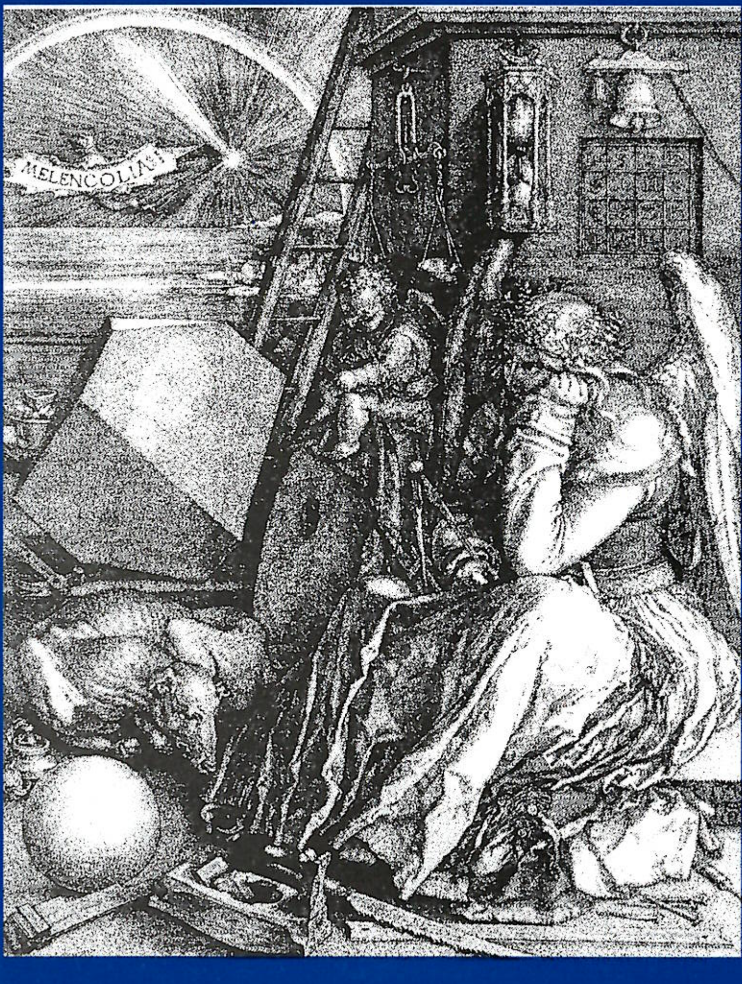
MATH-JEUNES



18e année
Décembre 1996 – n° 77
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 77 Dix-huitième année 1996

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 77, 26–28, 1996

L'art de deviner des nombres

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Dans *Math-Jeunes* n° 76, Francis POURBAIX t'a offert une BD dans laquelle une petite abeille lance deux dés obtenant ainsi deux marques de points qu'un autre personnage va deviner après lui avoir fait exécuter un certain nombre d'opérations. Si tu n'as pas trouvé l'« astuce » — car il y en a une, évidemment — lis bien ce qui suit.

Appelons x et y les marques de chacun des dés. On a bien sûr $1 \leqslant x, y \leqslant 6$. Prenons l'un des deux résultats, soit x — tu peux faire le même raisonnement avec y et constater que cela fonctionne également. Multiplions-le par 5, ce qui donne $5x$. Il faut alors ajouter 7 et doubler le résultat, ce qui fait $2 \times (5x + 7) = 10x + 14$; puis on doit encore additionner la marque de l'autre dé, d'où $10x + 14 + y$. Le devin n'a plus qu'à soustraire 14 du résultat pour obtenir $10x + y = x \times 10^1 + y \times 10^0$. Ainsi, le nombre qu'il obtient est un nombre de deux chiffres dans lequel x est le chiffre des dizaines et y celui des unités. Simple, non ! Ce problème est un cas particulier d'un problème plus général proposé par Claude-Gaspar BACHET, SIEUR DE MÉZIRIAC (1581 –1638) dans son ouvrage intitulé *Problèmes Plaisants & Délectables qui se font par les nombres.* Ce livre a été récemment réédité chez Blanchard et tu trouveras les références dans le n° 76 de ta revue préférée.

La BD que Francis te propose dans ce numéro s'inspire d'une récréation mathématique présentée par LÉONARD DE PISE, encore appelé FIBONACCI, dans le chapitre 12 de son *liber abbaci* dont la première édition date de 1202 ([1]). Voici le texte latin qui ne devrait pas poser de gros problèmes de traduction. Au cas où ..., parles-en à ton prof. de latin !

([1]) C'est dans ce même chapitre 12, un peu avant, qu'on trouve le problème des lapins auquel *Math-Jeunes* a souvent fait allusion.

De eodem cum numerus excogitatus non sit ultra 105

Diuidat excogitatum numerum per 3 et per 5 et per 7 et semper interroga quot ex unaquaque diuisione superfuerit. Tu uero ex unaquaque unitate que ex diuisione ternarij superfuerit retine 70 et pro unaquaque unitate que ex diuisione quinarij superfuerit retine 21 et pro unaquaque unitate que ex diuisione septenarij superfuerit retine 15. Et quotiens numerus super excreuerit tibi ultra 105 eicias inde 105 et quod tibi remanserit erit excogitatus numerus.

Leonardo Fibonacci, liber abbaci.

Cette façon de procéder repose sur un résultat d'arithmétique modulaire connu sous le nom de « théorème du reste chinois ». Nous allons tenter de comprendre ce qui se cache sous cette appellation. L'arithmétique modulaire appartient à la Théorie des Nombres — La Reine des Mathématiques, selon le grand mathématicien K.F. GAUSS (1777 – 1855). C'est en fait de l'arithmétique à un « très beau » niveau.

L'arithmétique modulaire est l'arithmétique des **congruences** et des **résidus**, une théorie que nous allons tenter d'aborder même si elle n'est pas vraiment aussi simple qu'il pourrait y paraître à première vue.

Si n est un naturel supérieur à 1 et si a et b sont des entiers, on dit que a est *congru* à b *modulo* n, ce qu'on note $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si n divise $(a - b)$, ce qui revient encore à dire qu'il existe un entier k tel que $a - b = k \cdot n$.

Par exemple, 17 est congru à 7 modulo 5 puisque 5 divise $(17 - 7)$.

Si $a \equiv b \pmod{n}$, on dit que b est un *résidu* de a *modulo* n ou que a est un *résidu* de b *modulo* n.

On appelle **ensemble complet de résidus modulo** n tout ensemble de n entiers $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ tel que, quel que soit l'entier a, il existe exactement un r_i $(i = 1, \ldots, n)$ avec $a \equiv r_i \pmod n$. Pour tout module n, $\{0, 1, \ldots, (n-1)\}$ est un ensemble complet de résidus modulo n. C'est en fait l'ensemble de tous les restes possibles de la division d'un quelconque entier par n. Le résidu r de a modulo n dans l'intervalle $[0, (n-1)]$ se note $a \bmod n$: c'est le reste de la division de a par n. Par exemple, $7 \bmod 3 = 1$, $33 \bmod 9 = 6$, $21 \bmod 7 = 0$ ...

Venons-en au « théorème du reste chinois » ; la première source connue dans laquelle on le rencontre est l'*Arithmétique* du savant chinois (d'où l'appellation du théorème) SUN TSE ou encore SUN TZÏ qui date probablement du début de notre ère. En voici l'énoncé.

> Soient $1 < d_1, \ldots, d_t$ t naturels deux à deux premiers entre eux.
> Soit $n = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_t$.
> Soient t naturels x_i tels que
> $x_i \in [0, (d_i - 1)]$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.
> Alors le système de congruences linéaires
>
> $$\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod{d_1} \\ x \equiv x_2 \pmod{d_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv x_t \pmod{d_t} \end{cases}$$
>
> admet une solution unique dans l'intervalle $[0, (n-1)]$.

Remarques

1. Deux naturels a et b sont **premiers entre eux** si leur plus grand commun diviseur vaut 1, comme 8 et 9, par exemple.
2. Une congruence est **linéaire** si elle est du premier degré.

La démonstration de ce théorème est assez fastidieuse et fait appel à des notions qui ne sont guère familières à un élève actuel de l'enseignement secondaire. Tu peux cependant la trouver dans n'importe quel traité de théorie des nombres ou t'adresser à la Rédaction si son absence dans ce texte t'empêche de dormir. Je me contenterai pour l'instant de te dire que l'unique solution de ce système de congruences est :

$$x = \left(x_1 y_1 \frac{n}{d_1} + \cdots + x_t y_t \frac{n}{d_t}\right) \bmod n$$

où $y_1, \ldots, y_t$ sont solutions du système

$$\begin{cases} y_1 \cdot \frac{n}{d_1} \equiv 1 \pmod{d_1} \\ y_2 \cdot \frac{n}{d_2} \equiv 1 \pmod{d_2} \\ \quad\vdots \\ y_t \cdot \frac{n}{d_t} \equiv 1 \pmod{d_t} \end{cases}$$

Nous allons appliquer cela au problème proposé par FIBONACCI. Supposons que le nombre x à trouver soit 59, comme dans la BD. Remarque tout d'abord que

$$3 \times 5 \times 7 = 105$$

et que 3, 5 et 7 sont premiers entre eux.
Le système de congruences linéaires se présente ainsi :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

D'après le théorème du reste chinois, il possède une solution unique. Cherchons d'abord les quantités y_1, y_2 et y_3.

$$\begin{cases} y_1 \cdot \frac{105}{3} = 35y_1 \equiv 1 \pmod 3 \\ y_2 \cdot \frac{105}{5} = 21y_2 \equiv 1 \pmod 5 \\ y_3 \cdot \frac{105}{7} = 15y_3 \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

On voit facilement que $y_1 = 2$ car le reste de la division de $35 \times 2 = 70$ par 3 vaut effectivement 1. Il vient aussi $y_2 = 1$ puisque le reste de la division de 21 par 5 est 1. Enfin, on a $y_3 = 1$ car le reste de la division de 15 par 7 vaut 1. Bien sûr, tu pourrais prendre de plus grandes valeurs pour les y_i mais il vaut mieux considérer directement les plus petites qui conviennent puisque ensuite, tu devras tout de même ramener tout cela modulo 105 c'est-à-dire prendre le reste de la division par 105. L'unique solution est donc bien, comme tu l'as vu dans la BD :

$$\begin{aligned}
x = & \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{105}{3} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{105}{5} \right.\\
& \left. +3 \cdot 1 \cdot \frac{105}{7}\right) \pmod{105} \\
= & \ (4 \cdot 35 + 4 \cdot 21 + 3 \cdot 15) \pmod{105} \\
= & \ (140 + 84 + 45) \pmod{105} \\
= & \ 269 \pmod{105} \\
x = & \ 59
\end{aligned}$$

puisque $269 = 2 \cdot 105 + 59$.

Dans son *liber abbaci*, FIBONACCI propose encore un autre problème de ce type mais avec le module $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$. Je t'engage à résoudre le système de la même façon que ci-dessus avec cette nouvelle valeur du module. Tu pourras ainsi épater tes copains d'une autre manière ...

Bibliographie

[1] Michel BALLIEU, *Introduction à la cryptographie et à la protection des données*, Université de Mons Hainaut, Faculté des Sciences, Année Académique 1986 – 1987.

[2] Leonardo Pisano FIBONACCI, *liber abbaci*, Riccardiano n ° 783, Biblioteca Riccardiana, Firenze.

[3] Oystein ORE, *Number Theory and its History*, Dover Publications INC., New York, reprint 1976.

[4] D.E. SMITH, *History of Mathematics* (2 vol.), Dover Publications INC., New York, 1958.

SOLO game

André Parent,

Athénée Royal de Mouscron

Nous remercions Cédric PARENT pour le graphisme de cet article.

Commercialisé par la société *Blue Zebra*, ce jeu comporte 41 boules bicolores placées dans un logement où elles peuvent se mouvoir.

Dans la position de départ (figure 1), une boule est placée demi-sphère noire vers le haut, toutes les autres, demi-sphère noire vers le bas.

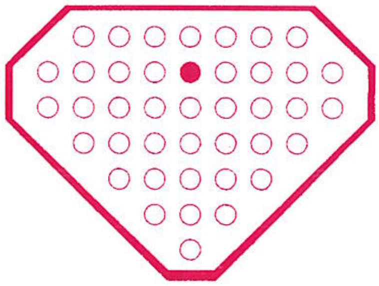
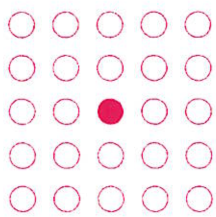


figure 1

Règle : Positionner une boule noire côté blanc et 2 boules blanches voisines côté noir. Les boules blanches sont obligatoirement sur la même ligne horizontale ou verticale.



À partir de la position ci-dessus, voici les seuls coups autorisés :

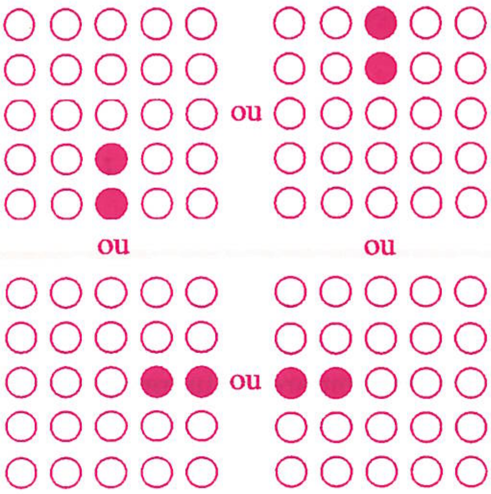


figure 2

But du jeu : Essayer de positionner toutes les boules côté noir. Bien sûr, il restera au minimum une boule blanche.

Afin de communiquer le déroulement d'une partie, il est pratique de se donner une convention d'écriture, d'une part pour repérer la boule dans le jeu, d'autre part pour préciser le mouvement envisagé.

1. Repérage de la boule : chacune est repérée dans cet ordre, par sa colonne et sa rangée.

	21	31	41	51	61	71	81	
12	22	32	42	52	62	72	82	92
13	23	33	43	53	63	73	83	93
	24	34	44	54	64	74	84	
		35	45	55	65	75		
			46	56	66			
				57				

figure 3

La boule, position noire au départ est marquée 52 (cinquième colonne, deuxième rangée).

2. Codage du coup : On pourrait garder l'optique précédente en indiquant les coordonnées de la boule noire de départ, ensuite celles des deux boules blanches à modifier.
Par exemple, 52 – 53 . 54

Je suggère le codage suivant qui me paraît plus « visuel » : 52 ↓
Ainsi, les coups autorisés dans l'exemple de la figure 2, en imaginant que la boule noire est celle codée 43 sont :

43 ↑ 43 ↓ 43 ← 43 →

Je te propose de t'essayer à ce jeu. Si tu ne le possèdes pas, tu peux réaliser un support quadrillé et utiliser les pions d'un *jeu de go* ou des pièces de monnaie en remplaçant les couleurs par pile et face. Si c'est le cas, profites-en pour marquer les cases quadrillées des nombres qui les repèrent.
Au début, il te restera sans doute plusieurs boules blanches mais tu parviendras bien vite à affiner une stratégie afin n'en avoir plus qu'une seule. Voici une solution :

1.	52 ↓	14.	61 →	27.	33 →
2.	54 →	15.	62 ←	28.	43 ↑
3.	64 ↓	16.	52 →	29.	23 →
4.	65 ←	17.	53 →	30.	33 ↓
5.	55 ↓	18.	42 ↓	31.	34 ↑
6.	45 →	19.	44 →	32.	33 ←
7.	65 ↑	20.	43 ↑	33.	23 ↑
8.	55 →	21.	41 →	34.	32 ↓
9.	74 ↑	22.	54 ↑	35.	22 ↓
10.	64 →	23.	42 ↓	36.	33 ↑
11.	73 →	24.	44 ↓	37.	32 ←
12.	72 →	25.	53 ↓	38.	34 ↑
13.	63 ↑	26.	43 ←	39.	54 ←

La réussite du jeu nécessite effectivement 39 coups, puisque sur les 41 boules, 40 sont blanches au départ, une seule à l'arrivée et chaque coup remplace une noire par deux blanches donc entraîne une boule blanche supplémentaire.
Envoie tes solutions à la Rédaction de *Math-Jeunes*.
Mais, tu peux également explorer les nombreuses possibilités qu'entraîne une modification de la position de départ. Par exemple, sur un support quadrillé, ou en forme de polygone, ou le « jeu solitaire », ... ou encore envisager une autre position de la boule noire initiale.
Envoie le résultat de tes recherches ou encore d'autres suggestions à la Rédaction de *Math-Jeunes*.

Math-Jeunes n ° 77, 30–31, 1996

La preuve par neuf en ⟪ mathémagie ⟫

Daniel Justens & Claude Maerschalk, *Univ. Liège & U.L.B. + Cercle Belge d'Illusionnisme*

3. Le principe du complémentaire à neuf

Très proche de la simple preuve par neuf, le principe du complémentaire à neuf permet de faire valoir des dons de calculateur prodige accessibles aux plus limités en arithmétique. La routine en est élémentaire. Il faut :

• proposer à l'interlocuteur de choisir n nombres de k chiffres ;

• ajouter pour $(n-1)$ d'entre eux les « complémentaires à neuf » (il suffit de remplacer chacun des chiffres du nombre considéré par « neuf moins ce chiffre » : a est remplacé par $9-a$;

• demander d'effectuer l'addition de ces $2n-1$ nombres de k chiffres ; le spectateur peut même utiliser une calculatrice : vous serez toujours plus rapide que lui car le résultat vaut :

1. le nombre pour lequel vous n'avez pas établi le complémentaire à neuf
2. auquel vous ajoutez $(n-1)\times 10^k$
3. duquel vous retranchez $(n-1)$.

Prenons un exemple simple : vous demandez à quelqu'un de choisir 6 nombres de 4 chiffres et de les écrire en ligne sur deux feuilles de papier différentes. Par exemple, il écrit sur les deux feuilles :

$$2\,619 \quad 7\,832 \quad 1\,996 \quad 6\,511 \quad \underline{4\,215} \quad 3\,965.$$

Vous lui demandez ensuite d'écrire sur ces mêmes deux feuilles, en dessous et en ligne les complémentaires à neuf de chacun de ces nombres, sauf, disons, du quatrième. Il va ainsi compléter :

$$7\,380 \quad 2\,167 \quad 8\,003 \quad 3\,488 \quad 6\,034.$$

Vous lui tendez enfin une calculatrice en échange d'une des deux feuilles sur lesquelles il a inscrit les nombres et lui proposez de faire la somme de ces onze nombres. Vous lui annoncez quasi immédiatement que cette somme vaut :

$$(4\,215 + 5\times 10^4 - 5 =) \quad 54\,210$$

résultat qu'il ne pourra vérifier effectivement qu'après plusieurs « tapotages » sur la calculatrice.

4. La connaissance de l'annuaire téléphonique

Comment sélectionner un numéro aléatoirement dans l'annuaire téléphonique de la région, puis le communiquer mentalement (par télépathie) au magicien ? Rien de plus simple :

• le magicien demande au cobaye de choisir un nombre de trois chiffres différents ;

• le magicien demande d'inverser l'ordre des chiffres afin d'obtenir un deuxième nombre ;

• le magicien demande de soustraire le plus petit nombre du plus grand, ce qui donne le numéro de la page à choisir dans l'annuaire ;

• le magicien demande d'additionner les chiffres de la page, ce qui donne le numéro de la ligne à sélectionner ;

• le magicien engage le cobaye à lui communiquer le numéro de la colonne qu'il a choisie ;

• le magicien demande enfin au cobaye de se concentrer sur le numéro de téléphone qu'il trouve à cette page, à cette ligne et dans cette colonne (en fait, il l'engage essentiellement à faire preuve d'une bonne dose de crédulité).

La propriété utilisée peut se visualiser ainsi :

- notons abc le nombre $a\times 10^2 + b\times 10 + c$ où $a, b, c \in \{0, 1, \cdots, 8, 9\}$ et $a \neq b$, $a \neq c, b \neq c$;

- on peut supposer $a > c$ (pourquoi ?) et dès lors, la soustraction opérée est :

$$\begin{array}{cccc} & a-1 & b-1+10 & 10+c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-1-c & 9 & 10+c-a \end{array}$$

La somme des unités et des centaines est toujours égale à neuf. Le nombre des dizaines vaut neuf également.
Il n'y a donc qu'au plus dix pages possibles (selon la grosseur de l'annuaire), à savoir 099, 198, 297, 396, 495, ..., 891, 990. La ligne choisie est toujours la dix-huitième. Puisqu'il y a quatre colonnes par page, le magicien n'a au plus que quarante numéros à mémoriser ... C'est cela, le métier !

Une routine semblable est obtenue en réinversant le nombre trouvé et en opérant cette fois une addition. L'inversion doit avoir lieu en tenant compte d'un résultat à trois chiffres. Dans le cas 99, il faut considérer 099 dont l'inverse est 990. Il faut évidemment demander de toujours procéder ainsi pour tout nombre à deux chiffres, sans toutefois préciser que le nombre de possibilités est très strictement limité.

Avec nos conventions d'écriture, nous avions obtenu :

$$\begin{array}{cccc} & a-1 & b-1+10 & 10+c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-1-c & 9 & 10+c-a \end{array}$$

Le résultat de l'addition est toujours :

$$\begin{array}{cccc} & a-1-c & 9 & 10+c-a \\ + & 10+c-a & 9 & a-1-c \\ \hline & 10 & 8 & 9 \end{array}$$

À suivre ...

Math-Jeunes n° 77, 32–32, 1996

Le Tangram

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Le **Tangram chinois** est défini à partir d'un carré découpé en sept pièces telles qu'elles sont présentées à la page 3 de couverture. Nous te proposons de réaliser à peu de frais ton propre **Tangram** : photocopie la page 3 de couverture et colle cette copie sur un carton assez fort. Ensuite, à l'aide d'un cutter, découpe les sept pièces de ton Tangram.

Le but du jeu est de réaliser des « figures » humaines, animales telles que des chats, des poissons, etc.

Le Tangram porte encore les noms de « Jeu du Sage » ou « Les Sept Pièces de l'Art fin ». Les règles sont simples : les sept pièces doivent être utilisées pour réaliser une figure.

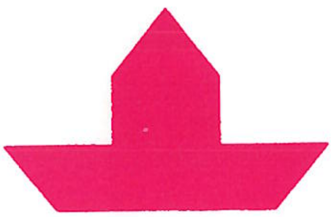
De quelle époque date ce jeu ? Nul ne le sait. On ne connaît pas non plus le nom de son « inventeur ». En chinois, le jeu s'appelle *ch'i ch'ae pan*. Il semblerait que le premier livre connu qui lui est consacré date de 1813.

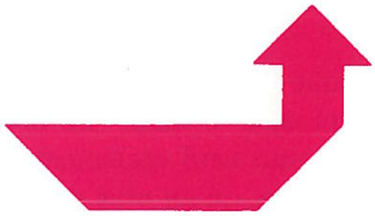
Une propriété intéressante du Tangram est sa « convexité ». Si tu ne sais vraiment pas de quoi il s'agit, n'hésite surtout pas à en parler à ton professeur de mathématiques.

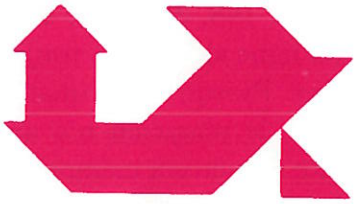
En 1942, Fu Traing Wang et Chuan-Chi Hsiung de la *National University of Chekiang*, ont démontré qu'il existait exactement **treize** Tangrams convexes différents (*American Mathematical Monthly*, vol. 49).

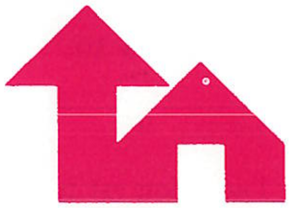
Tu peux essayer de les trouver ... Nous attendons tes solutions.

Tu peux aussi tenter de réaliser les figures ci-après.

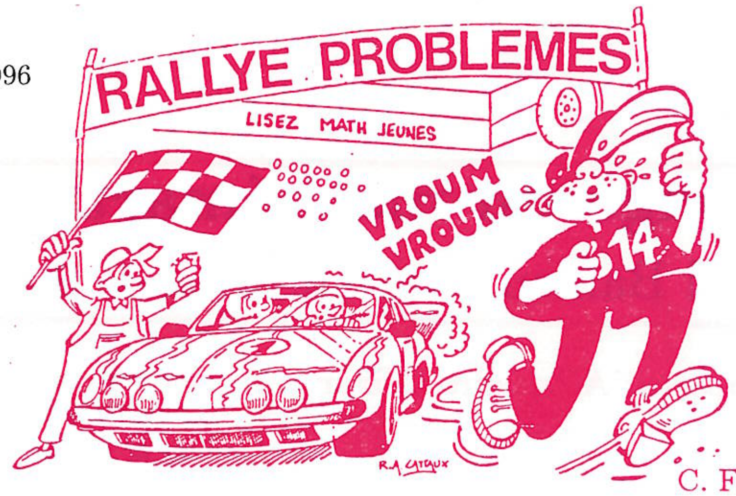








Pour en savoir plus et perfectionner ton anglais, tu peux aussi consulter le livre de Joost Elffers, *Tangram, the ancient Chinese Shapes Game*, Penguin Books, 1976.



C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1996 – 1997.

Rappelons que les deux premiers problèmes concernent (en principe) les élèves de première et de deuxième années, les deux suivants, les élèves de troisième et de quatrième et les deux derniers, les élèves de cinquième et de sixième. Même si vous n'avez pu répondre qu'à un seul problème jusqu'à présent, ne vous découragez pas, vous pouvez encore figurer dans la liste des gagnants.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro 76 de *Math-Jeunes* et envoyez-les à C. Festraets, 36 rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le vendredi 31 janvier 1997.

mini 3 Les nombres 1 447, 1 005, 1 231 ont quelque chose en commun : chacun d'eux est un nombre de quatre chiffres commençant par 1 et ayant exactement deux chiffres identiques. Combien y a-t-il de nombres de ce type ?

mini 4 Sept écoliers ont ensemble cent pièces de monnaie. Aucun n'a le même nombre de pièces qu'un autre. Démontrer qu'il y a trois écoliers qui, ensemble, possèdent au moins cinquante pièces.

midi 3 Cinquante montres rondes comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes se trouvent sur une table ronde. Démontrer qu'il existe un instant de la journée où la somme des distances du centre O de la table à l'extrémité de chacune des aiguilles des minutes est plus grande que la somme des distances de O au centre de chacune des montres.

midi 4 $ABCDEF$ est un hexagone régulier ; M est un point de la diagonale AC et N est un point de la diagonale CE tels que

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|CN|}{|NE|} = k$$

avec B, M et N alignés. Que vaut k ?

maxi 3∗ Dix-sept scientifiques participent à un congrès international où on utilise exclusivement trois langues. Chacun des scientifiques parle au moins une de ces trois langues. Quand deux quelconques des scientifiques se rencontrent, ils discutent dans une seule langue toujours la même. Démontrer que parmi les dix-sept scientifiques, il y en a au moins trois qui peuvent se parler dans la même langue.

maxi 4 À partir d'un triangle ABC, on construit le triangle MNP de la manière suivante : M appartient à la demi-droite $[AB$ et B est le milieu de $[AM]$, N appartient à la demi-droite $[BC$ et C est le milieu de $[BN]$, P appartient à la demi-droite $[CA$ et A est le milieu de $[CP]$. Si on se donne uniquement les trois points M, N, P, comment retrouver le triangle ABC ?

 Math-Jeunes n° 77, 34–35, 1996

La page du mathémartiste

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

À propos d'Albrecht Dürer ...

Il naît à Nuremberg le 21 mai 1471 d'une famille d'orfèvres originaire de Hongrie. Ses parents habitent alors une maison louée à la famille patricienne des Pirckheimer. Albrecht DÜRER se liera d'une amitié profonde et jusqu'à sa mort avec Willibald PIRCKHEIMER, de quelques mois son aîné et qui deviendra un humaniste distingué.

Située au carrefour des grandes routes commerciales de l'époque, Nuremberg (50 000 habitants en 1500) est une importante ville marchande en plein essor. C'est un des hauts lieux du Saint Empire romain germanique. L'empereur y effectue des séjours réguliers. La haute bourgeoisie de la ville, prospère en affaires et sage dans son administration, est un patriciat éclairé. Ces familles à l'esprit ouvert envoient leurs fils étudier, très souvent en Italie où la Renaissance est florissante.

DÜRER fréquente l'école de latin puis reprend le métier de son père ; il devient ainsi orfèvre mais, une fois son apprentissage terminé, il est pris d'une irrésistible envie de devenir peintre. Il finit par convaincre son père qui le fait entrer en 1486 comme apprenti dans l'atelier du peintre Michael WOLGEMUT (1434 – 1519). Après cela, conformément aux coutumes de l'époque, DÜRER part en 1490 accomplir le traditionnel tour de compagnonnage : Colmar, Strasbourg, ... Il subira aussi l'influence des grands maîtres flamands de Bruxelles et de Bruges et voyagera en Italie.

DÜRER a exploité à fond les possibilités que son époque offrait à la création artistique. On lui doit plus de septante-six peintures, plus ou moins mille deux cents dessins, cent septante xylographies, une centaine de gravures sur cuivre ... Les plus belles de celles-ci se situent après 1500. Nous en citerons trois parmi les plus célèbres : *Le Chevalier, la Mort et le Diable*, *Saint Jérôme dans sa cellule* et *Melencolia I* qui orne la couverture de ton *Math-Jeunes*. Dans le coin supérieur droit, on trouve le **carré magique** ([1]) :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

DÜRER va également publier trois ouvrages : *Instruction sur la manière de mesurer* (1525), *Traité sur la fortification des villes, châteaux et bourgs* (1527) et *Traité des proportions du corps humain* (1528). Les sources de DÜRER sont connues : la géométrie d'EUCLIDE dont il s'était procuré en 1505, à Venise, une traduction latine, les *Dix Livres d'Architecture* de VITRUVE. Il a sans doute rencontré, lors d'un voyage en Italie, l'algébriste Luca PACIOLI qui lui a fait connaître les théories sur la perspective de PIERO DELLA FRANCESCA *(De Prospectiva Pingendi)*, de LEONARDO DA VINCI, de Leon Battista ALBERTI *(Della Pictura)* et BRUNELLESCHI (l'ingénieur, architecte, peintre, ..., qui a construit le dôme de Santa Maria del Fiore à Florence). DÜRER est le premier artiste-peintre allemand à allier pratique de la peinture et réflexion théorique. Il veut transmettre à ses compagnons artistes ou artisans les connaissances géométriques qu'il a lui-même acquises pendant plus de vingt ans dans les ateliers, les livres anciens et les traités des théoriciens italiens. Son but est de fournir une source de formes construites

([1]) cf. l'article de Christian VAN HOOSTE

exactement, reproductibles indéfiniment, où chacun pourra puiser selon ses besoins.
« *Perspectiva* est un mot latin qui veut dire voir au travers » écrit DÜRER. Il ne peut y avoir perspective que si un plan transparent sectionne toutes les lignes visuelles concourant dans l'œil.
Tout d'abord, il évoque quelques éléments de *Perspectiva naturalis* (ou *communis*), qui concernent l'optique. Ces éléments rappellent les cinq points de PIERO DELLA FRANCESCA :

« La perspective est fondée sur cinq choses : la première est l'œil qui perçoit les objets, la deuxième est l'objet perçu, la troisième est la distance qui les sépare, la quatrième est que tout est perçu au moyen de lignes visuelles droites, la cinquième est la section entre ce qui est vu et l'objet. »

Ensuite, il aborde la *perspectiva artificialis* ou *pingendi* : il conjugue deux vues du même cube selon l'élévation et le rabattement, avec l'œil qui le regarde, le « plan carré » sur lequel il repose, la source de lumière qui l'éclaire et son ombre portée. À aucun moment, il n'utilise le point de fuite. C'est la *Costruzione legittima* de BRUNELLESCHI.

Enfin, il enseigne la voie abrégée (procédé conforme à celui d'ALBERTI) qui utilise le point de fuite.

DÜRER, tout comme LUTHER écrit dans la langue de son pays, c'est-à-dire en allemand et non pas en latin, langue savante des Humanistes de l'époque. Joachim CAMERARIUS (1500 – 1574) va entreprendre la traduction des écrits théoriques de DÜRER en latin. C'est un des plus importants représentants de l'humanisme allemand pendant la Réforme. Il connaîtra DÜRER pendant les deux années qui précéderont la mort de ce dernier. Les deux hommes réussiront à établir une relation personnelle très proche, ce qui permettra à CAMERARIUS de publier en exergue à sa traduction une courte biographie de l'artiste.

Il y aurait encore beaucoup de choses à dire avant de signaler que, affaibli par une longue maladie, DÜRER meurt à Nuremberg le 6 avril 1528. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la bibliographie.

Bibliographie

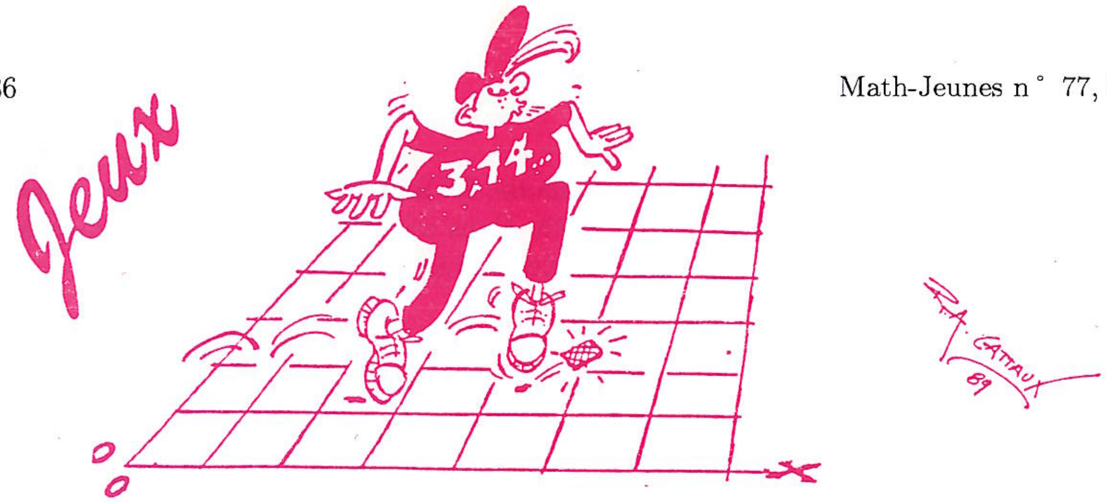
[1] Albrecht DÜRER, *Géométrie*, présentation, traduction de l'allemand et notes par Jeanne PEIFFER, Éd. Seuil, Paris, 1995.

[2] Albrecht DÜRER, *Instruction sur la manière de mesurer*, traduit et présenté par Jeannine BARDY et Michel VAN PEENE, Flammarion, Paris, 1995.

[3] Albrecht DÜRER, *Œuvre gravé*, catalogue de l'exposition tenue au musée du Petit Palais à Paris du 4 avril au 21 juillet 1996,

[4] Felicitas TOBIEN, *Dürer et ses contemporains*, Berghaus Verlag, 1987

 Math-Jeunes n° 77, 36–36, 1996



Problème de tri

Remettez la suite de nombres dans le bon ordre en faisant quatre fois de suite l'opération suivante : prenez trois nombres qui se touchent et placez-les entre deux autres nombres.

1 2 6 3 11 5 7 9 10 14 8 12 13 4 15

Le mot caché (CéVé)

Retrouvez dans la grille les mots de l'extrait de texte ci-après. À cet effet, serpentez dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le nom de l'illustre mathématicien auquel l'extrait se rapporte. Sachez qu'il vécut de 1601 à 1665.

Voici la phrase proposée à votre sagacité :

« ... *n'est pas un mathématicien de profession. Juriste et conseiller au parlement de Toulouse, il consacre ses loisirs aux mathématiques ce qui ne l'empêche pas de faire d'importantes découvertes.* »

c	i	t	t	a	e	e	c	h	e	s	e	v	u	o
i	e	a	h	m	m	p	e	e	d	a	r	t	e	c
e	n	m	e	l	t	t	c	s	e	p	n	n	s	e
s	u	o	l	u	o	a	e	n	s	t	u	o	i	d
x	u	a	f	e	r	m	♣	e	d	e	u	a	s	d
s	t	i	u	q	s	♣	s	i	a	o	f	e	s	r
e	m	e	n	t	a	p	r	r	f	r	p	s	e	e
l	e	s	e	o	i	s	i	e	i	q	u	e	r	l
r	a	p	t	l	♣	e	m	a	t	c	e	d	c	l
r	t	a	n	e	t	h	t	a	m	o	n	s	a	i
o	p	m	i	n	s	i	r	u	j	c	o	n	s	e

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

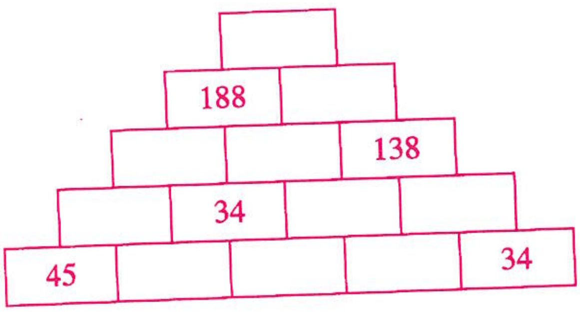
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

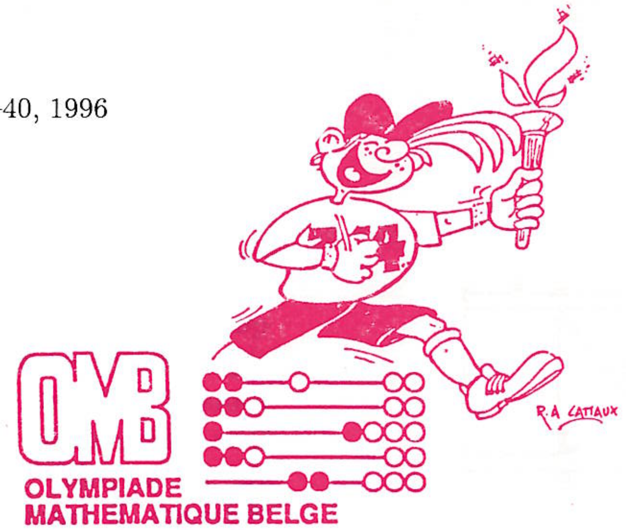
Horizontalement et verticalement

1. 174 960
2. 487 350
3. 230 850
4. 76 950
5. 205 200

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.





C. Van Hooste

1. Les représentants belges aux OMI

Du 5 au 17 juillet de cette année, la 37^{e} édition des Olympiades Mathématiques Internationales (**OMI**) s'est déroulée à Bombay en Inde. Comme chacun des septante-cinq pays qui y ont participé, la Belgique était représentée par six étudiants issus de l'enseignement secondaire. Voici leurs résultats (notés sur 42) :

Éric VANDENBUSSCHE (F, Bruxelles) 17 (médaille de bronze)
Jean-François MACQ (F, Virelles) 15 (médaille de bronze)
Grégory SOYEZ (F, Arc-Wattripont) 15 (médaille de bronze)
Tom MEDTS (NL, Mullem) 12 (médaille de bronze)
Christophe DE CANNIERE (NL, Heverlee) 11
Bart DE VYLDER (NL, Lokeren) 5

Pour mieux comprendre ces scores, il faut savoir que l'épreuve elle-même est répartie sur deux jours ; à chaque fois, trois problèmes (notés sur 7) sont proposés aux candidats.

Un seul concurrent, un Roumain, a obtenu le score parfait (42/42). Pour recevoir une médaille de bronze, il fallait atteindre 12/42 (pour l'argent et l'or, des scores de 20/42 et 28/42 étaient requis). Globalement, la Belgique se classe au 31^{e} rang avec 75/242. C'est la Roumanie qui a réussi le meilleur résultat : 187/242.

En 1997, les OMI auront lieu en Argentine à Mar del Plata. Peut-être seras-tu du voyage ...

2. Courrier des lecteurs

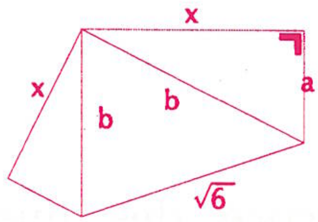
À propos de la question 2 de la finale MIDI de l'OMB 96.

Rappelons d'abord la question :

Une feuille de papier rectangulaire a pour longueur 5 cm. Lorsqu'elle est pliée de manière que deux sommets opposés soient appliqués l'un sur l'autre, la longueur du pli est de $\sqrt{6}$ cm. Quelle est la largeur de cette feuille ?

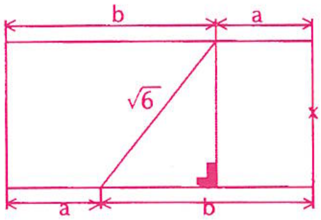
Dans *Math-Jeunes* n° 75 (mai 1996), nous avons donné une solution fondée sur la similitude de deux triangles. Un lecteur de Mouscron, Christophe DELAERE, nous propose une autre solution, en utilisant le théorème de PYTHAGORE.

Considérons la feuille dans les deux positions.



Selon PYTHAGORE,

$$a^2 + x^2 = b^2 \qquad (1)$$



$$a + b = 5 \qquad (2)$$

Selon PYTHAGORE,

$$(b-a)^2 + x^2 = 6 \qquad (3)$$

De (3), on tire

$$\begin{aligned} b^2 + a^2 + x^2 - 2ab &= 6 \\ b^2 + b^2 - 2ab &= 6 \end{aligned}$$

d'après l'équation (1)

$$\begin{aligned} b^2 - ab &= 3 \\ a &= \frac{b^2-3}{b} \qquad (3') \end{aligned}$$

b est différent de 0

(3') et (2) donnent successivement

$$\begin{aligned} \frac{b^2-3}{b} + b - 5 &= 0 \\ 2b^2 - 5b - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet deux solutions, 3 et $-\frac{1}{2}$. Mais b étant une longueur physique, seul 3 est une solution acceptable.
De (2), il vient alors $a = 2$.
Enfin, par (1), on obtient $x^2 = 5$; donc, $x = \sqrt{5}$.

3. Encore des questions pour se préparer aux OMB

Cher ami lecteur, nous te proposons une nouvelle batterie de questions sélectionnées parmi celles des années antérieures. Ainsi, tu seras encore mieux préparé pour défendre tes chances aux prochaines éliminatoires de l'OMB. Cependant, si ces problèmes ne te suffisent pas, tu peux acquérir le tome 3 des questions posées aux Olympiades Mathématiques Belges entre les années 1988 et 1993 (les tomes 1 et 2 sont malheureusement épuisés). Il te suffit d'écrire au siège de la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15 à 7000 Mons. Pour la Belgique, il suffit de virer 240 BEF sur le compte 000-0728014-29 de la S.B.P.M.e.f. en indiquant, comme communication, « OLYMPIADES – TOME 3 ».

Excepté sans doute les questions 18 et 22, l'entièreté de ce questionnaire est accessible aux élèves de l'épreuve MIDI ; les candidats à la MINI-olympiade se limiteront aux dix premières questions et essayeront éventuellement de résoudre les questions 12, 15 et 20. Ces conseils ne sont donnés qu'à titre indicatif, puisque la capacité à résoudre certains problèmes croît au fur et à mesure que l'on s'enrichit de nouvelles connaissances mathématiques.

1. Le Petit Prince (1987)

Le Petit Prince, qui mesure 1,2 mètre, se promène le long de l'équateur de sa planète. Sa tête décrit donc un cercle plus grand que celui décrit par ses pieds. Parmi les mesures suivantes (exprimées en mètres), quelle est celle qui évalue le mieux la différence de longueur entre ces deux cercles ?

Ⓐ $1,2 \times 3,14$
Ⓑ $(1,2)^2 \times 3,14$ Ⓒ $1,2 \times 6,28$
Ⓓ $(1,2)^2 \times 6,28$ Ⓔ Il manque le rayon de la planète pour pouvoir répondre.

2. L'insecte sur le cube (1983)

Les arêtes d'un cube sont des barres métalliques de 20 cm de long. Quel est le plus long chemin qu'un insecte, partant d'un sommet, peut parcourir le long des barres en ne passant jamais deux fois par la même arête, ni par le même sommet (le point de départ et le point d'arrivée peuvent coïncider) ?

Ⓐ 120 cm Ⓑ 140 cm Ⓒ 160 cm Ⓓ 180 cm Ⓔ 200 cm

3. Bacilles et microbes (1984)

Sachant que tous les bacilles sont des microbes et que certains bacilles sont pathogènes, on peut en déduire que Ⓐtous les microbes sont pathogènes Ⓑaucun microbe n'est pathogène Ⓒcertains bacilles pathogènes ne sont pas des microbes Ⓓcertains microbes sont pathogènes Ⓔaucun microbe pathogène n'est un bacille.

4. Les maris et leurs femmes (1987)

Quatre femmes sont assises, un siège sur deux autour d'une table ronde. De combien de manières peut-on asseoir leurs maris autour de la table, si aucun d'eux ne peut s'asseoir à côté de son épouse ?

Ⓐ0 Ⓑ1 Ⓒ2 Ⓓ3 Ⓔ4

5. Coupe de football (1983)

En coupe de football, seul le vainqueur d'un match peut jouer le match suivant, le vaincu étant éliminé. S'il y avait 64 équipes au départ et s'il y a eu un vainqueur par match, combien de matches ont été joués en tout ?

Ⓐ33 Ⓑ49 Ⓒ63 Ⓓ95 Ⓔ127

6. Décalage horaire (1987)

Un avion quitte Hong-Kong le samedi soir à 17 heures 35, heure locale, et arrive à Bruxelles, après un vol de 18 heures et 20 minutes. Sachant que, lorsqu'il est midi à Bruxelles, il est 18 heures le même jour à Hong-Kong, à quelle heure arrive-t-il à Bruxelles (heure de Bruxelles) ?

ⒶSamedi à 23 h. 35 ⒷDimanche à 3 h. 55 ⒸDimanche à 5 h. 55 ⒹDimanche à 11 h. 55 ⒺDimanche à 17 h. 55

7. Trop de fractions (1985)

Quels termes faut-il enlever de la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

pour que la somme des termes restants soit égale à 1 ? Ⓐ$\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ Ⓑ$\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{12}$ Ⓒ$\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$ Ⓓ$\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{10}$ Ⓔ$\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{10}$

8. Rue de la Gare (1986)

Dans la rue de la Gare, du côté des numéros impairs, une maison porte le numéro 87. Si la numérotation commençait à l'autre extrémité de la rue, elle porterait le numéro 69. Le nombre de maison du côté impair est

Ⓐ78 Ⓑ79 Ⓒ80 Ⓓ154 Ⓔ156

9. On appelle *parallélogone* tout polygone plan convexe dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

ⒶIl n'existe pas de parallélogone. ⒷIl n'existe pas de parallélogone ayant plus de quatre côtés. ⒸTout parallélogone est un polygone régulier. ⒹTout parallélogone a un centre de symétrie. ⒺTout parallélogone a au moins un axe de symétrie.

10. Pommes, lait et chocolat (1984)

Anne achète 5 kg de pommes, 3 litres de lait et 2 bâtons de chocolat et paie 299 F. Dominique achète 6 kg de pommes, 2 litres de lait et 4 bâtons de chocolat et paie 338 F. Que devra payer Patricia pour 1 kg de pommes et 1 litre de lait ?

Ⓐ58 F Ⓑ60 F Ⓒ62 F Ⓓ65 F Ⓔ68 F

11. Vitesse moyenne (1983)

Une voiture a parcouru une distance de x km à une vitesse de v km/h, puis elle a parcouru une distance de y km à une vitesse de w km/h. La vitesse moyenne de la voiture sur le parcours total est donnée par l'expression

Ⓐ$\frac{v+w}{2}$ Ⓑ$\frac{v+w}{vw}$ Ⓒ$\frac{(v+w)xy}{wx+vy}$ Ⓓ$\frac{x+y}{wx+vy}$ Ⓔ$\frac{vw(x+y)}{wx+vy}$

12. Pas, sauts et bonds (1986)

On suppose que les pas, les sauts et les bonds sont des unités de longueur bien déterminées. Si b pas valent c sauts, si d bonds valent e pas et si f bonds valent g mètres, alors combien un mètre vaut-il de sauts ?

Ⓐ$\frac{bdg}{cef}$ Ⓑ$\frac{cdf}{beg}$ Ⓒ$\frac{cdg}{bef}$ Ⓓ$\frac{cef}{bdg}$ Ⓔ$\frac{ceg}{bdf}$

13. Sur une île (1985)

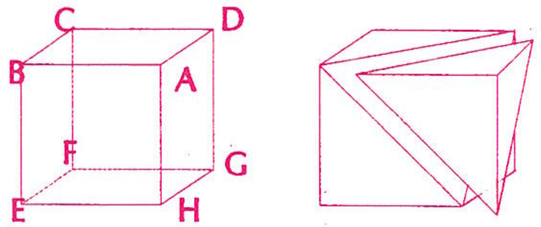
Sur une île de forme triangulaire, le point le plus éloigné de la mer est toujours

Ⓐle centre du cercle inscrit ; Ⓑle centre du cercle circonscrit ; Ⓒl'orthocentre du triangle ; Ⓓle centre de gravité ; Ⓔle point équidistant des trois sommets du triangle.

14. Triangle équilatéral (1983)
Le segment $[AB]$ est à la fois un diamètre d'un cercle de rayon 1 et un côté d'un triangle équilatéral ABC. Le cercle coupe AC et BC respectivement aux points D et E. La longueur de $[AE]$ est

Ⓐ $\frac{3}{2}$ Ⓑ $\frac{5}{3}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓓ $\sqrt{3}$ Ⓔ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

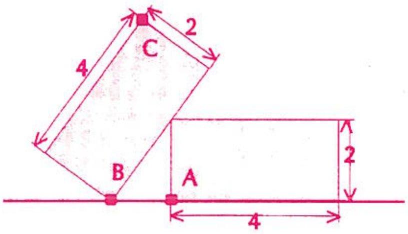
15. Cube amputé (1984)
En chacun des sommets A, C, E, G du cube représenté sur la figure de gauche, on enlève une pyramide dont trois des arêtes sont les arêtes de cube issues de ce sommet, comme le montre la figure ci-dessous.



Après ces quatre opérations, que reste-t-il du volume V du cube initial ?

Ⓐ $\frac{1}{6}V$ Ⓑ $\frac{1}{4}V$ Ⓒ $\frac{1}{3}V$ Ⓓ $\frac{1}{2}V$ Ⓔ $\frac{2}{3}V$

16. Avec deux briques (1986)
Deux briques sont posées l'une contre l'autre sur le sol, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Si la distance entre A et B est 1,5, quelle est la hauteur de C au-dessus du sol ?



Ⓐ 4,05 Ⓑ 4,1 Ⓒ 4,2 Ⓓ 4,4 Ⓔ 4,5

17. Poteaux (1992)
Trois poteaux verticaux $[AS]$, $[BT]$ et $[CU]$ ont leurs pieds aux sommets du triangle équilatéral ABC, situé dans un plan horizontal. Si $|AB| = |AS| = 1$, $|BT| = 2$ et $|CU| = 3$, l'aire du triangle STU vaut

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ Ⓔ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

18. Sur le tableau noir (1982)
Sur le tableau noir, on écrit un ensemble de nombres entiers consécutifs qui commence par 1. Puis on efface un de ces nombres. La moyenne arithmétique des nombres restants est $35 + \dfrac{7}{17}$. Quel nombre a été effacé ?

Ⓐ 6 Ⓑ 7 Ⓒ 8 Ⓓ 9 Ⓔ Ce nombre ne peut être déterminé.

19. Puissances (1992)
Le nombre naturel $22^{55} \times 55^{22} - 1$ est la somme d'un multiple de 7 et de

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 3 Ⓓ 5 Ⓔ 6

20. Elections (1989)
Les élections à une certaine assemblée se font en deux tours. Chaque électeur dispose d'une voix qu'il peut accorder au candidat de son choix ; l'électeur peut aussi s'abstenir. Pour être présent au deuxième tour, un candidat doit recueillir un nombre de voix au moins égal à $12,5$ % du nombre des électeurs. S'il y a p % d'abstentions au premier tour (avec $p < 87,5$), quel pourcentage des votes exprimés un candidat doit-il obtenir au moins pour être présent au deuxième tour (on suppose qu'il n'y a pas de vote nul) ?

Ⓐ $\frac{100-p}{12,5}$ Ⓑ $\frac{100-p}{1250}$ Ⓒ $|12,5-p|$ Ⓓ $\frac{12,5}{100-p}$ Ⓔ $\frac{1250}{100-p}$

21. D'une équation à l'autre (1992)
Les carrés des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont toujours les racines de

Ⓐ $cx^2 + bx + a = 0$ Ⓑ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ Ⓒ $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$ Ⓓ $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ Ⓔ $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$

22. Partie entière (1985)
Soit $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Le nombre de solutions réelles de $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$ est

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 3 Ⓔ 4

Réponses correctes aux questions de préparation à l'OMB :

(1,C) (2,C) (3,D) (4,C) (5,C) (6,C) (7,E) (8,A) (9,D) (10,D) (11,E) (12,D) (13,A) (14,D) (15,C) (16,D) (17,E) (18,B) (19,A) (20,E) (21,E) (22,E)

Les triplets pythagoriciens et le Grand Théorème de Fermat

Warwick Evans, *West Sussex Institute of Higher Education, Bognor Regis (U.K.)*

Note de la rédaction : cet article nous a été envoyé en 1994. Il faut tenir compte que depuis lors, le Grand Théorème de Fermat a effectivement été démontré.

⋆ ⋆ ⋆

Depuis la nouvelle de la preuve du Grand Théorème de Fermat vers la fin de juin 1993, j'ai rassemblé des articles (en anglais jusqu'à présent) pour travailler avec mes étudiant(e)s. J'ai augmenté ma collection avec deux articles [2], [2] de *Math-Jeunes* n° 62. J'espère que mes étudiant(e)s pourront se débrouiller en français !

Rappel :

- Un **triplet pythagoricien** est un triplet $\{x, y, z\}$ d'entiers tels que $x^2+y^2 = z^2$. Il est utile d'insister sur le fait que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$. Dans [2], Maurice FAMELART a démontré que si $\{x, y, z\}$ est un triplet pythagoricien, alors il existe des entiers p et q ($\text{pgcd}(p, q) = 1$ et p, q sont de parités différentes) tels que $x = p^2-q^2$, $y = 2\cdot p\cdot q$ et $z = p^2+q^2$.

- Le **Grand Théorème de Fermat** affirme que $x^n + y^n = z^n$ ne possède aucune solution entière pour $n > 2$. Dans [2], Michel BALLIEU a expliqué que FERMAT a prouvé son théorème pour $n = 4$ en utilisant une méthode de sa propre invention, la méthode dite de « descente infinie ».

En fait, la preuve de FERMAT pour $n = 4$ utilise les triplets pythagoriciens de [2].

FERMAT considère l'équation plus générale $x^4 + y^4 = z_1^2$. Si on peut trouver une solution de cette équation, il suffit de poser $z_1 = z^2$ pour avoir une solution de $x^4 + y^4 = z^4$.

Puis FERMAT démontre que si on lui propose une solution de $x^4 + y^4 = z_1^2$, il peut trouver une deuxième solution $x^4 + y^4 = z_2^2$ avec $z_2 < z_1$.

Il en résulte qu'il existe une suite infinie $z_1 > z_2 > z_3 > z_4 > \ldots$ telle que chaque z_i est supérieur à 0. C'est la fameuse « descente infinie ». Il s'ensuit une contradiction.

Si $x^4+y^4 = z_1^2$, alors $\{x^2, y^2, z_1\}$ est un triplet pythagoricien. Il s'ensuit qu'il existe p et q tels que

$$\begin{cases} x^2 = p^2 - q^2 & (1.a) \\ y^2 = 2\cdot p\cdot q & (1.b) \\ z_1 = p^2 + q^2 & (1.c) \end{cases}$$

On peut écrire (1.a) sous la forme $x^2+q^2 = p^2$, donc $\{x, q, p\}$ est un triplet pythagoricien. Il s'ensuit qu'il existe u et v tels que

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 & (2.a) \\ q = 2\cdot u\cdot v & (2.b) \\ p = u^2 + v^2 & (2.c) \end{cases}$$

En combinant (1.b), (2.b) et (2.c), il vient

$$y^2 = 2\cdot(u^2 + v^2)\cdot 2\cdot u\cdot v \qquad (3)$$

Puisque $\text{pgcd}(u, v) = 1$, nous avons $\text{pgcd}(u, v, u^2 + v^2) = 1$ et ainsi, par (3), u, v et $u^2 + v^2$ sont des carrés.

Posons $u = x_1^2$, $v = y_1^2$, $u^2 + v^2 = z_2^2$ et nous avons $x_1^4 + y_1^4 = z_2^2$. Or

$z_2 < z_2^2 = u^2 + v^2 = p < p^2 < p^2 + q^2 = z_1$. Ainsi $z_2 < z_1$ et la « descente infinie » commence !

Bibliographie

[1] Michel BALLIEU, *Le Grand Théorème de Fermat démontré ?*, *Math-Jeunes* n° 62, p.4-7, 1993.

[2] Maurice FAMELART, *À la recherche des triplets pythagoriciens*, *Math-Jeunes* n° 62, p.11-13, 1993.

Math-Jeunes n° 77, 42–45, 1996

Récréations mathématiques

C. Van Hooste, *A. R. Vauban (Charleroi)*

2. Carrés magiques

À l'une ou l'autre occasion, tu as sûrement déjà rencontré des **carrés magiques**.

Placer les nombres entiers de 1 à 9 dans les cases du carré ci-dessous de telle manière que la somme des nombres d'une même ligne, d'une même colonne ou d'une même diagonale soit toujours égale à 15.

La formation de tels carrés est un très vieil amusement. Des carrés magiques furent construits en Chine avant l'ère chrétienne : leur introduction en Europe est apparemment due à MOSCHOPOULOS (1) qui vivait à Constantinople à la fin du quatorzième siècle.

Le carré magique que tu viens de construire est dit d'ordre 3 parce qu'il est composé des nombres entiers allant de 1 à 3^2. Nous en donnons une solution ci-contre. Est-elle différente de celle que tu as trouvée ? Si oui, compare-les. Ne peux-tu passer de l'une à l'autre par une symétrie ou par une rotation ?

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Il y a exactement 8 carrés magiques d'ordre 3. Lorsqu'on connaît l'un d'entre eux, on en obtient trois autres par rotation et, ensuite, quatre autres encore qui sont les symétriques des quatre premiers par rapport à l'une des médianes du carré. Si l'on considère que ces huit carrés magiques sont équivalents, il n'y qu'une seule vraie solution au problème du carré magique d'ordre 3. Autrement dit, il n'y a pas d'autre carré magique d'ordre 3 que ceux dont on vient de parler. Pourrais-tu le démontrer ?

Pour t'aider, disons que tu pourrais chercher quelles sont toutes les décompositions possibles de 15 en une somme de trois entiers pris parmi 1, 2, ... , 9. Ensuite vérifier la fréquence d'apparition de chacun de ces entiers dans les différentes sommes. Enfin, en déduire quels entiers occupent la case centrale, les cases de coin et les cases médianes des lignes ou colonnes.

Dans les temps anciens où l'homme était encore empreint d'idées mystiques, les carrés magiques étaient des sortes de talisman. Tel était le carré d'ordre 3 représenté ci-dessus, aussi appelé carré ou talisman de Saturne, dont l'influence magique se révèle le samedi. Le célèbre médecin suisse PARACELSE (2) avait calculé un carré magique pour chaque jour de la semaine. Pour être efficient, celui-ci devait être gravé sur le métal correspondant au jour considéré. Ainsi, celui de Saturne devrait être tracé sur une plaque de plomb pur. Quant au fameux Cornelius AGRIPPA (3), il a composé des carrés magiques d'ordre 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 qu'il associait aux sept « planètes » astrologiques, à savoir Saturne, Jupiter, Mars, le Soleil, Vénus, Mercure et la Lune.

Pour remplir un carré magique d'ordre 4, il faut utiliser tous les entiers de 1 à 16. Il existe 880 solutions non équivalentes à ce problème. Pourrais-tu en découvrir une ? Quelle doit

(1) Manuel Moschopoulos serait un grammairien grec, né en Crète. Il existe différentes orthographes de son nom : Le Moscopole, Moschopulus, ...

(2) Philippe Bombast von Honenheim, dit Paracelse (1493 – 1541), père de la médecine hermétique.

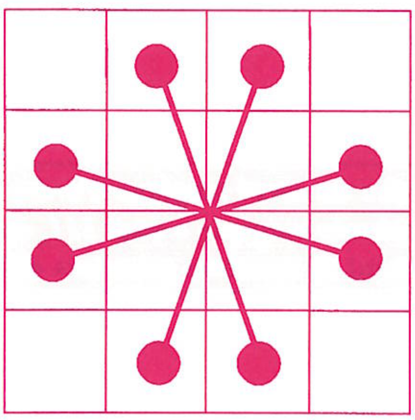
(3) Henri-Cornelius Agrippa De Nettesheim, médecin et philosophe allemand, né à Cologne en 1486, mort à Grenoble en 1534. Il fut le médecin de la mère de François Ier, puis l'historiographe de Charles-Quint.

être la *constante magique* d'un tel carré, c'est-à-dire la somme qu'il faut obtenir lorsqu'on additionne les nombres d'une même ligne, colonne ou diagonale ?

Un carré magique d'ordre 4 figure sur une gravure au burin d'Albrecht DÜRER : **La Mélancolie** (représentée en couverture). Le nombre formé par les deux cases centrales de la ligne du bas donnent la date de composition de l'œuvre : 1514.

Une étude complète des carrés magiques d'ordre 4 a été réalisée par Édouard LUCAS (1842-1891) dans ses *Récréations Mathématiques*. On y trouve notamment un moyen de construire rapidement un tel carré. On remplit d'abord le carré avec les nombres entiers de 1 à 16 suivant l'ordre naturel (cf. ci-dessous, premier carré), on échange ensuite chacun des huit nombres marqués par un disque noir avec son symétrique par rapport au centre du carré et on obtient un carré magique (dernier carré ci-contre).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

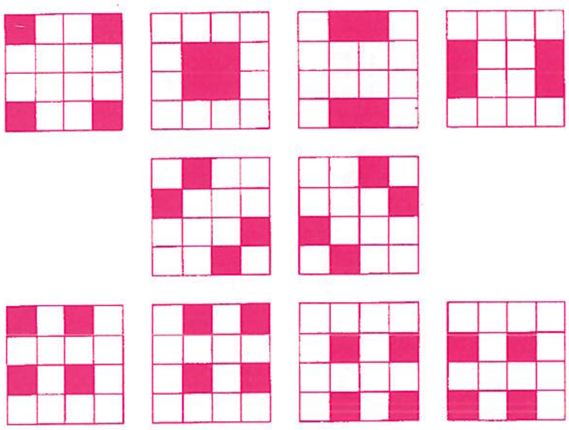
À présent, divise le carré d'ordre 4 en quatre quartiers selon les médianes. Effectue la somme des nombres d'un même quartier. Qu'obtiens-tu ? La constante magique de ce carré ! Tous les carrés magiques d'ordre 4 possèdent-ils cette propriété ? Essaie de construire un carré magique d'ordre 4 qui ne la possède pas.

Une petite aide peut évidemment te faciliter la tâche : ci-dessous, nous te donnons l'un des quartiers.

4	9
11	8

Comme tu le constates, la somme des nombres de ce quartier n'est pas égale à la constante magique du carré d'ordre 4 (qui vaut 34).

Bien que, parmi les carrés d'ordre 4, les carrés magiques à quartiers égaux soient les plus faciles à construire, ils restent malgré tout exceptionnels. On y retrouve, en effet, vingt-quatre fois la constante magique. Dix fois lorsqu'on additionne les nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Quatre autres fois quand on effectue la somme des nombres d'un même quartier. Les figures suivantes montrent où cette constante apparaît dix fois encore. Dans chaque cas, il suffit d'additionner les nombres se trouvant dans les cases noircies.



Mais, même si le carré n'est pas à quartiers égaux, les sommes provenant des six premières figures ci-dessus restent magiques. Par contre, un carré magique d'ordre 4 n'est à quartiers égaux que si la somme des nombres d'un même quartier ou d'une des quatre dernières figures ci-dessus est égale à la constante magique. Que d'affirmations ! Pourrais-tu les démontrer ?

La difficulté de créer un carré magique d'ordre n augmente avec n. Bien sûr, des procédés de construction, plus ou moins complexes, existent — nous les exposerons dans un prochain numéro. Mais ceux-ci sont entièrement mécaniques et annihilent l'aspect ludique du problème. Aussi, devrais-tu essayer de construire des carrés magiques d'ordre 5, 6, 7 ou 8 avant de connaître ces méthodes. Peut-être auras-tu alors la chance d'en découvrir l'une ou l'autre.

Pour remplir un carré magique d'ordre n, il faut commencer par déterminer la constante magique. Pour cela, il suffit de calculer la somme des nombres entiers de 1 à n^2 et de diviser le résultat par n puisque ces n^2 nombres se répartissent sur n lignes. On obtient

$$s = \frac{n \times (n^2 + 1)}{2}.$$

Ainsi, pour $n = 5$, la constante magique vaut $s = \dfrac{5 \times 26}{2} = 65$.

La notion de carré magique a beaucoup évolué depuis sa lointaine apparition. Elle s'est notamment étendue à des ensembles de nombres entiers qui ne sont pas nécessairement consécutifs, ni même différents. Voici de tels carrés d'ordre 3.

10	5	12
11	9	7
6	13	8

Les nombres sont consécutifs, mais ne commencent pas à 1. La « somme magique » n'est donc plus 15.

17	9	6
13	14	15
12	19	11

Les nombres ne sont plus consécutifs et la « somme magique » vaut maintenant 42.

12	9	15
15	12	9
9	15	12

Seuls trois nombres différents ont été utilisés. La « somme magique » est égale à 36.
Des contraintes supplémentaires peuvent aussi être imposées au carré magique. Par exemple, exiger que la somme de deux cellules symétriques par rapport au centre du carré soit toujours égale à $\dfrac{n^2+1}{2}$. Le carré est alors qualifié de **symétrique**. C'est le cas de tout carré d'ordre 3 ; c'est aussi le cas du carré de DÜRER. Notons que tout carré magique symétrique d'ordre 4 est à quartiers égaux ; la réciproque n'est pas vraie. Je te laisse le soin de démontrer cette assertion.

Avant de nous quitter, voici un dernier problème.

Construire un carré magique d'ordre 4, dont la « constante magique » vaut 111, constitué uniquement de nombres premiers différents.

Bibliographie

[1] Claude-Gaspar BACHET, SIEUR DE MÉZIRIAC, *Problèmes Plaisants & Délectables qui se font par les nombres*, Libr. Scient. et Techn. A. Blanchard, 9 rue de Médicis, Paris, 1993.

[2] W.W. Rouse BALL & H.S.M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications, New York, 1987.

[3] Maurice KRAITCHIK, *Mathematical Recreations*, Dover Publications, New York, 1953.

[4] Édouard LUCAS, *Récréations Mathématiques*, A. Blanchard, Paris, 1992.

Solution du problème général des traversées (M-J, numéro 76)

Notons d'abord que, pour $n = 2$, le problème n'a pas de solution puisque le bateau ne pourrait transporter qu'une seule personne à la fois. Pour $n = 3$, il s'agit du problème des trois ménages déjà traité. La solution qui suit vaut pour $n > 4$.

La solution qui suit n'est pas valable pour $n = 4$. En effet, lors du septième passage de la rivière, quatre personnes traversent ensemble alors qu'il ne peut y en avoir que trois au plus quand $n = 4$. Dans ce cas, il faut dédoubler le dernier voyage : les deux hommes passent d'abord, puis une femme vient chercher leurs épouses restées seules sur la rive de départ.

Nous notons H_1, H_2, …, H_{n-1}, H_n les maris et F_1, F_2, …, F_{n-1}, F_n leurs femmes respectives.

	Rive de départ	Sens	Rive opposée
1	$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ $F_1, \underline{F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n}$	$>$	
2	$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ F_1	$<$	$\underline{F_2}, \ldots, F_{n-1}, F_n$
3	$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ $\underline{F_1, F_2}$	$>$	$F_3 \ldots, F_{n-1}, F_n$
4	$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$	$<$	$\underline{F_1}, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n$
5	$H_1, \underline{H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n}$ F_1	$>$	$F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n$
6	H_1 F_1	$<$	$\underline{H_2}, \ldots, H_{n-1}, H_n$ $\underline{F_2}, \ldots, F_{n-1}, F_n$
7	$\underline{H_1, H_2}$ $\underline{F_1, F_2}$	$>$	$H_3, \ldots, H_{n-1}, H_n$ $F_3 \ldots, F_{n-1}, F_n$
8			$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}, H_n$ $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n$

Math-Jeunes n° 77, 46–47, 1996

Flatland - A Romance of Many Dimensions

Edwin A. Abbot

Première partie : Ce monde

« *Sois patient, car le monde est vaste et immense.* »

1. —À propos de la nature de Platpays

Notre monde, je l'appellerai Platpays, non pas parce que nous le désignons ainsi mais afin de mieux vous faire comprendre sa nature, heureux lecteurs qui avez le privilège de vivre dans l'Espace.

Imaginez une immense feuille de papier sur laquelle des Segments, des Triangles, des Carrés, des Pentagones, des Hexagones et d'autres figures, au lieu de rester tranquillement à leur place, voyagent librement sur la surface, sans pouvoir se déplacer ni vers le haut ni vers le bas, tout à fait comme des ombres — mais consistantes et avec des arêtes lumineuses — et vous aurez alors une notion assez correcte de mon pays et de ses habitants. Hélas, il y a quelques années, j'aurais dit « mon univers » : mais maintenant, mon esprit s'est ouvert à une vision plus élevée des choses.

Dans un tel pays, vous vous rendrez immédiatement compte qu'il est impossible de rencontrer ce que vous appelez un objet de type « solide » ; mais j'ose avancer que vous supposerez que nous pouvons au moins distinguer d'un coup d'œil les Triangles, Carrés et autres figures qui se déplacent comme je l'ai dit. Bien au contraire, nous ne pouvions rien voir de tout cela, même pas distinguer une figure d'une autre. Rien n'était visible, ne pouvait être visible par nous si ce n'étaient des Segments ; et je vais rapidement démontrer le pourquoi de cette situation.

Placez un *penny* au milieu de l'une de vos tables dans l'Espace, et tout en vous penchant vers l'avant, regardez vers le bas dans sa direction. Vous verrez un cercle.

Mais maintenant, tout en vous déplaçant vers l'arrière, baissez votre œil petit à petit (vous mettant ainsi de plus en plus dans les conditions connues des habitants de Platpays), vous verrez le *penny* devenir de plus en plus ovale ; enfin lorsque vous aurez placé votre œil exactement au niveau du bord de la table (ainsi vous serez vraiment dans la peau d'un habitant de Platpays), le *penny* aura alors totalement cessé de vous paraître de forme ovale, et il sera devenu, aussi loin que vous puissiez le voir, un segment de droite.

Ce phénomène se produirait aussi si vous deviez traiter de la même manière un Triangle ou un Carré ou toute autre figure découpée dans du carton. Dès que vous le regardez avec votre œil visant le bord de la table, vous trouvez que l'objet cesse de ressembler à une figure et qu'il prend l'apparence d'un segment. Prenons par exemple un Triangle équilatéral — qui représente chez nous un commerçant honorable. La figure 1 montre le commerçant tel que vous le verriez si vous vous penchiez par dessus ; les figures 2 et 3 représentent le commerçant tel que vous le verriez si votre œil approchait ou était à la limite du niveau de la table ; et si votre œil était tout à fait au niveau de la table (et c'est comme cela que nous le voyons en Platpays), vous ne verriez rien d'autre qu'un segment de droite.

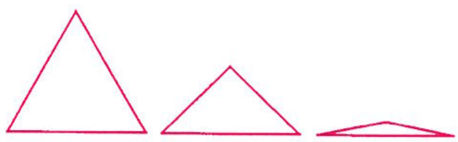


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Lorsque j'étais dans votre Espace, j'ai entendu dire que vos marins vivent des expériences fort semblables lorsqu'ils traversent vos mers et aperçoivent quelque île distante ou côte à l'horizon. Le pays lointain peut avoir des baies, des caps, des angles vers l'intérieur ou l'extérieur de quelque nombre et étendue que ce soit ; effectivement, à partir d'une certaine distance, on ne voit rien de cela (à moins bien sûr que votre soleil ne brille sur le tout, révélant saillies et replis par le jeu de la lumière et de l'ombre), on ne voit rien qu'une ligne grise et continue sur l'eau.

Eh bien, c'est exactement ce que nous voyons lorsque l'une de nos connaissances triangulaire ou autre vient vers nous en Platpays. Comme chez nous il n'y a ni soleil ni lumière du même type qui puisse engendrer des ombres, nous ne possédons aucun des moyens dont vous disposez dans votre Espace. Si notre ami s'approche de nous, son segment devient plus grand ; s'il nous quitte, il devient plus petit : mais il a toujours l'aspect d'un segment, qu'il soit un Triangle, un Carré, un Pentagone, un Hexagone, un Cercle ou quoi que vous vouliez — il ressemble à un segment et à rien d'autre.

Vous vous demandez peut-être comment, dans ces conditions défavorables, nous sommes capables de distinguer nos amis les uns des autres : je pourrai répondre facilement à cette question très naturelle d'une manière beaucoup plus précise lorsque j'aurai décrit les habitants de Platpays. Pour l'instant, permettez-moi de postposer le sujet et de dire quelques mots sur le climat et les maisons de notre pays.

Très cher abonné, si tu veux perfectionner ton anglais tout en vivant la géométrie plane dans une dimension nouvelle, nous te conseillons très sincèrement la lecture de *Flatland*. C'est un petit ouvrage de quatre-vingt pages qui accroche bien. Son prix modique (±50 BEF) ne devrait pas te rebuter. Il est publié chez *Dover Publications, Inc.*, collection que tu peux te procurer dans toute bonne librairie.

Solutions des jeux

Problème de tri

- Prendre le triplet $(9, 10, 14)$ et l'insérer entre les nombres 4 et 15 ;
- prendre le triplet $(12, 13, 4)$ et l'insérer entre les nombres 11 et 5 ;
- prendre le triplet $(11, 12, 13)$ et l'insérer entre les nombres 10 et 14 ;
- prendre le triplet $(3, 4, 5)$ et l'insérer entre les nombres 2 et 6.

Le mot caché

Le mathématicien amateur de grande classe était FERMAT (Pierre de).

Produits croisés

C	R	O	I	X
R	O	S	S	E
O	S	I	E	R
I	S	E	R	E
X	E	R	E	S

Le mur des nombres

		423		
	188		235	
91		97		138
57	34		63	75
45	12	22	41	34


HÉ,TOI! PENSE À UN NOMBRE INFÉRIEUR À 105, DIVISE-LE PAR 3 ET DONNE-MOI LE RESTE!
59 = 3 × 19 + 2
2
HMM! 2×70 = 140
140 - 105 = 35
BON! À PRESENT, DIVISE TON NOMBRE PAR 5... QUE VAUT LE RESTE?!
59 = 5×11+4
HÉ BIEN, IL VAUT 4!
4×21 = 84
84+35 = 119
119 - 105 = 14
MAINTENANT, TU LE DIVISES PAR 7!
59 = 7×8+3
ET LE RESTE VAUT 3...
MMGN... ATTENDS! JE CALCULE!
3×15 = 45
45+14 = 59
TU AVAIS CHOISI 59!!
HEUU... OUI, OUI!
HAHAHAAAA...
JE SUIS LE MAÎTRE DU MONDE!

F'96