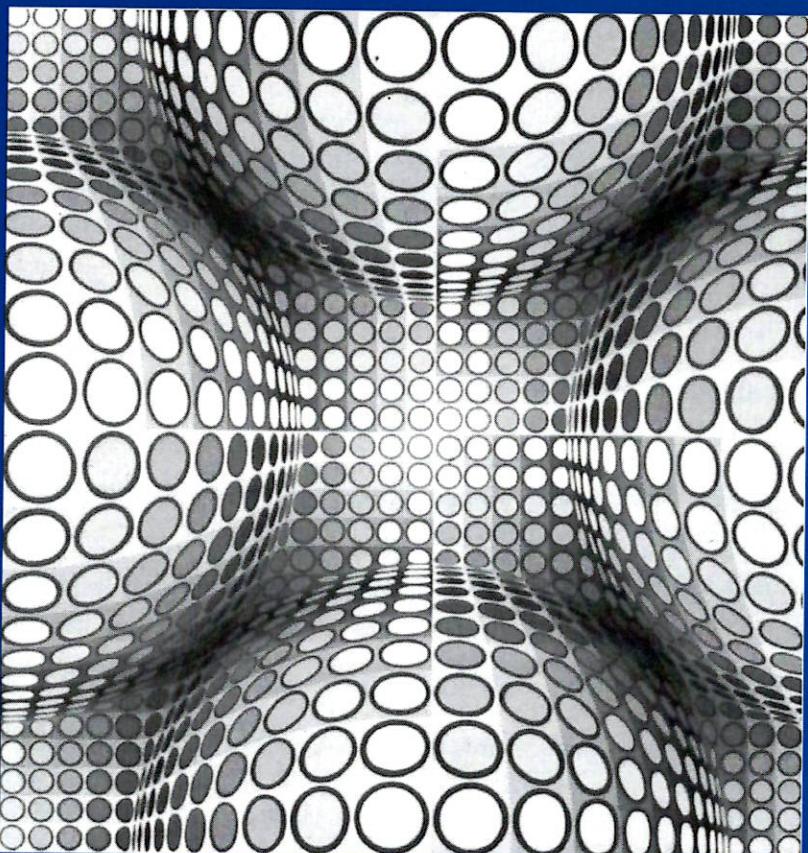


# MATH-JEUNES



Vasarely, Victor - VEGA LEP - 1970

18<sup>e</sup> année  
Novembre 1996 – n° 76  
Bureau de dépôt : Mons 1

# MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique  
d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, R.MIDAVAINNE,  
G.NOËL, A.PARENT, G.ROBERT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS

Illustrations : R.A.CATTAUX et F.POURBAIX

Conception de la couverture : K. MARTROYE

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- |                                      |         |
|--------------------------------------|---------|
| • Groupés (au moins 5 exemplaires) : | 150 BEF |
| • Isolés :                           | 200 BEF |

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

# Math-Jeunes

Nathalie Vigneron, Géraldine  
Bougelet,  
profondeur

Voir en

**2**

**7**

Michel Ballieu, Le calcul  
al-hindī

Vingt-deuxième Olympiade  
Mathématique Belge

**10**

**13**

Rallye Problèmes

C. Van Hooste, Récréations  
mathématiques

**14**

Daniel Justens & Claude  
**16** Maerschalk, La preuve par neuf  
en « mathémagie »

Katia Martroye, La page du  
mathémartiste

**18**

**19**

Jeux

# Voir en profondeur

Nathalie Vigneron, Géraldine Bougelet,  
Athénée Royal François Bovesse, Namur

## 1. Introduction

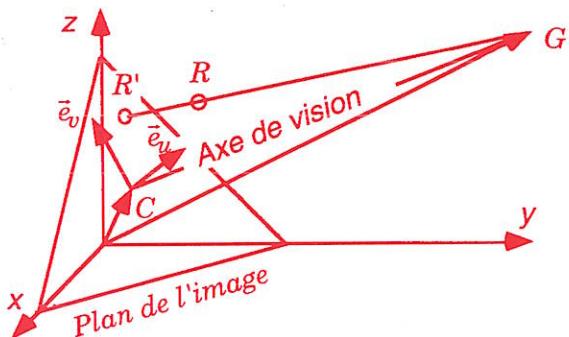
De tout temps, les peintres figuratifs ont recherché des techniques de plus en plus complexes pour rendre dans leurs tableaux l'impression de relief. À la Renaissance, Léonard DE VINCI, savant autant qu'artiste, savait introduire des points de fuite pour suggerer la profondeur. Aujourd'hui, des moyens mathématiques ou physiques beaucoup plus puissants permettent facilement la réalisation de véritables images en relief sur un support à deux dimensions. Les plus simples de ces images envisagent un point d'observation fixe et unique : ce sont les *stéréogrammes*; les plus complètes permettent de varier le point de vue : ce sont les *hologrammes*.

## 2. Les stéréogrammes

Les stéréogrammes sont formés de deux dessins en perspective tracés sur le même support. Les points de vue, pour chacun des dessins, sont légèrement différents : ils correspondent aux positions respectives de l'œil gauche et de l'œil droit, écartés de quelques centimètres. Le stéréogramme reproduira la vision binoculaire et l'impression de relief si le dessin destiné à l'œil gauche n'est vu que par l'œil gauche et le dessin destiné à l'œil droit n'est vu que par l'œil droit. Plusieurs procédés astucieux ont été imaginés pour permettre cette séparation des vues le plus complètement et le plus confortablement possible. Nous montrerons quelques exemples de ces procédés dans un moment.

Pour comprendre comment se construit, mathématiquement, un stéréogramme, il nous faut d'abord expliquer comment un point de l'espace tridimensionnel est projeté sur son

image à deux dimensions, fonction du point d'observation. Les ingrédients essentiels à cette transformation sont représentés sur la figure 1. L'espace à trois dimensions est repéré en termes de coordonnées  $(x, y, z)$  issues d'une base orthonormée.



**Figure 1.** Projection d'un point de l'espace sur le plan de l'image.

La position de l'œil  $G$  — de coordonnées  $(G_x, G_y, G_z)$  — et le point central du sujet examiné  $C$  — de coordonnées  $(C_x, C_y, C_z)$  — définissent l'*axe de vision*. Le *plan de l'image* sera, pour nous, le plan contenant le point  $C$ , et perpendiculaire à l'axe de vision. L'image  $R'$  d'un point  $R$  quelconque de l'espace sera vu à partir du point  $G$  dans le prolongement du segment  $[GR]$ . L'image  $R'$  est donc l'intersection de la droite paramétrique

$$\overrightarrow{CR'} = \overrightarrow{CG} + t \cdot \overrightarrow{GR}$$

avec le plan image. La valeur actuelle du paramètre  $t$  est facilement déterminée en remarquant que  $\overrightarrow{CR'}$  est aussi orthogonal à la direction de l'axe de vision  $CG$ , ce que nous exprimons en annulant le produit scalaire

$$(\overrightarrow{CG} + t \cdot \overrightarrow{GR}) \cdot \overrightarrow{CG} = 0.$$

Après avoir distribué, on obtient la valeur

$$t = -\frac{\|\overrightarrow{CG}\|^2}{\overrightarrow{GR} \cdot \overrightarrow{CG}}$$

qui est facilement calculée à partir des coordonnées cartésiennes de  $C$ ,  $G$  et  $R$ .

Les coordonnées bidimensionnelles  $(u, v)$  de la projection du point  $R$  sur le plan image sont tout aussi faciles à construire. On définit d'abord le vecteur de base normé « horizontal »  $\vec{e}_u$  en imposant qu'il soit orthogonal à la direction de l'axe de vision  $CG$  et au vecteur « vertical »  $\vec{e}_z$ . On utilise à cette fin le *produit vectoriel* (pour plus de renseignements sur le produit vectoriel, voir l'annexe en fin d'article)

$$\vec{e}_u' = \vec{e}_z \times \overrightarrow{CG}$$

et on normalise le résultat :

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{e}_u'}{\|\vec{e}_u'\|}$$

Le vecteur  $\vec{e}_v'$  est pris orthogonal à la direction de l'axe de vision et au vecteur  $\vec{e}_u'$  trouvé ci-dessus :

$$\vec{e}_v' = \overrightarrow{CG} \times \vec{e}_u'$$

Lui aussi est dûment normalisé :

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{e}_v'}{\|\vec{e}_v'\|}$$

Finalement, les coordonnées à deux dimensions  $(u, v)$  de la projection  $R'$  du point  $R$  sur le plan s'obtiennent en projetant le vecteur  $\overrightarrow{CR'}$  sur les deux vecteurs de base qui viennent d'être construits :

$$u = \overrightarrow{CR'} \cdot \vec{e}_u \text{ et } v = \overrightarrow{CR'} \cdot \vec{e}_v$$

La procédure détaillée, facile à programmer sur ordinateur, est reprise à la figure 2. Elle consiste en un certain nombre de calculs dépendant uniquement de la position  $G$  de l'observateur et du centre  $C$  de la région observée et de calculs à effectuer pour chaque point  $R$  décrivant un objet.

### Initialisation

Position de l'observateur (donnée) :

$$G_x, G_y, G_z$$

Centre de la région observée (donné) :

$$C_x, C_y, C_z$$

$$\left. \begin{array}{l} A_x = G_x - C_x \\ A_y = G_y - C_y \\ A_z = G_z - C_z \end{array} \right\} \overrightarrow{CG}$$

$$n = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{ux} = -A_y \\ E_{uy} = A_x \\ E_{uz} = 0 \end{array} \right\} \vec{e}_u'$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{vx} = -A_x A_z \\ E_{vy} = -A_y A_z \\ E_{vz} = A_x^2 + A_y^2 \end{array} \right\} \vec{e}_v'$$

$$\left. \begin{array}{l} e_{ux} = E_{ux} / \sqrt{(E_{ux}^2 + E_{uy}^2)} \\ e_{uy} = E_{uy} / \sqrt{(E_{ux}^2 + E_{uy}^2)} \\ e_{uz} = 0 \end{array} \right\} \vec{e}_u$$

$$\left. \begin{array}{l} e_{vx} = E_{vx} / \sqrt{(E_{vx}^2 + E_{vy}^2 + E_{vz}^2)} \\ e_{vy} = E_{vy} / \sqrt{(E_{vx}^2 + E_{vy}^2 + E_{vz}^2)} \\ e_{vz} = E_{vz} / \sqrt{(E_{vx}^2 + E_{vy}^2 + E_{vz}^2)} \end{array} \right\} \vec{e}_v$$

### Pour chaque point $R(x, y, z)$

$$\left. \begin{array}{l} q_x = x - G_x \\ q_y = y - G_y \\ q_z = z - G_z \end{array} \right\} \overrightarrow{GR}$$

$$t = -n / (A_x q_x + A_y q_y + A_z q_z)$$

$$\left. \begin{array}{l} d_x = A_x + t q_x \\ d_y = A_y + t q_y \\ d_z = A_z + t q_z \end{array} \right\} \overrightarrow{CR'}$$

$$u = d_x e_{ux} + d_y e_{uy} + d_z e_{uz}$$

$$v = d_x e_{vx} + d_y e_{vy} + d_z e_{vz}$$

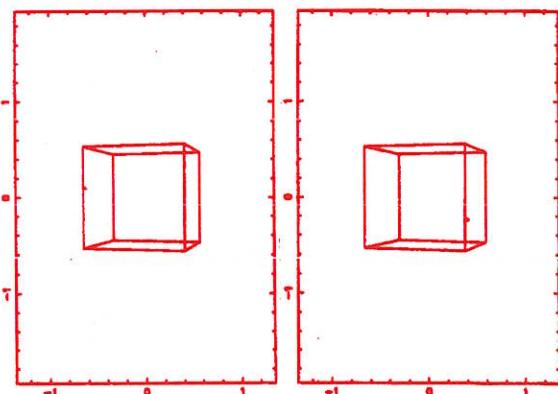
**Figure 2.** Algorithme de projection d'un point de l'espace à trois dimensions sur le plan d'une image. La perspective est la même que dans une image photographique.

Lorsque l'objet a la forme d'un polyèdre, on peut profiter du fait que la projection d'un

segment de droite reste un segment de droite sur le plan image pour ne calculer que la transformation des sommets.

Les formules développées ci-dessus et le programme de calcul qui les implémente permettent, par exemple, la représentation stéréoscopique d'un cube (voir figure 3). Deux images du cube sont proposées : l'une destinée à l'œil droit, l'autre à l'œil gauche.

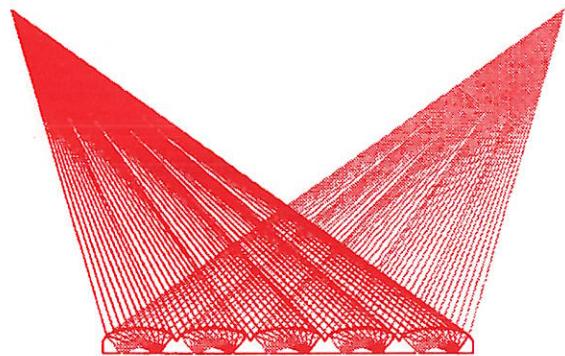
L'utilisation de lunettes stéréoscopiques permet d'envoyer facilement chacune de ces images à l'œil qui doit la recevoir. Avec un peu d'entraînement, il est même possible de « lire » ces stéréogrammes à l'œil nu, mais ce n'est pas immédiat : l'habitude veut, en effet, que lorsqu'on regarde un objet proche, les yeux s'orientent dans leur orbite pour que les axes de vision se croisent à courte distance en même temps que l'accommodation s'effectue pour les objets proches. Nous ressentons généralement une corrélation entre ces deux réflexes : si, en regardant un stéréogramme à l'œil nu, nous forçons l'œil gauche à regarder l'image de gauche et l'œil droit à regarder l'image de droite, nous « séparons » les deux axes de vision et nous activons le réflexe d'accommodation pour des objets lointains. C'est ce réflexe qu'il faut s'entraîner à désarmer si l'on veut examiner des stéréogrammes à l'œil nu.



**Figure 3.** Paire stéréoscopique représentant un cube. Ces figures ont été calculées à l'aide de l'algorithme de la figure 2, appliqué aux huit sommets d'un cube.

Les lunettes stéréoscopiques portent des lentilles convergentes qui, précisément, évitent à

l'œil de devoir accommoder pour des objets proches lorsqu'on examine la paire d'images. Il existe une grande variété de procédés permettant de visualiser des couples d'images stéréoscopiques sans trop de fatigue. La figure 4 montre un dispositif optique fondé sur un réseau de dioptres cylindriques parallèles, ajustés sur une feuille de papier portant les deux images. Le tracé des rayons indique schématiquement que la région de la feuille accessible à l'œil gauche est différente de la région accessible à l'œil droit. Il « suffira » ici de positionner correctement les points des deux images (en alternant côté à côté des languettes découpées dans celles-ci) pour produire la séparation escomptée sans recourir à l'usage de lunettes spéciales.



**Figure 4.** Un des procédés de séparation des paires stéréoscopiques fondé sur l'optique géométrique et la réfraction de la lumière à la surface d'un dioptre cylindrique.

Plus classiquement, le port de lunettes qui bloquent pour chacun des yeux l'une des deux images d'un couple stéréoscopique permet la séparation et déclenche l'analyse de la vue en fonction de la profondeur. Ainsi, si un élément d'une paire apparaît en rouge et l'autre en vert, il suffit de placer devant un œil un filtre vert (qui bloque l'image rouge) et l'autre, un filtre rouge (qui bloque le vert) pour que chaque œil ne perçoive que l'image qui lui est destinée.

On peut aussi utiliser des filtres de type « Polaroid » qui jouent sur la direction de la polarisation de la lumière pour bloquer la partie adéquate de l'image stéréoscopique. Ceci

permet la restitution de la couleur en même temps que le relief.

### 3. Les hologrammes

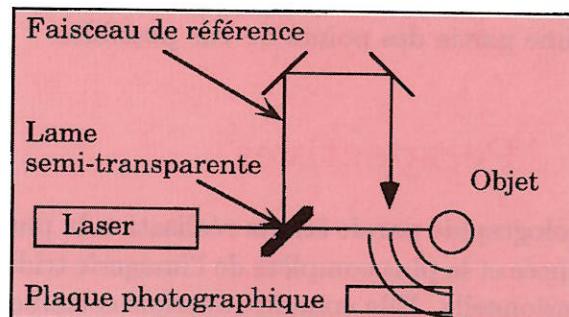
L'hologramme est plus qu'un stéréogramme. Il produit une image tridimensionnelle sans fixer rigidement le point de vue. Le mot hologramme dérive du grec *holos* (entier) et *gramma* (lettre). L'holographie permet de reproduire sur un support photographique plat, l'aspect tridimensionnel des objets, jusque dans la reconstruction des différentes apparences du sujet en fonction du point de vue. L'holographie est née dans les années 1940 d'une idée de Dennis GABOR. Les moyens dont on disposait à l'époque (les sources de lumière ordinaire, non cohérentes, ...) étaient insuffisantes pour atteindre facilement le résultat escompté. Ses tentatives pour optimiser des paramètres tels que l'intensité lumineuse ont d'abord conduit à de nombreux échecs. Malgré ces difficultés, il a pu, dès 1947, énoncer clairement le principe de l'holographie. Le prix Nobel de physique lui sera décerné pour ce travail en 1971.

Chaque onde lumineuse est caractérisée par

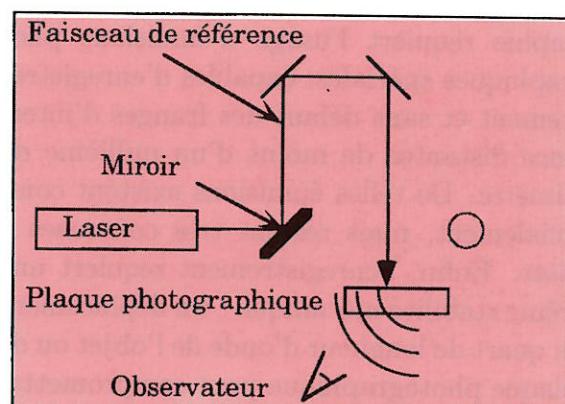
- une longueur d'onde (associée à la couleur du rayonnement) ;
- une amplitude (associée à l'intensité) ;
- une phase (qui n'a pas d'équivalent en optique géométrique, mais joue un rôle crucial dans tous les phénomènes de diffraction).

Deux ondes qui atteignent le même point de l'espace s'y superposent par simple addition. Si elles ont la même fréquence et sont en phase à ce point, elles ajoutent leurs amplitudes et produisent une forte intensité. Si elles sont en opposition de phase, elles s'affaiblissent mutuellement. Ceci peut aller jusqu'à l'extinction si les amplitudes des deux ondes sont très proches.

Un hologramme est constitué par une plaque photographique impressionnée par deux faisceaux de lumière distinct : le faisceau de référence et le faisceau émis par l'objet. La plaque photographique enregistre les intensités correspondant à l'interférence des deux ondes. La plaque porte ainsi des franges alternativement claires et sombres, fonction du déphasage entre le faisceau réfléchi par l'objet et le faisceau de référence. Par la suite, pour la reconstruction de l'image, on éclaire la plaque développée avec le faisceau de référence. Les zones claires et sombres maintenant dessinées sur la plaque tendent à reconstruire dans l'éмульSION développée une distribution de la lumière identique à celle qui a impressionné la plaque au moment de l'enregistrement de l'hologramme. Il en résulte la formation d'un faisceau de lumière identique à celui qui émanait de l'objet.



**Figure 5.** Enregistrement d'un hologramme.



**Figure 6.** Visualisation de l'image holographique.  
En pratique, la source de lumière utilisée doit être monochromatique (d'une seule couleur)

et cohérente (présentant une phase bien définie, pendant un temps très long), ceci pour favoriser la production des interférences. La meilleure source de lumière présentant ces propriétés est le LASER et il a fallu attendre son invention pour voir apparaître des hologrammes de bonne qualité.

Ce qui, principalement, distingue les hologrammes des stéréogrammes est la redondance : le front d'ondes reconstruit lors de la visualisation de l'hologramme contient toutes les images de l'objet vu sous différents points de vue. La plaque photographique qui contient les informations holographiques apparaît comme une fenêtre au travers de laquelle on voit l'objet. On peut changer de position devant cette fenêtre et voir l'objet reconstruit avec une perspective différente. Si on occulte une partie de la plaque photographique, il est souvent encore possible de voir l'objet en entier : on ne supprime en fait qu'une partie des points de vue possibles.

## 4. Perspectives

L'holographie paraît être la réalisation la plus avancée et la plus complète de l'imagerie tridimensionnelle. Elle connaît toutefois certaines limites : une lumière monochromatique cohérente est nécessaire au moins au niveau de l'enregistrement et la reproduction des couleurs reste, de ce fait, problématique. L'holographie requiert l'usage d'émulsions photographiques spéciales, capables d'enregistrer nettement et sans défaut des franges d'interférence distantes de moins d'un millième de millimètre. De telles émulsions existent commercialement, mais restent très coûteuses à utiliser. Enfin, l'enregistrement requiert une extrême stabilité mécanique : un déplacement d'un quart de longueur d'onde de l'objet ou de la plaque photographique peut compromettre le résultat.

Mais lorsque l'image holographique est réussie, la richesse de son contenu est infiniment plus grande que celle d'une photographie ordinaire. C'est cette richesse intrinsèque qui

explique la multiplication croissante des applications de l'holographie.

### Annexe : le produit vectoriel

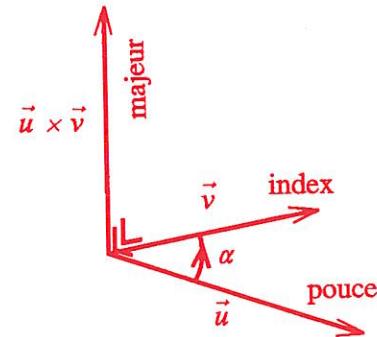
Le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur, noté  $\vec{u} \times \vec{v}$ , qui satisfait aux propriétés suivantes :

- $\vec{u} \times \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et orthogonal à  $\vec{v}$  ;
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha$  (où  $\alpha$  est l'angle défini par les directions des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ; cet angle est au plus égal à  $180^\circ$ ) ;
- le sens du vecteur  $\vec{u} \times \vec{v}$  est celui déterminé par le majeur de la main droite lorsque le pouce est dirigé dans le sens de  $\vec{u}$  et l'index dans le sens de  $\vec{v}$  (règle des *trois doigts de la main droite*).

Remarque importante : de cette dernière règle, il découle que le produit vectoriel n'est pas commutatif.

La coordonnée de  $\vec{u} \times \vec{v}$  est :

$$\left( \begin{array}{c} | u_y \ u_z | \\ | v_y \ v_z | \\ - | u_x \ u_z | \\ | v_x \ v_z | \\ | u_x \ u_y | \\ | v_x \ v_y | \end{array} \right)$$



# Le calcul al-hindī

Michel Ballieu, Athénée Royal de Binche

L'écriture des nombres telle que nous la connaissons repose sur le **principe de position** : un même chiffre représente une **quantité différente** selon la **position** qu'il occupe dans le **nombre**. Ainsi, dans le nombre **333**, le chiffre **3** le plus à droite vaut trois unités, le chiffre **3** du centre, trois dizaines ou encore trente unités. Quant au chiffre **3** le plus à gauche, il représente trois centaines, c'est-à-dire trois cents unités. Cette convention diffère totalement de celle utilisée par les latins, par exemple : quand nous écrivons **XXX** en chiffres romains, les trois « **X** » valent toujours la même quantité, à savoir dix unités.

La découverte du principe de position ne fut pas a priori une évidence puisqu'elle a échappé à pas mal de civilisations. Il semble que le système de numération de position fut transmis au monde occidental vers le onzième siècle par les Arabes qui eux-mêmes, le tenaient des Indiens. Avant cela, on en trouve de plus sommaires à Babylone (2000 av. J.-C.), chez les astronomes Mayas (époque classique, entre le troisième et le neuvième siècle de notre ère) et chez les Chinois (un peu avant le début de notre ère).

C'est ABŪ JA'FAR MUHAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḪŪARIZMĪ (v. 780 – v. 850), savant d'origine persane qui travaillait à la Maison de la Sagesse du calife al-Ma'mūn, qui nous a laissé le premier ouvrage connu dans lequel sont exposés le système décimal et les opérations de calcul sur base de ce système. La seule copie qui nous en est parvenue jusqu'à présent est une traduction latine contenue dans le manuscrit Ms. II.vi.5 conservé à la bibliothèque de l'Université de Cambridge. Ce manuscrit date probablement du treizième siècle, en tout cas, pas plus tard que le quatorzième.

Sur l'auteur, AL-ḪŪARIZMĪ, on ne connaît pas grand-chose sinon qu'il était originaire du « Khwarizm », région au sud de la Mer

d'Aral. Son surnom « géographique » ou *nisba* en arabe, a donné « algorithme » qui a longtemps désigné les méthodes de calcul *al-hindī*, c'est-à-dire à la façon indienne puis s'est transformé en « algorithme » qui désigne ce que chacun sait. Quant au manuscrit de Cambridge, il semble être une mauvaise traduction d'un ouvrage intitulé *Kitāb al-jam' w-al-tafrīq bi hisāb al-hindī* ou *Livre de l'addition et de la soustraction au moyen du calcul à l'indienne*. Mauvaise traduction et mauvaise copie puisque le texte est incomplet et que le scribe a très souvent omis de transcrire les nouveaux chiffres alors qu'il leur avait réservé des espaces blancs, parfois beaucoup trop larges ...

L'auteur explique en détail le système décimal positionnel et dit comment prononcer le nom des nombres. Il donne les procédés d'addition et de soustraction en opérant de gauche à droite c'est-à-dire en commençant par les chiffres occupant les positions hautes. Il parle ensuite de la division par deux, seule opération qu'il traite de droite à gauche, puis de la duplication (cf. Égypte). Viennent ensuite la multiplication et la division. Il faut, dit-il, connaître les tables de multiplication depuis  $1 \times 1$  jusqu'à  $9 \times 9$ ; il conseille ensuite de travailler sur une tablette couverte de poussière ou de sable, sans doute d'origine indienne et qui est l'ancêtre de l'ardoise qui était encore utilisée dans nos écoles avant 1960. Au treizième siècle, FIBONACCI recommandera encore l'usage d'une *tabula dealbata*. AL-ḪŪARIZMĪ vérifie les multiplications et duplications au moyen de la preuve par neuf. Après les opérations sur les nombres entiers, l'auteur traite des fractions, en latin *fractiones*, traduction de l'arabe *kasr* qui signifie rompu, brisé. Il parle d'abord des fractions sexagésimales puis des fractions ordinaires. Le texte

s'interrompt au milieu de la description du produit de  $3\frac{1}{2}$  par  $8\frac{3}{11}$ .

Mais intéressons-nous à un autre ouvrage qui décrit également le calcul *al-hindī* ou calcul au moyen des « figures indiennes » : le traité de KŪŠYĀR IBN LABBĀN (v. 971 – v. 1029), le *Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind* ou *Livre des principes du calcul à l'indienne* écrit vers l'an 1000. Ce texte toujours existant dans sa version arabe originale (bibliothèque Aya Sophia d'Istanbul, manuscrit MS4857, folios 267b à 282b) est particulièrement intéressant. C'est en effet à l'heure actuelle le plus ancien ouvrage en version arabe sur le calcul à l'indienne ; il précède de peu le traité d'AL-HARAJI également en version arabe.

KŪŠYĀR IBN LABBĀN naquit à Jilān, village de Perse au sud de la Mer Caspienne. Il fut d'abord astronome. On connaît peu de choses de lui si ce n'est qu'il fut le maître de l'algoriste bien connu AL-NASAWĪ. On possède également ses traités d'astronomie, de géographie et de l'astrolabe.

Le traité du calcul à l'indienne est divisé en deux livres ; le premier concerne le système décimal, le second, le sexagésimal pur. On y trouve les quatre opérations arithmétiques fondamentales, l'extraction des racines carrées, les techniques de preuve et l'extraction des racines cubiques. Tout comme AL-HŪARIZMĪ, IBN LABBĀN procède de gauche à droite. Nous allons prendre un exemple mais, afin de mieux suivre dans le texte original, voici comment les chiffres sont écrits dans la graphie orientale (cherche des analogies) :

٩٨٧٦٤٣٢٠  
٩٨٧٦٥٤٣٢١٠

الفصل الثاني في الضرب نبدأ بضرب ثلثا  
وتحمّلها معاً في المثلثة واربعين ضعفها على الخ  
على معاً في الصورة الاولى ٣٢٥ او للدرايبل سفلانة  
حتى يجيء راتب مرتباً به اهانة ضرب المثلثة  
في الآية السادس في تكون شه ضعفها فوق الآية  
الستانية بازام المثلثة الفوقانية على في الصورة الثانية  
٦٣٢٥ نلوكان في التمهيدات كما صفتها في الآية  
٣٢٣

ثم نصف المثلثة الفوقانية اضافي الرابعة السفلانية  
ونفعها العدد على ضعفها في المثلثة صارت سكة  
محض على في الصورة الثالثة ٣٢٣٥ ٦٣٢٦ اضافي  
المثلثة المثلثة الفوقانية في المثلثة السفلانية يجدها  
ونصفها فوق المثلثة الذهليه كان المثلثة المثلثة  
وينقل المراكب سفلانة به فحصل على معاً في الصورة  
الرابعة ٣٢٣٦ من ضعف الآية السادس في فوق المثلثة  
السفلانية في الآية السادس في تكون شه ضربها  
الآية السادس في وقت الآية السادس في ضرب الآية  
الفوقانية اضافي الرابعة السفلانية في تكون شه ضربها  
على الصورة التي هي في الرابعة ضربها لا ينبع انفوقها  
اضافى المثلثة السفلانة في تكون شه ضعفها ينفرد  
المثلثة كان الآية السادس في عين المراكب السفلانية  
مربيه فحصل على معاً في الصورة الخامسة ٦٣٢٧  
لتصبح أوجه الفوقانية في الآية السادس في سفر  
عشرين ضعفها على معلم المراكب التي يجدها المرصد  
تضريب المثلثة اضافي الرابعة السفلانة يكون عن  
نهض على ضربها الرابعة يحصل شه ضربها اصحابها  
في المثلثة السفلانية يمكن حفظ ضربها اصحابها  
ادونها العدد على شه ضربها على معاً في الصورة الخامسة  
٦٣٢٨ وذلك ما اردنا ان نعلم ضربه للتوجيه

Nous voulons multiplier 325 par 243. Les deux nombres sont écrits sur la tablette couverte de poussière ainsi :

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Le premier ordre du multiplicateur est sous la dernière position du multiplicande. Nous multiplions le 3 du multiplicande par le 2 du multiplicateur, ce qui donne 6. Nous le plaçons au-dessus du 2 du multiplicateur à côté du 3 du multiplicande, comme ceci :

$$\begin{array}{r} 6 \ 3 \ 2 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Si le produit avait été autre que 6 et avait contenu des dizaines et des unités, nous aurions mis les unités au-dessus du 2 et les dizaines à gauche des unités. Nous multiplions le 3 du dessus également par le 4 du dessous. Nous additionnons le 10 des dizaines de telle manière que 6 devient 7. Il en résulte ceci :

$$\begin{array}{r} 7 \ 2 \ 3 \ 2 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Nous multiplions le 3 du dessus par le 3 du dessous, ce qui fait 9. Nous l'écrivons au-dessus du 3 inférieur, à la place du 3 supérieur. Nous faisons glisser en bas les ordres d'une place [vers la droite]. Il en résulte :

$$\begin{array}{r} 7 \ 2 \ 9 \ 2 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Alors nous multiplions le 2 qui est au-dessus du 3 par le 2 du dessous, ce qui fait 4. Nous l'ajoutons au 2 qui est au-dessus du 2 inférieur pour avoir 6. Ensuite, nous multiplions le 2 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait 8. Nous l'ajoutons au 9 qui est au-dessus du 4. Ensuite, nous multiplions encore le 2 supérieur par le 3 inférieur, ce qui fait 6 que nous écrivons au-dessus du 3, à la place du 2. Puis nous faisons glisser en bas les ordres d'une place [vers la droite]. Il vient :

$$\begin{array}{r} 7 \ 7 \ 7 \ 6 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Ensuite, nous multiplions le 5 du dessus par le 2 du dessous pour obtenir 10. Nous ajoutons 1 aux dizaines de l'ordre qui est au-dessus du 2. De nouveau, nous multiplions le 5 par le 4 du dessous, ce qui fait 20. Nous ajoutons 2 aux dizaines de l'ordre au-dessus du 4, ce qui fait 9. Nous multiplions encore le 5 par le 3 du dessous, ce qui donne 15 ; le 5 est laissé à sa place et le 1 est ajouté à ses dizaines. Nous obtenons :

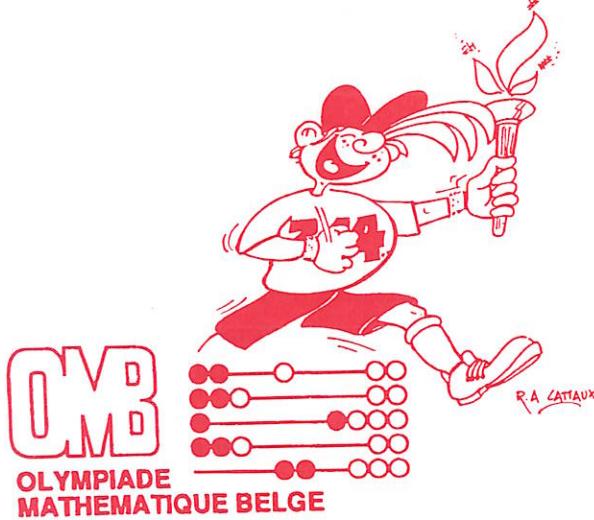
$$\begin{array}{r} 7 \ 8 \ 9 \ 7 \ 5 \\ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$$

C'est ce que nous souhaitions faire.

Si tu as bien suivi, tu dois repérer une erreur dans le texte arabe : un chiffre n'est pas correct. Lequel ?

## Bibliographie

- [1] Muhammad ibn Mūsā AL-ḤŪARIZMĪ, *trad. latine des douzième-treizième siècles*, Manuscrit de la Bibliothèque de l'Université de Cambridge (Ms. Ii.vi.5).
- [2] J. L. BERGGREN, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer Verlag, 1986.
- [3] John N. CROSSLEY and Alan S. HENRY, *Thus Spake al-Khwārizmī : A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. II.vi.5*, Historia Mathematica 17 (1990), p. 103-131.
- [4] Kūshyār ibn LABBĀN, *Principles of Hindu Reckoning*, A translation with introduction and notes by Martin LEVEY and Marwin PETRUCK of the *Kitāb fī usūl hisāb al-hind*, The University of Wisconsin Press, Madison and Milwaukee, 1965.
- [5] Leonardo FIBONACCI, *liber abbaci*, manuscrit Conversi Soppressi C.1. n° 2616 (Codice Magliabechiano, Badia Fiorentina), Biblioteca Nazionale, Firenze.



## Participons à l'OMB !

Cette année, l'Olympiade Mathématique Belge aura lieu pour la vingt-deuxième fois. Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis l'an dernier, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » est réservée aux élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » accueille les élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre-eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Voici le calendrier de la 22<sup>e</sup> Olympiade Mathématique Belge.

Mercredi 15 janvier 1997 : éliminatoire
Mercredi 26 février 1997 : demi-finale
Mercredi 16 avril 1997 : finale à Namur
Samedi 3 mai 1997 . proclamation à Gembloux

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

## C. Van Hooste Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire. Sache aussi que tu peux acquérir pour une somme relativement modique (240 BEF en Belgique), le tome 3 des OMB qui reprend toutes les questions posées de 1988 à 1993.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1 000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois deux points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il

vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de cinq questions pour être classé. Voici les questions promises. Essaie de les résoudre sans consulter les solutions proposées.

## Questions MINI

### 1. Que de diviseurs ! (1992)

Le nombre de diviseurs de 1 512, en comptant 1 et 1 512, est

- (A) 9    (B) 14    (C) 24    (D) 28    (E) 32

### 2. La centième décimale (1988)

Quelle est la centième décimale dans le quotient de 3 par 7 ?

- (A) 8    (B) 5    (C) 3    (D) 2    (E) 1

### 3. Au stade (1992)

Un stade peut recevoir jusqu'à 30 000 spectateurs. Les  $\frac{5}{6}$  des personnes désirant assister à une rencontre ont pu trouver place dans ce stade. Combien de personnes n'ont pas pu y trouver place ?

- (A) 5 000    (B) 6 000    (C) 25 000    (D) 36 000  
(E) un autre nombre

### 4. Les roues du camion (1988)

Les roues d'un camion, qui roule à 45 km/h, font trois tours par seconde. Quel est, en mètres, le rayon des roues ?

- (A)  $\frac{6\pi}{25}$     (B)  $\frac{25}{6\pi}$     (C)  $\frac{25}{24\pi}$     (D)  $\frac{25\pi}{12}$     (E)  $\frac{25}{12\pi}$

### 5. Le jus de fruit (1990)

Une bouteille contient, bien mélangés, 40% de jus de fruit et le reste d'eau. On prélève un tiers de la bouteille, puis on rétablit le niveau avec de l'eau. Quelle est la proportion de jus dans le nouveau mélange (à 0,1% près) ?

- (A) 6,6%    (B) 13,3%    (C) 20%  
(D) 26,6%    (E) cette proportion varie en fonction de la contenance de la bouteille

### 6. Des marges (1992)

Si des marges de 2 cm sont respectées aux quatre bords d'une feuille de papier de 20 cm

sur 30 cm, quelle proportion de la surface de la feuille reste disponible pour le texte ?

- (A)  $\frac{2}{3}$     (B)  $\frac{4}{5}$     (C)  $\frac{13}{15}$     (D)  $\frac{52}{75}$     (E) une autre valeur

### 7. Côtés et diagonales (1989)

Dans un plan, un certain polygone convexe possède  $n$  côtés et  $2n$  diagonales (joignant des sommets non consécutifs). Que vaut  $n$  ?

- (A) 6    (B) 7    (C) 8    (D) 10    (E) 14

### 8. Jean maigrit (1993)

Jean, qui pesait entre 65 et 70 kg, perd entre 3 et 4 kg. Son nouveau poids est entre

- (A) 61 et 66 kg    (B) 61 et 67 kg    (C) 62 et 66 kg  
(D) 62 et 67 kg    (E) 68 et 74 kg

### 9. Carré magique (1990)

Sans réponse préformulée.

Dans le carré magique ci-dessous, la somme des nombres figurant sur une ligne quelconque, une colonne quelconque ou une diagonale quelconque est toujours la même.

17	12	13
$y$		
	16	

Donner la valeur de  $y$ .

### 10. L'escargot (1990)

Un escargot avance de 10 cm, tourne à droite de  $60^\circ$ , avance de 20 cm, tourne à droite de  $120^\circ$ . Il répète ces quatre opérations dans le même ordre. La trace qu'il laisse sur le sol sera

- (A) un carré    (B) un rectangle    (C) un parallélogramme  
(D) un losange    (E) aucune de ces quatre figures

## Questions MIDI

### 11. Globules (1990)

Chaque globule rouge du sang a un diamètre de 0,007 mm. Le sang comprend 5 000 000 de globules rouges par  $\text{mm}^3$ . Le corps humain contient cinq litres de sang. On imagine une chaîne formée de tous les globules rouges juxtaposés d'un être humain. La circonférence

de la terre vaut 40 000 km. Cette chaîne ferait le tour de la terre

- (A) entre une et deux fois    (B) entre deux et trois fois    (C) entre trois et quatre fois  
 (D) entre quatre et cinq fois    (E) plus de cinq fois

### 12. Les nombres d'Alexandre (1993)

Sans réponse préformulée.

Alexandre pense à trois nombres. En les ajoutant deux à deux, il obtient 39, 45 et 52. Quel est le plus grand des trois nombres ?

### 13. Des frères et des sœurs (1990)

Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une sœur et 9 sont des enfants uniques. Combien d'élèves ont un frère et une sœur ?

- (A) 1    (B) 7    (C) 10    (D) 29    (E) un autre nombre

### 14. Cube coloré (1991)

Un cube d'arête 4 dm est réalisé en bois blanc, puis ses faces sont colorées en rouge. S'il est débité en 64 cubes d'arête 1 dm, combien de ces cubes ont exactement une face rouge ?

- (A) 6    (B) 12    (C) 24    (D) 32    (E) 64

### 15. Boîtes de sucre (1988)

En Belgique, on trouve des boîtes d'un kilo de sucre contenant 160 morceaux en forme de parallélépipèdes à bases carrées de côté  $a$  et de hauteur  $\frac{a}{2}$ . Au Canada, des boîtes de sucre d'un demi-kilo contiennent 160 morceaux cubiques d'arête  $b$ . Que vaut  $\left(\frac{a}{b}\right)^3$  ?

- (A) 4    (B)  $2\sqrt{2}$     (C) 1    (D)  $\frac{1}{2}$     (E)  $\frac{1}{4}$

### 16. Correcteur des Olympiades (1989)

Un correcteur des Olympiades corrige en moyenne deux questionnaires par minute. À onze heures du matin, il a corrigé la moitié des questionnaires et, à midi, il a corrigé les deux tiers. S'il ne s'arrête pas, combien de questionnaires lui restera-t-il à corriger à une heure de l'après-midi ?

- (A) 24    (B) 120    (C) 240    (D) 360    (E) 720

### 17. Le train et le cycliste (1989)

Un train de 120 m de long roule à la vitesse de 75 km/h. Il dépasse un cycliste roulant à

la vitesse de 21 km/h sur la piste qui longe la voie ferrée. Combien de secondes s'écoulent entre le moment où l'avant du train passe à côté du guidon du vélo et le moment où l'arrière du train passe à côté de ce guidon ?

- (A) 18    (B) 15    (C) 9,6    (D) 9    (E) 8

## Questions MAXI

### 18. Remarquable (1988)

Soient  $u$  et  $v$  des nombres réels tels que

$$u + v = 2 \text{ et } u^2 + v^2 = 3$$

Que vaut alors  $u^3 + v^3$  ?

- (A)  $\frac{7}{2}\sqrt{2}$     (B) 5    (C)  $3\sqrt{3}$     (D) 6    (E) 8

### 19. Bonbons fourrés (1988)

Un confiseur fabrique des bonbons fourrés de forme sphérique. L'intérieur est une boule de crème dont le rayon vaut les trois quarts du rayon total du bonbon. L'extérieur est en chocolat. Quel est le rapport du volume de la crème au volume du chocolat ?

- (A)  $\frac{27}{64}$     (B)  $\frac{27}{37}$     (C)  $\frac{3}{4}$     (D) 3    (E) aucune des réponses précédentes

### 20. L'avion (1988)

Par temps clair, un avion survole l'océan à une altitude de 12 000 mètres. Sachant que le rayon de la terre vaut environ 6 400 km, la distance de l'avion à l'horizon est comprise entre

- (A) 10 km et 50 km    (B) 50 km et 100 km  
 (C) 100 km et 200 km    (D) 200 km et 300 km  
 (E) 300 km et 400 km

### 21. Poignées de mains (1990)

À une réunion, chaque homme serre la main à chaque autre personne, sauf à sa femme, et aucune femme ne serre la main à une autre femme. Si 13 couples mariés sont présents, combien de poignées de mains sont données entre ces 26 personnes ?

- (A) 78    (B) 185    (C) 234    (D) 312    (E) 325

### 22. Paris équestres (1991)

Exactement trois chevaux,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , participent à une course où des arrivées ex æquo

sont impossibles. Si  $X$  a une 1 chance contre 3 de gagner et  $Y$  3 chances contre 2 de gagner, qu'en est-il des chances de  $Z$  de gagner ? (Par «  $C$  a  $p$  chances contre  $q$  de gagner », on entend que la probabilité pour que  $C$  gagne est égale à  $\frac{p}{p+q}$ .)

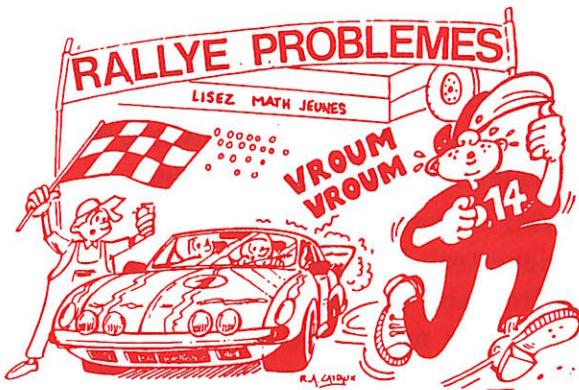
- (A) 20 contre 3   (B) 6 contre 5   (C) 5 contre 8  
 (D) 3 contre 17   (E) 3 contre 20

### Réponses correctes aux questions OMB

**MINI** (1,E) (2,B) (3,B) (4,E) (5,D) (6,D)  
 (7,B) (8,B) (9,10) (10,C)

**MIDI** (11,D) (12,29) (13,C) (14,C) (15,A)  
 (16,B) (17,A)

**MAXI** (18,B) (19,B) (20,E) (21,C) (22,D)



C. Festaerts

Le rallye-problèmes 1996 – 1997 comportera trois étapes publiées dans les numéros 76, 77 et 78 de *Math-Jeunes*. Il y a trois catégories de questions : **mini**, **midi** et **maxi**. Les problèmes **mini** sont plus spécialement destinés aux élèves de première et de deuxième, les problèmes **midi** aux élèves de troisième et de quatrième et les problèmes **maxi** aux élèves de cinquième et de sixième années. Cependant tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre et envoyer la solution de n'importe quel problème. Certains des problèmes proposés ne nécessitent que des connaissances mathématiques élémentaires. En outre, il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement (évidemment, ce n'est pas toujours facile !) ; ces problèmes sont signalés par un astérisque.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seront hélas pas pris en considération.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.



Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 17 décembre 1996 à C. FESTRAETS, 36 rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

**mini 1** Dans cette école européenne, on enseigne trois langues : l'anglais, l'allemand et le français. Chacun des 40 élèves d'une classe étudie au moins une de ces langues. Parmi eux, 34 élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand ; 25 élèves étudient au moins le français ou l'allemand ; aucun élève n'étudie à la fois le français et l'anglais ; 6 élèves n'étudient que l'allemand. En outre, le nombre d'élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand est égal au nombre d'élèves qui étudient à la fois le français et l'allemand augmenté de 3. Combien y a-t-il d'élèves qui étudient chaque langue ?

**mini 2** Le nombre  $A$  est constitué d'exactement 100 chiffres 6 et le nombre  $B$  d'exactement 100 chiffres 3 (dans le système décimal). Quels sont les chiffres du produit  $A \times B$  ?

**midi 1\***  $S$  est un ensemble fini de points du plan, les uns coloriés en rouge, les autres en bleu.  $S$  comprend au moins 5 points et 3 points de même couleur ne sont jamais alignés. Démontrer qu'il existe un triangle dont les sommets sont de la même couleur et dont au moins un côté ne contient aucun point de l'autre couleur.

**midi 2** Le diamètre  $[AB]$  d'un cercle a pour longueur un nombre de deux chiffres (en base 10). En intervertissant ces deux chiffres, on trouve la longueur de la corde  $[CD]$  qui est perpendiculaire à  $AB$ . La distance du point  $H$  d'intersection de  $AB$  et  $CD$  au centre  $O$  du cercle est un nombre rationnel. Quelle est la longueur du diamètre  $[AB]$  ?

**maxi 1\*** 25 chevaliers du roi Arthur sont assis autour de la table ronde. Trois d'entre eux viennent d'être choisis pour aller délivrer la princesse (tous les choix des trois chevaliers étaient équiprobables). Quelle est la probabilité qu'au moins deux de trois chevaliers choisis aient été assis côte à côte à table ?

**maxi 2** Soit  $n = 1996^{1996}$ . Quel est le plus grand commun diviseur de  $n^2 + 2$  et  $n^3 + 1$  ?

## Récréations mathématiques

C. Van Hooste,

A. R. Vauban (*Charleroi*)

Depuis toujours, les mathématiciens se sont amusés à fabriquer des « problèmes plaisants et délectables », soit pour échapper quelques instants à leurs théories ardues et rigoureuses, soit pour faire connaître et apprécier leur science, soit pour surprendre la sagacité de leurs contemporains. Les plus connus dans ce genre-là sont certainement les Français Claude-Gaspar BACHET, sieur de Méziriac<sup>(1)</sup> (1591 – 1638), Édouard LUCAS (1842 – 1891), le « Belge » Maurice KRAITCHIK (1882 – ???), les Anglais W.W. ROUSE BALL (1850 – 1925) ou H.S.M. COXETER (1907 – ). Bien qu'ils fussent eux-mêmes de géniaux créateurs de problèmes, ils se sont parfois contentés de nous transmettre des « récréations mathématiques » dont l'origine nous est inconnue et remonte probablement très loin dans le temps.

### 1. Drôles de traversées

Beaucoup d'entre vous connaissent sans doute le problème du batelier.

*Sur le bord d'une rivière se trouvent un loup, une chèvre et un chou. Et il n'y a qu'un bateau, si petit que seul le batelier et l'un d'eux peuvent s'y tenir. Il est question de les passer tous trois, de telle sorte que le loup ne mange pas la chèvre, ni la chèvre le chou, pendant l'absence du batelier.*

La solution est relativement simple : le batelier passe d'abord avec la chèvre, abandonnant sur la rive de départ le loup et le chou,

<sup>(1)</sup> Dans Math-Jeunes n° 72 (novembre 1995), tu peux trouver un extrait des « Problèmes Plaisants & Délectables qui se font par les nombres. »

puisque chacun sait que les loups détestent les choux. Il revient alors prendre le loup qu'il passe de l'autre côté. Il ramène ensuite la chèvre sur la première rive et traverse avec le chou. Laissant de nouveau le loup et le chou en tête-à-tête, il vient enfin rechercher la chèvre.

Un problème du même acabit est celui de la traversée d'un régiment dans un canot.

*Une compagnie d'infanterie doit traverser un fleuve; mais le pont est brisé et la rivière profonde. Le capitaine aperçoit, sur le bord, deux enfants qui jouent dans un petit canot; ce bateau est si petit qu'il ne peut porter plus d'un soldat. Comment doit s'y prendre le capitaine pour faire passer le fleuve aux soldats de sa compagnie?*

Ici aussi, la solution n'est pas trop compliquée. Les deux enfants traversent d'abord le fleuve ; l'un d'eux reste sur la seconde rive et l'autre ramène le bateau. Puis, l'un des soldats traverse et l'enfant resté sur l'autre rive ramène le bateau.

Par cette stratégie (mathématico-militaire), de deux allers et de deux retours, un soldat passe. Il suffit alors de la recommencer autant de fois qu'il y a de soldats dans la compagnie (en n'oubliant pas le capitaine).

Autre problème célèbre, celui de la traversée des trois ménages.

*Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière. Il s'y trouve un bateau sans batelier; mais le bateau est si petit qu'il ne peut contenir plus de deux personnes à la fois. Comment ces six personnes vont-elles s'entendre pour passer, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent?*

La solution demande une plus longue réflexion. Pour t'aider, précisons qu'onze traversées de la rivière sont nécessaires.

De tels problèmes ont été proposés par ALCUIN, TARTAGLIA et d'autres auteurs relativement anciens. Par exemple, ALCUIN DE YORK était un lettré mathématicien qui vécut approximativement entre les années 735 et 804. Il avait étudié en Italie et enseignait à York. Il fut appelé par Charlemagne en 782 pour l'aider dans le projet ambitieux de tenter d'éduquer son peuple. Il devint abbé de Saint-Martin de Tours. Quant à Nicolo TARTAGLIA né à Brescia au début de seizième siècle, disons tout simplement que son nom reste attaché à la résolution de l'équation du troisième degré. (2)

Voici la solution du problème des maris jaloux.

Appelons  $A, B, C$  les maris et  $a, b, c$  leurs épouses respectives. Dans le schéma suivant, les signes «  $>$  » et «  $<$  » indiquent le sens du passage et les personnages soulignés sont ceux qui effectuent la traversée.

	rive départ	sens	rive arrivée
1	A B C <u>a b c</u>	$>$	
2	A B C a	$<$	<u>b c</u>
3	A B C <u>a b</u>	$>$	c
4	A B C	$<$	a b <u>c</u>
5	<u>A B</u> C c	$>$	a b
6	C c	$<$	A <u>B a b</u>
7	<u>B C</u> b c	$>$	A a
8	b c	$<$	A B C <u>a</u>
9	<u>a b</u> c	$>$	A B C
10	c	$<$	A B C a <u>b</u>
11	<u>b c</u>	$>$	A B C a
			A B C a b c

Avant de te quitter, ami lecteur, nous te proposons le problème général des traversées.

(2) cf. l'article de S. Trompler, « L'Histoire des Nombres Complexes », paru dans Math-Jeunes n° 53 (décembre 1991), p. 2-5.

*Des maris en nombre quelconque n se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière et aperçoivent un bateau sans batelier; ce bateau ne peut porter plus de  $(n-1)$  personnes. Comment ces  $2n$  personnes vont-elles s'entendre pour passer, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un autre homme ou de plusieurs autres, si son mari n'est pas présent?*

## Bibliographie

- [1] Claude-Gaspar BACHET, SIEUR DE MÉZIRIAC, *Problèmes Plaisants & Délectables qui se font par les nombres*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, 9 rue de Médicis, Paris, 1993.
- [2] W.W. Rouse BALL & H.S.M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications, New York, 1987.
- [3] Maurice KRAITCHIK, *Mathematical Recreations*, Dover Publications, New York, 1953.
- [4] Édouard LUCAS, *Récréations Mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, 9 rue de Médicis, Paris, 1992.



# La preuve par neuf en « mathémagie »

Daniel Justens & Claude Maerschalk,  
Univ. Liège & U.L.B. +  
Cercle Belge d'Illusionnisme

## 1. Introduction

Pour tenter (sans y croire vraiment) de remettre les pendules à l'heure dans un univers où la crédulité (et par voie de conséquence le charlatanisme) croît proportionnellement à la densité des découvertes scientifiques et où le chiffre d'affaire du paranormal fait succomber d'envie les industriels les plus gâtés, il nous a paru intéressant de donner quelques exemples simples de prédictions, de transmission de pensée, de calculs prodiges qui, tous, se ramènent à des propriétés arithmétiques élémentaires, mais qui, présentés avec art, peuvent impressionner les plus rationnels.

La plupart des propriétés que nous allons utiliser sont largement diffusées et connues de tous les mathématiciens. Mais a-t-on déjà réfléchi au fait que l'art de la mise en condition psychologique de certains illusionnistes pouvait distraire l'observateur le plus attentif jusqu'à l'aveugler totalement, et que l'utilisation de « trucs » élémentaires, habilement présentés, pouvait surprendre le plus sceptique ?

En toute généralité, l'illusionniste ne fait jamais ce qu'il dit et ne dit jamais ce qu'il fait : **il fait ce qu'il ne dit pas.** C'est cette règle d'or que nous allons transgresser — dans des limites raisonnables — en dévoilant les plus répandus des tours. Mais c'est là précisément que réside l'intérêt de la présentation : si des propriétés aussi simples peuvent conduire à des résultats aussi impressionnantes (toutes

proportions gardées), qu'en est-il de ce qui est moins trivial ?

Dans un autre ordre de pensée, en observant ce qui est possible au niveau trucage dans l'illusion et le « paranormal », quel crédit peut-on accorder aux faux mages et à leurs résultats discutables ? Le lecteur que ce qui suit ne convainc pas (nous nous limitons volontairement aux résultats à support mathématique élémentaire) est invité à consulter l'excellent ouvrage de Henri BROCH mentionné en bibliographie.

## 2. Les propriétés de la preuve par neuf

Le caractère de divisibilité par neuf et le calcul du reste de cette division constituent un support illimité de petites prédictions ou de transmissions de pensée.

Considérons un naturel  $n$  quelconque, multiplions-le par neuf; ôtons le naturel  $k$  ( $0 \leq k \leq 9$ ). Nous obtenons toujours un nombre dont le reste de la division par neuf est  $(9 - k)$ .

Cette propriété élémentaire est utilisée dans la routine suivante :

- Choisir un naturel quelconque.
- Le multiplier par neuf.
- Ôter 5.
- Additionner les chiffres du nombre obtenu jusqu'à l'obtention d'un naturel à un seul chiffre (ici on obtient toujours 4).
- Établir l'équivalence entre la suite des naturels et l'ordre alphabétique usuel :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow a \\ 2 &\rightarrow b \\ 3 &\rightarrow c \\ &\dots \end{aligned}$$

(ici on arrive toujours à la lettre  $d$ ).

- Choisir un pays de la CEE dont la première lettre correspond à celle trouvée (on ne peut choisir que le Danemark).
- Choisir un fruit dont la première lettre correspond à la dernière du pays que l'on vient de choisir (ici, le magicien prend un risque : si 99 % des personnes interrogées vont songer au kiwi — seul fruit commençant par  $k$  au « Micro-Robert » — on peut toujours tomber sur un connaisseur du kumquat ou du kaki — tous deux mentionnés au « Petit Larousse »).
- Demander au spectateur d'écrire et de se concentrer sur les deux mots qu'il vient de trouver.

Il est clair que la présentation du tour en fait toute la valeur et que l'art de l'illusionniste s'apparente à celui du comédien. Une similitude déjà observée par Sacha Guitry qui n'a pas hésité à intituler une de ses comédies *L'illusionniste*, créée au Théâtre des Bouffes-Parisiens en 1917 avec ... Sacha Guitry dans le rôle titre.

Une routine plus courte (mais tout aussi simple) consiste à reproduire le « chiffre de chance » de la personne interrogée. Soit  $k$  ce chiffre ( $k$  naturel tel que  $0 \leq k \leq 9$ ). En multipliant 12 345 679 par  $9k$ , on obtient le nombre  $kkk\ kkk\ kkk$ . La justification saute aux yeux : le plus petit nombre constitué uniquement de 1 et divisible par neuf est évidemment 111 111 111. Le quotient de cette division est le **nombre magique** 12 345 679 (le magicien doit insister sur la suite logique qui constitue ce nombre pour accentuer l'effet). On peut jouer le même jeu en multipliant 37 ou 37 037 par  $3k$ .

À suivre ...

# La page du mathémartiste

Katia Martroye

## À propos de VASARELY ...

Peintre français d'origine hongroise, Victor VASARELY est né à Pecs (Hongrie) en 1908. Après avoir suivi l'enseignement du *Bauhaus*<sup>(1)</sup> hongrois, il s'installe à Paris en 1931. Ingénieur de formation, il s'intéresse aux nouvelles technologies, aux mouvements dans l'espace.

Il est un précurseur et une figure importante de l'« art optique ». <sup>(2)</sup> Il travaille dans ce domaine durant plus de trente ans (de 1950 à 1980). Ardent défenseur de l'art pour tous, il prône l'intégration d'œuvres d'art dans la ville et dans l'architecture.

Dès son installation à Paris, l'artiste recherche un langage pictural <sup>(3)</sup> sans support figuratif. <sup>(4)</sup> Pour définir son nouveau langage, VASARELY met au point un « alphabet d'unités plastiques ». Son alphabet comporte trente formes et trente couleurs. En les faisant simplement permute, on obtient des milliers de possibilités. Il

n'a jamais fait de recherche du mouvement réel. La notion de mouvement chez lui est purement virtuelle, elle est toujours liée à « l'illusion de l'espace ».

Les recherches du peintre sur la lumière, sur l'illusion du mouvement, sur la fonction de la peinture dans la vie sociale et sur l'intégration de l'art dans la ville aboutissent à une forme d'art défini par la répétition d'une cellule (carré contenant une figure de la géométrie plane) soumise à des transformations très méticuleusement étudiées et jouant par rapport aux variations de couleurs.

## Pour en savoir et en voir plus ...

Musée d'Art Moderne de Bruxelles  
Musée d'Art Moderne de Liège

## Mais aussi, lors de vos vacances ...

Le Musée didactique de Gordes  
Le Centre architectonique, Fondation Vasarely à Aix-en-Provence

## Pour s'initier ...

<sup>(1)</sup> École d'architecture et d'art.

<sup>(2)</sup> L'art optique appartient à l'art cinétique. L'illusion du mouvement est créée par le déplacement du spectateur devant l'œuvre.

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire un langage qui appartient au domaine de la peinture.

<sup>(4)</sup> Figuratif signifie : qui représente la forme de l'objet, qui montre ou qui imite quelque chose de réel.



## Les mots cachés (par CéVé)

Retrouvez les mots donnés, dans chacune des grilles, en serpentant horizontalement ou verticalement, en tous sens mais pas en oblique. Chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le mot caché. Quel est-il ?

Mots à composer : ANGLE, ARC, COSINUS, DEGRÉ, GRADE, RADIAN, SINUS, SÉCANTE, TRIGONOMÉTRIE.

S	O	C	N	A	I	D	A
I	U	N	O	N	O	M	R
N	S	I	G	I	R	E	T
U	S	S	E	N	T	E	R
G	E	D	G	T	E	L	I
R	T	A	N	A	N	G	E
E	C	G	D	E	C	A	N
A	R	R	A	S	E	E	T

\* \*  
\*

Mots à composer : BASCULEUR, CALCULATRICE, COMBINAISON, COMPTAGES, ENREGISTREMENT, ÉTAT, IMPULSE, INFORMATIQUE, SIGNAL, SYSTÈME.

E	L	U	C	S	C	B	I	N	A
U	R	S	I	A	O	M	♣	♠	I
A	T	L	G	B	S	E	N	E	S
T	C	A	N	O	N	E	R	N	O
E	A	R	E	P	I	G	Y	S	I
C	L	C	U	L	S	T	S	F	N
O	M	R	T	A	T	E	M	O	R
T	P	I	U	P	R	E	E	T	M
A	G	C	L	M	I	M	E	N	A
S	E	E	S	E	E	U	Q	I	T

## Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang ( $A=1, B=2, C=3, \dots$ ). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

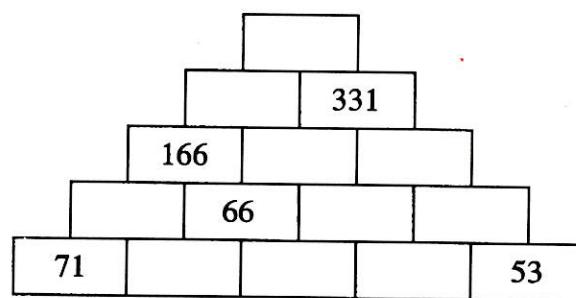
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

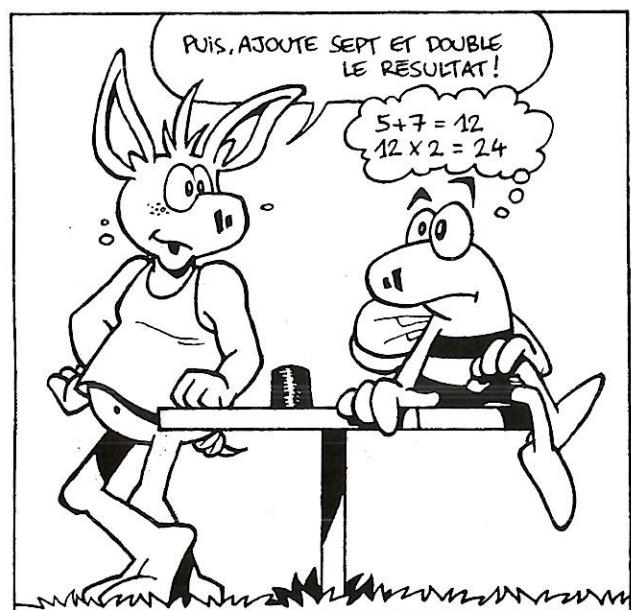
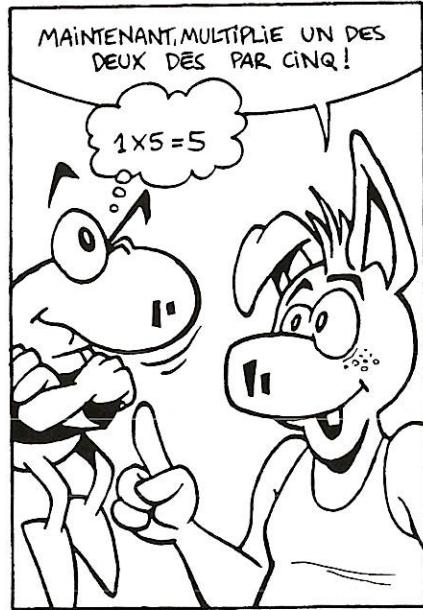
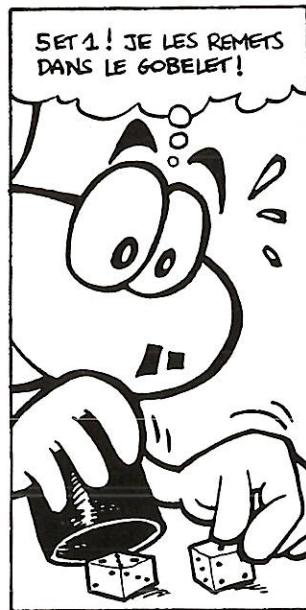
## Horizontalement et verticalement

1. 126 000
2. 190 000
3. 51 300
4. 226 800
5. 190 000

## Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

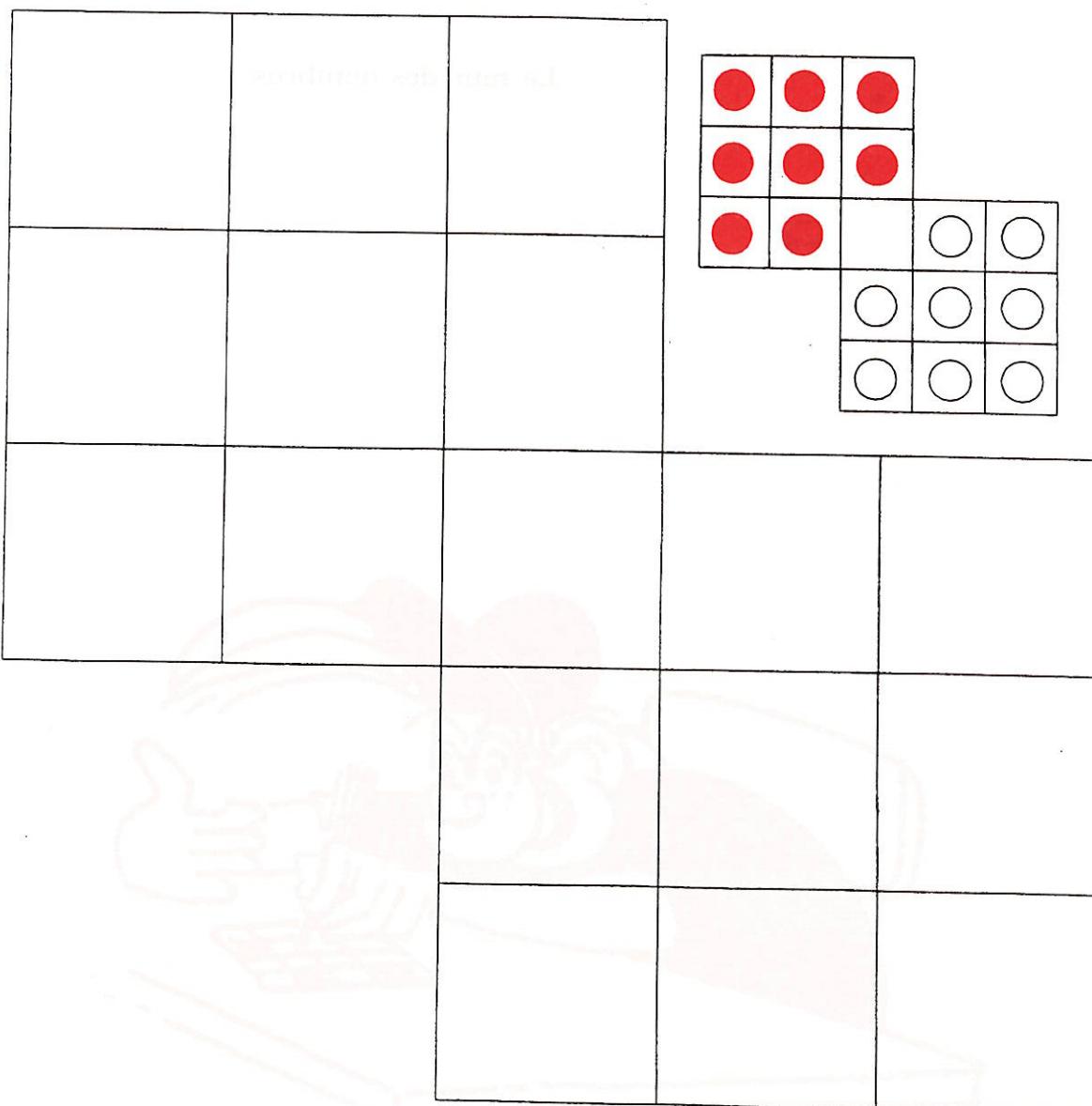




## Fore and Aft Puzzle

Photocopie le bas de cette page et colle-le sur un papier bristol. Munis-toi de huit pions blancs et de huit pions noirs par exemple (tu peux bien sûr choisir deux autres couleurs). Dispose ces seize pions comme indiqué ci-dessous. Le but du jeu est d'échanger les pions blancs et les pions noirs à l'aide du nombre minimum de coups. On peut déplacer un pion d'une case à une autre adjacente vide ou le faire sauter par dessus un pion voisin (blanc ou noir) à condition qu'il aboutisse sur une case vide. Seuls les mouvements en ligne ou en colonne (comme une tour aux échecs) sont permis, ceux en diagonale sont interdits.

La solution la plus courte connue est en 46 coups; elle est due à H.E.DUDENEY. Le puzzle est présenté avec d'autres récréations mathématiques dans le livre *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*, Martin GARDNER, Éd. Dunod, Bordas, Paris, 1970.



Marie MATELART, élève de sixième scientifique à l'Athénée Royal de Hannut nous propose une autre solution à la question 24 de l'éliminatoire MINI parue dans le numéro spécial de *Math-Jeunes*.

Rappelons l'énoncé de la question :

**Proportions** (sans réponse préformulée)

Trois nombres sont proportionnels à 150, 72 et 48. Leur somme vaut 3510. Quel est le plus petit des trois ?

Sa solution repose sur une propriété des proportions que tu démontreras facilement :

Si quatre nombres  $a, b, c, d$  sont proportionnels,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

alors on a aussi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{x}{150} &= \frac{y}{72} = \frac{z}{48} = \\ \frac{x+y+z}{270} &= \frac{3510}{270} = 13. \end{aligned}$$

Le plus petit nombre recherché est manifestement  $z$ , donc  $z = 13 \times 48 = 624$ .

## Solutions des jeux

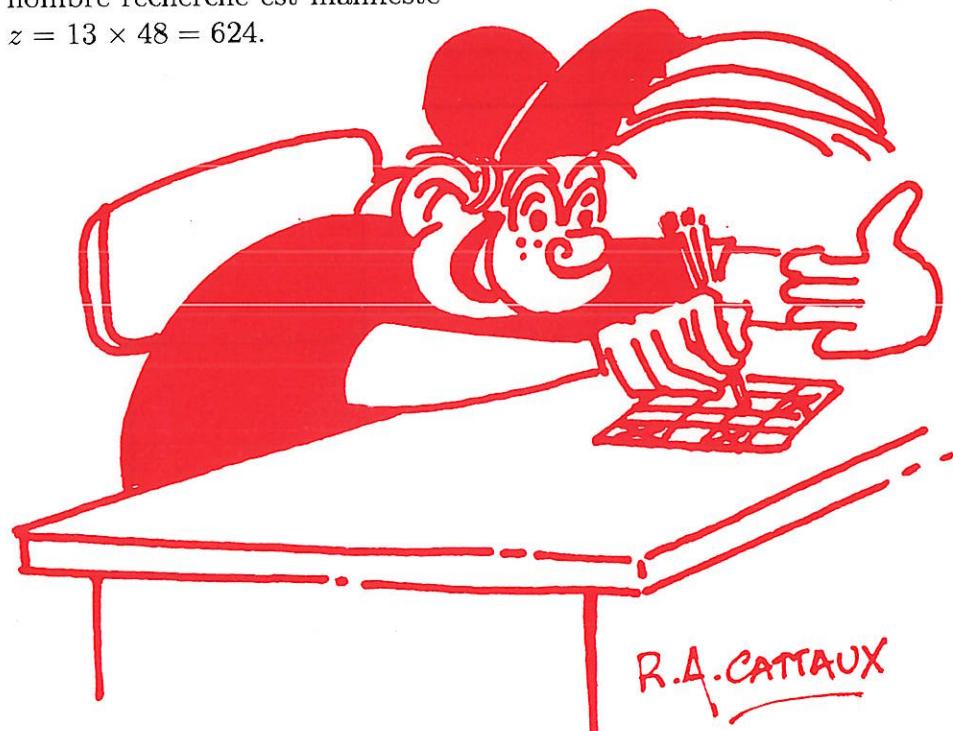
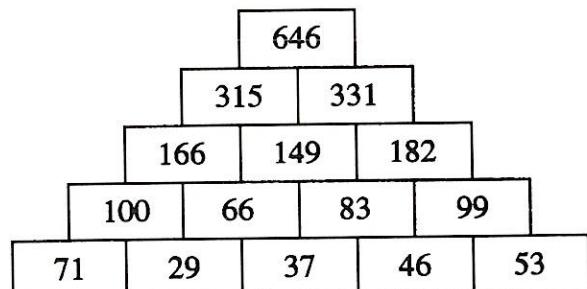
### Mots cachés

Première grille : le mot caché était TANGENTE.  
Deuxième grille : le mot caché était RÉPONSE.

### Produits croisés

A	T	O	U	T
T	E	S	T	E
O	S	A	I	T
U	T	I	L	E
T	E	T	E	S

### Le mur des nombres

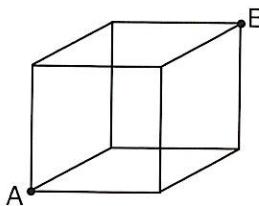


# 11 ème CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET LOGIQUES

## 1/4 DE FINALES INDIVIDUELS 1997

### DÉBUT CATÉGORIE CM

#### 1 - LES DEUX FOURMIS



Deux fourmis se trouvent sur un cube en fil de fer. La fourmi B est immobile. La fourmi A désire rejoindre la fourmi B. Si l'on prend la longueur d'une arête pour unité de longueur, le chemin le plus court a pour longueur 3.

**Combien de chemins différents de longueur 3 la fourmi A peut-elle emprunter pour rejoindre la fourmi B ?**

#### 2 - IL Y A PLUS D'UN ANE QUI S'APPELLE MARTIN

Les trois ânes Martin1, Martin2 et Martin3 vont à la foire, et ils attendent d'être chargés. Il y a neuf colis pesant respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kg. Chacun des trois ânes reçoit le même nombre de colis et la même charge que les autres. De plus, Martin1 doit porter le paquet de 1 kg, Martin2 doit porter le paquet de 2 kg, et Martin3 doit porter le paquet de 3 kg.

**Comment peut-on répartir le chargement entre les trois ânes ?**

### DÉBUT CATÉGORIE C1

#### 3 - LES TROIS AMIS

Trois amis habitent trois maisons voisines de la même rue, aux numéros 34, 36, 38. Leurs couleurs de cheveux sont différentes et leurs loisirs préférés diffèrent également.

Le brun fait de la plongée sous-marine.

La maison dont le numéro se divise par 4 est habitée par le blond. Le footballeur est content d'habiter une maison dont le numéro a pour somme de ses chiffres le nombre de joueurs d'une équipe professionnelle de son sport favori.

**Quel est le numéro de la maison du musicien ?**

note : une équipe professionnelle de football compte onze joueurs.

#### 4 - LES FOURMIS DÉMÉNAGENT

Deux familles de cinq fourmis chacune, les unes rouges, les autres noires, ont décidé d'échanger leurs résidences d'été. Chaque fourmi emporte son bagage sur son dos et met trois minutes trente secondes pour rejoindre le domicile visé.

Le voyage se déroule ainsi : le départ des premières fourmis se situe au même moment pour les deux familles, et ensuite chaque fourmi part seule une minute après la précédente. Comme il n'y a qu'une route entre les deux nids, il y a des croisements entre "rouges" et "noires" et, à cette occasion, chaque fourmi souhaite "bonnes vacances" à l'autre. Mais, curieusement, chez les fourmis, il n'y a pas de formules de politesse à l'intérieur des maisons.

**Combien de souhaits seront prononcés pendant le déménagement ?**

### DÉBUT CATÉGORIES C2, L1, GP, L2, HC

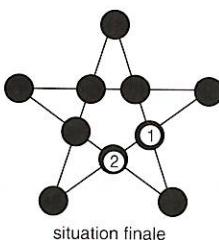
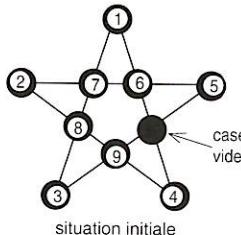
#### 5 - POINTS DE VUE SYMÉTRIQUES

Les cinq cubes alignés sont tous identiques.

De ce côté, vous pouvez lire 06129.



**Que liriez-vous si vous étiez situé de l'autre côté du mur de cubes ?**



#### 6 - LE JEU DE LAM

Je n'y arrive pas, se lamentait la Martine.

"C'est le grand Lama en personne qui m'a appris ce jeu au Tibet : les pions sautent en suivant les lignes tracées par dessus un autre pion jusqu'à une case vide. Le pion sauté est alors éliminé. A la fin, il ne doit plus rester que les pions 1 et 2 disposés comme sur la figure".

Bernard, fine lame en casse-tête, cessa de dessiner un lamentin, prit en main le pion n° 3, et tenta sa chance ...

Sept coups plus tard, il vint à bout du problème du grand Lama !

**Fais aussi bien que Bernard, en débutant comme lui.** Tu noteras ta solution en indiquant à chaque coup le numéro du pion sauteur et celui du pion éliminé (le premier coup, par exemple, sera noté 3-9).

### FIN CATÉGORIE CM

#### 7 - LA MONTRE DE JULES

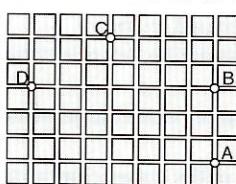
La belle Cléo a reçu de son ami Jules une magnifique montre à affichage digital en chiffres romains. Cette montre affiche les heures et les minutes, séparées par un tiret. A 6 heures 29, par exemple, elle affiche VI-XXIX, et à 6 h 04, VI-IV.

On dit que ce dernier affichage est palindrome, car on le lit de la même façon de droite à gauche que de gauche à droite.

**De 0 h 01 à 23 h 59, combien de fois aura-t-on un affichage palindrome ?**

notes : on tiendra compte de la position du tiret ; on rappelle que le chiffre zéro n'existe pas dans l'écriture en chiffres romains ; pour les nombres de 1 à 23, on n'utilise que l'écriture suivante : I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII.

#### 8 - RENDEZ-VOUS À CARRÉVILLE

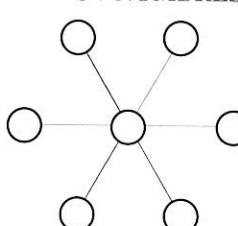


Carréville est entièrement constituée de pâtés de maisons carrés de 50 mètres de côté, entourés de rues formant un quadrillage régulier. Juliette et Roméo ne s'y déplacent qu'en vélo. Aujourd'hui, Juliette a donné rendez-vous à Roméo en un carrefour situé à égale distance (en vélo, et non à vol d'oiseau) du Carrefour des Bateliers (B) et de celui des Camionneurs (C). Mais ce carrefour est situé également à égale distance (toujours en vélo) du Carrefour des Aviateurs (A) et de celui des Déménageurs (D). Roméo hésite entre deux carrefours.

**Quels sont ces deux carrefours ?**

Vous les indiquerez par une croix sur le bulletin-réponse.

#### 9 - LES 7 NOMBRES

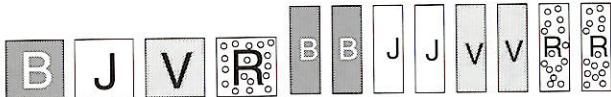


Vous complétez les 7 disques du dessin ci-contre à l'aide de 7 entiers plus grands que 0 et tous différents, de telle sorte que la somme des nombres portés par deux disques directement reliés par un segment ne soit jamais divisible ni par 2, ni par 3.

**Quelle est la plus petite valeur possible de la somme des 7 nombres ?**

## FIN CATÉGORIE C1

### 10 - PUZZLE COLORÉ



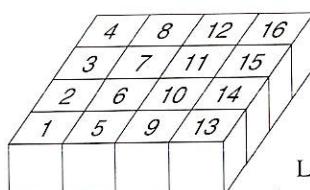
Avec ces pièces (quatre carrés de dimensions 2 sur 2 et huit rectangles de dimensions 3 sur 1) coloriées comme sur le dessin (B pour bleu, J pour Jaune, V pour vert et R pour rouge), on doit remplir une boîte rectangulaire de dimensions 5 sur 8.

Règle de rangement : deux pièces de même couleur ne doivent en aucun cas se toucher, même par un sommet. Il en est de même pour deux carrés.

Le puzzle a déjà été commencé (voir croquis) en disposant un carré bleu, un rectangle rouge et un rectangle jaune.

**Terminez le rangement de toutes les pièces dans la boîte.**

### 11 - TRANSCOLORIAGES



On dispose de 64 petits cubes de même taille numérotés de 1 à 64. On les range de la manière suivante pour constituer un grand cube.

La seconde tranche est constituée de la même façon en commençant par le cube 17 placé au-dessus du 1, le cube 18 placé au-dessus du 2, etc ...

Ordonnée de la même façon, la troisième tranche débute par le numéro 33, la quatrième par le numéro 49, etc ...

Une fois le grand cube constitué, on le peint extérieurement en vert, sur ses six faces, puis on le démonte dès qu'il est sec.

On utilise alors les petits cubes pour reconstituer un grand cube de la manière suivante :

le cube numéro : 1 2 3 4 ..... 59 60 61 62 63 64  
se translate à la place qui l'occupait

le cube numéro : 6 7 8 9 ..... 64 1 2 3 4 5  
dans le 1er grand cube.

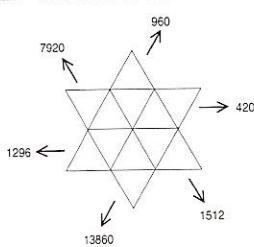
Chaque déplacement se faisant par une translation, les orientations de cubes sont conservées.

Ce deuxième grand cube étant constitué, on le peint extérieurement en rouge, sur ses six faces.

Après ce deuxième coloriage, combien de petits cubes comportent exactement deux faces colorées, l'une en vert, et l'autre en rouge? Donnez deux de ces cubes, par leur numéro.

## FIN CATÉGORIE C2

### 12 - DOUZE NOMBRES POUR UNE ETOILE



Les nombres entiers de 1 à 12 ont été placés dans chacune des cases de l'étoile ci-contre.

Les nombres écrits à l'extérieur représentent les produits des cinq nombres placés à l'intérieur de l'étoile et situés dans la direction de la flèche.

**Retrouvez la place des nombres de 1 à 12.**

### 13 - SI LA DISTANCE M'ÉTAIT COMPTÉE

Les villes F, R, A, N, C, I et S sont disposées comme sur le dessin ci-contre. On sait, de plus, que FR = RA = RI = RC = 24 km, et NF = NI = NR = 40 km.

**Quelle distance sépare les deux villes S et I ?**

(les proportions du dessin ne sont pas exactes).

### 14 - EFFETS DE LUMIERE

Christophe a fabriqué un commutateur à trois touches pour commander les effets lumineux lors d'une soirée dansante. Celui-ci commande 100 ampoules numérotées par les entiers positifs de 1 à 100, toutes en état de fonctionner.

En appuyant sur la première touche du commutateur, on change l'état de toutes les ampoules : celles qui étaient allumées s'éteignent, et celles qui étaient éteintes s'allument.

En appuyant sur le second bouton, on change l'état des ampoules portant un numéro impair.

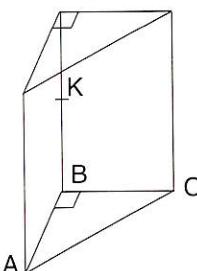
En appuyant sur le troisième bouton, on change l'état de toutes les ampoules portant un numéro qui est un multiple de 3 augmenté de 1.

En début de soirée, toutes les ampoules étaient allumées. Au cours de la soirée, Christophe a appuyé 1000 fois, de façon aléatoire, sur les touches de son commutateur. Lorsqu'il a appuyé pour la dernière fois sur une des touches, il a remarqué que les ampoules portant les numéros 95 et 96 étaient éteintes.

**Combien d'ampoules étaient alors allumées ?**

## FIN CATÉGORIES L1, GP

### 15 - LE RAYON DANS LA BOITE



Les parois intérieures d'une boîte en forme de prisme droit (voir figure) ont été habillées de miroirs. La base ABC est un triangle isocèle rectangle en B, tel que  $AB = 1$  m. D'un point K situé sur une arête verticale, on émet un rayon lumineux orthogonal à cette arête, qui se reflète plusieurs fois sur les parois latérales du prisme avant de toucher à nouveau une arête.

**Sachant que le rayon lumineux a parcouru 13 mètres, combien de fois s'est-il réfléchi ?**

### 16 - CUBE PLURIDIVISIBLE

Le cube d'un nombre entier positif a cinq fois plus de diviseurs que ce nombre entier positif.

**Combien de diviseurs possède le carré du nombre de départ ?**

## FIN CATÉGORIES L2, HC

# BULLETIN REPONSE

à retourner au plus tard le 31/1/97  
à FFJM – BP 157, 7700 Mouscron  
**MATH-JEUNES**

Nom : .....	Prénom : .....
Adresse complète : .....	Tel : .....
<b>CATEGORIE</b> (impératif) CM <input type="checkbox"/> C1 <input type="checkbox"/> C2 <input type="checkbox"/> L1 <input type="checkbox"/> GP <input type="checkbox"/> L2 <input type="checkbox"/> HC <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Adhérer FFJM en 1996 ; n° FFJM .....	
<input type="checkbox"/> J'adhère pour 1997 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C2), 450 F (L1), 500 F (L2), 650 F (GP et HC) au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP 157 – 7700 MOUSCRON	

# BULLETIN REPONSE

(toutes catégories sauf CM - identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !)

Votre ou vos solutions

N° du Pb	Report du total	Nombre de solutions	Catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC	Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
7	<b>1 solution</b>	nombre d'affichages palindromes : <input type="text"/>			
8	<b>2 endroits</b>		indiquez les deux endroits ci-contre par des croix dessinées en rouge		
9	<b>1 solution</b>	plus petite somme : <input type="text"/>			
		catégories : C2 L1 GP L2 HC			
		<b>2 solutions</b>			
		<b>10 demandées</b>			
		<b>11 ... solution(s)</b>	1) cube n° <input type="text"/> 2) cube n° <input type="text"/>		
			catégories : L1 GP L2 HC		
		<b>12 ... solution(s)</b>			
		<b>13 ... solution(s)</b>			
		<b>14 ... solution(s)</b>			
		<b>15 ... solution(s)</b>	1) <input type="text"/> km 2) <input type="text"/> km		
		<b>16 ... solution(s)</b>	1) <input type="text"/> 2) <input type="text"/>		
			catégories : L2 HC		
			<b>TOTAL</b>		

