MATH-JEUNES

Jean-Sébastien Bach

18e année
Mars 1997 – n° 79
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, R.MIDAVAINE, G.NOËL, A.PARENT, G.ROBERT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX et F.POURBAIX
Conception de la couverture : K. MARTROYE & M. BALLIEU

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 79 Dix-huitième année 1997

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 79, 74–77, 1997

La page du mathémartiste

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

À propos de Jean-Sébastien Bach et de son Offrande Musicale ...

Sur la couverture de ton *Math-Jeunes*, tu as sans doute été surpris de voir un extrait de partition musicale : il s'agit d'un canon tiré de *L'Offrande Musicale* de Jean-Sébastien BACH.

Au dix-huitième siècle, encore appelé « siècle des Lumières », il était communément admis par bon nombre d'intellectuels que la musique reposait sur des fondements mathématiques et que le travail de création pouvait s'interpréter comme une activité scientifique. Le grand compositeur baroque Jean-Sébastien BACH (Eisenach 1685 – Leipzig 1750) désirait harmoniser et accorder les principes de la logique et les abstractions formelles à la constitution d'œuvres musicales. S'il pratiqua d'abord cela assez naturellement, il en arriva à affiner sa méthode et à acquérir une discipline intérieure stricte, une maîtrise de l'imagination allant parfois jusqu'à la mortification de l'instinct ; on peut dès lors parler d'une conception tout à fait spéculative de la musique.

Avant de poursuivre, j'insisterai quelque peu sur l'adjectif « baroque » que j'ai accolé au nom de BACH. Cette épithète n'a certainement pas un caractère péjoratif : elle désigne simplement le style de musique que composait Jean-Sébastien BACH, une époque de l'histoire de la musique. Il est navrant de constater que bon nombre de gens opposent « musique classique » à « musique moderne » lorsqu'ils veulent marquer la différence entre la musique de BACH et celle d'un groupe actuel classé premier au *hit parade*, par exemple. Or BACH, entre autres, n'a pas plus écrit de musique classique que les BEATLES ou les ROLLING STONES n'ont composé de musique moderne ! BACH, VIVALDI, HAENDEL ont écrit de la **musique baroque**, MOZART, HAYDN, de la **musique classique**, SCHUBERT, CHOPIN, SCHUMANN, de la **musique romantique**, ... SCHÖNBERG, de la **musique moderne**. Il s'agit simplement d'époques de l'histoire de l'art, comme c'est le cas en littérature, architecture, peinture, ... Et cela n'enlève certainement rien non plus au talent des BEATLES, par exemple. Ces précisions ayant été apportées, revenons-en à Jean-Sébastien BACH.

Deux événements marquèrent la vie de ce compositeur en l'année 1747. Le premier eut lieu le 7 mai lorsqu'il fut invité par FRÉDÉRIC II DE PRUSSE (1) à se rendre auprès de lui ; le vieux BACH sollicita du roi un thème sur lequel il improviserait. C'est le *thema regium* (thème royal) sur lequel il a composé son *Offrande Musicale* : c'est un canon bâti sur ce fameux thème qui se trouve en couverture. L'autre événement de cette année 1747 est l'adhésion de BACH en juin à la *Societät der musikalischen Wissenschaften* de L. Chr. MIZLER, une société savante consacrée à l'étude de l'ancienne conception mathématique de la musique. À ce propos, je citerai Alberto BASSO[3] :

« Tension intellectuelle, calcul, jeu, langage initiatique dominent l'*Offrande Musicale* et l'*Art de la Fugue*, les deux plus importants témoignages de la recherche abstraite à laquelle s'est livré BACH dans le domaine de la musique, les deux preuves de rigueur normative les plus ardues que nous ait livrées l'histoire de la musique. Et toutes deux, comme les *Variations canoniques*, sont des "communications scientifiques", des dissertations qui, sous le signe d'un seul

(1) Frédéric II de Prusse, encore connu sous le nom de Frédéric le Grand, ami des lettres et des arts, jouait lui-même de la flûte ; il était le protecteur du compositeur Johann Joachim Quantz, entre autres.

organisme thématique dûment varié, présentent à une poignée de doctes experts (les membres de la société de Mizler) des solutions que jamais auparavant on n'avait encore observées.

« Issue de la visite que rendit BACH à FRÉDÉRIC II dans sa résidence royale de Potsdam en mai 1747, l'*Offrande musicale* (BWV 1079) fut imprimé en cent exemplaires, en septembre de cette même année, à l'occasion de la foire de la Saint-Michel mais BACH avait eu soin, précédemment, de faire tirer, par l'éditeur Breitkopf, deux cents exemplaires de la dédicace, ... »

Voici cette dédicace :

Offrande Musicale
à Sa Majesté le roi de Prusse etc.
très humblement dédiée
par
Johann Sebastian Bach

Très Gracieux Souverain,

C'est avec la plus profonde soumission que je dédie à Votre Majesté une Offrande Musicale dont la part la plus noble sort de Ses augustes mains. Je me souviens encore, avec un plaisir empli de déférence, de la souveraine et toute particulière grâce avec laquelle, il y a quelque temps, Votre Majesté elle-même, au cours de mon séjour à Potsdam, a daigné exécuter au clavecin un thema *pour une* fuga, *m'enjoignant gracieusement alors de le développer sur-le-champ en Son auguste présence. Il était de mon humble devoir d'obéir à l'ordre de Votre Majesté. Mais je m'aperçus très vite que faute de préparation nécessaire, l'élaboration n'avait pu être celle qu'exigeait un thème aussi excellent. J'arrivai donc à cette conclusion, à laquelle je me rangeai aussitôt, qu'il fallait réélaborer de manière plus accomplie ce* thema *vraiment royal, et le faire ensuite connaître au monde. Ce dessein est désormais réalisé, au mieux de mes capacités, et ne vise qu'à l'irréprochable intention de célébrer, ne serait-ce qu'à un échelon bien mineur, la gloire d'un monarque dont tous doivent admirer et vénérer la grandeur et la force, tant dans les sciences de la guerre et de la paix que, tout spécialement, en musique. J'ose ajouter cette très humble prière : que Votre Majesté daigne me faire la grâce d'accueillir avec bienveillance ce modeste ouvrage et continue à l'avenir d'accorder à l'auteur Sa très-haute et souveraine grâce.*

De Votre Majesté
Leipzig, 7 juillet 1747 *le très humble et très obéissant serviteur*

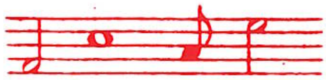
Il me reste, ami lecteur, à te montrer en quoi cette *Musikalisches Opfer BWV 1079* [2] est un divertissement mathématico-musical ou musico-mathématique, comme il te plaira. Mais cela implique que tu puisses lire — même avec beaucoup d'hésitation — une partition musicale. Voici donc quelques notions élémentaires de théorie de la musique.

La musique s'écrit au moyen de **signes** placés sur la **portée**. Cette dernière se compose de cinq **lignes** horizontales équidistantes. L'espace entre deux lignes se nomme **interligne**.

Lignes et interlignes se comptent de bas en haut :

([2]) Les trois lettres BWV sont les initiales de *Bach Werke Verzeichnis*, ce qui signifie Catalogue de l'œuvre de Bach, dans lequel cette composition est répertoriée sous le numéro 1079.

Les **notes** sont les signes qui représentent les sons. Elles se placent soit sur les lignes, soit dans les interlignes :



Chacun connaît le nom des notes et leur succession de bas en haut :

do – ré – mi – fa – sol – la – si – do – ...

La **clef** est un signe mis au début de la portée, sur l'une de ses lignes et qui détermine le nom de la note placée sur cette ligne. Il existe trois sortes de clefs :

La clé de Sol :  **La clé de Fa :**  **La clé d'Ut :** 

Reprenons le fragment qui orne la couverture et lisons le nom des différentes notes :

do - mi | sol - la | si♮ / sol ⁀| sol - fa♯ - fa♮ ⁀| fa - mi♮ - mi♭ ⁀| ...

Si tu n'es pas « musicien », ne t'inquiète pas trop des symboles ♭, ♮ et ♯ qu'on appelle **altérations** et qui n'ont de réelle importance que pour ceux qui jouent de la musique et par voie de conséquence, **pour ceux qui les écoutent !**

Prends un miroir et dépose-le verticalement sur le feuillet de ton *Math-Jeunes*, à gauche du fragment ci-dessus. Lis maintenant le nom des notes en commençant par la ligne du bas. Avec un peu de bonne volonté, de patience, tu obtiens :

do - mi - sol - do | si♮ - do - ré - mi - fa - mi - ré - do | ré - sol - ré - fa - mi - ré - do - si♮ | la♮ ...

Maintenant, dis-toi que Bach n'a écrit qu'une seule ligne, mais qu'en fait, il y en a deux : celle que tu as lue directement et celle que tu viens de lire dans le miroir. Ces deux lignes, tu dois maintenant les superposer, ce qui donne :

Canones diversi
super thema regium.

Sur un piano, tu joues la ligne supérieure avec la main droite tandis que la main gauche joue la ligne inférieure (en même temps !) Ou alors, tu fais jouer cela par deux instruments différents ... Et, ô miracle, le résultat n'est pas une atroce cacophonie comme lorsque tu enfonces d'un seul coup plusieurs touches au hasard sur un piano, mais quelque chose d'agréable à entendre, dans laquelle on trouve une certaine « harmonie » au sens où l'entendent les musiciens (respect de certaines règles d'écriture) ou le public (sensation plaisante à l'oreille). C'est là que réside la spéculation mathématico-musicale : BACH n'écrit qu'une ligne mais il y en a deux (la deuxième étant une symétrie de la première par rapport à une droite) et les deux lignes peuvent se jouer simultanément de manière harmonieuse ! ... Si cette *Offrande Musicale* t'intéresse, PHILIPS en a édité un bon CD : Orchestre de l'*Academy of St.Martin-in-the-Fields*, dirigé par Neville MARRINER.

Bibliographie

[1] Jean-Sébastien BACH, *The Art of the Fugue and A Musical Offering*, Dover Publ.

[2] Jean-Sébastien BACH, *The Musical Offering (BWV 1079)*, Lea Pocket Scores, N Y.

[3] Alberto BASSO, *Jean-Sébastien Bach*, Éd. Fayard.

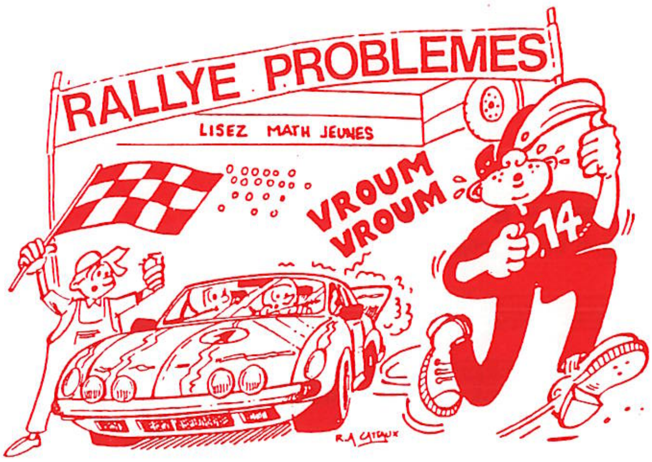
[4] Jacques CHAILLEY et Henri CHALLAN, *Théorie complète de la musique (2 vol.)*, Éd. Alphonse Leduc, Paris.

[5] Marc HONEGGER, *Dictionnaire de la musique (2 vol.)*, Éd. Bordas.

[6] Michael KENNEDY, *The Oxford Dictionary of Music*, Oxford Univ. Press.

[7] Wolfgang SCHMIEDER, *Thematisch-systematisches Verzeichnis der musikalischen Werke von Johann Sebastian Bach (BWV)*, Breitkopf & Härtel, Wiesbaden, 1980.

[8] *Histoire de la musique (2 vol.)*, Encyclopédie de la Pléiade.



Math-Jeunes n° 79, 78–80, 1997

C. Festraets

Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro 77 de *Math-Jeunes*.

mini 3 – solution

Les nombres cherchés sont de l'un des types suivants

$$11ab \qquad 1a1b \qquad 1ab1$$

$$1aab \qquad 1aba \qquad 1baa$$

où a et b sont deux chiffres différents de 1 avec $a \neq b$. a peut valoir 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Il y a donc 9 valeurs possibles pour a, mais après avoir choisi a, il n'y a plus que 8 valeurs possibles pour b puisque $b \neq a$.

Cela nous donne 9×8 nombres pour chacun des 6 types possibles, donc au total $6 \times 9 \times 8 = 432$ nombres.

mini 4 – solution

Désignons par a, b, c, d, e, f, g le nombre de pièces de chacun des sept écoliers ; ces nombres étant tous différents, on peut donc supposer que

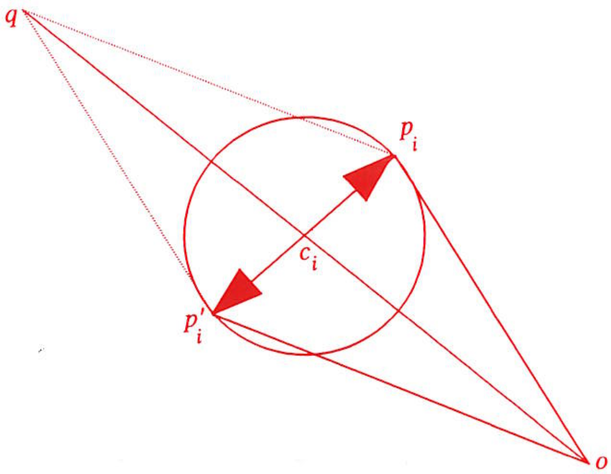
$$a < b < c < d < e < f < g$$

(1) Ou bien $d \geqslant 15$ et alors, $e \geqslant 16$, $f \geqslant 17$, $g \geqslant 18$, ce qui donne $e + f + g \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$.
(2) Ou bien $d \leqslant 14$ et alors, $c \leqslant 13$, $b \leqslant 12$, $a \leqslant 11$, ce qui donne $a + b + c + d \leqslant 11 + 12 + 13 + 14 = 50$. Et pour que le nombre total de pièces soit égal à 100, il faut que $e + f + g$ soit supérieur ou égal à 50.

Dans les deux cas, les trois écoliers qui possèdent le plus de pièces ont ensemble au moins cinquante pièces.

midi 3 – solution

Désignons par c_i le centre de la i^e montre ($i = 1, 2, 3, \cdots, 50$), par p_i l'extrémité de son aiguille des minutes à l'instant t et par p'_i cette même extrémité 30 minutes plus tard, O le centre de la table.



Dans ce qui suit, la notation ab désigne la longueur du segment $[ab]$.

En vertu de l'inégalité triangulaire, quel que soit i pris dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, 50\}$, on a $Op_i + p_iq \geqslant Oq$. D'où

$$Op_i + Op'_i \geqslant 2Oc_i \qquad (1)$$

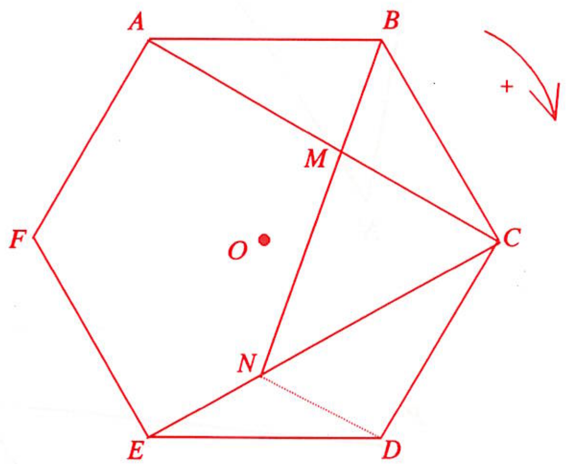
l'égalité ayant lieu si et seulement si O, p_i et p'_i sont alignés.

En additionnant les inégalités (1) pour i prenant les valeurs de 1 à 50, il vient $(Op_1 + Op_2 + \cdots + Op_{50}) + (Op'_1 + Op'_2 + \cdots + Op'_{50}) \geqslant 2 \cdot (Oc_1 + Oc_2 + \cdots + Oc_{50})$. Si on choisit t tel qu'au moins une des montres ait son centre et l'extrémité de son aiguille des minutes non alignés avec le centre O de la table, alors $(Op_1+Op_2+\cdots+Op_{50})+(Op'_1+Op'_2+\cdots+Op'_{50}) > 2\cdot(Oc_1+Oc_2+\cdots+Oc_{50})$. Cette inégalité est fausse lorsque $Op_1+\cdots+Op_{50} \leqslant Oc_1+\cdots+Oc_{50}$ et $Op'_1+\cdots+Op'_{50} \leqslant Oc_1+\cdots+Oc_{50}$.

On a donc
soit $Op_1+\cdots+Op_{50} > Oc_1+\cdots+Oc_{50}$ à l'instant t,
soit $Op'_1+\cdots+Op'_{50} > Oc_1+\cdots+Oc_{50}$ trente minutes plus tard.

midi 4 – solution

Désignons par O le centre de l'hexagone et par c la longueur de son côté.



Le rapport de section de M sur $[AC]$ est égal au rapport de section de N sur $[CE]$. Or les deux diagonales $[AC]$ et $[CE]$ ont même longueur, donc $|AM| = |CN|$ et $|MC| = |NE|$.

La rotation de centre O et d'angle $+120\,^\circ$ applique A sur C, B sur D, C sur E, le triangle ABC sur le triangle CDE et donc M sur N. D'où $\widehat{ABM} = \widehat{CDN}$.

Dans le quadrilatère $NBCD$,

$$\begin{aligned}\widehat{DNB} &= 360\,^\circ - \widehat{MBC} - \widehat{BCD} - \widehat{CDN}\\ &= 360\,^\circ - (120\,^\circ - \widehat{ABM}) - 120\,^\circ - \widehat{ABM}\\ &= 120\,^\circ\end{aligned}$$

Considérons le cercle de centre C et de rayon c ; il passe par O car $|CO| = c$ et $\widehat{BOD} = 120\,^\circ$.

Or $\widehat{BND} = 120\,^\circ$; le point N est donc sur ce cercle (l'arc $DNOC$ est le segment capable de l'angle $120\,^\circ$ construit sur la corde $[BD]$) ; d'où $|CN| = c$.

Dans le triangle ABC,

$$\frac{|AC|}{\sin 120\,^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 30\,^\circ}$$

Calculons la longueur de la diagonale :

$$|AC| = \frac{|AB|\sin 120\,^\circ}{\sin 30\,^\circ} = \frac{c\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = c\sqrt{3}$$

ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned}k &= \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AM|}{|AC| - |AM|}\\ &= \frac{c}{c\sqrt{3}-c} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{aligned}$$

maxi 3 – solution

Désignons par a, b, c les trois langues parlées à ce congrès et soit A l'un des savants. A communique avec chacun de ses seize collègues dans une certaine langue ; il y a donc au moins six collègues B, C, D, E, F, G avec qui il parle la même langue, a par exemple (sinon il parlerait chaque langue au plus avec cinq collègues et $3\times 5 = 15 < 16$).

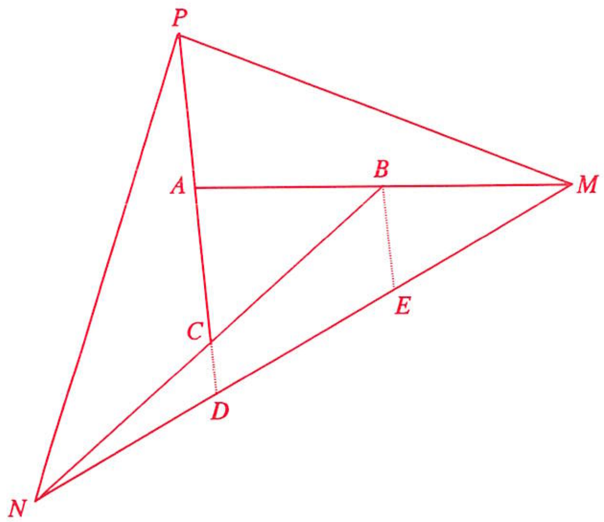
Parmi ces six collègues, s'il y en a deux B et C qui ne se parlent que dans la langue a, alors A, B et C se parlent dans une même langue a.

S'il n'y a pas deux de ces six collègues qui communiquent entre eux avec la langue a, alors B communique avec ses cinq collègues C, D, E, F, G soit en utilisant la langue b, soit en utilisant la langue c. Il y a donc au moins trois de ces collègues, soit C, D, E, avec lesquels il utilise la même langue, b par exemple (sinon il parlerait la langue b avec deux collègues au plus et la langue c avec deux collègues au plus et $2 \times 2 = 4 < 5$).

Si parmi C, D, E, il y en a deux, C et D qui se parlent dans la langue b, alors B, C et D se parlent dans la même langue b.

Sinon, c'est que C, D, E se parlent en utilisant la langue c.

maxi 4 – solution



Prolongeons PC jusqu'à son point d'intersection D avec MN.

Par B, menons BE parallèle à PD, E appartenant à MN.

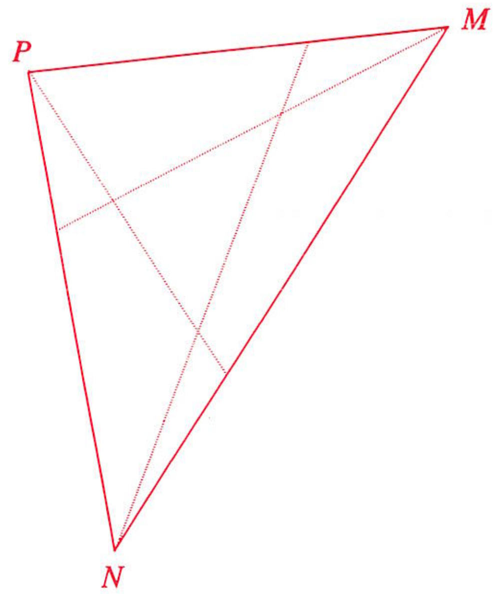
Dans le triangle NBE, C est le milieu de $[NB]$ et CD est parallèle à BE, donc D est le milieu de $[NE]$.

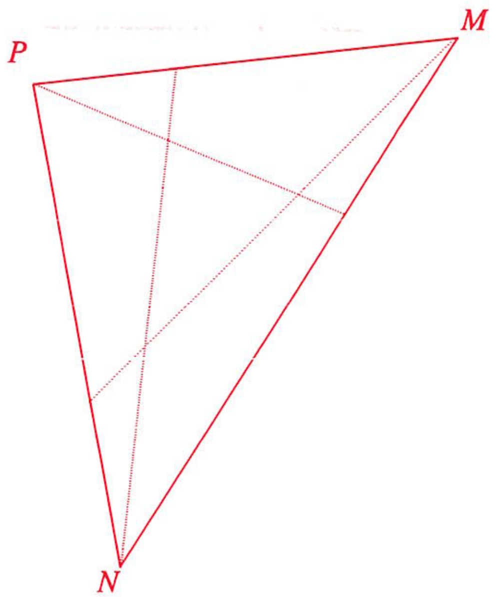
Dans le triangle AMD, B est le milieu de $[AM]$ et BE est parallèle à AD, donc E est le milieu de $[DM]$.

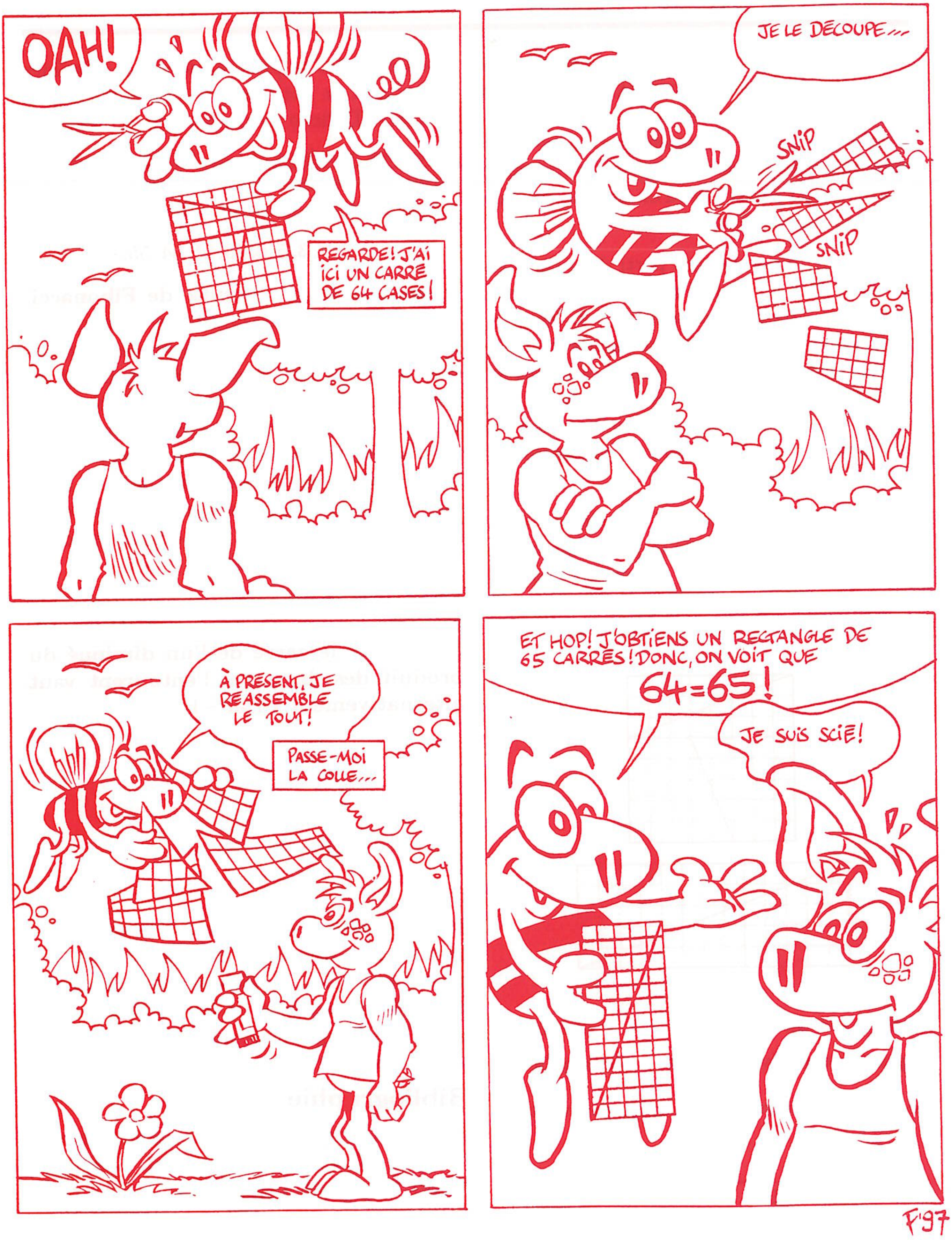
Le segment $[MN]$ est partagé en trois parties égales par les points D et E.

On peut effectuer les mêmes constructions sur les segments $[MP]$ et $[PN]$.

Pour retrouver le triangle ABC en ne connaissant que la position des points M, N, P, il suffit de joindre M, N, P respectivement aux points qui divisent les segments $[NM]$, $[MP]$, $[PN]$ dans le rapport $\frac{1}{3}$ (ou $\frac{2}{3}$) comme indiqué sur les figures ci-dessous. On a donc deux solutions à ce problème.






OAH!
REGARDE! J'AI ICI UN CARRE DE 64 CASES!
JE LE DÉCOUPE...
SNIP
SNIP
À PRESENT, JE REASSEMBLE LE TOUT!
PASSE-MOI LA COLLE...
ET HOP! J'OBTIENS UN RECTANGLE DE 65 CARRÉS! DONC, ON VOIT QUE
64=65!
JE SUIS SCIÉ!
F'97

Math-Jeunes n ° 79, 82–82, 1997

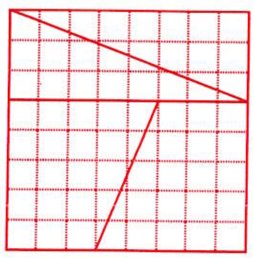
Encore les lapins de Léonard ...

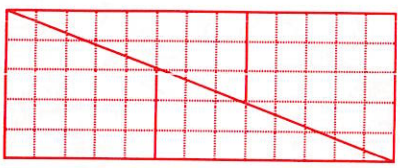
Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Je suppose que tu as été quelque peu troublé par la BD de Frédéric POURBAIX. Nous nous trouvons face à une situation ... disons paradoxale et qui va — du moins je l'espère — te convaincre de la nécessité qu'il y a à donner des démonstrations lorsqu'on affirme quelque chose en mathématiques.

Ainsi donc, nous sommes parti d'un carré de 64 cases (8×8). Nous l'avons divisé en deux rectangles, l'un 3×8 et l'autre 5×8. Ensuite, nous avons divisé le petit rectangle en deux suivant une diagonale et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Nous avons enfin juxtaposé les morceaux de manière à obtenir un rectangle 5×13 c'est-à-dire un rectangle qui compte 65 cases !!!

L'explication est cependant très simple. L'illusion produite résulte de la petite différence entre les inclinaisons des diagonales des rectangles 5×13 et 3×8. Cherchons en effet le coefficient angulaire de ces deux droites.





Dans le cas du rectangle 3×8, le coefficient angulaire vaut évidemment $\frac{3}{8}$ alors qu'il est de $\frac{5}{13}$ dans l'autre cas. La différence vaut

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{104}$$

Les diagonales ne peuvent donc pas coïncider et il y a là un petit espace vide équivalent à un carré. Difficile de repérer cela à l'œil nu !

Mais ces nombres 3, 5, 8, 13, ... ne te rappellent-ils rien ? Mais oui, bien sûr, ils appartiennent à la fameuse suite

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

connue sous le nom de **suite de Fibonacci.** Tu sais, celle que LÉONARD DE PISE ou FIBONACCI a introduite au moyen de petits lapins dans son *liber abaci*, écrit au début du treizième siècle. Si vraiment tu n'en as jamais entendu parler, il est temps de te procurer d'anciens numéros de *Math-Jeunes*. Sache tout de même que chaque terme de cette suite est obtenu en faisant la somme de ses deux précédents (bien sûr, il faut donner les deux premiers qui sont 0 et 1).

Essaie donc de démontrer (par récurrence) la propriété suivante des nombres de Fibonacci, à savoir que **le carré de l'un diminué du produit des deux qui l'entourent vaut alternativement +1 et −1.**

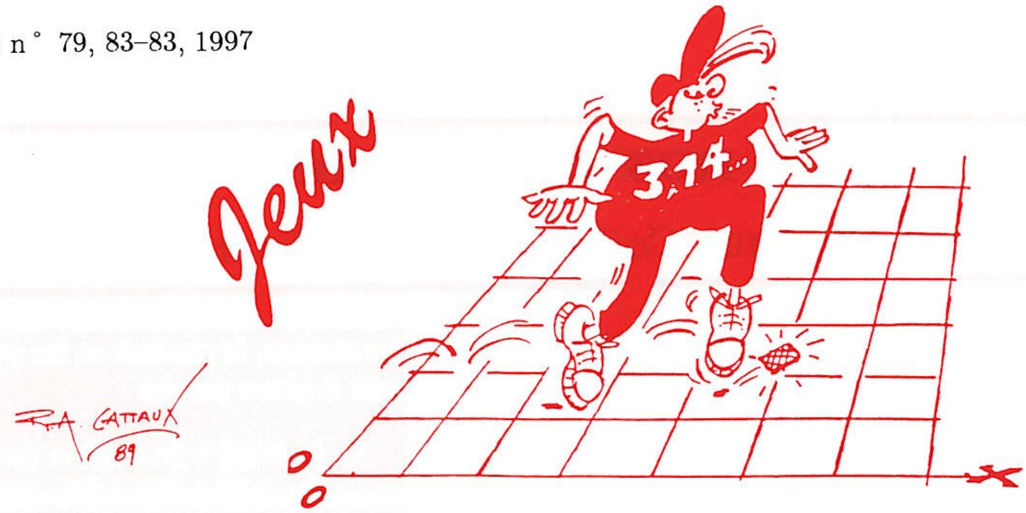
$$\begin{aligned} 8^2 - 5 \times 13 &= -1 \\ 13^2 - 8 \times 21 &= +1 \\ 21^2 - 13 \times 34 &= -1 \\ 34^2 - 21 \times 55 &= +1 \\ 55^2 - 34 \times 89 &= -1 \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

ce qui te permet de reproduire le même petit truc avec des carrés de côtés 21, 55, ... mais aussi 13, 34, ... bien sûr, avec ce second ensemble de nombres, il faut d'abord construire le rectangle, le découper et reconstituer le carré avec les morceaux. Bon amusement !

Bibliographie

Édouard LUCAS, *Récréations mathématiques (4 vol.)*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1979.

Math-Jeunes n ° 79, 83–83, 1997



Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3			T		
4					
5					

Horizontalement
1. 6 859
2. 81 000
3. 243 000
4. 3 640
5. 59 850

Verticalement
1. 32 490
2. 19 500
3. 61 560
4. 83 790
5. 9 000

Le mot caché (par CéVé)

Retrouvez, dans la grille, et biffez les mots en italique dans le texte présenté. A cet effet, serpentez dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le mot caché. Il s'agit du nom d'un célèbre mathématicien. Qui est-il ?
Voici la phrase qui est proposée à votre sagacité.
La vie d'...... est encore peu connue. Pendant deux millénaires les éléments constituent la bible mathématique par excellence. Ils se distinguent des textes babyloniens et égyptiens par une primauté accordée à la géométrie et à de véritables démonstrations fondées sur un raisonnement déductif.

m	e	o	s	i	a	i	e	n	s	e	t	i	r	i	u	a	m	n	o	c
e	l	n	m	e	r	n	i	e	b	l	s	n	e	t	t	e	i	n	s	n
n	e	n	e	n	l	o	v	b	i	d	i	g	v	a	b	l	r	u	t	o
t	o	e	g	t	y	b	l	l	e	n	a	u	e	n	s	e	p	e	r	m
s	m	e	c	n	e	a	i	c	l	i	i	r	i	t	n	t	i	t	a	e
t	e	r	e	l	l	b	m	u	t	d	e	e	l	s	a	d	o	n	u	d
r	p	a	c	d	n	o	f	e	s	e	♣	s	d	t	d	n	e	s	n	e
i	e	x	x	e	♣	a	o	c	n	e	d	e	s	e	e	d	p	r	a	p
d	e	u	e	e	s	l	r	e	r	c	o	r	d	s	e	u	l	e	s	u
i	t	a	m	e	h	t	a	m	u	c	t	i	e	e	t	c	t	e	s	e
q	a	l	y	p	♣	a	a	l	s	a	s	t	t	e	x	e	i	f	n	p
u	e	e	g	t	i	e	n	s	c	o	n	u	e	n	t	d	t	e	u	a

Math-Jeunes n° 79, 84–86, 1997

Usons de nos complexes !

Yves Hanssens, *Collège technique Saint-Henri, Mouscron*

Ces derniers temps, *Math-Jeunes* s'est intéressé au grand théorème de Fermat et aux triplets pythagoriciens ([1], [2] et [3]). Les nombres complexes me permettent de t'en proposer le prolongement suivant :

Si un nombre x peut s'écrire comme somme des carrés de deux naturels premiers entre eux et de parités différentes, il en va de même pour toutes les puissances de x à exposant naturel.

Ainsi $13 = 2^2 + 3^2$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 13^2 &= 5^2 + 12^2 \\ 13^3 &= 9^2 + 46^2 \\ 13^4 &= 119^2 + 120^2 \\ &\vdots \\ 13^{11} &= 246\,046^2 + 1\,315\,911^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

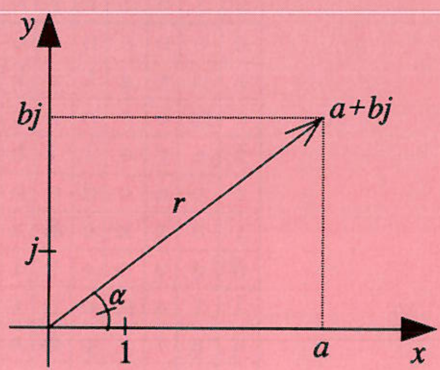
Et ça continue encore et encore. C'est que le début. D'accord ? D'accord ! [4]
Afin de ne pas faire fuir les lecteurs que les développements théoriques indisposent, je me contenterai ici du « et comment fait-on ? » et négligerai le « et ça marche toujours ? ».
Si les nombres complexes n'ont plus de secret pour toi, tu peux faire l'impasse sur l'encadré qui suit et aller faire un tour jusqu'à ce qu'on te rappelle.

Ouf ! Ça fait du bien d'être entre nous ! Dans l'ensemble des **réels**, l'équation $x^2 = -9$ n'admet pas de solution. **Imaginons** un nombre j tel que $j^2 = -1$. Un tel nombre ne peut être réel, il ne peut être qu'*imaginaire* ! Et puisque $-9 = 9 \cdot (-1) = 9 \cdot j^2$, l'équation ci-dessus aura pour solutions **imaginaires** $3j$ et $-3j$. Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $a + bj$ où a et b sont des nombres réels. a est sa partie **réelle** et b sa partie **imaginaire**.
Comment se manipulent ces bestioles ?

La somme, le produit et les puissances suffisent à notre propos :

1. $(a+bj)+(c+dj) = (a+c)+(b+d)j$
   Ex. : $(3+5j)+(7-2j) = 10+3j$
2. $$\begin{aligned}(a+bj) &\cdot (c+dj) \\ &= ac + adj + bcj + bdj^2 \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)j\end{aligned}$$
   puisque $j^2 = -1$.
   Exemple :
   $$\begin{aligned}(3+2j) &\cdot (-5+7j) \\ &= -15 + 21j - 10j + 14j^2 \\ &= -29 + 11j\end{aligned}$$
3. $(a+bj)^2 = (a+bj)\cdot(a+bj) = a^2 - b^2 + 2abj$
4. Oui, mais avec $(7+11j)^{13}$, je fais quoi ? Grâce au binôme de Newton,
   $$(7+11j)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot 7^{13-k} \cdot (11j)^k$$
   et puisqu'un terme sur deux de cette somme est réel et les autres imaginaires et puisque ... Mais que se passe-t-il ? Tu blêmis ? Pas de panique, nous allons trouver autre chose !

Représentons les nombres complexes dans un repère orthonormé avec un axe pour les réels et l'autre pour les imaginaires.



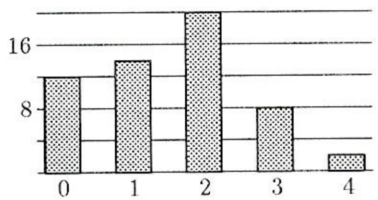
1. Parmi les cinq nombres suivants, quel est le plus petit qui, à la fois,

- divisé par 3, donne pour reste 1,
- divisé par 4, donne pour reste 2,
- divisé par 5, donne pour reste 3 et
- divisé par 6, donne pour reste 4 ?

(A) 10 **(B)** 18 **(C)** 28 **(D)** 58 **(E)** 358

2. *Sans réponse préformulée* — Un nombre est multiplié par 3 et du produit sont retirés les trois quarts de la moitié du nombre initial. Le résultat de ces opérations est 21 ; quel est le nombre initial ?

3. Dans une petite entreprise, le nombre d'enfants des différents employés donne lieu au graphique ci-contre (où la hauteur d'une barre indique le nombre d'employés ayant le nombre indiqué d'enfants). Quel en est le nombre moyen, à un dixième près ?



(A) 1,5 **(B)** 1,9 **(C)** 2 **(D)** 11,2
(E) Une autre réponse

4. Le point P est distant de 3 cm de la droite d. Dans le plan qui contient P et d, combien y a-t-il de points situés à la fois à une distance de 1 cm de d et à une distance de 6 cm de P ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

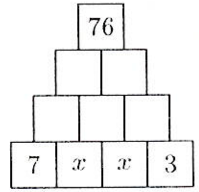
5. Si r et s sont des entiers tous deux divisibles par 5, laquelle des propositions suivantes *n'est pas* nécesssairement vraie ?

(A) $r - s$ est divisible par 5.
(B) rs est un multiple de 25.
(C) 5 est un diviseur de $r + s$.
(D) $r + s$ est divisible par 10.
(E) $r^2 + s^3$ est un multiple de 25.

6. Combien existe-t-il de paires $\{m, n\}$ de nombres naturels tels que le plus petit commun multiple de m et de n soit 72 et que le plus grand commun diviseur de m et de n soit 16 ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** Une infinité

7. La règle de construction du "mur" ci-contre est que la brique qui repose sur deux autres porte la somme des nombres figurant sur ces deux dernières. Que vaut x ?



(A) 6 **(B)** 11 **(C)** 19 **(D)** 33 **(E)** $76 - 2x$

8. Que vaut $997 \times 43 - 997 \times 27 + 16 \times 3$?

(A) 64 **(B)** 96 **(C)** 15 904 **(D)** 16 000 **(E)** 125 589

9. Quel est le reste de la division par 9 de $(10^{1997} - 1)^{1997}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 7

10. Deux voitures roulent l'une vers l'autre en ligne droite : A à la vitesse de 70 km/h et B à la vitesse de 110 km/h. Au moment où elles sont distantes de 100 km, un avion survole A et se dirige vers B à la vitesse de 220 km/h. À une minute près, après combien de temps survole-t-il B ?

(A) 8 min **(B)** 15 min **(C)** 18 min **(D)** 30 min **(E)** 55 min

11. De combien $8 + 18 + 28 + 38 + 48 + 58 + 68 + 78 + 88 + 98$ surpasse-t-il 10×8 ?

(A) 45 **(B)** 100 **(C)** 400 **(D)** 450 **(E)** 530

12. Si a et b sont deux nombres non nuls, $\frac{a}{b} = \frac{9}{12}$ équivaut à :

(A) $a = 9$ et $b = 12$;
(B) $a = 3$ et $b = 4$;
(C) $a = -3$ et $b = -4$;
(D) le triple de a vaut le quadruple de b ;
(E) le triple de b vaut le quadruple de a.

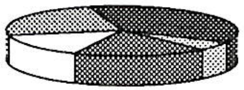
13. Si P, Q et R sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1, combien y a-t-il, dans le plan PQR, de points dont la distance à P vaut 1, la distance à Q vaut 2 et la distance à R vaut 3 ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 8

14. La date 19/5/95 a ceci de remarquable que le troisième nombre y est le produit des deux premiers. Combien de fois cela s'est-il produit entre le 1/1/91 et le 31/12/94 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 8

15. Le directeur d'une entreprise représente par un diagramme "en camembert" les exportations de sa société vers cinq pays, données par le tableau ci-dessous.



Pays	Montant des exportations (millions de francs)
Allemagne	200
Brésil	130
Canada	80
Danemark	100
Espagne	30

Que doit mesurer l'angle du secteur représentant les exportations vers l'Espagne ?

(A) 18° (B) 20° (C) 24,5° (D) 25° (E) 32,5°

16. Si trois droites distinctes sont tangentes à un même cercle, alors nécessairement :

(A) ces trois droites ont un point commun ;
(B) ces trois droites sont parallèles ;
(C) ces trois droites déterminent un triangle équilatéral ;
(D) deux d'entre elles sont perpendiculaires ;
(E) deux d'entre elles ont un point commun.

17. Pour se rendre de chez elle à la gare, Béatrice qui marche à la vitesse de 6 km/h met 5 min de moins que son petit frère Antoine qui marche à la vitesse de 4 km/h. En kilomètres, quelle distance sépare leur maison de la gare ?

(A) 0,5 (B) 0,75 (C) 1 (D) 1,2 (E) 1,625

18. Admettons ici que lorsqu'un kangourou bondit, sa trajectoire est un demi-cercle dont un diamètre est le segment déterminé par le point de départ et le point de chute. Si un kangourou parcourt en bondissant une distance horizontale de 3 km, quelle est, à 1 km près, la distance qu'il a parcourue en l'air ?

(A) 3 km (B) 5 km (C) 9 km (D) 19 km
(E) Cela dépend de la longueur des bonds.

19. *Sans réponse préformulée* — Je marche toujours à la vitesse de 4 km/h. Je mets 4 min pour traverser une place circulaire en suivant un diamètre ; combien de temps mettrai-je pour en faire le tour ? (Donner une réponse en secondes, arrondie à l'unité la plus proche.)

20. Dans une entreprise, tous les salaires ont été augmentés de 2 %. L'écart entre le salaire le plus bas et le salaire le plus élevé

(A) a diminué de 2 % ;
(B) a diminué de 1000 F environ ;
(C) n'a pas été modifié ;
(D) a augmenté de 2 % ;
(E) a augmenté de 4 %.

21. Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit un rectangle ?

(A) Le quadrilatère possède un centre de symétrie et un angle droit.
(B) Le quadrilatère possède deux axes de symétrie.
(C) Les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.
(D) Les côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
(E) Les médianes sont perpendiculaires.

22. *Sans réponse préformulée* — Combien de nombres différents est-il possible de former en permutant les quatre chiffres 1, 9, 9, 7 ?

23. Pour remplir d'eau un réservoir cylindrique, j'utilise un récipient conique dont le rayon est la moitié de celui du cylindre et la hauteur, le double de celle du cylindre. Combien de fois devrai-je remplir ce récipient ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 12

24. Mon contrat d'assurance "dégâts matériels" (omnium) prévoit que 10 % des frais restent à ma charge, avec un minimum de 5000 F et un maximum de 10 000 F. Si le montant des réparations consécutives à un accident dont je suis responsable est de 65 000 F, combien la compagnie me remboursera-t-elle ?

(A) 10 000 F **(B)** 55 000 F **(C)** 58 500 F **(D)** 60 000 F
(E) 65 000 F

25. Pour écrire tous les naturels de 1 à 1997 inclus, combien de chiffres 1 sont nécessaires ?

(A) 400 **(B)** 1208 **(C)** 1298 **(D)** 1997
(E) Une autre réponse.

26. Le nombre moyen de téléspectateurs d'une chaine de télévision a baissé de 30 % en avril 1996 par rapport à mars ; en mai, ce nombre a augmenté de 30 % par rapport au mois précédent. Dans ces conditions,

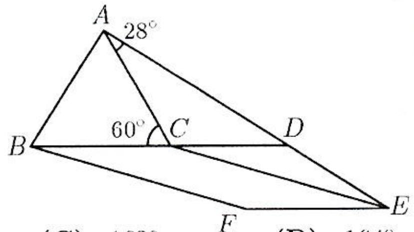
(A) la baisse d'avril est totalement compensée par la hausse de mai ;
(B) en mai, le nombre moyen de spectateurs vaut 91% de celui de mars ;
(C) en mai, le nombre moyen de spectateurs est le même qu'en mars ;
(D) si l'augmentation de 30 % avait eu lieu avant la baisse de 30 %, la diminution de mars à mai aurait été moins importante ;
(E) il est impossible d'évaluer les variations de ces nombres en pour cent.

27. Une feuille rectangulaire de 30 cm × 21 cm est quadrillée par des parallèles aux côtés de la feuille, distantes de 5 mm. Dans chaque direction, la première parallèle est à 5 mm du bord. Par combien de sommets du quadrillage passe l'une des diagonales de la feuille ?

(A) 0 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 12 **(E)** 41

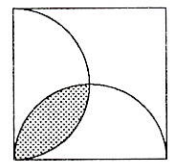
28. *Sans réponse préformulée* — Pour carreler le sol rectangulaire d'une pièce de 6,3 m sur 2,7 m, quel est, en centimètres, le côté des plus grandes dalles carrées qu'il est possible d'utiliser sans en recouper ?

29. Dans la figure ci-contre, $BCEF$ est un parallélogramme ; les points B, C et D sont alignés, ainsi que A, D et E ; en outre, $\|CD\| = \|DE\|$. Que vaut l'angle $\widehat{BFE}$?



(A) 120° **(B)** 160° **(C)** 162° **(D)** 164°
(E) Une autre réponse

30. Dans la figure ci-contre, deux demi-cercles ont été tracés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?



(A) $\frac{\pi - 4}{8}$ **(B)** $\frac{\pi - 2}{8}$ **(C)** $\frac{\pi}{8}$ **(D)** $\frac{\pi + 2}{8}$ **(E)** $\frac{\pi + 4}{8}$

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

1. Le proverbe "On ne désire pas ce qu'on ne connait pas." signifie que

(A) ce qui est connu est désiré ;
(B) ce qui est connu n'est pas désiré ;
(C) ce qui n'est pas connu est désiré ;
(D) ce qui est désiré n'est pas connu ;
(E) ce qui est désiré est connu.

2. Dans une entreprise, tous les salaires ont été augmentés de 2 %. L'écart entre le salaire le plus bas et le salaire le plus élevé

(A) a diminué de 2 % ;
(B) a diminué de 1000 F environ ;
(C) n'a pas été modifié ;
(D) a augmenté de 2 % ;
(E) a augmenté de 4 %.

3. Quels que soient les réels strictement positifs x et y, $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$ se simplifie en :

(A) $x+y$ (B) xy (C) $\dfrac{xy}{x+y}$ (D) $\dfrac{1}{xy}$ (E) $\dfrac{x+y}{xy}$

4. Si l'aire d'un rectangle n'a pas varié alors que l'une de ses dimensions a augmenté de 10 %, de combien a diminué l'autre dimension ?

(A) 9 % (B) $\frac{100}{11}$ % (C) 10 % (D) 11 % (E) $\frac{100}{9}$ %

5. Combien de couples (a, b) de nombres réels vérifient l'égalité

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1+1}{a+b} \ ?$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Une infinité

6. Deux plaques rectangulaires ont pour dimensions 45 cm × 28 cm et 45 cm × 60 cm ; la seconde est deux fois plus épaisse que la première. De combien de centimètres faut-il diminuer la longueur de la seconde pour que la partie restante ait même volume que la première plaque ?

(A) 14 (B) 28 (C) 32 (D) 46 (E) 53

7. Le prix d'un livre est augmenté de p% ; un peu plus tard, le nouveau prix est diminué de p%. Dans ces conditions, le prix initial peut être calculé en multipliant le prix final par l'un des nombres suivants. Lequel ?

(A) 1 (B) $\dfrac{1-p^2}{200}$ (C) $\dfrac{100}{p^2}$ (D) $1-\dfrac{p^2}{10\,000-p^2}$
(E) $\dfrac{10\,000}{10\,000-p^2}$

8. Soit $[AB]$ un diamètre d'un cercle de centre O et C un point de ce cercle, distinct de A et de B ; par C est tracée la corde $[CD]$ perpendiculaire à AB ; la bissectrice de l'angle $\widehat{OCD}$ recoupe le cercle en E. Nécessairement,

(A) E est au milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$;
(B) E est au tiers de l'arc $\overset{\frown}{AB}$;
(C) D et E sont à la même distance de la droite AB ;
(D) E est équidistant de B et C ;
(E) E est équidistant de O et D.

9. Parmi les cinq nombres suivants, quel est le plus petit qui, à la fois,

- divisé par 3, donne pour reste 1,
- divisé par 4, donne pour reste 2,
- divisé par 5, donne pour reste 3 et
- divisé par 6, donne pour reste 4 ?

(A) 10 (B) 18 (C) 28 (D) 58 (E) 358

10. Une feuille rectangulaire de 30 cm × 21 cm est quadrillée par des parallèles aux côtés de la feuille, distantes de 5 mm. Dans chaque direction, la première parallèle est à 5 mm du bord. Par combien de sommets du quadrillage passe l'une des diagonales de la feuille ?

(A) 0 (B) 5 (C) 7 (D) 12 (E) 41

11. Pour écrire tous les naturels de 1 à 1997 inclus, combien de chiffres 1 sont nécessaires ?

(A) 400 (B) 1208 (C) 1298 (D) 1997
(E) Une autre réponse.

12. Quel est le développement de $(x-1)(x-1)^2(x-1)^3$?

(A) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
(B) $x^6 - 24x^3 - 1$
(C) $x^6 + 15x^4 + 12x^2 + 1$
(D) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$
(E) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 24x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

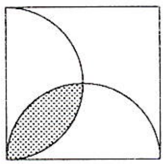
13. *Sans réponse préformulée* — Une artiste, disposant de cubes tous de même dimension, réalise une sculpture abstraite en collant un cube sur chaque face d'un cube central. Le lendemain, elle décide de retravailler son œuvre en collant encore un cube sur chaque face libre du solide obtenu la veille. Combien de cubes a-t-elle alors utilisés en tout ?

14. Lequel des cinq nombres suivants est différent des quatre autres ?

(A) $1+\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (C) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$
(E) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+1$

15. *Sans réponse préformulée* — Cinq nombres naturels consécutifs ont la propriété que la somme des carrés des trois plus petits est égale à la somme des carrés des deux plus grands. Quelle est la valeur commune de ces deux sommes ?

16. Dans la figure ci-contre, deux demi-cercles ont été tracés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?



(A) $\dfrac{\pi-4}{8}$ (B) $\dfrac{\pi-2}{8}$ (C) $\dfrac{\pi}{8}$ (D) $\dfrac{\pi+2}{8}$ (E) $\dfrac{\pi+4}{8}$

17. *Sans réponse préformulée* — Après que 15 jeunes filles ont quitté une soirée dansante, il reste deux fois autant de danseurs que de danseuses ; 45 garçons s'en vont alors, et il reste cinq jeunes filles pour chaque jeune homme. Quel était le nombre initial de jeunes filles ?

18. Deux variables réelles x et y sont liées par une certaine relation. La table ci-dessous donne les valeurs de y correspondant à cinq des valeurs de x.

x	0	1	2	3	4
y	100	90	70	40	0

Laquelle des relations suivantes correspond à ces données ?

(A) $y = 100 - 10x$ (B) $y = 100 - 5x^2$ (C) $y = 100 - 5x - 5x^2$
(D) $y = 20 - x - x^2$ (E) $y = (x-20)(x-5)$

19. Dans un cercle de 10 cm de rayon, une première corde est tracée à 6 cm du centre et une seconde à 8 cm du centre. Quel est le rapport de la longueur de la seconde corde à celle de la première ?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\sqrt{3}-1$ (C) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ (D) $\frac{1}{4}\pi$ (E) $\frac{2}{7}\pi$

20. *Sans réponse préformulée* — Une échelle de 5 m de long est appuyée contre un mur vertical, son pied se trouvant à 1,4 m du pied du mur. Le pied de l'échelle glisse sur le sol horizontal, s'écartant du mur ; de quelle distance, en centimètres, si le sommet de l'échelle est descendu de 80 cm ?

21. Dans une entreprise, une machine fabrique 500 enveloppes en 8 min. Le patron achète une seconde machine et lorsque les deux machines travaillent ensemble, elles fabriquent 500 enveloppes en 2 min. Laquelle des équations suivantes traduit le problème de déterminer, en minutes, le temps nécessaire à la nouvelle machine, seule, pour fabriquer 500 enveloppes ?

(A) $8 - x = 2$ (B) $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{500}{8}+\dfrac{500}{x}=500$
(D) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{8}=1$ (E) Une autre équation

22. Dans une entreprise employant 40 hommes et 60 femmes, le salaire moyen des hommes est supérieur de 20% à celui des femmes. Si le salaire moyen global est de 54 000 F, quel est le salaire moyen des hommes ?

(A) 50 000 F (B) 54 000 F (C) 56 000 F (D) 60 000 F
(E) 67 200 F

23. Un verre conique est rempli de jus de fruit aux trois quarts de sa hauteur. Un peu de jus est bu, ce qui ramène le niveau à la moitié de la hauteur. Quelle fraction du contenu initial a été bue ?

(A) $\frac{19}{64}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{35}{64}$ (D) $\frac{5}{8}$ (E) $\frac{19}{27}$

24. La droite d'équation $y = x$ est tangente à un cercle centré au point de coordonnées $(2, 4)$. Quel est le rayon de ce cercle ?

(A) 1 (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{3}$

25. Aux réels strictement positifs x, y et z, sont associés

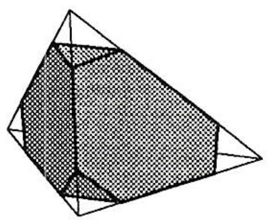
$$a = \frac{xy}{x+y}, \quad b = \frac{xz}{x+z} \quad \text{et} \quad c = \frac{yz}{y+z}.$$

À laquelle des fractions suivantes x est-il toujours égal ?

(A) $\dfrac{abc}{-ab+ac+bc}$ (B) $\dfrac{2abc}{ab+ac+bc}$ (C) $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$

(D) $\dfrac{2abc}{ab-ac+bc}$ (E) $\dfrac{2abc}{-ab+ac+bc}$

26. Chaque coin d'un tétraèdre est coupé par un plan parallèle à la face opposée, les arêtes étant coupées au quart à partir du sommet. Si les quatre petits tétraèdres ainsi déterminés sont ôtés, quel est le rapport du volume restant au volume initial ?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{8}$ (E) $\frac{15}{16}$

27. En résolvant un problème qui se ramène à une équation du second degré, un élève a commis une seule erreur : son terme indépendant est incorrect ; les racines qu'il obtient sont 2 et 8. Sa voisine a elle aussi commis une seule erreur, mais dans le coefficient du terme du premier degré ; les racines qu'elle obtient sont -9 et -1. Quelle est, parmi les suivantes, l'équation correcte ?

(A) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (B) $x^2 + 10x + 9 = 0$
(C) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (D) $x^2 - 8x - 9 = 0$
(E) $x^2 + 8x - 9 = 0$

28. Dans un triangle rectangle, les médianes issues des sommets des angles aigus sont de longueurs 5 et $\sqrt{40}$. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

(A) $\frac{52}{5}$ (B) $2\sqrt{40}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $2\sqrt{13}$
(E) Une autre valeur

29. La somme de deux nombres réels est -3 et leur produit $-\frac{136}{9}$; quel est le plus grand de ces deux nombres ?

(A) $-\frac{17}{3}$ (B) 0 (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{17}{3}$ (E) $\frac{136}{3}$

30. Dans un repère orthonormé, les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(5, 5)$, $(2, 1)$ et $(0, k)$. Pour quelle valeur de k la somme $\|AC\| + \|CB\|$ est-elle minimale ?

(A) $\frac{15}{7}$ (B) 3 (C) $\frac{27}{7}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) $\frac{29}{6}$

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.

1. Le proverbe “On ne désire pas ce qu'on ne connait pas.” signifie que

(A) ce qui est connu est désiré ;
(B) ce qui est connu n'est pas désiré ;
(C) ce qui n'est pas connu est désiré ;
(D) ce qui est désiré n'est pas connu ;
(E) ce qui est désiré est connu.

2. *Sans réponse préformulée* — Une artiste, disposant de cubes tous de même dimension, réalise une sculpture abstraite en collant un cube sur chaque face d'un cube central. Le lendemain, elle décide de retravailler son œuvre en collant encore un cube sur chaque face libre du solide obtenu la veille. Combien de cubes a-t-elle alors utilisés en tout ?

3. Dans une entreprise employant 40 hommes et 60 femmes, le salaire moyen des hommes est supérieur de 20% à celui des femmes. Si le salaire moyen global est de 54 000 F, quel est le salaire moyen des hommes ?

(A) 50 000 F **(B)** 54 000 F **(C)** 56 000 F **(D)** 60 000 F
(E) 67 200 F

4. L'assertion “Le présent énoncé est faux!” est :

(A) vraie ; **(B)** fausse ; **(C)** aléatoire ;
(D) contradictoire ; **(E)** universelle.

5. Une échelle de 5 m de long est appuyée contre un mur vertical, son pied se trouvant à 1,4 m du pied du mur. Le pied de l'échelle glisse sur le sol horizontal, s'écartant du mur ; de quelle distance, si le sommet de l'échelle est descendu de 80 cm ?

(A) 0,8 m **(B)** 1 m **(C)** 1,6 m **(D)** 1,8 m **(E)** 3 m

6. *Sans réponse préformulée* — Pendant les vacances d'Annie, il y a eu huit demi-jours pluvieux, dont six après-midis. En outre, à une matinée pluvieuse a toujours succédé un après-midi sec. Quel est le plus petit nombre de jours de vacances compatible avec ces informations ?

7. Une feuille rectangulaire de 30 cm × 21 cm est quadrillée par des parallèles aux côtés de la feuille, distantes de 5 mm. Dans chaque direction, la première parallèle est à 5 mm du bord. Par combien de sommets du quadrillage passe l'une des diagonales de la feuille ?

(A) 0 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 12 **(E)** 41

8. Pour écrire tous les naturels de 1 à 1997 inclus, combien de chiffres 1 sont nécessaires ?

(A) 400 **(B)** 1208 **(C)** 1298 **(D)** 1997
(E) Une autre réponse.

9. Le prix d'un livre est augmenté de $p\%$; un peu plus tard, le nouveau prix est diminué de $p\,\%$. Dans ces conditions, le prix initial peut être calculé en multipliant le prix final par l'un des nombres suivants. Lequel ?

(A) 1 **(B)** $\dfrac{1-p^2}{200}$ **(C)** $\dfrac{100}{p^2}$ **(D)** $1-\dfrac{p^2}{10\,000-p^2}$
(E) $\dfrac{10\,000}{10\,000-p^2}$

10. Aux réels strictement positifs x, y et z, sont associés

$$a=\frac{xy}{x+y},\quad b=\frac{xz}{x+z}\quad \text{et}\quad c=\frac{yz}{y+z}.$$

À laquelle des fractions suivantes x est-il toujours égal ?

(A) $\dfrac{abc}{-ab+ac+bc}$ **(B)** $\dfrac{2abc}{ab+ac+bc}$ **(C)** $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$
(D) $\dfrac{2abc}{ab-ac+bc}$ **(E)** $\dfrac{2abc}{-ab+ac+bc}$

11. Dans une entreprise, une machine fabrique 500 enveloppes en 8 min. Le patron achète une seconde machine et lorsque les deux machines travaillent ensemble, elles fabriquent 500 enveloppes en 2 min. Laquelle des équations suivantes traduit le problème de déterminer, en minutes, le temps nécessaire à la nouvelle machine, seule, pour fabriquer 500 enveloppes ?

(A) $8-x=2$ **(B)** $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{500}{8}+\dfrac{500}{x}=500$
(D) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{8}=1$ **(E)** Une autre équation

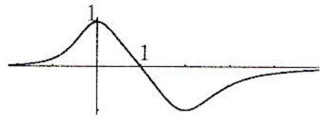
12. Quel est le développement de $(x-1)(x-1)^2(x-1)^3$?

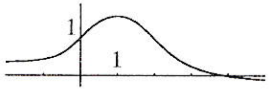
(A) $x^6-3x^4+3x^2-1$
(B) x^6-24x^3-1
(C) $x^6+15x^4+12x^2+1$
(D) $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$
(E) $x^6-6x^5+15x^4-24x^3+15x^2-6x+1$

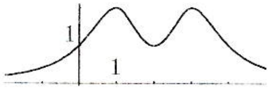
13. En résolvant un problème qui se ramène à une équation du second degré, un élève a commis une seule erreur : son terme indépendant est incorrect ; les racines qu'il obtient sont 2 et 8. Sa voisine a elle aussi commis une seule erreur, mais dans le coefficient du terme du premier degré ; les racines qu'elle obtient sont -9 et -1. Quelle est, parmi les suivantes, l'équation correcte ?

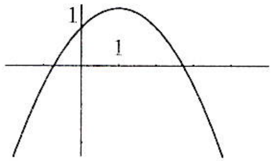
(A) $x^2 - 10x + 9 = 0$ **(B)** $x^2 + 10x + 9 = 0$
(C) $x^2 - 10x + 16 = 0$ **(D)** $x^2 - 8x - 9 = 0$
(E) $x^2 + 8x - 9 = 0$

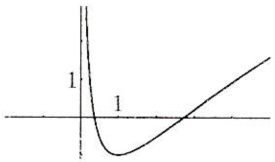
14. À droite, est représenté le graphe de la dérivée f' d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$; parmi les cinq graphes ci-dessous, lequel peut être celui de f ?

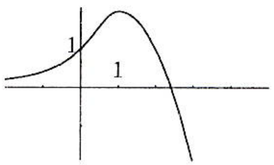


(A)


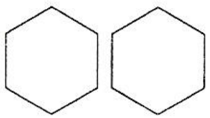
(B)


(C)


(D)


(E)


15. Voici deux hexagones réguliers isométriques. Combien existe-t-il, dans leur plan, de rotations appliquant celui de gauche sur celui de droite ?

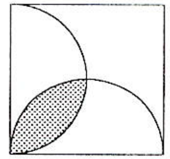


(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** Une infinité

16. Pour remplir d'eau un réservoir cylindrique, j'utilise un récipient conique dont le rayon est la moitié de celui du cylindre et la hauteur, le double de celle du cylindre. Combien de fois devrai-je remplir ce récipient ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 12

17. Dans la figure ci-contre, deux demi-cercles ont été tracés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Quelle est l'aire de la partie ombrée ?



(A) $\dfrac{\pi - 4}{8}$ **(B)** $\dfrac{\pi - 2}{8}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{8}$ **(D)** $\dfrac{\pi + 2}{8}$ **(E)** $\dfrac{\pi + 4}{8}$

18. Laquelle des représentations paramétriques suivantes est celle d'une droite ?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 + 2t^2 \\ z = 3 - t^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$ **(B)** $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = 2 + 2t^3 \\ z = 3 - t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

(C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ **(D)** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}_-)$

(E) $\begin{cases} x = 1 + |t| \\ y = 2 + 2|t| \\ z = 3 - |t| \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}_+)$

19. Dans un triangle où deux des médianes sont perpendiculaires, l'une des situations suivantes *ne* peut *pas* se produire ; laquelle ?

(A) Le triangle est rectangle.
(B) Le triangle est acutangle.
(C) Le triangle est isocèle.
(D) Les côtés du triangle sont proportionnels à $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ et 3.
(E) Les côtés du triangle sont proportionnels à $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$.

20. Dans un trapèze isocèle, la grande base et une diagonale ont même longueur, et la longueur de la petite base est égale à la hauteur. Quel est le rapport de la longueur de la petite base à celle de la grande base ?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

21. Dans un repère orthonormé, les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(5,5)$, $(2,1)$ et $(0,k)$. Pour quelle valeur de k la somme $\|AC\| + \|CB\|$ est-elle minimale ?

(A) $\frac{15}{7}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{27}{7}$ **(D)** $\frac{9}{2}$ **(E)** $\frac{29}{6}$

Suite en 3$^{\text{ème}}$ page de couverture

Un peu de trigonométrie dans le triangle rectangle nous indique que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

(cette dernière relation permet de calculer α, les signes de a et de b permettent de déterminer dans quel quadrant se trouve l'angle α).
Comme, d'autre part, $a = r \cdot \cos\alpha$ et $b = r \cdot \sin\alpha$, $a + bj$ peut s'écrire $r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$, que l'on appelle **forme trigonométrique** du nombre complexe. r en est le **module** et α **l'argument**.

Ainsi, pour $3 + 7j$, $r = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$ et $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{3}$ donc $\alpha \approx 66,8^\circ$ (angle du premier quadrant puisque a et b sont positifs).
Par conséquent :
$3 + 7j \approx \sqrt{58} \cdot (\cos 66,8^\circ + j \sin 66,8^\circ)$.

Accepte enfin, come un cadeau tombé du ciel, le résultat suivant.
Si $a + bj = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ **alors**

$$(a+bj)^n = r^n(\cos n\alpha + j \sin n\alpha)$$

(le module est élevé à la $n^{\text{ème}}$ puissance (1) et l'argument est multiplié par n).
Exemple : que vaut $(1+2j)^7$?
$(1+2j) \approx \sqrt{5}(\cos 63,43^\circ + j\sin 63,43^\circ)$

$$\begin{aligned}&(1+2j)^7\\ &\approx \left(\sqrt{5}\right)^7(\cos 444,04^\circ + j\sin 444,04^\circ)\\ &= 29 + 278j\end{aligned}$$

OK ! Tu peux revenir, nous en savons presqu'autant que toi. Merci de bien vouloir fermer la porte.
Considérons deux naturels p et q premiers entre eux et de parités différentes.

$$(p+qj)^2 = p^2 - q^2 + 2pqj.$$

Le module de $p + qj$ est $\sqrt{p^2+q^2}$ et celui de $(p+qj)^2$ est $\sqrt{(p^2-q^2)^2 + (2pq)^2}$.
D'après (1), $p^2 + q^2 = \sqrt{(p^2-q^2)^2 + (2pq)^2}$ et donc $(p^2+q^2)^2 = (p^2-q^2)^2 + (2pq)^2$.

En posant

$$\begin{aligned} x &= p^2 - q^2\\ y &= 2pq\\ z &= p^2 + q^2,\end{aligned}$$

Nous avons

$$z^2 = x^2 + y^2$$

... et nous retrouvons, par un détour différent, les formules définies par Maurice FAMELART pour trouver les triplets Pythagoriciens !
Exemple :
Si $p = 3$ et $q = 2$, $p^2 + q^2 = 13$ et $(3+2j)^2 = (9-4) + 12j = 5 + 12j$ et donc $13^2 = 5^2 + 12^2$.
Et pour 13^{11} ?
Puisque $13 = 3^2 + 2^2$, calculons $(3+2j)^{11}$.
Le module de $3 + 2j$ est $\sqrt{13}$ et son argument environ $33,69^\circ$.
Donc

$$\begin{aligned}&(3+2j)^{11}\\ &\approx \sqrt{13}^{11} \cdot (\cos 370,59^\circ + j \cdot \sin 370,59^\circ)\\ &= 1\,315\,911 + 246\,046j\end{aligned}$$

Par conséquent : $13^{11} = 1\,315\,911^2 + 246\,046^2$.
Résumons-nous :

Soient p et q deux nombres naturels premiers entre eux et de parités différentes, et n un naturel supérieur ou égal à 2.
Calculons $z = p^2 + q^2$

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ tel que } \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{p}{q}\\ x &= \left(\sqrt{p^2+q^2}\right)^n \cos n\alpha\\ y &= \left(\sqrt{p^2+q^2}\right)^n \sin n\alpha\end{aligned}$$

Alors $z^n = x^2 + y^2$.

Je n'ai en rien montré que x et y étaient alors premiers entre eux et de parités différentes mais, comme disait Pierre de FERMAT « *j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir* » (encore que, dans le cas présent, la marge n'aurait rien de monstrueux).
Allez, deux Alka Seltzer et hop, au lit !
À moins que ...
En creusant un peu l'évocation du binôme de Newton dans le rappel théorique, on arrive à montrer que :

Si p et q sont deux naturels premiers entre eux et de parités différentes, n est un naturel supérieur ou égal à 2 et k est la partie entière de $\frac{n}{2}$,

si $z = p^2 + q^2$, si $x = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_n^{2i} p^{n-2i} q^{2i}$,

et si $y = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_n^{2i+1} p^{n-2i-1} q^{2i+1}$,

alors

$$z^n = x^2 + y^2$$

Exemple : Comment se décompose 25^7 ?

$p = 3$, $q = 4$, $n = 7$, $k = 3$ et z vaut bien $3^2 + 4^2 = 25$.

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot 3^7 \cdot 4^0 - 21 \cdot 3^5 \cdot 4^2 + 35 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \\ &\quad -7 \cdot 3^1 \cdot 4^6 \\ &= 76\,443 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 7 \cdot 3^6 \cdot 4^1 - 35 \cdot 3^4 \cdot 4^3 + 21 \cdot 3^2 \cdot 4^5 \\ &\quad -1 \cdot 3^0 \cdot 4^7 \\ &= 16\,124 \end{aligned}$$

Et $25^7 = 76\,443^2 + 16\,124^2$.

À bientôt !

Bibliographie

[1] Michel BALLIEU, *Le grand théorème de Fermat démontré ?*, *Math-Jeunes* n° 62, p. 4-7, 1993.

[2] Maurice FAMELART, *À la recherche des triplets pythagoriciens*, *Math-Jeunes* n° 62, p. 11-13, 1993.

[3] Warvick EVANS, *Les triplets pythagoriciens et le grand théorème de Fermat*, *Math-Jeunes* n° 77, p. 41, 1996.

[4] Francis CABREL, *Encore et encore*, Éditions Chandelle Productions.

Solutions des jeux

Produits croisés

	1	2	3	4	5
1	S	A	S	S	A
2	E	T	I	E	R
3	R	O	T	I	E
4	A	M	A	N	T
5	S	E	R	G	E

Le mot caché (par CéVé)

Le mathématicien qui se cache dans la grille est EUCLIDE.

Quelle heure « est-elle » ?

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

Au moment de pénétrer dans le vaste bâtiment de la gare, Mathieu jeta rapidement un regard interrogatif sur la vaste façade vitrée. C'est qu'elle était dotée d'une grande horloge au « design » très simplifié. Douze gros points marquaient les emplacements des heures et deux aiguilles lumineuses se chargaient de renseigner les voyageurs. Bien que grossière, la lecture de l'heure du moment pouvait se faire à la minute près.
Mathieu constata ainsi qu'il disposait encore de six minutes avant le départ de son train.
Tout de suite, il se retrouva dans le hall d'attente où il jeta derechef un coup d'œil vers l'horloge visible par transparence.

« Tiens, se dit-il, si je n'y prenais pas garde, je croirais disposer maintenant de trois heures et demie d'attente. »

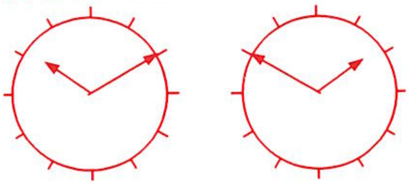
Quelle heure est-il à l'horloge de la gare ?
Quelle est l'heure de départ du train que Mathieu veut emprunter ?
Je vous propose de réfléchir à la situation qui vient de vous être présentée et d'essayer de résoudre le problème avant de prendre connaissance de la suite du texte … Bonne recherche !

* *
*

Vous avez trouvé ? Examinons ensemble une démarche possible — parmi bien d'autres …
Le problème peut paraître anodin, quoique … ! Il va nous permettre d'exploiter quelques notions mathématiques peu … habituelles.
Nous supposerons que l'horloge en question a un cycle de 12 heures comme c'est le cas pour pratiquement toutes les horloges de ce type … Nous conviendrons aussi qu'on situera les moments entre 0 h 1 min. et 12 h. Ainsi, contrairement à l'usage, nous parlerons, par exemple, de 0 h 27 min. plutôt que de 12 h 27 min.

Quand il se trouve à l'intérieur de la gare, Mathieu a, au travers des vitres de la façade, une vision retournée de l'horloge. En fait, c'est comme s'il observait l'image de l'horloge par une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite comprenant les deux points caractérisant 0 h et 6 h. Dans la suite de ce texte, nous parlerons de cet axe comme étant la droite NS (N pour *N*ord et S pour *S*ud).
Voici donc une vision d'un même moment de l'horloge, vue de l'extérieur puis de l'intérieur de la gare.

10 h 10 min. ⟶ 1 h 50 min.



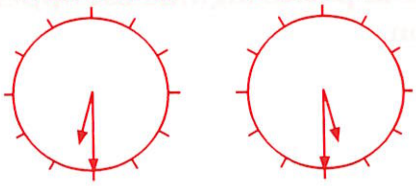
Comme vous pouvez facilement vous en rendre compte, ces deux visions ne nous indiquent pas nécessairement les mêmes heures et minutes. Une question vient naturellement à l'esprit : « **Est-il possible de lire le même moment sur les deux vues de l'horloge ?** » Réfléchissez …

Vous venez certainement de trouver

- 11 h 60 min. (ou, si vous préférez, 12 h)
- et 6 h 0 min. (ou, si vous préférez, 6 h).

Nous avons ainsi deux « positions fixes » (où les aiguilles ont la même position sur l'horloge et sur son image par symétrie).
Il faut éviter les pièges du type 6 h 30 min., car l'autre vue indique … 5 h 30 min.

6 h 30 min. ⟶ 5 h 30 min.



Il faut être conscient du fait que la grande aiguille balaie la moitié d'un tour complet, soit un angle de 180 $^\circ$ pendant que la petite aiguille parcourt la moitié de l'angle nécessaire pour passer d'une heure à la suivante, c'est-à-dire un angle de 30 $^\circ$ ($\frac{360^\circ}{12}$). La petite aiguille tourne ainsi de 15 $^\circ$ pendant que la grande aiguille fait un demi-tour (180 $^\circ$)

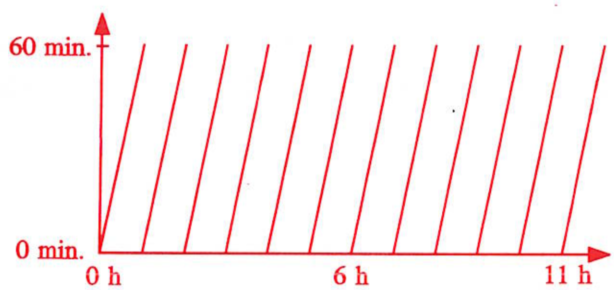
Le résultat suivant est important :

Quand la grande aiguille d'une horloge effectue un tour complet (angle de 360 $^\circ$), la petite aiguille parcourt un douzième de tour, soit un angle de 30 $^\circ$.

De la même manière, 0 h 30 min. à l'extérieur correspond à 11 h 30 min. à l'intérieur. Faites le dessin.

Constatons, par ailleurs, qu'à chaque position de la petite aiguille correspond une et une seule position bien précise de la grande aiguille. On dit que cette position de la grande aiguille est fonction de celle de la petite. Dans les horloges et les montres mécaniques, cette liaison est d'ailleurs réalisée par le biais d'engrenages internes.

Voici une représentation graphique de cette relation entre les deux aiguilles.



Il faut noter que les extrémités supérieures des segments obliques sont à exclure de ce graphique. En pratique, on ne parle pas de ... 9 h 60 min. mais bien de 10 h 0 min.

La relation permettant de déterminer la position de la grande aiguille à partir de celle de la petite aiguille est appelée une fonction.

Par contre, à chaque position de la grande aiguille, correspondent douze positions possibles de la petite aiguille. Remarquons tout de même que, lorsque l'on connaît une quelconque de ces positions, alors on connaît aussi toutes les autres puisqu'elles ne diffèrent entre elles que d'un angle multiple de 30 $^\circ$.

Exemple : Supposons que la grande aiguille indique le point caractérisant « 20 minutes ». Elle a donc parcouru un tiers de tour complet depuis son passage au point 0. Elle a ainsi balayé un angle de 120 $^\circ$ ($\frac{360}{3}$). Pendant ce temps de 20 minutes, la petite aiguille balaie un angle de 10 $^\circ$ ($\frac{30}{3}$) entre deux points consécutifs de la graduation en heures. Remarquons encore que ces 10 $^\circ$ représentent le douzième des 120 $^\circ$ balayés par la grande aiguille.

Si nous convenons que la position 0 h. correspond à 0 $^\circ$ alors la petite aiguille fait, avec la direction NS, un angle de 10 $^\circ$ ou 40 $^\circ$ ou 70 $^\circ$ ou 100 $^\circ$ ou 130 $^\circ$ ou 160 $^\circ$ ou 190 $^\circ$ ou 220 $^\circ$ ou 250 $^\circ$ ou 280 $^\circ$ ou 310 $^\circ$ ou 340 $^\circ$.

N.B. Vous pouvez continuer mais cela ne sert à rien car vous dépassez alors le tour complet (360 $^\circ$) et vous retombez sur des positions déjà obtenues.

Du point de vue de la position de la grande aiguille, ces angles sont équivalents. On dit qu'ils sont **congrus modulo 30** et on écrit

$$10 \equiv 40 \pmod{30}$$

De toute façon, **La relation permettant de déterminer la position de la petite aiguille à partir de celle de la grande aiguille n'est pas une fonction.**

Un doute peut vous effleurer :

Si la vision normale de l'horloge présente une position correcte des aiguilles, peut-on en dire autant de la vision de son image par la symétrie d'axe NS ?

Il paraît assez évident que la réponse soit **OUI** ! En voici la raison.

Le système mécanique qui coordonne les positions des deux aiguilles peut être activé dans les deux sens de rotation, ce qui fournit automatiquement des positions correctes du couple des deux aiguilles, qu'elles soient activées dans le sens horlogique ou dans le sens anti-horlogique.

Si vous n'êtes pas convaincus par cet argument alors je vous propose de chercher (et de trouver) une « démonstration », par calcul, de cette validité. **Nous attendons vos suggestions avec impatience. N'hésitez pas à nous soumettre vos démonstrations.** Elles seront éventuellement publiées. Ne tardez pas. Envoyez vos propositions à la rédaction de *Math-Jeunes*.

Voyons maintenant l'effet de la symétrie NS du cadran de l'horloge sur la lecture des moments.

Occupons-nous d'abord des heures indiquées.

Vue normale	**Vue symétrique**
]0 h . . . 1 h]	[11 h . . . 12 h[
]1 h . . . 2 h]	[10 h . . . 11 h[
]2 h . . . 3 h]	[9 h . . . 10 h[
]3 h . . . 4 h]	[8 h . . . 9 h[
]4 h . . . 5 h]	[7 h . . . 8 h[
]5 h . . . 6 h]	[6 h . . . 7 h[
]6 h . . . 7 h]	[5 h . . . 6 h[
]7 h . . . 8 h]	[4 h . . . 5 h[
]8 h . . . 9 h]	[3 h . . . 4 h[
]9 h . . . 10 h]	[2 h . . . 3 h[
]10 h . . . 11 h]	[1 h . . . 2 h[
]11 h . . . 12 h]	[0 h . . . 1 h[

On voit que le symétrique de x h est $(11-x)$ h.

Voyons maintenant ce qui se passe pour l'indication des minutes.

$$\begin{array}{ccc}
0 \text{ min.} & \leftrightarrow & 0 \text{ min.} \\
1 \text{ min.} & \leftrightarrow & 59 \text{ min.} \\
2 \text{ min.} & \leftrightarrow & 58 \text{ min.} \\
3 \text{ min.} & \leftrightarrow & 57 \text{ min.} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
59 \text{ min.} & \leftrightarrow & 1 \text{ min.}
\end{array}$$

ce qui, tout simplement, nous donne la formule :

$$y \text{ min.} \quad \leftrightarrow \quad (60-y) \text{ min.}$$

Après toutes ces considérations, nous pouvons **enfin** tenter de répondre aux questions posées au début de l'article.

Voici la solution. En arrivant devant la gare, Mathieu lit x h + y min. à l'horloge, soit $(60x+y)$ min. Tout de suite après, mais à l'intérieur, il lit, à cause de l'effet de symétrie, $(11-x)$ h + $(60-y)$ min, c'est-à-dire $(60(11-x)+60-y)$ min. ou encore $(720-60x-y)$ min. Puisque la deuxième lecture lui donne plus de temps d'attente (3 h 30 min.) que la première (0 h 6 min.), c'est que ce deuxième moment est antérieur au premier ou, si vous préferez que x h + y min. est plus « tardif » que $(11-x)$ h + $(60-y)$ min. La différence vaut 3 h 24 min ou 204 min.

On en déduit l'équation

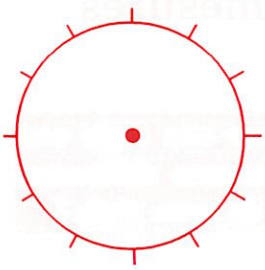
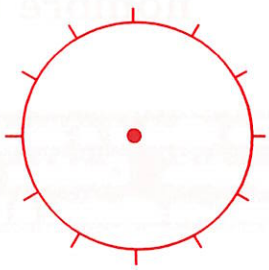
$$\begin{gathered}
(60x+y)-(720-60x-y)=204 \\
60x+y-720+60x+y=204 \\
120x+2y-924=0 \\
60x+y-462=0
\end{gathered}$$

Cette dernière équation, parce qu'on en recherche les solutions x et y **entières,** est dite **diophantienne,** du nom du mathématicien grec DIOPHANTE D'ALEXANDRIE qui s'intéressait à ce type de problèmes. Il vécut au début de notre ère. Les témoignages existants ne permettent pas aux historiens des mathématiques de le situer avec précision : les dates les plus probables semblent être les deuxième, troisième siècles !!!

Nous cherchons ici les solutions entières x et y telles que x est compris entre 0 et 12 et y entre 0 et 60. En écrivant l'équation sous la forme

$$y = 462 - 60x$$

on trouve l'unique solution $x=7$ et $y=42$. L'horloge (en vision normale) indiquait donc 7 h 42 min. Le train de Mathieu partait à 7 h 48 min. Vous prendrez certainement plaisir à vérifier ces réponses sur le croquis ci-dessous . . .

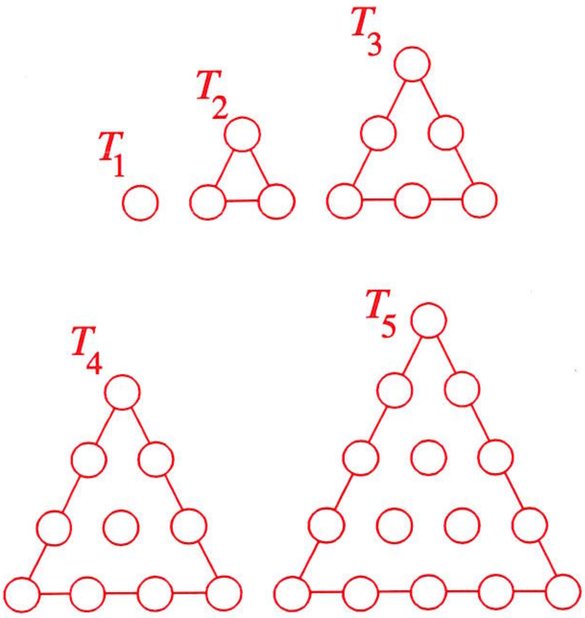



Math-Jeunes n° 79, 90–96, 1997

La règle efficace

Jean-Michel Slowik, *Lycée d'Arras (France)*

NDLR : il sera question, dans cet article, de nombres triangulaires. Rappelons qu'il s'agit de nombres égaux à une certaine quantité de jetons disposés comme le suggère la figure ci-dessous.



Le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_n est égal à

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Tu peux en apprendre plus à ce sujet en lisant l'article Tout est nombre, *de Michel* Ballieu, *paru dans le numéro 63 de Math-Jeunes.*

1. Nombre de marques, nombre de mesures

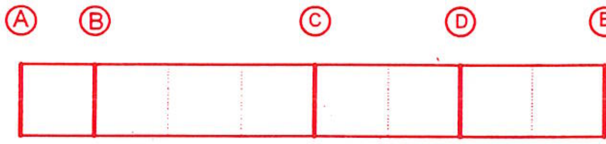
On effectue n marques sur une règle non graduée. Combien de mesures différentes peut-on effectuer à l'aide de cette règle ?

Exemple : deux marques.

◇ Avec deux marques sur la règle.

On compte 6 mesures soit T_3, le troisième nombre triangulaire.
AB, AC, AD : 3, BC, BD : 2 et CD : 1.

◇ Avec trois marques sur la règle.



On compte 10 mesures soit T_4, le quatrième nombre triangulaire.
AB, AC, AD, AE : 4, BC, BD, BE : 3, CD, CE : 2 et DE : 1.

◇ Avec n marques sur la règle.
On devine qu'avec n marques, on peut effectuer T_{n+1} mesures différentes. (1)

Avec n marques sur une règle non graduée, on peut effectuer T_{n+1} mesures différentes.

Résumons dans un tableau :

Nombre de marques	0	1	2	3	4	5
Nombre de mesures	1	3	6	10	15	20

Tableau 1

(1) Pour les amateurs d'analyse combinatoire ...
On peut aussi considérer qu'une mesure n'est que le choix de deux marques parmi les $(n+2)$ (il y a bien $(n+2)$ marques si on considère les deux extrémités de la règle).
Donc $T_{n+1} = C^2_{n+2}$. Autrement dit,

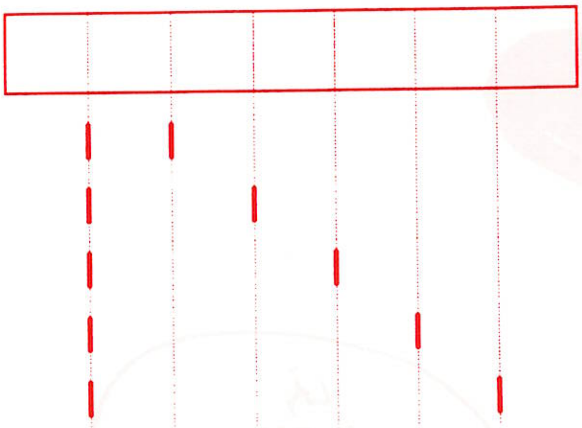
$$T_n = C^2_{n+1}.$$

Les nombres triangulaires peuvent se lire dans le triangle de Pascal !

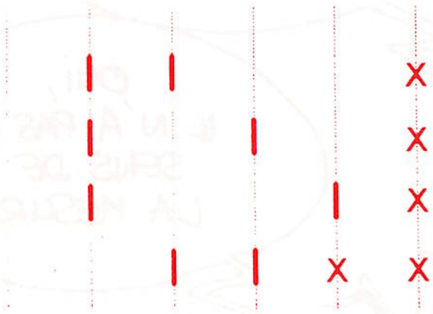
2. Nombre de marques, nombre de règles à deux marques

On effectue 2 marques sur une règle prégraduée de n marques.
Combien y a-t-il de règles différentes possibles ?

Exemple : on effectue 2 marques parmi 6 possibles.
La première en première position.



On ne peut plus choisir la dernière marque car, en retournant la règle, on retrouverait une règle précédente.



On obtient $5+3+1=9$ règles différentes.
Pour 7 marques, on obtiendrait
$6+4+2=2(3+2+1)=12$ règles différentes.
Pour 8 marques, on en obtiendrait
$7+5+3+1=16$.
Pour 9 marques :
$8+6+4+2=2(4+3+2+1)=20$.

$\vdots$

On peut deviner que :

Pour $2k+1$ marques, on obtient
$2\cdot(k+(k-1)+\cdots+2+1)=k\cdot(k+1)$
règles différentes.
Pour $2k$ marques, on obtient
$(2k-1)+(2k-3)+\cdots+3+1)=k^2$
règles différentes.

Résumons dans un tableau :

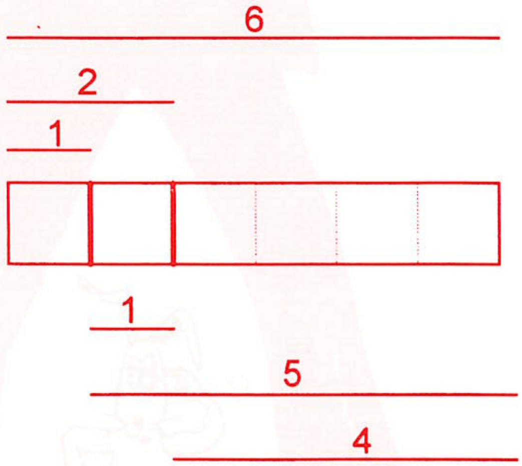
Nombre de marques	2	3	4	5	6	7
Nombre de règles	1	2	4	6	9	12

Tableau 2

3. L'inventaire des règles

Prenez une règle de longueur N (nombre entier) unités de mesure et dessinez-y des marques situées à un nombre entier d'unités des bords. La règle obtenue sera dite *efficace* si on peut obtenir chaque mesure entière, comprise entre 1 et N, une et une seule fois.

Exemple :
Avec une règle de longueur 6, on recherche les six mesures 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Il faut donc effectuer un nombre de marques tel que le nombre de mesures possibles soit égal exactement à 6.
Ce nombre de marques est égal à 2 (voir tableau 1).



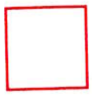
Comme vous le voyez, on récupère 6 mesures, mais hélas, 3 n'apparaît pas.
Résumons :

Longueur à obtenir	1	2	3	4	5	6
Nombre d'obtentions	2	1	0	1	1	1


ALORS!
COMBIEN DE RÈGLES EFFICACES DANS MON CHAPEAU ?
LÀ, IL EN FAIT UN PEU DE TROP!
OUI, IL N'A PAS LE SENS DE LA MESURE...

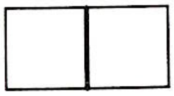
Recherchons les règles efficaces.

- $N = 1$



Cette règle est évidemment efficace.

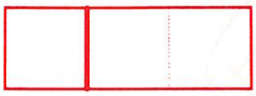
- $N = 2$



1	2
2	1

Cette règle n'est pas efficace.

- $N = 3$
On recherche une règle de longueur 3 qui permette d'effectuer une et une seule fois chacune des 3 mesures 1, 2 et 3. L'unique possibilité est de réaliser une seule marque (tableau 1). En effet, plus de marques amèneraient au moins 6 mesures !



1	2	3
1	1	1

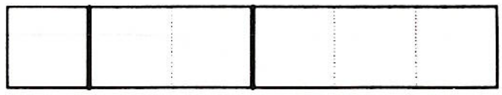
C'est une règle efficace, chaque mesure entière inférieure ou égale à 3 ne peut s'obtenir qu'une et une seule fois.

- $N = 4$
Quel que soit le nombre de marques effectuées, on obtient un nombre de mesures autre que 4 (tableau 1). Or, nous voulons une règle qui permette exactement 4 mesures (1, 2, 3 et 4). C'est impossible ! Il n'existe pas de règle efficace de longueur 4 unités.

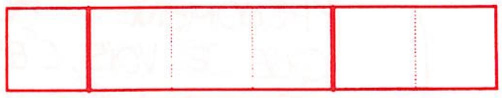
- $N = 5$
Pas de règle efficace de longueur 5 pour la même raison.

- $N = 6$
Il existe peut-être une règle efficace de longueur 6 si on y trace deux marques.

1	2	3	4	5	6
2	1	0	1	1	1



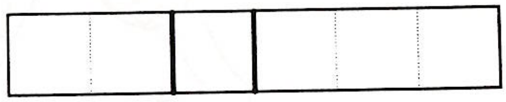
1	2	3	4	5	6
1	1	2	0	1	1



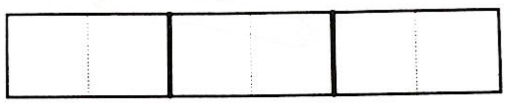
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1

Il s'agit d'une règle efficace !!!

1	2	3	4	5	6
2	0	0	1	2	1



1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	0	1



1	2	3	4	5	6
0	3	0	2	0	1

Jusqu'à présent, nous n'avons trouvé des règles efficaces que de longueurs 1, 3 et 6 unités.
En existe-t-il d'autres ?
Le tableau 1 nous permet de dire que 10 est candidat, mais ...


IL DIT QUE C'EST UN MYSTÉRIEUX PHÉNOMÈNE... MOI, CE QUE JE VOIS, C'EST QU'IL N'A PAS TROUVÉ DE RÈGLE EFFICACE DE LONGUEUR 10!
OUAIS! LE PHÉNOMÈNE C'EST LUI!
PyP 96

4. Un mystérieux phénomène ...

Pour $N = 10$, il faut placer 3 marques qui vont amener 10 mesures. Il faut que ces mesures soient distinctes.

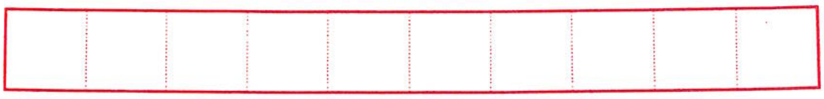
Essayons.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	0	1	1	1	1	1

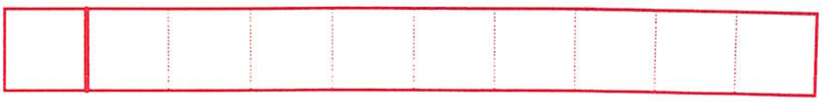
En réessayant, on échoue encore.

N'y aurait-il pas de règle efficace de longueur 10 ?

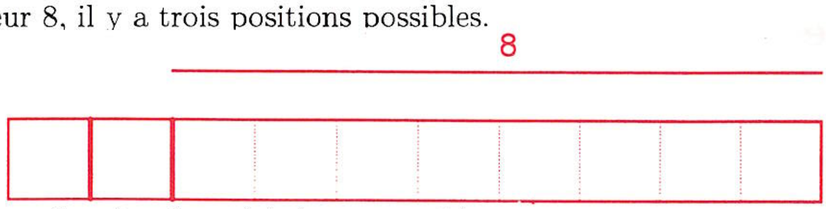
Tentons, méthodiquement, une recherche.



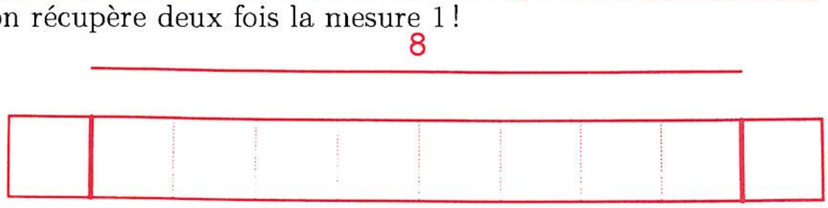
Il nous faut une longueur 9, quitte à retourner la règle, on place la marque en première position.



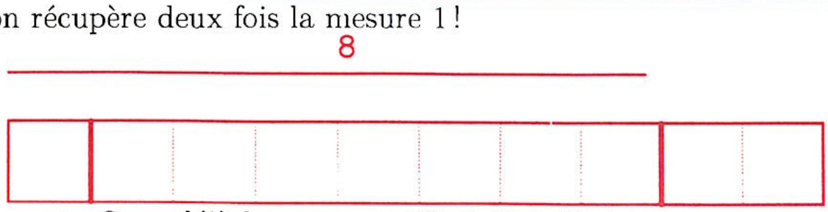
Puis la longueur 8, il y a trois positions possibles.



Pas possible, on récupère deux fois la mesure 1 !



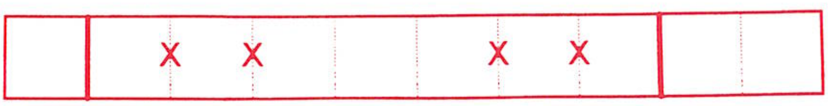
Pas possible, on récupère deux fois la mesure 1 !



Tout semble correct. On a déjà les mesures 10, 9, 8, 7, 2 et 1.

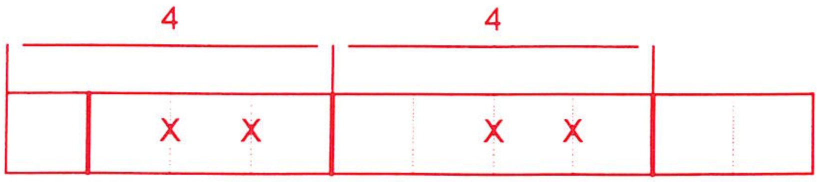
Il ne reste qu'une seule marque à placer.

Comme les longueurs 1 et 2 sont prises, des positions sont interdites.

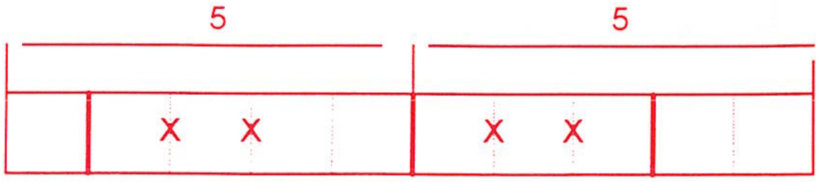


Il ne reste que deux positions à tester.

La première amène deux mesures 4.



La seconde amène deux mesures 5.



C'est sans issue, la conclusion est accablante :

$\boxed{\text{Il n'y a pas de règle efficace de longueur 10.}}$

◇ ◇
◇

Dans la deuxième partie de cet article (qui paraîtra dans le prochain numéro de Math-Jeunes), nous essayerons de trouver d'autres règles efficaces.
Tente l'expérience et envoie le fruit de tes recherches à la rédaction.
Bonne chance et à bientôt.

Bibliographie

Mathematical puzzling, A. GARDINARD, Oxford.

La rédaction remercie Pierre Yves PIRA pour les dessins qui illustrent cet article.

◇ ◇
◇

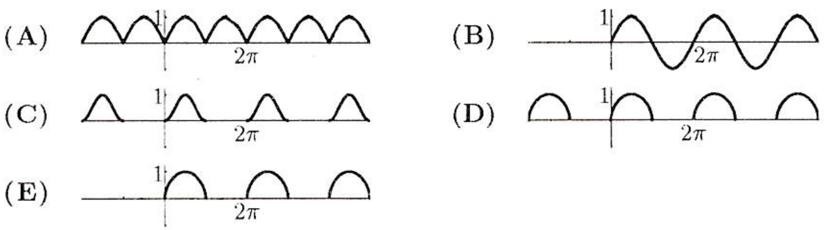
Dans les pages qui suivent, tu trouveras les questionnaires complets (mini, midi et maxi) de la demi-finale de la vingt-deuxième Olympiade Mathématique Belge qui s'est déroulée, dans les différents centres régionaux, le mercredi 26 février dernier.

22. Si a et b sont deux réels tels que $a, 1, b$ est une suite arithmétique strictement croissante et $a^2, 1, b^2$ une suite géométrique, que vaut b ?

(A) $1 - \sqrt{2}$ **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** 2 **(D)** $1 + \sqrt{2}$ **(E)** $1 + \sqrt{3}$

23. Lequel des cinq graphes ci-dessous est celui de

$$f : [-2\pi; 5\pi] \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{\sin x} \ ?$$



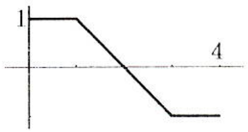
24. Si $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier qui lui est inférieur, la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sin \lfloor x \rfloor$ est

(A) non périodique ;
(B) périodique de période 1 ;
(C) périodique de période π ;
(D) périodique de période 2π ;
(E) périodique de période $2\pi + 1$.

25. Laquelle des cinq affirmations suivantes est vraie quels que soient les points distincts A et B du plan ?

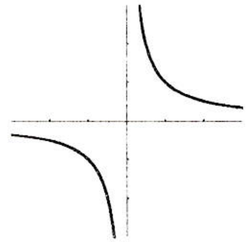
(A) Tout point du segment $[AB]$ a ses deux coordonnées rationnelles.
(B) Tout point du segment $[AB]$ a l'une au moins de ses coordonnées rationnelle.
(C) Il existe un point du segment $[AB]$ dont les deux coordonnées sont rationnelles.
(D) Il existe un point du segment $[AB]$ dont les deux coordonnées sont irrationnelles.
(E) Il existe un point du segment $[AB]$ dont l'une au moins des coordonnées est rationnelle.

26. Le graphe de la fonction $f : [0; 4] \longrightarrow \mathbf{R}$ est figuré ci-contre. Pour quelle valeur de $p \in [0; 4]$ l'intégrale $\int_0^p f(x)\,dx$ a-t-elle la plus grande valeur ?



(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

27. La fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ admet le graphe ci-contre. Celui de



$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto g(x) = 2^{f(x)}$$

est l'un des cinq graphes ci-dessous ; lequel ?

(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

28. *Sans réponse préformulée* — Les entiers strictement positifs sont disposés en un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

Quelle est la somme des chiffres du 50^{e} terme de la suite 1, 5, 15, ..., dont le n^{e} terme est la somme des nombres de la n^{e} ligne du tableau ?

29. Deux cercles de même rayon sont tangents extérieurement ; leurs centres sont notés K et L. Une droite coupe le cercle de centre K en A et en B, et est tangente en C au cercle de centre L. Si le point A est choisi de manière à maximiser $\|AC\|$, que vaut le cosinus de $\widehat{CLK}$?

(A) $\frac{3}{10}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{7}{20}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

30. *Sans réponse préformulée* — Soit PQR un triangle non dégénéré du plan. On choisit 4 points distincts $P_1, \ldots, P_4$ sur $]QR[$, 5 points distincts $Q_1, \ldots, Q_5$ sur $]PR[$ et 6 points distincts $R_1, \ldots, R_6$ sur $]PQ[$. Combien de triangles non dégénérés ont leurs trois sommets dans $\{P, P_1, \ldots, P_4, Q, Q_1, \ldots, Q_5, R, R_1, \ldots, R_6\}$?

Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.