Ghislain LEMAUR
Christophe PETIT	Arnaud TIHON	Laurent WAXWEILER
Yves JARADIN	Serge LEDOUX	Michel WEINACHTER
Miramad HASHEMI		
Aude-Aurore HAVENNE		
Benjamin VANAERDE		
Prix Spéciaux	**Prix Spéciaux**	**Prix Spéciaux**
Nicolas FRANCO	Zhe HAN	Éric VANDENBUSSCHE
Nicolas BOUTET	Sarah VAN BOGAERT	Saji MASSON
Guillaume DUMONT	Dimitri ARENDT	Jean VAN SCHAFTINGEN
Benjamin VANAERDE	Serge LEDOUX	Laurent DOYEN
Richard COMBLEN	Yves CRAMA	Laurent WAXWEILER
Mathieu REMY	Maxime DECHESNE	Grégory GERIN
Laurent EECKHAUTE	Dorothée GABAI	Lionel MAMANE
Donatien DE LE COURT	Charles BUYSSCHAERT	Christophe DELAERE
Antoine DELLIEU	Benjamin GENET	
Guy HENRARD		

Le **Prix Vanhamme** a été décerné à Georges BAATZ.

Ami lecteur, assoiffé de problèmes nouveaux, nous te proposons maintenant les quinze questions du quatorzième test américain **AIME**. Pour chacune d'entre elles, la réponse est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$.

Quatorzième Annual American Invitational Mathematics Examination 1996

1. Dans un carré magique, la somme des nombres de chaque ligne, colonne ou rangée est toujours la même. La figure ci-contre montre quatre des nombres d'un carré magique. Trouver x.

x	19	96
1		

2. Pour tout nombre réel x, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier ne dépassant pas x. Pour combien d'entiers positifs n a-t-on $n < 1\,000$ et $\lfloor \log_2 n \rfloor$ égal à un entier positif pair ?
3. Trouver le plus petit entier positif n pour lequel le développement de $(xy - 3x + 7y - 21)^n$, après regroupement des termes semblables, possède au moins $1\,996$ termes.

4. Un cube en bois dont les arêtes mesurent 1 cm se trouve sur une surface horizontale. Illuminé par une source lumineuse ponctuelle se trouvant x cm au dessus d'un sommet de sa face supérieure, le cube définit une ombre sur la surface horizontale. L'aire de l'ombre, qui ne contient pas l'aire sous le cube, est de 48 cm^2. Trouver le plus grand entier qui ne dépasse pas $1\,000 \cdot x$.

5. On suppose que les racines de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ sont a, b, et c et que les racines de $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ sont $a + b$, $b + c$ et $c + a$. Que vaut t ?

6. Dans un tournoi à cinq équipes, chaque équipe rencontre toutes les autres une fois. Chaque équipe a 50 % de chance de gagner tout match auquel elle participe (il n'y a pas de match nul). La probabilité que le tournoi ne produise ni équipe invaincue, ni équipe ayant perdu tous ses matches est égale à $\frac{m}{n}$. Calculer $m + n$ sachant que m et n sont premiers entre eux.

7. Deux des cases d'un échiquier 7×7 sont peintes en jaune et les autres en vert. Deux coloriages de l'échiquier sont équivalents si l'un peut être obtenu à partir d'un autre en appliquant une rotation dans le plan de l'échiquier. Combien de coloriages non équvalents sont possibles ?

8. La moyenne harmonique de deux nombres positifs est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses. Pour combien de paires ordonnées d'entiers positifs (x, y) avec $x < y$ la moyenne harmonique de x et de y vaut-elle 6^{20} ?

9. Un étudiant désœuvré entre dans un hall qui contient une rangée de casiers fermés numérotés de 1 à 1 024. Il ouvre le casier numéro 1 et ensuite un casier sur deux. Quand il arrive au bout du hall, l'étudiant fait demi-tour; il ouvre le premier casier fermé qu'il rencontre et ensuite un casier sur deux. L'étudiant continue de parcourir le hall de cette manière, dans un sens puis dans l'autre sens, jusqu'au moment où tous les casiers sont ouverts. Quel est le numéro du dernier casier ouvert par l'étudiant ?

10. Trouver le plus petit entier positif solution de

$$\operatorname{tg} 19x^\circ = \frac{\cos 96^\circ + \sin 96^\circ}{\cos 96^\circ - \sin 96^\circ}$$

11. Soit P le produit des racines de l'équation $z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ ayant une partie imaginaire positive. Supposons que $P = r \cdot (\cos\theta^\circ + i \sin\theta^\circ)$ où $r > 0$ et $0 \leqslant \theta < 360$. Trouver θ.

12. Pour chaque permutation $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ des entiers $1, 2, 3, \ldots, 10$, on forme la somme

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + |a_5 - a_6| + |a_7 - a_8| + |a_9 - a_{10}|.$$

La valeur moyenne de toutes ces sommes peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $p + q$.

13. Dans un triangle ABC, $|AB| = \sqrt{30}$, $|AC| = \sqrt{6}$ et $|BC| = \sqrt{15}$. Soit D le point pour lequel AD coupe BC en deux segments de même longueur et pour lequel $\widehat{ADB}$ est un angle droit. Le rapport $\frac{\text{aire } \triangle\, ADB}{\text{aire } \triangle\, ABC}$ peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux. Trouver $m + n$.

14. Un parallélipipède rectangle de dimensions $150 \times 324 \times 375$ est fait en collant ensemble des cubes $1 \times 1 \times 1$. Compter combien de cubes $1 \times 1 \times 1$ sont traversés par l'une des diagonales intérieures du parallélipipède. (Cette diagonale doit passer à l'intérieur des cubes $1 \times 1 \times 1$.)

15. Soit le parallélogramme $ABCD$ et O le point d'intersection des diagonales AC et BD. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBC}$ ont une amplitude deux fois plus grande que celle de l'angle $\widehat{DBA}$ et l'amplitude de l'angle $\widehat{ACB}$ est r fois celle de l'angle $\widehat{AOB}$. Trouver le plus grand entier ne dépassant pas $1\,000 \cdot r$.

Réponses correctes

1	200	2	341	3	44	4	166	5	23
6	49	7	300	8	799	9	342	10	159
11	276	12	58	13	65	14	768	15	777

Palmarès du Rallye-Problèmes

Catégorie MINI
Benjamin VANAERDE, première année, Collège Sainte Marie à Mouscron
Johan LEPERS, deuxième année, École secondaire des Ursulines à Tournai
Catégorie MIDI
Serge LEDOUX, quatrième année, École Européenne de Luxembourg
Paul-Olivier DEHAYE, quatrième année, Athénée Robert Catteau à Bruxelles
Catégorie MAXI
Christophe DELFOSSE, cinquième année, Institut Saint Guibert à Gembloux
Laurent DEMANET, sixième année, Institut Saint Joseph à Carlsbourg
Jean-François MACQ, sixième année, Collège Saint Joseph à Chimay

Toutes nos félicitations aux lauréats de ces diverses épreuves !

Publications de la S.B.P.M.e.f.

La S.B.P.M.e.f. est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ; elle édite notamment ta revue *Math-Jeunes* et organise l'*Olympiade Mathématique Belge*. Elle publie également des brochures que tu peux facilement te procurer en versant la somme indiquée sur le compte numéro :

000-0728014-29
S.B.P.M.e.f.
rue de la Halle 15
7000 MONS

Nous te proposons :

- le « troisième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges » ; il comprend l'ensemble des questions posées entre 1988 et 1993. Il coûte 235 BEF (245 BEF pour l'étranger).
- « Mathématiques et Sports » ; dans cet ouvrage, Jacques BAIR montre de nombreuses applications des mathématiques dans le monde des sports. Les étudiants et les membres de la S.B.P.M.e.f. peuvent l'acquérir au prix de 200 BEF (230 BEF pour l'étranger).


BONNES VACANCES...
ET ... À BIENTÔT
3,14...
R-A. CATTAUX 93