MATH-JEUNES

Jean-Pierre Baldini – PYRAMUSE

18e année
Février 1997 – n° 78
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux et F.Pourbaix
Conception de la couverture : K. Martroye & M. Ballieu

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 78 Dix-huitième année 1997

Math-Jeunes

Rallye Problèmes **50**

54 *Daniel Justens & Claude Maerschalk,* **La preuve par neuf en « mathémagie » (suite et fin)**

Michel Ballieu, **La page du mathémartiste** **56**

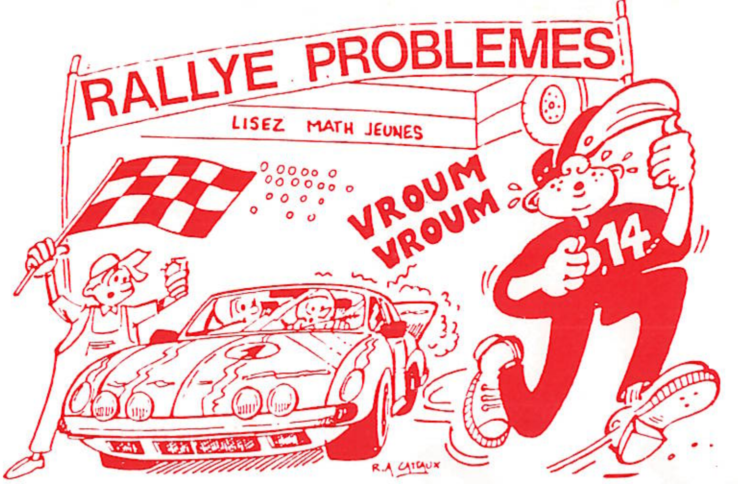
57 *Nick Mackinnon,* **Le carré magique de la Mélancolie de Dürer**

BD **58**

59 *Michel Ballieu,* **Une autre magie du carré**

Jeux **60**

61 *Vingt-deuxième Olympiade Mathématique Belge*



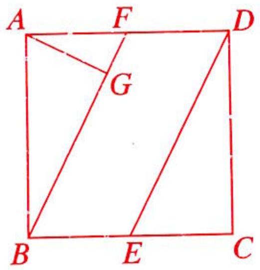
Math-Jeunes n° 78, 50–53, 1997

C. Festraets

Voici les derniers problèmes de ce rallye 1996 – 1997 ainsi que les solutions des problèmes proposés dans le numéro 76 de *Math-Jeunes*.

N'oubliez pas d'envoyer vos solutions sur des feuilles séparées (ne mettez pas la solution d'un problème au recto et celle d'un autre au verso de la même feuille). Elles doivent parvenir au plus tard le 14 mars 1997 à C. Festraets, 36 rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

mini 5 On partage un carré en quatre pièces comme l'indique la figure ci-dessous



F est le milieu de $[AD]$, E le milieu de $[BC]$ et l'angle $\widehat{AGB}$ est droit.

Montrer qu'avec ces quatre pièces, on peut former un rectangle et calculer les dimensions de ce rectangle sachant que son aire vaut 4.

mini 6 1 000 points sont donnés dans le plan et sont tels que l'aire du triangle formé par trois quelconques d'entre eux est toujours inférieure à 1. Démontrer qu'il existe un triangle d'aire inférieure à 4 et qui contient tous ces points.

midi 5 Résoudre l'équation

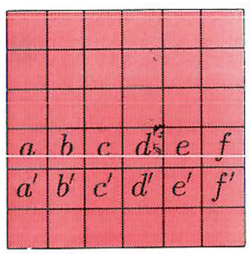
$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{x-1} + a^x = (1 + a) \times (1 + a^2) \times (1 + a^4) \times (1 + a^8) \times (1 + a^{16}) \times (1 + a^{32})$$

où x est l'inconnue appartenant à l'ensemble des réels et a un nombre naturel non nul donné.

midi 6* Combien existe-t-il de carrés parfaits dans l'ensemble

$$\begin{array}{l} 1,\ 11,\ 111,\ 1\,111,\ 11\,111,\ \cdots \\ 2,\ 22,\ 222,\ 2\,222,\ 22\,222,\ \cdots \\ 3,\ 33,\ 333,\ 3\,333,\ 33\,333,\ \cdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ 9,\ 99,\ 999,\ 9\,999,\ 99\,999,\ \cdots ? \end{array}$$

maxi 5 Chaque case d'un échiquier $n \times n$ contient soit $+1$, soit -1. On choisit deux rangées horizontales et on fait la somme des produits des termes appartenant à la même colonne, par exemple :



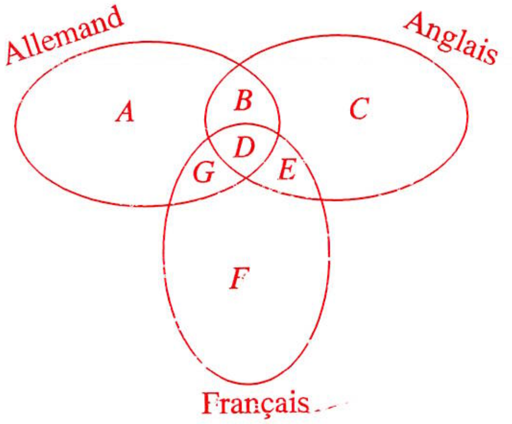
$$aa' + bb' + cc' + dd' + ee' + ff'$$

Si, quel que soit le choix des deux rangées horizontales, cette somme est toujours nulle, alors démontrer que la somme totale de tous les nombres du tableau est inférieure ou égale à $n\sqrt{n}$.

maxi 6* On donne 17 nombres entiers positifs. Démontrer qu'il est toujours possible d'en choisir 5 dont la somme est divisible par 5.

mini 1 – solution

Représentons par le diagramme ci-dessous l'ensemble des quarante élèves de la classe.



A est le nombre d'élèves qui n'étudient que l'allemand, $B + D$ est le nombre d'élèves qui étudient l'allemand et l'anglais, B est le nombre d'élèves qui étudient l'allemand et l'anglais mais pas le français, etc. Il y a en tout 40 élèves, donc

$$A+B+C+D+E+F+G = 40 \qquad (*)$$

Puisque 34 élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand, il y en a 6 (40−34) qui n'étudient que le français, donc $F = 6$.

Puisque 25 élèves étudient au moins le français ou l'allemand, il y en a 15 (40 − 25) qui n'étudient que l'anglais, donc $C = 15$.

6 élèves n'étudient que l'allemand, donc $A = 6$.

Aucun élève n'étudie à la fois le français et l'anglais, donc $D = E = 0$.

Le nombre d'élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand est $B + D$; le nombre d'élèves qui étudient à la fois le français et l'allemand est $G + D$. On a donc

$$B + D = G + D + 3$$

mais puisqu'on sait que $D = 0$, on a $B = G + 3$. Remplaçons dans l'égalité ($*$) toutes les valeurs que nous venons de déterminer :

$$\begin{aligned} 6 + G + 3 + 15 + 6 + G &= 40 \\ 2G + 30 &= 40 \\ G &= 5 \end{aligned}$$

et dès lors, $B = 8$.

mini 2 – solution

$A \times B$

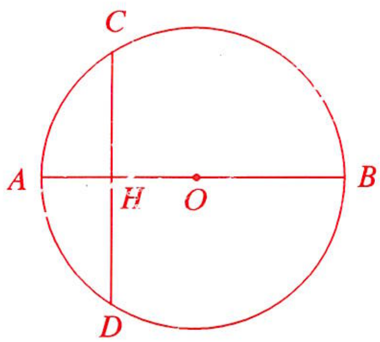
$$\begin{aligned}
&= \underbrace{666\cdots66}_{100 \text{ chiffres}} \times \underbrace{333\cdots33}_{100 \text{ chiffres}} \\
&= 6 \times \underbrace{111\cdots11}_{100 \text{ chiffres}} \times 3 \times \underbrace{111\cdots11}_{100 \text{ chiffres}} \\
&= 2 \times \underbrace{111\cdots11}_{100 \text{ chiffres}} \times 9 \times \underbrace{111\cdots11}_{100 \text{ chiffres}} \\
&= \underbrace{222\cdots22}_{100 \text{ chiffres}} \times \underbrace{999\cdots99}_{100 \text{ chiffres}} \\
&= \underbrace{222\cdots22}_{100 \text{ chiffres}} \times (1\underbrace{000\cdots00}_{100 \text{ chiffres}} - 1) \\
&= \underbrace{222\cdots22}_{100 \text{ chiffres}}\underbrace{000\cdots00}_{100 \text{ chiffres}} - \underbrace{222\cdots22}_{100 \text{ chiffres}} \\
&= \underbrace{222\cdots22}_{99 \text{ chiffres}}1\underbrace{777\cdots77}_{99 \text{ chiffres}}8
\end{aligned}$$

midi 1 – solution

Considérons l'ensemble T de tous les triangles dont les sommets appartiennent à S. Puisque S comprend un nombre fini de points, T comprend un nombre fini de tels triangles. De plus, comme S comprend au moins 5 points, il y en a au moins 3 de la même couleur. Et comme ces points ne sont pas alignés, il y a au moins un triangle dont les trois sommets sont de la même couleur (triangle « monochromatique »).

Parmi tous les triangles « monochromatiques » appartenant à T, envisageons celui (ou un de ceux) dont l'aire est la plus petite, soit τ. Si chacun des côtés de τ comprenait un point de l'autre couleur, alors il existerait un triangle « monochromatique » (de couleur opposée à celle de τ) et d'aire strictement inférieure à celle de τ, ce qui est contraire au choix de τ. Donc au moins un des côtés de τ ne comprend aucun point de l'autre couleur.

midi 2 – solution



Soit a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités de la longueur du diamètre $[AB]$.

$$|AB| = 10a + b \quad \text{et} \quad |CD| = 10b + a$$

d'où $|OC| = \frac{1}{2}(10a + b)$ et $|CH| = \frac{1}{2}(10b + a)$.

Dans le triangle rectangle OHC, calculons $|OH|$:

$$\begin{aligned} |OH|^2 &= |OC|^2 - |CH|^2 \\ &= \frac{1}{4}(100a^2 + 20ab + b^2) \\ &\quad -\frac{1}{4}(100b^2 + 20ba + a^2) \\ &= \frac{1}{4}(99a^2 - 99b^2) \\ &= \frac{9}{4} \times 11 \times (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

Pour que $|OH|$ soit un nombre rationnel, il faut que $11(a^2 - b^2)$ soit un carré parfait. Donc il existe un naturel non nul k tel que $a^2 - b^2 = 11k^2$ (si k était nul, on aurait $|OH| = 0$ et la corde $[CD]$ aurait même longueur que le diamètre $[AB]$).

Si $k = 1$, alors, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 11$ ce qui donne

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$$

Si $k = 2$, alors, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 44$, mais a et b étant des chiffres, la valeur maximum de $a + b$ est $9 + 9 = 18$, d'où

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7,5 \\ b = 3,5 \end{cases}$$

qui ne convient pas.

Si $k \geqslant 3$, alors $a^2 - b^2 \geqslant 99$, ce qui est impossible car la valeur maximale de la différence des carrés de deux chiffres est $81 - 0 = 81$.

La longueur du diamètre $[AB]$ vaut donc 65.

maxi 1 – solution

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ les vingt-cinq chevaliers et soient a_1, a_2, a_3 les trois chevaliers choisis. Si nous fixons la position de a_1, il y a $24!$ possibilités pour placer les 24 chevaliers restants. Comptons les possibilités où deux au moins des trois chevaliers choisis sont assis l'un à côté de l'autre.

- a_1, a_2, a_3 sont assis côte à côte : on a 6 possibilités ($a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$) pour les trois chevaliers choisis et $22!$ possibilités pour les 22 autres chevaliers.

- a_1, a_2 sont assis côte à côte, a_3 n'est pas leur voisin : on a 2 possibilités (a_1a_2, a_2a_1) pour a_1, a_2, 21 possibilités pour a_3 (il reste 23 places mais a_3 ne peut s'asseoir à côté de a_1 ou de a_2) et 22 ! possibilités pour les autres chevaliers.
- a_1, a_3 sont assis côte à côte, a_2 n'est pas leur voisin : le même raisonnement nous donne $2 \times 21 \times 22!$
- a_2, a_3 sont assis côte à côte, a_1 n'est pas leur voisin : on retrouve la même situation pour la troisième fois.

La probabilité cherchée vaut donc

$$\frac{6 \times 22! + 2 \times 21 \times 22!}{24!}$$

$$+\frac{2 \times 21 \times 22! + 2 \times 21 \times 22!}{24!}$$

c'est-à-dire

$$\frac{6 + 2 \times 21 + 2 \times 21 + 2 \times 21}{24 \times 23}$$

ou encore

$$= \frac{6 \times 22}{24 \times 23} = \frac{11}{46}$$

maxi 2 – solution

Soient A et B deux nombres entiers avec $A > B$. Effectuons la division euclidienne de A par B. Si le quotient est q et le reste r, on obtient

$A = Bq + r$ si r est le reste par défaut
$A = Bq - r$ si r est le reste par excès.

Tout diviseur de A et de B divise aussi $A - Bq = \pm r$, donc le pgcd de A et de B est aussi le pgcd de B et de $\pm r$.

Appliquons ceci à $n^3 + 1$ et $n^2 + 2$:

$$n^3 + 1 = (n^2 + 2)n - (2n - 1)$$

Le pgcd de $n^3 + 1$ et $n^2 + 2$ est égal au pgcd de $n^2 + 2$ et $2n - 1$.

$$n^2 + 2 = (2n - 1)\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 2$$

Le pgcd de $n^2 + 2$ et $2n - 1$ est égal au pgcd de $2n - 1$ et $\frac{n}{2} + 2$ (remarquons que $\frac{n}{2}$ est bien un nombre entier puisque n est pair).

$$2n - 1 = (\frac{n}{2} + 2)4 - 9$$

Le pgcd de $2n - 1$ et $\frac{n}{2} + 2$ est égal au pgcd de $\frac{n}{2} + 2$ et 9. Ainsi le pgcd cherché est un diviseur de 9.

1 996 n'est pas un multiple de 3; le reste de la division de 1 996 par 3 vaut 1 et donc le reste de la division de toute puissance de 1 996 par 3 est toujours 1 et le reste de la division de $n^3 + 1$ par 3 vaut 2. Si $n^3 + 1$ n'est pas divisible par 3, il ne l'est pas non plus par 9. Par conséquent, le pgcd cherché vaut 1.

Courrier des lecteurs

Suite à la publication dans *Math-Jeunes* 76 de la date de décès de Maurice KRAÏTCHIK sous la forme ????, nous avons reçu deux courriers. Celui de Monsieur Jack G. SEGERS nous informe que Maurice Borisovič KRAÏTCHIK est mort en 1957. Il nous donne aussi (avec références) la liste de ses publications jusqu'en 1931. De plus grâce à Monsieur SEGERS, nous pourrons publier prochainement dans ces colonnes d'intéressantes précisions sur le *Fore and Aft Puzzle* présenté dans le même numéro 76 de *Math-Jeunes*.

L'autre courrier nous vient de Monsieur François JONGMANS, professeur émérite à l'Université de Liège : KRAÏTCHIK est né à Minsk le 21 avril 1882 et mort à Bruxelles le 19 août 1957 (d'après ERRERA in *Mathesis*, 1957, t.66, p.308-309).

La Rédaction remercie très sincèrement ces deux fidèles lecteurs.

 Math-Jeunes n° 78, 54–55, 1997

La preuve par neuf en « mathémagie » (suite et fin)

Daniel Justens & Claude Maerschalk, *Univ. Liège & U.L.B. + Cercle Belge d'Illusionnisme*

5. La divination d'une carte dans un jeu

Les propriétés des naturels constituant le même élément du groupe quotient $9\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ sont encore utilisées ici :

- choisir un nombre quelconque de k chiffres ;
- « mélanger » ces mêmes chiffres pour obtenir un autre nombre de k chiffres ;
- soustraire le plus petit du plus grand ;
- additionner les chiffres successivement jusqu'à l'obtention d'un nombre à un seul chiffre ; ce dernier est toujours le chiffre **neuf** ;
- la carte que doit transmettre « mentalement » l'auditeur-spectateur est ainsi toujours la neuvième du paquet qui, bien entendu, est déjà connue de l'illusionniste.

Des présentations multiples de la même routine sont évidemment possibles. On peut demander à l'interlocuteur d'entourer un des chiffres du résultat et de dicter les autres dans un ordre quelconque. Le récepteur se concentre alors un peu et donne le chiffre entouré qui n'est jamais que le complémentaire de la somme au plus proche multiple de neuf supérieur.

6. Utilisation des suites de Fibonacci

Un autre exemple de calcul prodige peut se trouver dans l'utilisation de résultats arithmétiques simples. On construit une suite de Fibonacci en choisissant deux nombres entiers a et b et en considérant qu'à partir de là, chaque terme (donc à partir du troisième) est donné par

$$t_k = t_{k-1} + t_{k-2} \qquad (k \geqslant 3)$$

On vérifie sans peine que la somme des dix premiers termes de la suite est alors égale à onze fois le septième. Ainsi, avec la notation employée ci-dessus, le septième terme vaut $5a + 8b$ et la somme des dix premiers termes, $55a + 88b$. L'extrême facilité de la multiplication par 11 conduit le calculateur prodige à présenter un résultat correct bien avant le spectateur naïf armé de sa calculette !

7. En guise de conclusion

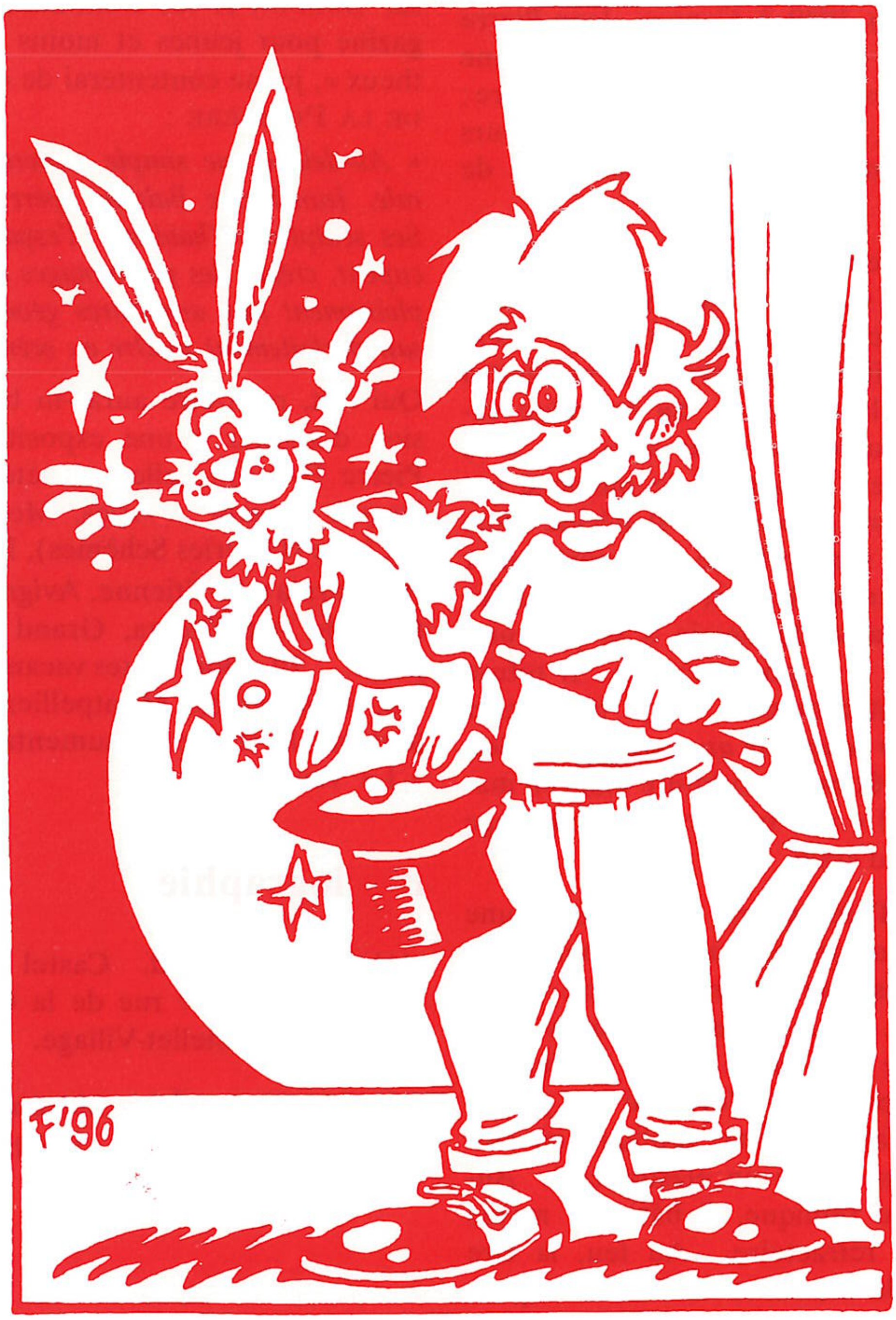
Il apparaît qu'en matière d'illusionnisme, la manière de présenter un tour vaut souvent mieux que son contenu. En « déshabillant » les routines de leurs artifices, elles paraissent toutes élémentaires. Il en est de même pour la toute grande illusion, dont les principes, une fois dévoilés, semblent évidents, et dont les résultats, habilement présentés, nous stupéfient. Tout l'art du magicien consiste à détourner l'attention de ce que nous venons de montrer crûment et sans artifice. Il nous vient quelques remords d'avoir brisé et détruit un peu cette part de rêve dont nous avons tous besoin. Mais, tout compte fait, la dextérité et le sens théatral de certains magiciens ne sont-ils pas plus aptes à nous émerveiller que le verbiage abscons des faux mages qui occupent nos magazines, nos radios, nos téléviseurs et qui ne possèdent d'autre don que celui d'asseoir leur célébrité (et leur aisance matérielle ...) en exploitant la crédulité des naïfs ?

Bibliographie

[1] Henri BROCH, *Le paranormal, ses documents, ses hommes, ses méthodes*, Éditions du Seuil, Collection Points Sciences, 1989.

[2] Martin GARDNER, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover Publications Inc., New York, 1956.

[3] Harry LORAYNE, *The Magic Book, Magix*, Éditions du Spectacle, Strasbourg, 1991.



 Math-Jeunes n° 78, 56–56, 1997

La page du mathémartiste

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

À propos de Jean-Pierre Baldini ...

Sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, tu peux admirer une sculpture de Jean-Pierre BALDINI : **Pyramuse, Bronze 10 × 41 × 20.**

S'il est né en 1949 à Cannes, Jean-Pierre BALDINI n'en est pas moins originaire d'une des plus belles villes du monde : Florence ; et sans doute, la Toscane aux riches couleurs a-t-elle eu une influence sur son sens de l'esthétisme.

Il fait ses premiers pas dans le travail du bois à l'âge de seize ans avec un sculpteur d'origine espagnole, ALMELA. L'expérience qu'il en acquerra lui permettra de passer à la création. Sa première exposition d'œuvres sur bois aura lieu à la Mairie d'Arles, sans trop de publicité car l'artiste est très modeste. Il décide alors de travailler sans relâche, d'expérimenter pour maîtriser totalement l'ombre et la lumière : il passe du dessin à la peinture, à la gravure, à la photographie. Il refuse l'esthétique stéréotypée : « *Je veux rester moi-même, un sculpteur au quotidien* ». Son centre d'intérêt est la sculpture dans un matériau « royal » : le bronze, subtil mélange de cuivre et d'étain.

La création d'une œuvre, c'est d'abord une idée, qui se concrétise tout doucement, ... : croquis, réalisation en argile, plâtre et enfin, fonderie. L'une des techniques utilisées est celle dite de la « cire perdue » : en gros, à partir de l'original en plâtre, le fondeur fabrique une réplique en cire (à l'aide d'un moule en élastomère). Autour de cette réplique, il bâtit un moule en matériau réfractaire. Au feu, la cire est chassée du moule et c'est dans l'espace qu'elle occupait qu'est coulé le bronze en fusion. Après refroidissement, il reste à ciseler, polir, et ... — c'est là qu'intervient l'artiste pour la dernière fois — « patiner » l'œuvre afin de la rendre conforme à sa conception primitive.

On pourrait encore dire pas mal de choses sur BALDINI et ses créations ; dans ce magazine pour jeunes et moins jeunes « matheux », je me contenterai de citer PATRICE DE LA PERRIÈRE :

« *Au-delà d'une simple recherche architecturale, Jean-Pierre Baldini opère en magicien. Ses sculptures "habitent" l'espace qu'elles occupent, créant des personnages qui s'intègrent pleinement aux armatures géométriques qu'il sait parfaitement mettre en scène.* »

Qui sait, peut-être auras-tu bientôt l'occasion d'assister à une exposition de Jean-Pierre BALDINI ; elles ont été nombreuses jusqu'à présent : Arles, Montpellier, Paris, Lille (Galeries Schèmes), Laguna Beach (California), St-Étienne, Avignon, Bruxelles (Galerie Art Thema, Grand Sablon), Dijon, ... Et si lors de tes vacances vers le soleil, tu passes par Montpellier, ne rate surtout pas la statue monumentale (2.50 m) : « Le Vent ».

Bibliographie

[1] *BALDINI*, Éd. Castel Art - Eynaud J.F. - 7 rue de la Congrégation, 83330 Castellet-Village.

[2] *BALDINI*, Éd. Mécénart - René Meulemans, rue Édith Cavell 88, 1180 Bruxelles.

Le carré magique de la Mélancolie de Dürer

Nick Mackinnon, *Winchester College, U.K.*

Dans le Newsletter 32 (Autumn 96) édité par The British Society for the History of Mathematics (BSHM), *mon attention a été attirée par un* abstract *c'est-à-dire une sorte de résumé d'un exposé donné par Nick Mackinnon lors d'une rencontre ayant pour thème* History of recreational mathematics, *le 1 juin 1996 (University of the South Bank).*
J'ai immédiatement écrit à John Fauvel, Faculty of Mathematics, Open University, Milton Keynes, rédacteur en chef de ce Newsletter qui m'a très aimablement donné l'autorisation de traduire l'abstract en question aux fins de publication dans la revue Math-Jeunes. *Au nom des lecteurs et de la rédaction, je l'en remercie très chaleureusement. Voici donc le texte.*

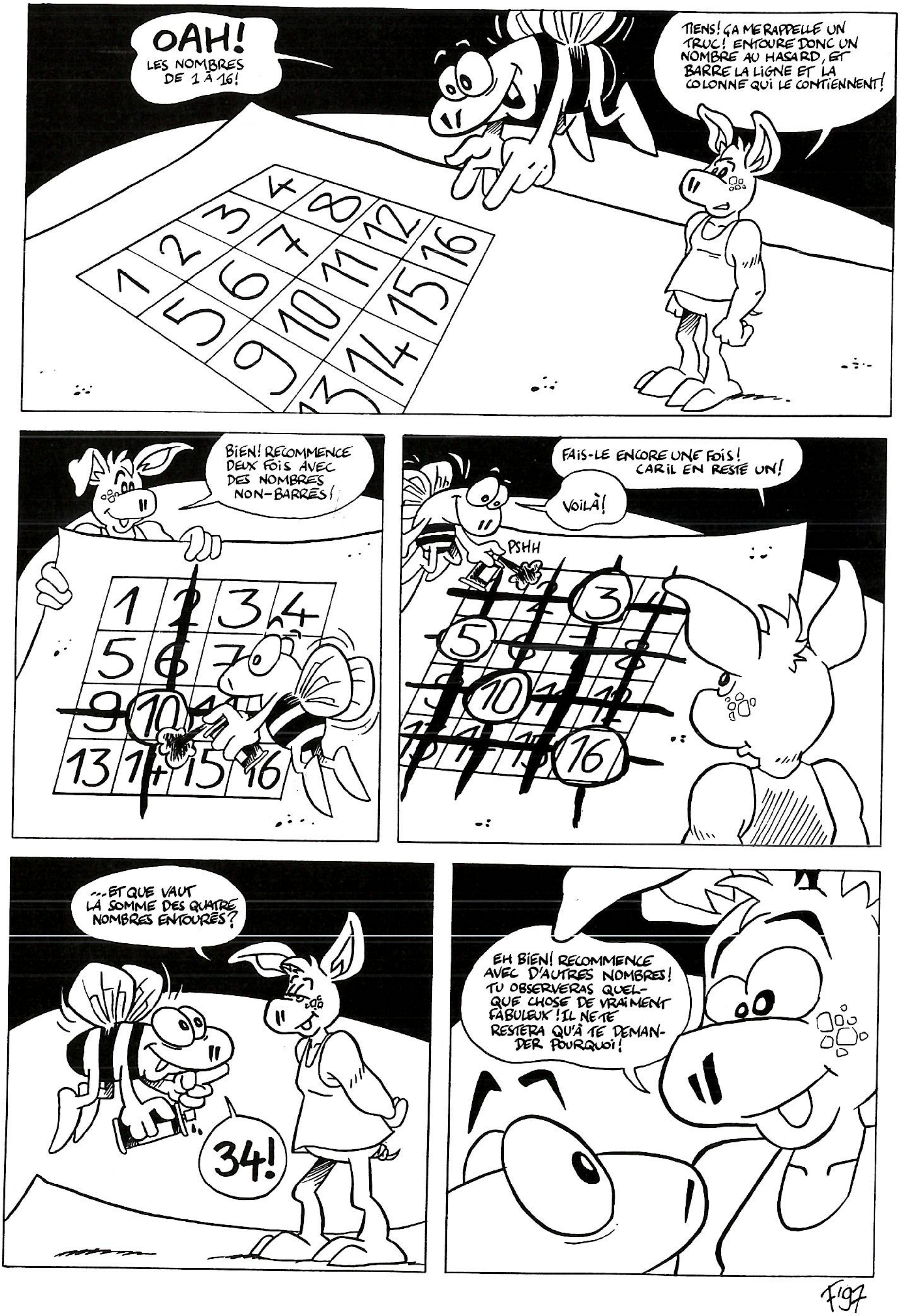
Michel Ballieu

La gravure *Melencolia I* (1514) d'Albrecht DÜRER contient le premier exemple imprimé d'un carré magique. Ce carré magique 4×4 est précisément celui qui fut mentionné quelques années plus tôt dans un manuscrit de Luca PACIOLI comme « quelque chose » attribué à Jupiter qui permet de ne pas sombrer dans la mélancolie. La ligne du bas contient les nombres « 15 14 », l'année de la composition de la gravure. Le 4 mai 1514 Saturne est en exacte opposition avec le Soleil et, quelques heures plus tard, Jupiter arrive en conjonction exacte : un alignement qui ne se produit qu'au plus une fois tous les millénaires. Ainsi, en ce jour, Saturne se lève dans le signe de la Balance – symbolisée dans la gravure par une balance – au moment même où Jupiter se couche dans le signe de la Vierge. La carte des étoiles (1514) de DÜRER montre un personnage pour le signe zodiacal de la Vierge (la Vierge Marie) qui a beaucoup de points communs avec le personnage de *Melencolia* mais aussi avec la *Madone au mur de la cité* peinte la même année. Par comparaison avec cette dernière œuvre, l'enfant dans *Melencolia I* a été légèrement déplacé et là où il aurait dû être, on voit un compas. Mais il reste assez d'atmosphère chrétienne dans l'iconographie pour pouvoir conjecturer que les outils disposés à l'avant-plan sont ceux du charpentier Joseph, le mari de la Vierge Marie.

On y trouve énormément de symbolisme classique. La mystérieuse forme géométrique bien visible ressemble à un cube tronqué qui, topologiquement, se situerait entre deux des solides platoniciens du *Timée* : le cube sombre, mélancolique et l'octaèdre jovial. Cette interprétation donne une idée de ce qu'on peut sérieusement tirer du contexte astronomique de la gravure fournissant ainsi une explication quelque peu plus alléchante et précise que celle avancée par certains historiens de l'art comme PANOFSKY.

Un élément supplémentaire qui vient étayer cette interprétation réside par exemple dans la mystérieuse échelle qui n'a ni commencement ni fin, cela ressemble de manière frappante à la manière avec laquelle DÜRER a tracé l'écliptique dans sa carte des étoiles de 1514 mais aussi dans la meule qui pourrait être un jeu de mot visuel ([1]) sur le nom du grand astronome REGIOMONTANUS (Johannes MÜLLER, anglicisé en John MILLER), qui fut un des précédents occupants de la maison de DÜRER à Nuremberg.

([1]) meule se dit en anglais *mill-stone*; le mot allemand *Müller* et le mot anglais *miller* signifient meunier.


OAH! LES NOMBRES DE 1 À 16!
TIENS! ÇA ME RAPPELLE UN TRUC! ENTOURE DONC UN NOMBRE AU HASARD, ET BARRE LA LIGNE ET LA COLONNE QUI LE CONTIENNENT!
BIEN! RECOMMENCE DEUX FOIS AVEC DES NOMBRES NON-BARRÉS!
FAIS-LE ENCORE UNE FOIS! CAR IL EN RESTE UN!
VOILÀ!
PSHH
...ET QUE VAUT LA SOMME DES QUATRE NOMBRES ENTOURÉS?
34!
EH BIEN! RECOMMENCE AVEC D'AUTRES NOMBRES! TU OBSERVERAS QUELQUE CHOSE DE VRAIMENT FABULEUX! IL NE TE RESTERA QU'À TE DEMANDER POURQUOI!
F'97

Une autre magie du carré

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

J'espère que tu as lu la dernière BD de Frédéric Pourbaix. J'espère aussi qu'en bon matheux, tu as eu la curiosité de recommencer le même petit jeu en cochant d'autres nombres de la grille et que tu as toujours trouvé comme somme 34.

Pourquoi toujours 34 ? Nous allons tenter de le voir ensemble.

Au sommet de chaque colonne de la grille 4×4, écris les nombres 1, 2, 3, 4. À gauche de chaque rangée, écris les nombres 0, 4, 8, 12.

	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

Ces huit nombres s'appellent les « générateurs » du carré ; on inscrit alors dans chaque case un nombre égal à la somme de ses générateurs (l'horizontal et le vertical), ce qui donne :

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Lorsqu'on encercle les nombres en respectant les consignes données dans la BD, aucun nombre ne peut être encerclé deux fois dans la même rangée ou dans la même colonne.

Puisque chaque nombre est la somme d'une seule paire de générateurs, la somme des quatre nombres encerclés est donc égale à la somme des huit générateurs, qui vaut ici 34.

Tu peux mettre des générateurs au hasard. La grille obtenue sera alors aussi aléatoire. Par exemple, celle ci-dessous dont la somme vaut toujours 42.

	4	18	11
3	7	21	14
1	5	19	12
5	9	23	16

Tu peux évidemment jouer avec des carrés plus grands ...

Il t'est aussi possible d'envisager des tas de variantes, comme construire une grille de 81 cases par exemple, dont la somme des générateurs vaut 81. Tu peux également choisir n'importe quel nombre évocateur, comme une année d'anniversaire ou l'année en cours.

Tu peux jouer avec des nombres négatifs, rationnels, irrationnels. Tu peux aussi faire le produit des nombres choisis plutôt que leur somme. Laisse donc libre cours à ton imagination et tu deviendras peut-être ... le maître du monde !!!

Crois-tu qu'il est facile de retrouver les générateurs ’une grille donnée ? Essaie, par exemple avec

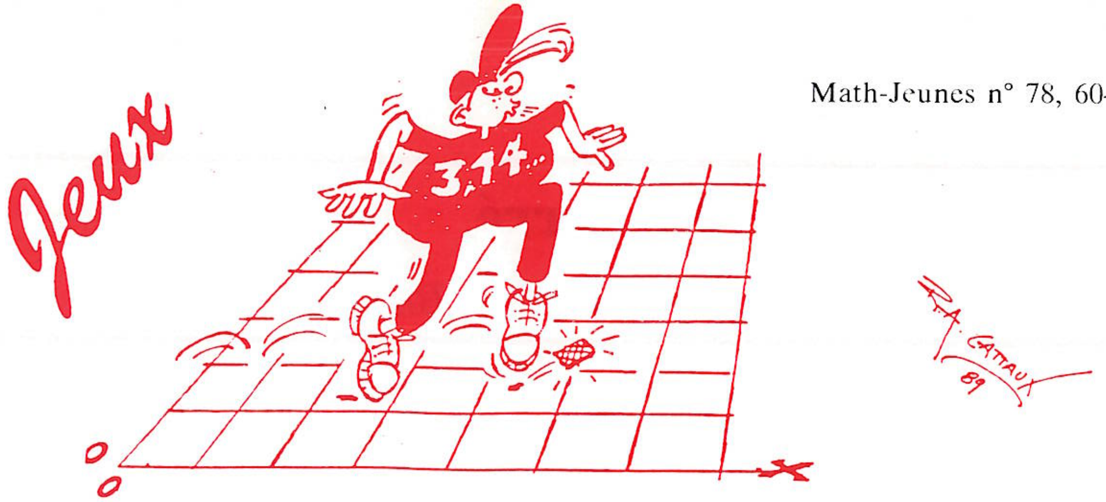
8	14	16	12	7
11	17	19	15	10
16	22	24	20	15
20	26	28	24	19
4	10	12	8	3

Bon amusement !

Bibliographie

[1] Martin Gardner, *La magie des paradoxes*, Bibliothèque POUR LA SCIENCE – Diffusion Belin, 1980

Math-Jeunes n° 78, 60–60, 1997



Problème de tri

Remettre la suite de nombres dans le bon ordre en répétant quatre fois l'opération suivante : prendre trois nombres qui se touchent et les placer entre deux autres nombres.

1 12 4 9 10 13 7 8 2 14 5 6 3 11 15

L'addition cachée

À chaque lettre est associé un chiffre permettant de reconstituer une addition cohérente. Peux-tu trouver une solution ?

$$\begin{array}{r} \text{D E U X} \\ +\ \text{N E U F} \\ \hline \text{O N Z E} \end{array}$$

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

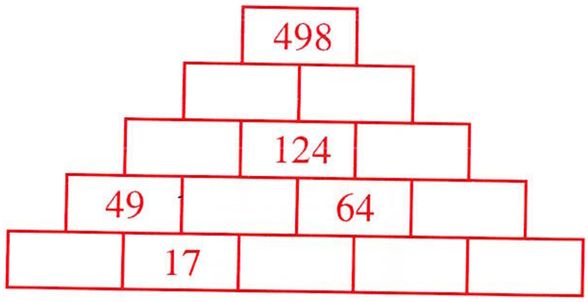
	1	2	3	4	5
1					
2				I	
3			I		
4		I			
5					

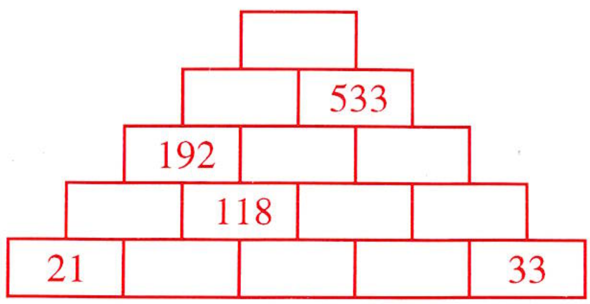
Horizontalement et verticalement

1. 240 825
2. 51, 300
3. 32 760
4. 24 570
5. 171 000

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.





OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

C. Van Hooste

Éliminatoires MINI

Question 9. Sommes d'argent

Différentes sommes d'argent sont constituées de pièces de 20 F et de 50 F ; dans chacune d'elles, il y a trois fois autant de pièces de 20 F que de pièces de 50 F. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand qui divise nécessairement toutes ces sommes (exprimées en francs) ?

Ⓐ 10 Ⓑ 70 Ⓒ 100 Ⓓ 110 Ⓔ 170

Solution

Si nous désignons par x le nombre de pièces de 50 F que compte une telle somme d'argent, il y a, dans la même somme, 3 x pièces de 20 F. Dès lors, cette somme (exprimées en francs) vaut

$$x \cdot 50 + 3x \cdot 20 = 50x + 60x = 110x.$$

Le plus grand nombre qui divise (à coup sûr) toutes les sommes est donc 110.

Réponse : D

Question 16. Pierre et Nathalie

Pierre et Nathalie parcourent 12 km à vélo. À chaque tour de pédales, Pierre avance de 6 m et Nathalie de 4 m. Si ni l'un ni l'autre ne cessent de pédaler, combien de tours de pédales Nathalie devra-t-elle effectuer de plus que Pierre ?

Ⓐ 1 000 Ⓑ 2 000 Ⓒ 3 000 Ⓓ 4 000 Ⓔ Une autre réponse

Solution

Pour accomplir les 12 km, Pierre doit effectuer $\frac{12\,000}{6} = 2\,000$ tours de pédales tandis que Nathalie doit en effectuer $\frac{12\,000}{4} = 3\,000$, soit 1 000 de plus que Pierre.

Réponse : A

Question 17. Le grand nombre

Quels sont les chiffres x et y si le nombre $474x\,13y$ est divisible par 8 et par 11 ?

Ⓐ $x = 0$ et $y = 3$ Ⓑ $x = 3$ et $y = 6$
Ⓒ $x = 5$ et $y = 6$ Ⓓ $x = 6$ et $y = 2$
Ⓔ $x = 7$ et $y = 8$

Bases théoriques

Pour qu'un nombre soit divisible par 8, il faut et il suffit que le nombre formé par ses trois derniers chiffres soit lui-même divisible par 8.

Ainsi, 7 458 184 est divisible par 8 parce que 184 est divisible par 8.

Pour qu'un nombre soit divisible par 11, il faut et il suffit que la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair soit elle-même divisible par 11.

Ainsi, 95 867 431 est divisible par 11 car $(9+8+7+3)-(5+6+4+1) = 27-16 = 11$ est divisible par 11.

Solution

Pour que $474x\,13y$ soit divisible par 8, il faut que $13y$ soit aussi divisible par 8. Dans ce cas, y ne peut être que le chiffre 6.

Pour que $474x13y$ soit divisible par 11, il faut que $(4 + 4 + 1 + y) - (7 + x + 3) = (9+y)-(10+x) = y-x-1 = 6-x-1 = 5-x$ soit divisible par 11, ce qui n'est possible que si x est le chiffre 5.

Réponse : C

Question 21. Nombres consécutifs

Lorsque a, b, c et d sont, dans cet ordre, quatre nombres consécutifs, leur somme est multiple de 3 si et seulement si

Ⓐ a est supérieur à 10 Ⓑ c est supérieur à 3 Ⓒ d est multiple de 9 Ⓓ a est multiple de 3 Ⓔ b est multiple de 3

Solution

La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 3. En effet, si x est le nombre central, les deux autres sont $x-1$ et $x+1$ et la somme des trois nombres vaut alors

$$(x-1)+x+(x+1)=3x$$

Celle-ci est bien divisible par 3.

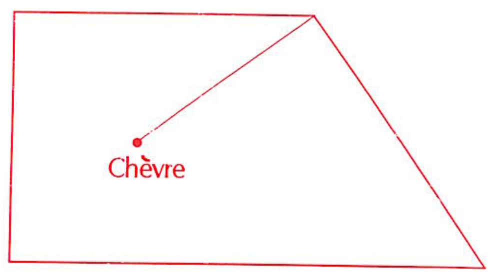
Comme a, b, c et d sont quatre nombres consécutifs, $b+c+d$ est divisible par 3 et, de ce fait, $a+b+c+d$ est divisible par 3 si et seulement si a est lui-même divisible par 3.

Réponse : D

Question 24. La chèvre

Le schéma ci-dessous représente une prairie dans laquelle deux clôtures rectilignes de 20 m font un angle de 120°. Une chèvre est attachée au piquet d'angle par une corde de 15 m de long. Quelle est, en mètres carrés, l'aire de la partie de prairie que la chèvre peut brouter ?

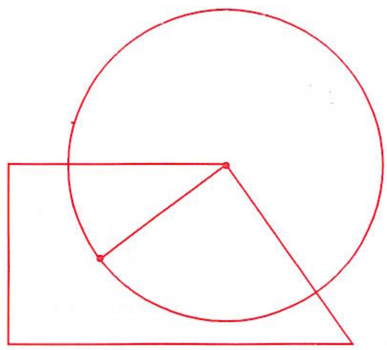
Ⓐ 50π Ⓑ 75π Ⓒ 80π Ⓓ 85π Ⓔ 90π



Solution

Traçons, dans le plan de la prairie, le cercle dont le centre se trouve à l'emplacement du piquet de coin et dont le rayon mesure 15 m (cf. figure ci-dessous). Comme les deux clôtures font un angle de 120°, la chèvre peut brouter un tiers de la surface du disque défini par ce cercle, soit, en mètres carrés :

$$\frac{\pi\times 15^2}{3}=75\pi$$



Réponse : B

Question 25. Nombres parfaits (sans réponse préformulée)

On appelle **nombre parfait** tout nombre naturel qui est égal à la somme de ses diviseurs positifs, lui-même excepté ; par exemple, $6=1+2+3$. Quel est le plus petit nombre parfait supérieur à 20 ?

Solution

Il suffit de tester, d'après la définition fournie, les nombres qui suivent 20, de proche en proche, jusqu'au moment où on découvre un nombre parfait.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
21 &\neq 1+3+7\\
22 &\neq 1+2+11\\
23 &\neq 1\\
24 &\neq 1+2+3+4+6+8+12\\
25 &\neq 1+5\\
26 &\neq 1+2+13\\
27 &\neq 1+3+9\\
28 &= 1+2+4+7+14
\end{aligned}$$

Réponse : 28

Remarque. Le nombre parfait suivant est 496.

Question 26. Tuyaux

Combien faut-il de tuyaux de 10 cm de diamètre intérieur pour fournir le même débit qu'un tuyau de 60 cm de diamètre intérieur, si l'eau circule à la même vitesse dans tous les tuyaux ?

Ⓐ 6 Ⓑ 6π Ⓒ 12 Ⓓ 36 Ⓔ 36π

Solution

Comme l'eau circule à la même vitesse dans tous les tuyaux, le **débit** est **proportionnel** à la **section** des tuyaux. Ainsi, si un tuyau a un diamètre six fois plus grand que celui d'un autre tuyau, sa section étant alors trente-six fois plus grande, son débit sera trente-six fois plus grand que celui de cet autre tuyau. Il faut donc trente-six tuyaux de 10 cm de diamètre pour assurer le même débit qu'un tuyau de 60 cm de diamètre.

Réponse : D

Question 30. Alice, Julie et Barbara

Julie, qui marche toujours à l'allure de 4 km/h, a deux amies : Alice et Barbara. Elle a remarqué que le temps qu'elle met pour se rendre chez Alice dépasse d'un cinquième celui qu'elle met pour aller chez Barbara. Si les domiciles de Julie et d'Alice sont éloignés de 6 km, quelle distance sépare les maisons de Julie et de Barbara ?

Ⓐ 7,2 km Ⓑ 5,2 km Ⓒ 5 km Ⓓ 4,8 km Ⓔ 3,2 km

Solution

Comme Julie marche toujours à la même allure, les distances qu'elle parcourt sont proportionnelles à leur durée. Par conséquent, si le temps d'un trajet de 6 km vaut un cinquième de plus que celui d'un autre trajet, alors la longueur du premier trajet vaut les 6/5 de celle du second. Autrement dit, la longueur du second trajet est égale à 5/6 de celle du premier, soit 5 km.

Réponse : C

Vocabulaire

Débit (d'un cours d'eau, d'un tuyau) : volume d'eau écoulé en un point donné par unité de temps. Par exemple, le débit de la Meuse à Huy est en moyenne de 12 m^3/s.

Section : surface commune à un solide et à un plan qui le coupe. Ainsi lorsqu'on coupe un cylindre (circulaire droit) par un plan perpendiculaire à son axe, la section est un disque. En physique, la section est aussi la mesure de l'aire de cette surface.

Proportionnalité : on dit que deux grandeurs varient de manière proportionnelle, lorsque, multipliant l'une par un nombre k, l'autre s'en trouve multipliée par k aussi. Il en est ainsi de l'espace parcouru et du temps lorsque la vitesse de déplacement reste constante : si je marche deux fois, trois fois, ..., plus longtemps, la distance que je parcours est deux fois, trois fois, ... plus grande.

Éliminatoires MIDI

Question 9. Le coureur « échappé »

Dans une course cycliste, deux pelotons se sont formés et roulent maintenant à la même vitesse, 40 km/h. Une minute les sépare (autrement dit, pour un chronométreur placé au bord de la route, le premier coureur du second peloton passe une minute après le dernier coureur du premier peloton). Un coureur s'échappe du second peloton pour rejoindre le premier peloton. S'il roule constamment à 48 km/h, combien de temps cela lui prendra-t-il ?

Ⓐ 1 min Ⓑ 1 min 12 s Ⓒ 5 min
Ⓓ 5 min 20 s Ⓔ 6 min

Base théorique

Un mobile qui se déplace à vitesse constante v pendant un temps t parcourt une distance $d = v \cdot t$.

Solution 1

L'écart entre les deux pelotons est égal à la distance que chacun d'eux parcourt en une minute à 40 km/h, soit $\frac{40}{60}$ km ou $\frac{2}{3}$ km.
Appelons t le temps (en h) que va mettre le coureur qui s'échappe du second peloton pour rattraper le premier peloton. Comme sa vitesse est de 48 km/h, il va parcourir, pendant ce temps-là, $48t$ km. Durant le même laps de temps, le premier peloton

parcourt $40t$ km. Comme le coureur isolé a dû effectuer $\frac{2}{3}$ km de plus que le peloton, nous avons

$$48t = 40t + \frac{2}{3}$$

D'où, nous tirons $t = \frac{1}{12}$ h. La poursuite dure donc cinq minutes.

Solution 2

La vitesse relative du coureur qui s'échappe du deuxième peloton est de 8 km/h par rapport au premier peloton. Comme il faut une minute à 40 km/h pour parcourir la distance qui sépare les deux pelotons, il faut cinq fois plus de temps à 8 km/h pour accomplir la même distance, soit cinq minutes.

Réponse : C

Question 15. Famille nombreuse

Georges et France sont frère et sœur. Georges dit : « J'ai autant de frères que de sœurs » ; France déclare : « Le nombre de mes frères est double du nombre de mes sœurs ». De combien d'enfants se compose cette famille ?

Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 6 Ⓓ 7 Ⓔ 8

Solution

Soit x le nombre de filles et y le nombre de garçons de cette famille. D'après la déclaration de Georges, on a

$$y - 1 = x$$

d'après celle de France, on a

$$y = 2(x - 1)$$

De ces deux équations, on tire successivement

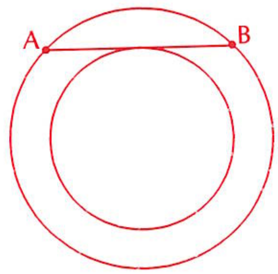
$$\begin{aligned} y &= 2(y-2) \\ y &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Il y a donc sept enfants dans cette famille.

Réponse : D

Question 17. La couronne

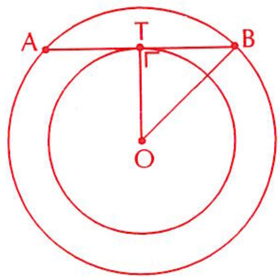
Dans la figure ci-dessous, les deux cercles sont concentriques et la corde $[AB]$, de longueur 20, est tangente au cercle intérieur. Quelle est l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles ?



Ⓐ 10π Ⓑ 50π Ⓒ 100π
Ⓓ π^2 Ⓔ Les données sont insuffisantes pour pouvoir la déterminer.

Solution

Désignons par O le centre des deux cercles et par T le point de contact de la droite AB avec le cercle intérieur (cf. figure ci-dessous).



Si nous appelons respectivement R et r les rayons du cercle extérieur et du cercle intérieur, l'aire de la couronne est

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle TOA, rectangle en T, nous obtenons

$$|OA|^2 = |TO|^2 + |TA|^2 \quad \text{ou} \quad R^2 = r^2 + 100$$

D'où, nous tirons

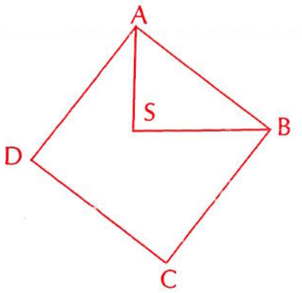
$$R^2 - r^2 = 100$$

L'aire de la couronne vaut donc 100π.

Réponse : C

Question 19. Aire ombrée

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et ASB est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?



Ⓐ 13 Ⓑ 15 Ⓒ 17 Ⓓ 19 Ⓔ 21

Solution

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle SAB, nous obtenons

$$|AB|^2 = |SA|^2 + |SB|^2 = 25$$

Ainsi, l'aire du carré $ABCD$ vaut 25.

Celle du triangle SAB valant $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, l'aire de la partie ombrée est égale à 19.

Réponse : D

Question 21. Aires dans un triangle

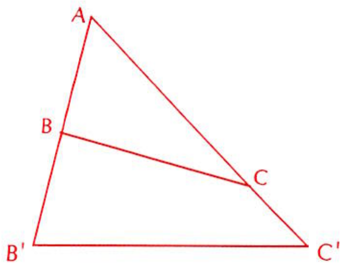
Dans le triangle PQR, soit M le milieu du côté $[QR]$ et N le point de $[PQ]$ situé au tiers à partir de P. Quel est le rapport de l'aire du quadrilatère $PNMR$ à celle du triangle MNQ ?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ $\sqrt{2}$ Ⓓ $\sqrt{3}$ Ⓔ $\sqrt{5}$

Base théorique

Étant donnés deux triangles ABC et $AB'C'$ ayant l'angle de sommet A en commun (cf. figure ci-dessous), le rapport des aires de ces triangles est

$$\frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } AB'C'} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AB'| \cdot |AC'|}$$



Pour le montrer, traçons $[BC']$. Les triangles $C'AB$ et $C'AB'$ ont la même hauteur si on leur choisit respectivement $[AB]$ et $[AB']$ pour bases. De ce fait, nous avons

$$\frac{\text{aire } ABC'}{\text{aire } AB'C'} = \frac{|AB|}{|AB'|}$$

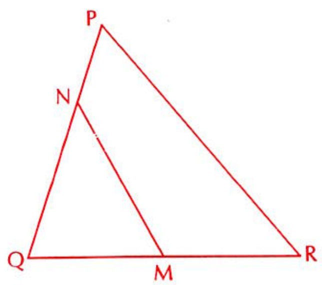
De même, les triangles BAC et BAC' ont la même hauteur si on leur choisit respectivement $[AC]$ et $[AC']$ pour bases. Ainsi, nous avons

$$\frac{\text{aire } BAC}{\text{aire } BAC'} = \frac{|AC|}{|AC'|}$$

D'où,

$$\frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } AB'C'} = \frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } ABC'} \cdot \frac{\text{aire } ABC'}{\text{aire } AB'C'} = \frac{|AC|}{|AC'|} \cdot \frac{|AB|}{|AB'|}$$

Solution



D'après la base théorique ci-dessus, nous avons

$$\frac{\text{aire } QMN}{\text{aire } QPR} = \frac{|QN| \cdot |QM|}{|QP| \cdot |QR|} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

D'où, il vient

$$\text{aire } QMN = \frac{1}{3}\text{aire } QPR$$

et, par conséquent,

$$\text{aire } PNMR = \frac{2}{3}\text{aire } PQR$$

Finalement, nous obtenons

$$\frac{\text{aire } PNMR}{\text{aire } MNQ} = \frac{\frac{2}{3}\text{aire } PQR}{\frac{1}{3}\text{aire } PQR} = 2$$

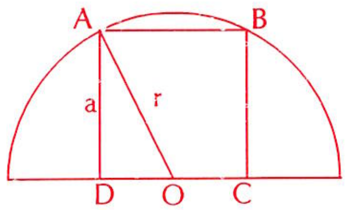
Réponse : A

Question 25. Aires de carrés

L'aire du carré inscrit dans un demi-cercle est à l'aire du carré inscrit dans le cercle de même rayon comme

Ⓐ 1 est à 2 Ⓑ 2 est à 3 Ⓒ 2 est à 5 Ⓓ 3 est à 4 Ⓔ 3 est à 5

Solution



Soit $ABCD$ le carré inscrit dans un demi-cercle de rayon r (cf. figure ci-dessus).

Appelons O le centre du cercle dont ce demi-cercle est issu et désignons par a la mesure du côté du carré $ABCD$.

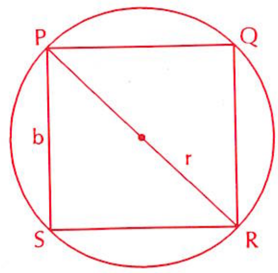
Le triangle DOA est rectangle en D ; en y appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons

$$|OA|^2 = |DA|^2 + |DO|^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$$

D'où, nous tirons

$$a^2 = \frac{4}{5}r^2$$

Soit $PQRS$ un carré inscrit dans un cercle de rayon r (cf. figure ci-dessous).



Désignons par b la mesure du côté de ce carré.

Le triangle SPR est rectangle en S et l'hypoténuse de ce triangle est un diamètre du cercle ; dès lors, nous avons

$$|PR|^2 = |SP|^2 + |SR|^2 \quad \text{ou} \quad 2b^2 = 4r^2$$

D'où, il vient $b^2 = 2r^2$.

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{\text{aire } ABCD}{\text{aire } PQRS} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = \frac{2}{5}$$

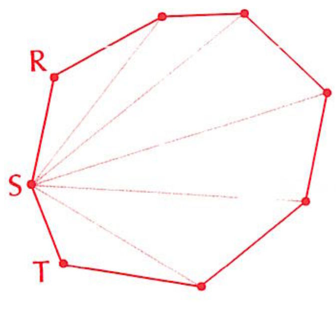
Par conséquent, l'aire du carré $ABCD$ est à l'aire du carré $PQRS$ comme 2 est à 5.

Réponse : C

Question 28. Diagonales (sans réponse préformulée)

Si le nombre de diagonales (c'est-à-dire de segments joignant deux sommets non consécutifs) d'un polygone convexe est 54, quel est le nombre de côtés de ce polygone ?

Solution



Soit n le nombre de sommets de ce polygone.

Nommons R, S et T trois sommets consécutifs du polygone en question.
Une diagonale étant un segment qui joint deux sommets non consécutifs du polygone, il part de S une diagonale vers chacun des autres sommets, sauf vers S lui-même et vers les sommets voisins R et T (cf. figure ci-dessus). Ainsi, $(n-3)$ diagonales partent de S.
En multipliant ce nombre par le nombre de sommets, nous obtenons le double du nombre total de diagonales que possède le polygone car, par ce calcul, chaque diagonale se trouve comptée deux fois. Le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets est donc

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Comme le polygone qui nous occupe possède 54 diagonales, nous avons

$$\frac{n(n-3)}{2} = 54$$

ce qui donne :

$$n^2 - 3n - 108 = 0 \qquad (*)$$

Si nous envisageons de mettre le premier membre de cette équation en n sous forme d'un produit $(n-a)(n-b)$, il faut alors que les polynômes $n^2 - 3n - 108$ et $n^2 - (a + b)n + ab$ soient égaux. Pour cela, a et b doivent être tels que

$$a + b = 3 \quad \text{et} \quad a \times b = -108$$

Après avoir analysé les différentes façons de décomposer 108 en produit de deux naturels, nous trouvons assez rapidement $a = -9$ et $b = 12$.
Ainsi, l'équation $(*)$ s'écrit

$$(n+9)(n-12) = 0$$

Elle admet évidemment comme solutions les nombres -9 et 12.
Le polygone convexe à 54 diagonales a donc 12 sommets.

Réponse : 12

Question 30. Fractions
Pour toutes les fractions $\frac{m}{n}$ à termes entiers strictement positifs telles que $\frac{4}{5} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$, quelle est la plus petite valeur que peut prendre $m + n$?
Ⓐ 9 Ⓑ 11 Ⓒ 20 Ⓓ 24 Ⓔ 25

Base théorique
De l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entre nombres réels strictement positifs, on tire les inégalités

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

En effet, de l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et du fait que les réels b et d sont strictement positifs, nous tirons $ad - bc < 0$.
Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} &= \frac{a(b+d) - b(a+c)}{b(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{b(b+d)} < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} &= \frac{d(a+c) - c(b+d)}{d(b+d)} \\ &= \frac{ad - bc}{d(b+d)} < 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Solution
En vertu de la base théorique ci-dessus, nous avons

$$\frac{4}{5} < \frac{9}{11} < \frac{5}{6}$$

Ainsi, $\frac{9}{11}$ est une fraction $\frac{m}{n}$, à termes entiers strictement positifs, telle que $\frac{4}{5} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$. Pour celle-ci, $m + n = 20$.

Il reste maintenant à vérifier s'il n'y a pas de fraction $\frac{m}{n}$, à termes entiers strictement positifs, strictement comprise entre $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{6}$, pour laquelle $m+n < 20$. Cette vérification ne doit s'opérer que pour les fractions dont le numérateur ne dépasse pas 10. En effet, de $\frac{m}{n} < \frac{5}{6}$ et de $m + n < 20$, nous tirons $2m < m + n < 20$ et, ensuite, $m < 10$.

Réponse : C

Éliminatoires MAXI

Question 5.
Valeur numérique d'une fonction

Si $f(1)+1 = 0$ et si, pour tout nombre naturel x, $f(2x)-2f(x) = 0$, que vaut $f(1\,024)$?
Ⓐ 10 Ⓑ −10 Ⓒ 1 024 Ⓓ −1 024 Ⓔ Les données ne permettent pas de le calculer.

Solution

De $f(1) + 1 = 0$, nous tirons $f(1) = -1$. Et, grâce à la propriété particulière que possède la fonction f, nous avons successivement

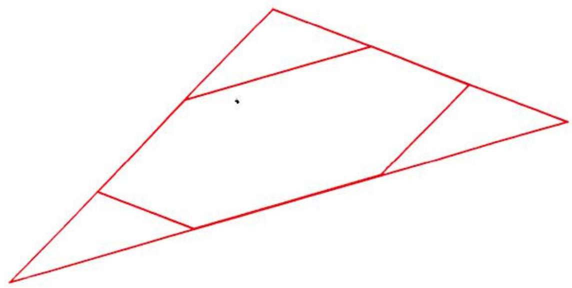
$$\begin{aligned} f(2) &= 2f(1) = -2 \quad \text{ou} \quad f(2^1) = -2^1 \\ f(4) &= 2f(2) = -4 \quad \text{ou} \quad f(2^2) = -2^2 \\ f(8) &= 2f(4) = -8 \quad \text{ou} \quad f(2^3) = -2^3 \end{aligned}$$

D'où, nous induisons que pour tout n naturel non nul, $f(2^n) = -2^n$.
Ceci peut être établi de manière rigoureuse grâce à une démonstration par récurrence.
Comme $1\,024 = 2^{10}$, nous avons $f(1\,024) = -2^{10} = -1\,024$.

Réponse : D

Question 6. Hexagone

Dans le triangle de la figure ci-dessous, une parallèle à chaque côté a été menée au tiers à partir du sommet opposé. Quel est le rapport de l'aire de l'hexagone ombré à celle du triangle initial ?



Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{2}$ Ⓒ $\frac{2}{3}$ Ⓓ $\frac{3}{4}$ Ⓔ $\frac{5}{6}$

Base théorique

Lorsque deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, on appelle rapport de similitude de ceux-ci, le rapport r des mesures des côtés correspondants de ces triangles :

$$r = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

La proposition suivante fournit un usage intéressant de cette notion.

Si le rapport de similitude de deux triangles semblables vaut r, alors le rapport de leurs aires est égal à r^2.

Solution

En chaque coin du triangle initial figure un triangle blanc (non ombré) dont les côtés sont parallèles à ceux du grand triangle, donc semblable à celui-ci. Le rapport de similitude de ce triangle par rapport au triangle initial vaut $\frac{1}{3}$. Par conséquent, l'aire de chacun des triangles blancs vaut $\frac{1}{9}$ de l'aire T du grand triangle (cf. la base théorique).
D'où, l'aire H de l'hexagone ombré est

$$H = T - 3 \cdot \frac{1}{9}T = \frac{2}{3}T$$

Réponse : C

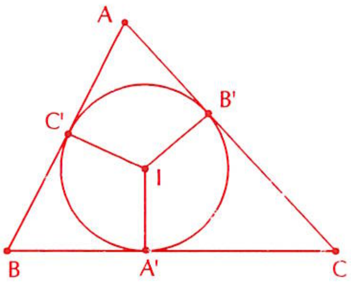
Question 13.
Contact entre une sphère et un cône

Dans un cône droit de hauteur 4 dont le rayon de la base est 3, est inscrite une sphère tangente à la base et à la surface latérale. Quelle est la longueur du cercle de contact de la sphère avec la surface latérale ?

Ⓐ $\frac{12}{5}\pi$ Ⓑ $\frac{10}{3}\pi$ Ⓒ $\frac{18}{5}\pi$ Ⓓ 4π Ⓔ $\frac{24}{5}\pi$

Base théorique

Considérons un triangle ABC et son cercle inscrit Γ. Appelons A', B' et C' les points de contact de Γ avec les côtés du triangle (cf. figure ci-dessous).



Traditionnellement, on désigne respectivement par a, b, c et p, les mesures des côtés et le demi-périmètre du triangle ABC :

$$a = |BC|, \quad b = |AC|,$$

$$c = |AB| \quad \text{et} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Il est bien connu (et facile à démontrer) que

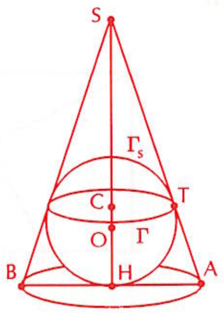
$$\begin{aligned} |AB'| = |AC'| &= p - a \\ |BA'| = |BC'| &= p - b \\ |CA'| = |CB'| &= p - c \end{aligned}$$

Ceci peut s'énoncer de la manière suivante : dans un triangle, la mesure du segment limité par un sommet et par le point de contact du cercle inscrit avec l'un des côtés issus de ce sommet est égale au demi-périmètre du triangle, diminué de la mesure du côté opposé à ce sommet.

Solution

Un plan comprenant le sommet S du cône et le centre H de la base coupe le cône selon un triangle SAB et la sphère y inscrite selon un cercle Γ_s (cf. figure) ; celui-ci est le cercle inscrit dans le triangle SAB.

Désignons par O, T et C respectivement le centre de la sphère, le point de contact de Γ_s avec $[AS]$ et le centre du cercle Γ commun à la sphère et au cône.



En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HSA, rectangle en H (cf. figure ci-dessous), nous obtenons

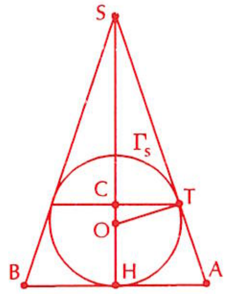
$$|AS|^2 = |AH|^2 + |HS|^2 = 25$$

D'où, $|AS| = 5$.

Dès lors, le demi-périmètre du triangle SAB vaut

$$p = \frac{|SA|+|SB|+|AB|}{2} = 8$$

Nous avons alors $|ST| = p - |AB| = 2$ (cf. la base théorique).



Par ailleurs, les triangles SCT et SBA sont semblables, leurs côtés étant parallèles deux à deux. De ce fait, nous avons

$$\frac{|CT|}{|HA|} = \frac{|ST|}{|SA|} = \frac{2}{5}$$

D'où, nous tirons

$$|CT| = \frac{2}{5}|HA| = \frac{6}{5}$$

Comme le cercle Γ a pour rayon $|CT|$, sa longueur vaut $\frac{12}{5}\pi$.

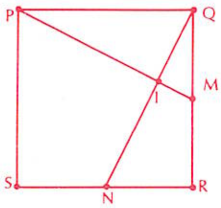
Réponse : A

Question 14

Dans un carré $PQRS$, M est le milieu de $[QR]$ et N celui de $[RS]$; I est le point d'intersection de PM et QN. Quel est le rapport de l'aire du carré $PQRS$ à celle du quadrilatère $PINS$?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ Ⓑ $\dfrac{12}{7}$ Ⓒ $\dfrac{16}{9}$ Ⓓ $\dfrac{20}{11}$ Ⓔ 2

Solution



Soit a la mesure du côté du carré $PQRS$. L'aire du quadrilatère $PINS$ peut s'obtenir en soustrayant de l'aire du carré, les aires des triangles rectangles RNQ et IPQ.
Les triangles rectangles IPQ et QPM ont deux angles de même amplitude : un angle droit et l'angle commun en P. Le rapport de similitude de ces triangles vaut

$$\frac{|PQ|}{|PM|} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dès lors, le rapport des aires de ces triangles est

$$\frac{\text{aire } IPQ}{\text{aire } QPM} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

(cf. la base théorique de la question 6).
Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\text{aire } IPQ &= \frac{4}{5}\text{aire } QPM\\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}a\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{5}\end{aligned}$$

Comme l'aire du triangle RNQ vaut $\dfrac{a^2}{4}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{aire } PINS &= a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5} = \frac{11a^2}{20}\\ &= \frac{11}{20}\text{aire } PQRS\end{aligned}$$

Réponse : D

Question 15. Factorielle (sans réponse préformulée)

Quel est le naturel k tel que $(3k)!$ se termine par exactement 20 zéros ?
(Rappel : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.)

Solution

Le nombre de zéros qui terminent l'écriture décimale de $n!$ est égal au nombre de facteurs 5 que l'on trouve dans les naturels $1, 2, 3, \cdots, n-1, n$ (c'est l'exposant affecté à 5 dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers). En effet, dans un produit de naturels, chaque fois qu'un facteur 5 « rencontre » un facteur 2, cela crée un facteur 10, donc un des zéros terminaux de l'écriture décimale du produit. Et, comme il y a moins de facteurs 5 que de facteurs 2 dans les naturels $1, 2, 3, \cdots, n-1, n$, le nombre de zéros terminaux ne peut dépasser le nombre de facteurs 5 présents dans ce produit.
Cela étant, nous pouvons établir une petite table qui donne le nombre de zéros terminaux de l'écriture décimale de $n!$ en fonction de n. Appelons $\zeta(n)$ le nombre de zéros terminaux de $n!$.

n	25	50	75	80	85
$\zeta(n)$	6	12	18	19	20

n	86	87	88	89	90
$\zeta(n)$	20	20	20	20	21

Si $(3k)!$ se termine par 20 zéros exactement, alors $3k$ ne peut être égal qu'à 87 et k égal à 29.

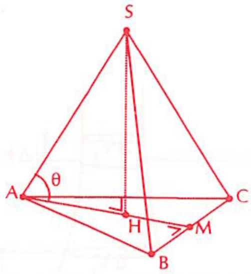
Réponse : 29

Question 19.
Angle entre une droite et un plan

Dans un tétraèdre régulier, soit θ l'angle entre une arête et une face qui ne la contient pas. Laquelle des égalités suivantes est correcte ?

Ⓐ $\theta = 30°$ Ⓑ $\theta = 45°$ Ⓒ $\theta = 60°$
Ⓓ $\cos\theta = \text{tg}\,30°$ Ⓔ $\text{tg}\,\theta = \cos 60°$

Solution



Soit $SABC$ un tétraèdre régulier d'arête a. Proposons-nous d'évaluer l'angle θ déterminé par l'arête $[SA]$ et la face ABC (cf. figure). Pour cela, considérons la projection orthogonale H de S dans ABC ; nous avons $\theta = SAH$. Comme le tétraèdre est régulier, H est le centre de gravité du triangle ABC.
Si nous désignons par M le milieu de $[BC]$, nous avons $|AH| = \frac{2}{3}|AM|$. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle MAB, rectangle en M :

$$|AM|^2 = |AB|^2 - |MB|^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2.$$

D'où, $|AM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ et $|AH| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Dans le triangle HAS, rectangle en H, nous avons alors

$$\cos\theta = \frac{|AH|}{|AS|} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30°.$$

Réponse : D

Question 22.
Poids d'un polynôme (sans réponse préformulée)
À tout polynôme

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

à coefficients entiers (a_n non nul), est associé son **poids**, qui est le naturel

$$p = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Combien y a-t-il de polynômes à coefficients entiers dont le poids est 3 ?

Solution

Si le poids p d'un polynôme à coefficients entiers est égal à 3, son degré est au plus égal à 3. En effet, comme a_n est entier et non nul, nous avons $a_n \geqslant 1$ et

$$n + 1 \leqslant n + |a_n| \leqslant p = 3$$

D'où, $n \leqslant 2$.
Si $n = 0$, seuls les polynômes constants 3 et -3 ont leurs coefficients entiers et leur poids égal à 3.
Si $n = 1$, il y a six polynômes à coefficients entiers de poids 3 :

$$x + 1,\ x - 1,\ -x + 1,\ -x - 1,\ 2x,\ -2x.$$

Si $n = 2$, il n'y a que deux polynômes de ce type : x^2 et $-x^2$.
Au total, dix polynômes seulement vérifient les conditions requises.

Réponse : 10

Question 23. Proportions

Dans un triangle PQR, soit $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ et $\widehat{R}$ les mesures en degrés des angles et p, q et r les longueurs des côtés respectivement opposés. Si $\frac{\widehat{P}}{1} = \frac{\widehat{Q}}{2} = \frac{\widehat{R}}{3}$, alors

Ⓐ $\frac{p}{1} = \frac{q}{2} = \frac{r}{3}$ Ⓑ $\frac{p}{1} = \frac{q}{2} = \frac{r}{4}$ Ⓒ $\frac{p}{2} = \frac{q}{3}$
Ⓓ $\frac{p}{1} = \frac{r}{2}$ Ⓔ $\frac{q}{7} = \frac{r}{8}$

Bases théoriques

1) Les proportions jouissent de propriétés particulièrement intéressantes. En voici une : **De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (telle que $b + d \neq 0$), se déduisent les proportions $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.**
Cette propriété se démontre facilement et s'énonce comme suit : **D'une proportion, on peut en déduire une autre en remplaçant dans un des rapports, l'antécédent par la somme des antécédents et le conséquent par la somme des conséquents.**

2) **Règle des sinus :** Dans tout triangle ABC, on a

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

(avec les notations traditionnelles).

Solution

Partant de $\frac{\widehat{P}}{1} = \frac{\widehat{Q}}{2} = \frac{\widehat{R}}{3}$, nous obtenons, grâce à la propriété des proportions présentée dans la base théorique :

$$\frac{\widehat{P}}{1} = \frac{\widehat{Q}}{2} = \frac{\widehat{R}}{3} = \frac{\widehat{P} + \widehat{Q} + \widehat{R}}{1 + 2 + 3} = 30°$$

De là, nous tirons $\widehat{P} = 30°$, $\widehat{Q} = 60°$ et $\widehat{R} = 90°$.

Ensuite, en appliquant la règle des sinus dans le triangle PQR, nous avons

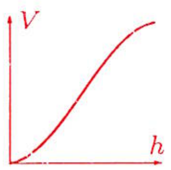
$$\frac{p}{\sin 30°} = \frac{q}{\sin 60°} = \frac{r}{\sin 90°}$$

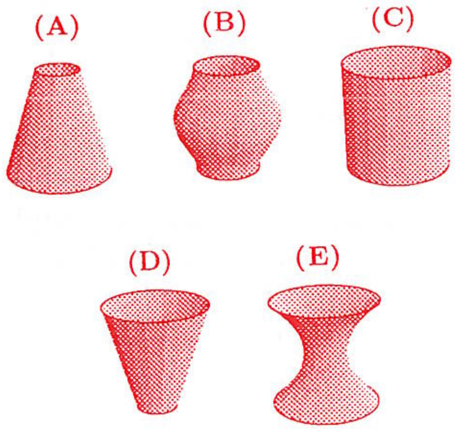
D'où, il vient $2p = r$ ou $\frac{p}{1} = \frac{r}{2}$.

Réponse : D

Question 27. Vases

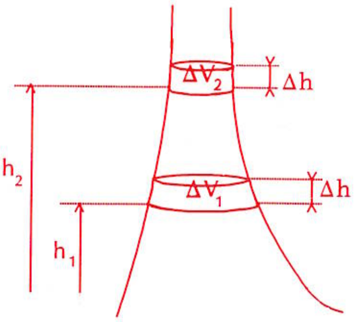
Le graphique ci-contre représente, en fonction de la hauteur du liquide, le volume d'eau contenu dans l'un des cinq vases ci-dessous. Lequel ?





Solution

Pour comprendre ce qui suit, intéressons-nous à une portion de vase allant en s'amincissant lorsque la hauteur augmente (cf. figure).



Comparons les quantités de volume d'eau ΔV_1 et ΔV_2 correspondant à une même différence de hauteur Δh, à des hauteurs h_1 et h_2 différentes ($h_1 \leqslant h_2$). Comme la section du vase va en diminuant, nous avons $\Delta V_2 \leqslant \Delta V_1$ et $\frac{\Delta V_2}{\Delta h} \leqslant \frac{\Delta V_1}{\Delta h}$. En passant à la limite lorsque Δh tend vers 0, nous obtenons $V'(h_2) \leqslant V'(h_1)$; ce qui montre que la vitesse d'augmentation de volume est croissante. Cela étant, la dérivée seconde de V en fonction de h est alors positive.

En considérant une portion de vase allant en s'élargissant, on arrive bien entendu aux conclusions contraires.

À partir de ces considérations, nous pouvons concevoir quel type de graphique de V en fonction de h doit correspondre à chacun des cinq vases proposés.

Dans le vase (C), le volume d'eau augmente de manière constante avec la hauteur ; autrement dit, V est proportionnel à h. Le graphique de V en fonction de h devrait être une droite. La réponse (C) est donc à rejeter.

Dans le vase (A), le volume d'eau augmente de moins en moins vite avec la hauteur ; autrement dit, la vitesse d'augmentation de volume diminue avec la hauteur. Pour cette raison, le graphique de V en fonction de h devrait être une courbe ayant sa concavité constamment tournée vers le bas. La réponse (A) est aussi à rejeter.

À l'opposé, dans le vase (D), la vitesse d'augmentation de volume grandit avec la hauteur. Cette fois, le graphique de V en fonction de h devrait être une courbe ayant sa concavité constamment tournée vers le haut. La réponse (D) ne convient pas non plus.

Dans le vase (E), le volume V augmente avec la hauteur h, avec une vitesse décroissante jusqu'à mi-hauteur, avec une vitesse croissante ensuite. Le graphique de V en fonction de h devrait donc être une courbe ayant sa concavité tournée vers le bas entre 0 et $\frac{h}{2}$ et vers le haut entre $\frac{h}{2}$ et h. Par conséquent, la réponse (E) n'est pas correcte.

Enfin, dans le vase (B), les variations du volume V en fonction de la hauteur h sont inversées par rapport à celles produites par le vase (E). Le graphique de V en fonction de h correspond alors au graphique proposé.

Réponse : B

Tu disposes ainsi, ami lecteur d'un large éventail de questions (avec solution complète) qui ont été proposées ce mercredi 15 janvier 1997 lors de la vingt-deuxième olympiade mathématique belge. Il est temps d'en terminer avec cette rubrique qui déborde déjà largement sur la page 3 de couverture ; il faut cependant signaler que Monsieur Jack G SEGERS nous a écrit pour nous faire remarquer une erreur qui s'est glissée à la page 13 du numéro 76 : le problème 17 a pour solution 8 s (E) et non pas 18 s (A). Merci, Monsieur SEGERS.

Solutions des jeux

Problème de tri

1. Prendre le triplet $(4, 9, 10)$ et l'insérer entre les nombres 3 et 11.
2. Prendre le triplet $(7, 8, 2)$ et l'insérer entre les nombres 6 et 3.
3. Prendre le triplet $(12, 13, 14)$ et l'insérer entre les nombres 11 et 15.
4. Prendre le triplet $(2, 3, 4)$ et l'insérer entre les nombres 1 et 5.

Produits croisés

	1	2	3	4	5
1	S	O	M	M	E
2	O	T	A	I	S
3	M	A	I	N	T
4	M	I	N	C	E
5	E	S	T	E	R

L'addition cachée

D = 6 ; E = 5 ; F = 3 ; N = 1 ; O = 8 ; U = 7 ; X = 2 ; Z = 4.

Le mur des nombres

498
233 265
109 124 141
49 60 64 77
32 17 43 21 56

992
459 533
192 267 266
74 118 149 117
21 53 65 84 33

Les solutions du Tangram paraîtront dans le numéro 80 de la revue.