MATH-JEUNES

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova :
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
ma non eran da ciò le proprie penne :
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore in che sua voglia venne.
A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e 'l velle,
sí come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle.

[*Explicit liber Comedie*
Dantis Alagherii de Florentia]

Dante Alighieri

18e année
Mai 1997 – n° 80
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux et F.Pourbaix
Conception de la couverture : K. Martroye & M. Ballieu

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons
Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 80 Dix-huitième année 1997

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 80, 98–100, 1997

La page du mathémartiste

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

À propos de Dante Alighieri et de sa Divine Comédie ...

Ainsi qu'un géomètre appliqué tout entier
À mesurer le cercle et qui point ne découvre
Dans sa pensée le principe qu'il faut,
Je me troublai devant cette merveille :
Je voulais voir comment au cercle s'unissait
Notre image et comment elle y est intégrée ;
Mais point n'auraient suffi mes seules ailes :
Si mon esprit n'avait été frappé
Par un éclair, qui mes vœux accomplit.
Ici ma fantaisie succomba sous l'extase ;
Mais déjà commandait aux rouages dociles
De mon désir, de mon vouloir, l'Amour
Qui meut et le Soleil et les autres étoiles.

[*Ici se termine le livre de la Comédie de Dante Alighieri de Florence*]

Voilà la traduction du texte que tu as pu voir sur la couverture du dernier *Math-Jeunes* de cette année 1996-1997. Ces vers concluent la troisième et dernière partie de *La Divine Comédie.*

Mais, ... Qui est DANTE ? Qu'est-ce que *La Divine Comédie* ? Que signifie « mesurer le cercle » ?

Ce sont là quelques questions auxquelles nous allons tenter de répondre.

Le plus grand parmi les poètes italiens naquit à Florence d'Alighiero di Bellincione et de Bella, la première femme de celui-ci, dans la période moitié mai – moitié juin 1265, sous le signe astral des Gémeaux ...

Famille d'ancienne noblesse que celle de Dante, d'une noblesse que le poète aimait à faire remonter aux origines romaines de Florence (Enfer, XV, 73-78) : elle trouve confirmation dans des liens de coterie avec d'autres nobles familles, ... [4]

D'après H. LONGNON, la famille à laquelle DANTE appartint n'était que de modeste bourgeoisie florentine. Sa mère mourut très tôt et il perdit son père avant d'avoir dix-huit ans. Il avait rencontré Béatrice quand elle allait avoir neuf ans et que lui-même venait d'en avoir neuf. Un amour platonique lui fera chanter sa bien-aimée (les *Canzoniere*, la *Vita Nuova*) jusqu'à la mort de celle-ci, survenue vers 1290. Une fois Béatrice morte, DANTE succombe :
il lui faut connaître cette défaillance et mesurer sa faiblesse pour se vaincre lui-même et se rendre digne de la revoir.[3]
C'est Béatrice qui l'accueillera au seuil du Paradis Terrestre dans *La Divine Comédie.*

Sur le plan politique, il a participé aux côtés des guelfes « blancs » à l'administration de Florence. Finalement condamné au bannissement perpétuel par les guelfes « noirs » (faction rivale), il meurt en exil en 1321 après avoir écrit en latin le *De Monarchia* dont l'objectif est de montrer la nécessité d'un monarque pour la bonne marche du monde (avec indépendance de l'Empereur par rapport au Pontife) et, en italien, sa *Divina Commedia.*

La *Divina Commedia* est un poème divisé en trois parties de trente-trois Chants : l'Enfer, le Purgatoire, le Paradis. Le fondement de la structure de l'œuvre est le nombre trois. Si on ajoute le Chant d'introduction, on arrive au nombre cent, multiple de dix et symbole de la perfection.[5]

L'Enfer, c'est le gouffre du désespoir ; c'est le royaume des ténèbres où l'être humain tombe dès qu'il se refuse à la vie de la raison et de la vertu, dès qu'il rejette la lumière et qu'il se complaît dans l'égoïsme de ses passions. C'est encore le sombre abîme qui s'ouvre sous la croûte terrestre, dans cette partie de l'hémisphère boréal habité par l'homme. En forme de cône renversé, ce gouffre s'enfonce jusqu'au centre de la terre, qui est aussi le centre de l'univers et l'endroit le plus éloigné de Dieu, la seule Lumière. C'est là qu'a abouti Lucifer et il y est pour l'éternité. Devant sa chute, la terre s'est retirée et est remontée en sens inverse; en émergeant des eaux de l'hémisphère austral, elle a donné naissance à la petite île du Purgatoire, montagne abrupte sur le sommet de laquelle, aux antipodes de Jérusalem, s'épanouit la forêt fraîche, verdoyante et vivante du Paradis terrestre.

C'est VIRGILE — qui avait exalté les idéaux de paix et de justice et en avait vu la réalisation dans la politique d'Auguste — qui va proposer à DANTE de lui servir de guide : il l'emmène en Enfer puis gravit avec lui la montagne du Purgatoire. Par contre, une fois au sommet, c'est Béatrice, comme nous l'avons déjà signalé, qui fera accéder DANTE au Ciel de Dieu. Dans l'Enfer, les actions des damnés sont « sans but », ce qui — on le comprend aisément — est assez déprimant : c'est cela le tourment de l'Enfer. DANTE et VIRGILE vont franchir les portes de l'Enfer. Ils découvrent une morne plaine où, motivés par des guêpes et des taons, des « malheureux qui ne furent jamais vivants », des lâches et des anges neutres courent après un étendard. DANTE les regarde sans s'arrêter. Et voici bientôt l'Achéron que DANTE et VIRGILE vont franchir grâce à la barque de Charon.

À partir de là, il y a toute une série de « cercles ». L'Enfer ne commence réellement qu'à partir du deuxième; c'est une espèce de ghetto où on a rassemblé tous ceux ayant mené une vie terrestre quelque peu débauchée, ce que DANTE traduit fort bien par *« Canto quinto, nel quale mostra del secondo cerchio de l'inferno, e tratta della pena del vizio della lussuria ne la persona di piú famosi gentili uomini. »*

Chaque fois que l'on avance un cercle plus loin, le gouffre se rétrécit jusqu'aux dix fosses du *Malebolge* qui constituent le huitième cercle. Au centre de ce dernier s'ouvre un puits profond : MINOS, terrible voix de la conscience, juge les intentions et prononce les condamnations. Un cercle « intéréssant » est le premier. On l'appelle les « Limbes », d'où le Christ fit sortir les Patriarches. On n'y pleure pas, ... on ne fait qu'y soupirer ! C'est là qu'on trouve, non seulement les enfants morts sans baptême, mais encore, à l'intérieur d'un noble et lumineux château, tous ceux qui honorèrent les sciences et les arts, sans avoir possédé la véritable religion, les « grands esprits » dont la raison, la pensée fut une sorte de lumière chassant les ténèbres tels SOCRATE, PLATON, DÉMOCRITE, ANAXAGORE, THALÈS, DIOGÈNE, EMPÉDOCLE, HÉRACLITE, ZÉNON, DIOSCORIDE, ORPHÉE, TULLIUS, LINUS, SÉNÈQUE, EUCLIDE, PTOLÉMÉE, GALIEN, HIPPOCRATE, AVICENNE, AVERROÈS. Ces Limbes sont également la demeure de VIRGILE ...

Le Purgatoire est une montagne abrupte qui monte vers le haut des Cieux. Elle se rétrécit au fur et à mesure que l'on approche de son faîte; sur ses flancs des corniches sont creusées; c'est là que les Âmes purgent leur peine. Le Purgatoire est le royaume de la liberté : chacun peut choisir parmi les moyens propres à le rapprocher de la fin qu'il poursuit. Cette liberté, inhérente à la personnalité humaine est symbolisée par Caton, placé par Dieu à l'entrée du Purgatoire.

C'est au sommet de la montagne du Purgatoire, sous un ciel infini que se dresse le Paradis terrestre. C'est de là que commence l'ascension vers le Paradis ... À l'éclat fulgurant du Soleil qui l'éblouit, à un sentiment d'exaltation qu'il ne sait rendre que par le mot « transhumaner », DANTE se rend compte qu'il est en train de quitter la Terre ...

Enfin, il nous reste à parler de la « mesure du cercle » ... Il s'agit en fait du fameux problème de la « quadrature du cercle » que beaucoup citent (tradition orale) sans vraiment savoir de quoi il s'agit ...

Dans ses treize livres qui constituent *Les Éléments*, EUCLIDE (troisième siècle avant Jésus Christ) fait une synthèse remarquable des mathématiques de son époque. Il ne semble pas avoir découvert de grandes nouveautés, mais son originalité, si elle existe, se situe au niveau de la présentation des résultats connus (choix des axiomes, ...)

Dans les différents livres, toutes les constructions géométriques étudiées s'effectuent uniquement à l'aide de la règle et du compas. Mais déjà bien avant EUCLIDE, les mathématiciens grecs s'intéressaient aux constructions à la règle et au compas. Très tôt, ils s'étaient heurtés à de grandes difficultés. Trois problèmes sont célèbres, la **quadrature du cercle**, la **duplication du cube** et la **trisection de l'angle**.

La quadrature du cercle consiste à construire **à la règle et au compas** un carré ayant même aire qu'un cercle donné.

La duplication du cube consiste à construire **à la règle et au compas** l'arête d'un cube ayant un volume deux fois plus grand que le volume d'un cube donné.

La trisection de l'angle consiste à construire **à la règle et au compas** les demi-droites partageant un angle quelconque en trois angles égaux.

Tous ces problèmes sont insolubles si on limite les outils à la règle et au compas. En 1637, René DESCARTES (1596 – 1650) montre le lien existant entre les constructions à la règle et au compas et la résolution des équations du premier et du second degré. On trouve là un début de preuve de l'impossibilité de la duplication et de la trisection. En 1837, Pierre Laurent WANTZEL (1814 – 1848) précise les travaux de DESCARTES et donne une caractérisation algébrique des coordonnées des points constructibles à la règle et au compas. Il en résulte l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Enfin, en 1882, Ferdinand LINDEMANN (1852 – 1939) prouve la transcendance de π, ce qui signifie que π n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers, résultat qui permet de conclure à l'impossibilité de la quadrature du cercle. Il aura fallu vingt-quatre siècles d'étude pour arriver à cette conclusion !

* *
*

Bibliographie

[1] Jean-Claude CARREGA, *Théorie des Corps, La règle et le compas*, Édition Hermann, Paris 1981.

[2] DANTE, *La Divina Commedia*, Testo critico stabilito da Giorgio Petrocchi, con una nota introduttiva sul testo della Commedia,
Piccola Biblioteca Einaudi serie testi, Torino 1975.

[3] DANTE, *La Divine Comédie*, Édition de H. Longnon,
Classiques Garnier, Bordas, Paris 1989.

[4] *La Maison de Dante*, Unione Fiorentina, Comitato per i luoghi Danteschi.

[5] LAFFONT – BOMPIANI, *Dictionnaire des Œuvres*, Éd. R. Laffont, 1968.

[6] Edmond MAZET, Université de Lille III, *Séminaire Euclide*, organisé par Altaïr, Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'ULB, conjointement avec l'Université de Mons-Hainaut, 1993.

Un poète chantre des mathématiques?

Michaël Zoïna, *I.P.E.T. Farciennes*

En 1867, Isidore DUCASSE, alors âgé de vingt et un ans, vient s'installer à Paris pour étudier à l'École Polytechnique. Trois ans plus tard, il décède au 7 Faubourg Montmartre dans des circonstances encore inconnues aujourd'hui ...

Il était né à Montevideo (Uruguay) en 1846. À partir de 1859, il est élève du lycée impérial de Tarbes puis de celui (tout aussi impérial) de Pau.

Entre 1867 et 1870, Isidore DUCASSE devient pendant quelques mois le **Comte de Lautréamont** et écrit, sous ce pseudonyme, un ouvrage que certains considèrent comme le plus étrange de toute la littérature française : *Les chants de Maldoror.*

Bien que *Les chants* ne contiennent aucun vers, c'est bien cette œuvre qui va lui permettre d'être considéré après la première guerre mondiale, par les surréalistes, comme un des poètes les plus importants. LAUTRÉAMONT, comme RIMBAUD, son contemporain, va puiser au delà des barrières du réalisme, du moral et du conscient ses pages qu'il décrit lui-même comme « *sombres et pleines de poison* ».

Un impressionnant bestiaire de quelques cent cinquante animaux fournit le matériau nécessaire à ses métaphores et comparaisons étonnantes. Quant au héros, « *Maldoror* », il apparaît tantôt sous la forme d'un être humain, tantôt sous la forme d'un monstre sorti tout droit d'une légende grecque; seule sa haine pour la race humaine et son créateur — *l'éternel à face de vipère* — reste intacte d'un bout à l'autre du récit.

LAUTRÉAMONT s'est sans doute inspiré d'autres œuvres, telles que *L'Apocalypse* de ST JEAN, les écrits de BAUDELAIRE, SADE, DANTE, POE, LEWIS, ... pour accomplir la sienne, mais le style employé reste unique. Selon Philippe SOUPAULT, il déclamait ses phrases en plaquant de longs accords de piano durant des nuits dont il venait à bout grâce à une incroyable quantité de café.

Les extraits qui suivent sont tirés du « Chant II ». Ils illustrent à merveille la symbiose possible entre ces deux disciplines que beaucoup se plaisent à séparer, la littérature et les mathématiques.

Un poète chantre des mathématiques? C'est « beau comme la rencontre fortuite sur une table de dissection d'une machine à coudre et d'un parapluie » aurait répondu LAUTRÉAMONT.

* *
*

O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante. J'aspirais instinctivement, dès le berceau, à boire à votre source, plus ancienne que le soleil, et je continue encore de fouler le parvis sacré de votre temple solennel, moi, le plus fidèle de vos initiés. ...

... À l'aide de votre lait fortifiant, mon intelligence s'est rapidement développée, et a pris des proportions immenses, au milieu de cette clarté ravissante dont vous faites présent, avec prodigalité à ceux qui vous aiment d'un sincère amour. Arithmétique! algèbre! géométrie!

Math-Jeunes n° 80, 102–105, 1997

trinité grandiose ! triangle lumineux ! Celui qui ne vous a pas connues est un insensé ! ...

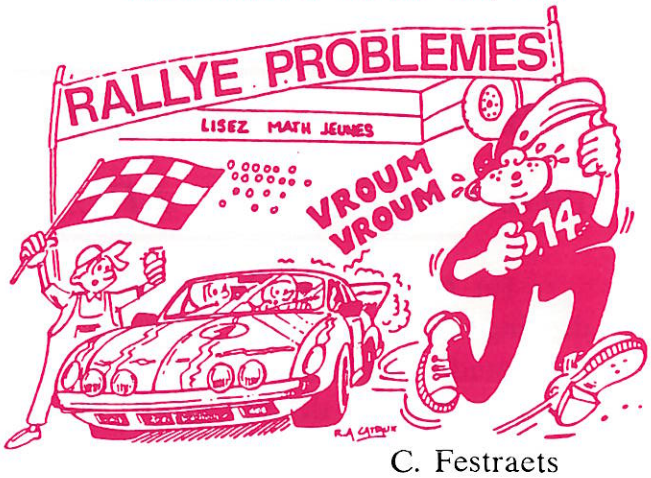
... Pendant mon enfance, vous m'apparûtes, une nuit de mai, aux rayons de la lune, sur une prairie verdoyante, aux bords d'un ruisseau limpide, toutes les trois égales en grâce et en pudeur, toutes les trois pleines de majesté comme des reines. Vous fîtes quelques pas vers moi, avec votre longue robe, flottante comme une vapeur, et vous m'attirâtes vers vos fières mamelles, comme un fils béni. ...

... Vous me donnâtes la prudence opiniâtre qu'on déchiffre à chaque pas dans vos méthodes admirables de l'analyse, de la synthèse et de la déduction. Je m'en servis pour dérouter les ruses pernicieuses de mon ennemi mortel, pour l'attaquer, à mon tour, avec adresse, et plonger, dans les viscères de l'homme, un poignard aigu qui restera à jamais enfoncé dans son corps ; car, c'est une blessure dont il ne se relèvera pas. ...

... Avec cette arme empoisonnée que vous me prêtâtes, je fis descendre, de son piédestal, construit par la lâcheté de l'homme, le Créateur lui-même ! Il grinça des dents et subit cette injure ignominieuse ; car, il avait pour adversaire quelqu'un de plus fort que lui. ...

... O mathématiques saintes, puissiez-vous, par votre commerce perpétuel, consoler le reste de mes jours de la méchanceté de l'homme et de l'injustice du Grand-Tout !

Les chants de Maldoror, LAUTRÉAMONT, Garnier-Flammarion, Paris 1969,
ISBN 2-08-070208-4

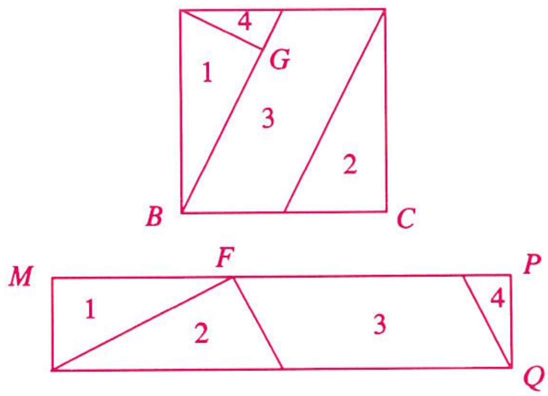


C. Festraets

Voici les solutions des problèmes proposés dans le numéro 78 de *Math-Jeunes*.

mini 5 – solution

On construit le rectangle $MNPQ$ en disposant les pièces 1, 2, 3, 4 comme indiqué sur la figure.



L'aire du rectangle est la même que celle du carré : elle vaut 4 ce qui implique que le côté du carré est de longueur 2. Puisque E est le milieu de $[BC]$, on connaît la longueur des deux côtés de l'angle droit du triangle ECD : $|EC| = 1$ et $|CD| = 2$; ceci permet de calculer la longueur de l'hypoténuse :

$$|ED|^2 = |EC|^2 + |CD|^2 = 1 + 4 = 5$$

et

$$|ED| = \sqrt{5}.$$

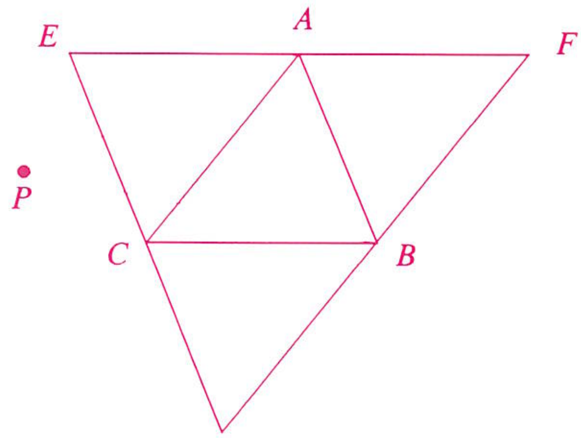
Mais $|NQ| = 2 \cdot |ED| = 2\sqrt{5}$.

Puisque l'aire du rectangle vaut 4 et que la largeur d'un rectangle est égale à l'aire divisée par la longueur, il vient

$$|MN| = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

mini 6 – solution

Considérons tous les triangles que l'on peut former avec pour sommets 3 des 1 000 points. Parmi tous ces triangles, appelons ABC celui (ou un de ceux) qui a la plus grande aire. Construisons le triangle DEF comme indiqué sur la figure :



$EF // CB \qquad FD // AC \qquad DE // BA$

L'aire du triangle DEF vaut quatre fois l'aire du triangle ABC ; or celle-ci est par hypothèse, inférieure à 1. L'aire du triangle DEF est donc inférieure à 4.

Je dis que les 1 000 points donnés sont contenus dans le triangle DEF.

En effet, si un point P était à l'extérieur du triangle DEF, à gauche de DE par exemple, l'aire du triangle PAB serait plus grande que celle du triangle ABC car ces deux triangles ont une même base $[AB]$, mais la hauteur abaissée de P sur AB est plus grande que la hauteur abaissée de C sur AB. Or le triangle ABC a été choisi avec la plus grande aire, donc il est impossible que le triangle PAB ait une aire plus grande que celle du triangle ABC et P ne peut être à l'extérieur du triangle DEF.

Le triangle DEF est donc bien d'aire inférieure à 4 et il contient les 1 000 points.

midi 5 – solution

Si $a = 1$, alors l'équation s'écrit :

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(x+1)\text{ termes}} = \underbrace{(1+1) \times \cdots \times (1+1)}_{6\text{ facteurs}}$$

De là, il vient $x + 1 = 64$ ou $x = 63$.

Si $a \neq 1$, nous multiplions alors les deux membres de l'équation par $(a-1)$:

$$(a-1)\cdot(1 + a + a^2 + \cdots + a^x) = (a-1)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$$

ce qui donne

$$a^{x+1} - 1 = (a^2-1)(1+a^2)(1+a^4) \times \cdots \times (1+a^{32})$$
$$a^{x+1} - 1 = (a^4-1)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$$
$$a^{x+1} - 1 = (a^8-1)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$$
$$a^{x+1} - 1 = (a^{16}-1)(1+a^{16})(1+a^{32})$$
$$a^{x+1} - 1 = (a^{32}-1)(1+a^{32})$$

$$a^{x+1} - 1 = a^{64} - 1$$

d'où $x = 63$.

midi 6 – solution

Le chiffre des unités d'un nombre entier carré parfait ne peut être que 0, 1, 4, 5, 6, ou 9, ce qui nous permet d'éliminer

2, 22, 222, $\cdots$
3, 33, 333, $\cdots$
7, 77, 777, $\cdots$
8, 88, 888, $\cdots$

Ces suites de nombres ne peuvent contenir aucun carré parfait.

Lorsqu'on divise un carré parfait par 4, le reste ne peut être que 0 ou 1 ; en effet, si un nombre est pair, son carré est multiple de 4 puisque $(2n)^2 = 4n^2$. Par contre, si le nombre est impair, son carré est un multiple de 4 plus 1 puisque $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

Tous les nombres de la suite 11, 111, 1 111, ... sont des multiples de 4 plus 3 et donc, aucun n'est un carré parfait.

Aucun nombre de la suite 44, 444, 4 444, ... n'est un carré parfait car $444\cdots4 = 4 \times (111\cdots1)$; or 4 est un carré mais $111\cdots1$ ne l'est pas.

Aucun nombre de la suite 55, 555, 5 555, ... n'est un carré parfait car $555\cdots5 = 5 \times (111\cdots1)$; or 5 n'est pas un carré parfait, $111\cdots1$ non plus et $111\cdots1$ n'est pas multiple de 5.

Aucun nombre de la suite 66, 666, 6 666, ... n'est un carré parfait car $666\cdots6 = 6 \times (111\cdots1)$; or 6 n'est pas un carré parfait, $111\cdots1$ non plus et $111\cdots1$ n'est pas multiple de 6.

Aucun nombre de la suite 99, 999, 9 999, ... n'est un carré parfait car $999\cdots9 = 9 \times (111\cdots1)$; or 9 est un carré parfait mais $111\cdots1$ ne l'est pas.

Les seuls carrés appartenant à la liste sont donc 1, 4 et 9.

maxi 5 – solution

Désignons par $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ les vecteurs dont les coordonnées sont respectivement les éléments de la première, la deuxième, ..., la énième ligne de l'échiquier et soit $\overrightarrow{u}\ \underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{n}$.

Si les éléments de la première ligne sont a_1, a_2, ..., a_n, leur somme s'obtient en effectuant le produit scalaire

$$\begin{aligned}&< \overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1} > \\ &=< (1,1,\cdots,1)|(a_1,a_2,\cdots,a_n) > \\ &= 1\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + \cdots + 1\cdot a_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n\end{aligned}$$

La somme totale des éléments du tableau est donc donnée par

$$S =< \overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n} >$$

Puisque chaque élément du tableau est soit 1 soit -1, on a

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v_1}|| &= ||\overrightarrow{v_2}||\cdots = ||\overrightarrow{v_n}|| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2} = \sqrt{n}\end{aligned}$$

De plus, si les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne sont $i_1, i_2, \ldots, i_n$ et ceux de la $j^{\text{ème}}$ ligne sont $j_1, j_2, \ldots, j_n$, on sait, par hypothèse que

$$\begin{aligned}&< \overrightarrow{v_i}|\overrightarrow{v_j} > \\ &=< (i_1, i_2, \ldots, i_n)|(j_1, j_2, \ldots, j_n) >= 0\end{aligned}$$

Dès lors, par définition du produit scalaire, on a

$$S = ||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n}||\cdot\cos\alpha$$

où α est l'angle des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n}$. Il vient donc

$$S \leqslant ||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n}||$$

puisque $\cos\alpha \leqslant 1$.

Or nous savons que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{n}$. Il reste à calculer $||\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n}||$.

$$||\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n}|| = \sqrt{(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n})^2}$$

Or $(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n})^2 = \overrightarrow{v_1}^2 + \overrightarrow{v_2}^2 + \cdots + \overrightarrow{v_n}^2 + 2 < \overrightarrow{v_1}|\overrightarrow{v_2} > +2 < \overrightarrow{v_1}|\overrightarrow{v_3} > + \cdots + 2 < \overrightarrow{v_{n-1}}|\overrightarrow{v_n} >$ c'est-à-dire $\underbrace{n + n + \cdots + n}_{n} + 0 + 0 + \cdots + 0$ ou encore n^2.

Donc

$$\begin{aligned}S &\leqslant \sqrt{n}\cdot\sqrt{n^2} \\ &\leqslant \sqrt{n}\cdot n\end{aligned}$$

maxi 6 – solution

Lorsqu'on effectue la division euclidienne d'un nombre entier par 5, le reste ne peut être que 0, 1, 2, 3 ou 4. Divisons les 17 nombres par 5 et considérons les restes de ces divisions.

Si 5 des 17 nombres donnent le même reste, alors, la somme de ces 5 nombres est divisible par 5 car

$$\begin{cases} a_1 &= 5q_1 + r \\ a_2 &= 5q_2 + r \\ a_3 &= 5q_3 + r \\ a_4 &= 5q_4 + r \\ a_5 &= 5q_5 + r \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &\qquad = 5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5) + 5r \end{aligned}$$

Si dans les 17 nombres, il n'y en a pas 5 qui donnent le même reste, alors il y en a au moins un qui donne comme reste 0, au moins un qui donne comme reste 1, au moins un qui donne comme reste 2, au moins un qui donne comme reste 3 et au moins un qui donne comme reste 4.

En effet, supposons qu'aucun des des 17 nombres n'ait comme reste 0; il y en a au plus 4 qui ont comme reste 1, au plus 4 qui ont comme reste 2, au plus 4 qui ont comme reste 3 et au plus 4 qui ont comme reste 4, ce qui nous fait un total d'au plus 16 nombres. Or il y en a 17! Donc il y a au moins un nombre qui a comme reste 0.

Prenons alors un nombre de chaque espèce et nous voyons que leur somme est divisible par 5 puisque

$$\begin{cases} a_1 &= 5q_1 + 0 \\ a_2 &= 5q_2 + 1 \\ a_3 &= 5q_3 + 2 \\ a_4 &= 5q_4 + 3 \\ a_5 &= 5q_5 + 4 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &\qquad = 5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5) + 10 \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a bien une somme de 5 nombres divisible par 5.

Victor Vasarely

Tu te souviens que sur la couverture du premier *Math-Jeunes* de cette année, nous t'avons présenté une œuvre du peintre Victor VASARELY, *Vegalep -1970.*

À tous ceux qui ne s'intéressent pas à la presse écrite ou télévisée, *Math-Jeunes* se devait de signaler que le peintre qui était né à Pecs en Hongrie, le 9 avril 1908 s'est éteint à Paris il y a deux bons mois, après une longue et pénible maladie.

Rappelons que Victor VASARELY avait imaginé les bases de l'art cinétique en 1955 : son principe est l'utilisation de formes géométriques simples pour donner une illusion de mouvement. Un de ses grands admirateurs un peu fantasque est le couturier Jean-Paul GAULTIER qui lui a rendu hommage en créant un modèle inspiré de son art. Un autre admirateur plus conventionnel lui, fut le président français Georges POMPIDOU. En hommage de cette reconnaissance, VASARELY réalisa son portrait géant, suspendu dans le hall du Centre Beaubourg à Paris.

Math-Jeunes n° 80, 106–106, 1997

Math-Jeunes n° 80, 107–108, 1997

Un peu de logique !

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

> 1. PURE Mathematics is the class of all propositions of the form "p implies q" where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants. And logical constants are all notions definable in terms of the following : Implication, the relation of a term to a class of which it is a member, the notion of *such that*, the notion of relation, and such further notions as may be involved in the general notion of propositions of the above form. In addition to these, mathematics *uses* a notion which is not a constituent of the propositions which it considers, namely the notion of truth.[3]
>
> ...

Si tu as des problèmes de traduction, n'hésite surtout pas à en parler à ton professeur d'anglais ...

Le texte qui précède est de Bertrand RUSSELL, logicien et philosophe britannique contemporain (Trelleck, pays de Galles, 1872 – Penrhyndeudraeth, pays de Galles, 1970). On peut le lire au début du premier chapitre de la première partie de son ouvrage *The Principles of Mathematics*, publié pour la première fois en 1903. RUSSELL poursuit en affirmant que cette définition des mathématiques pures est sans aucun doute quelque peu inhabituelle, mais que son discours va tenter de la justifier. Un peu plus loin, au chapitre II, il écrit encore :

> 11. SYMBOLIC or Formal Logic — I shall use these terms as synonyms — is the study of the various general types of deduction.[3]
>
> ...

Si tu n'as pas bien suivi, fais nous cependant confiance si nous t'affirmons que la **logique** est un des piliers, un des fondements des mathématiques.

Le scénario de la BD que te propose Frédéric POURBAIX est emprunté à Lewis CARROLL[1][2], tu sais, l'auteur de ... *Alice au pays des merveilles.* Peut-être *Math-Jeunes* aura-t-il un jour l'occasion de te parler de Charles Lutwidge DODGSON (1832 – 1898), professeur de mathématiques à *Christ Church, Oxford University*, qui a publié *Alice* et bien d'autres œuvres sous le pseudonyme de Lewis CARROLL.

Dans [1], CARROLL écrit :

Lorsqu'un trio de propositions de relation — ce que nous pouvons désigner grossièrement par « trois affirmations » — est tel que

(1) tous les termes sont des **espèces** du même **genre** (ici, les termes sont *professeur, ignare, vaniteux* qui sont trois espèces du genre *être humain*),

(2) les termes pris deux à deux contiennent une paire de classes **codivisionnelles** (c'est-à-dire de classes obtenues par division d'une plus grande),

(3) les trois propositions sont **liées** de telle manière que, si les deux premières sont vraies, alors la troisième doit être vraie,

le trio de propositions est appelé **syllogisme**, mot qui vient du grec *sullogismos*, de *sun* (avec) et *logos* (discours).

Le genre dont chacun des six termes est une espèce est appelé **univers de discours** ou plus brièvement **univ.** ; les deux premières propositions sont appelées **prémisses** et la troisième, **conclusion** ; de plus, la paire de termes codivisionnels des prémisses sont les **éliminandes** tandis que l'autre paire sont les **rétinendes**.

La conclusion d'un syllogisme est dite **conséquente** de ses prémisses, d'où l'habitude de la préfixer du mot « donc » (ou du symbole $\therefore$).

Un exemple très simple de syllogisme est :

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Donc Socrate est mortel.

Les **éliminandes** sont ici **hommes** et **homme** : elles sont « éliminées » de la conclusion. Les **rétinendes** c'est-à-dire les termes qui « restent » dans la conclusion sont **Socrate** et **mortel**.

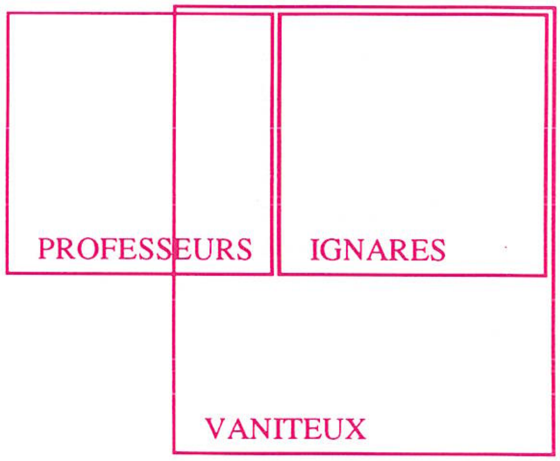
Dans la BD que tu peux voir à la page 106, la situation est quelque peu plus complexe sans doute par le fait de la négation. Les **prémisses** sont

- aucun professeur n'est un ignare
- tous les ignares sont vaniteux

les **éliminandes** sont **ignare** et **ignares** et les **rétinendes**, **professeur** et **vaniteux**.
« La » conclusion correcte pour que le trio de propositions constitue un syllogisme est :

Certains vaniteux ne sont pas professeurs.

Il est aisé de s'en convaincre en examinant le diagramme ci-contre où chaque « quadrilatère » représente un ensemble, une classe d'êtres humains possédant une certaine caractéristique : professeur, ignare, vaniteux.

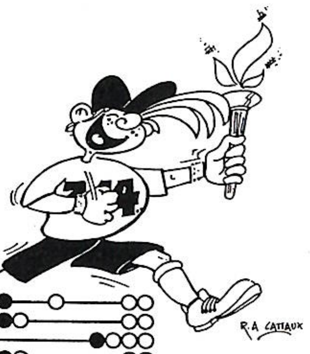


Bibliographie

[1] Lewis CARROLL, *Symbolic Logic and The Game of Logic*, Dover Publications Inc., New York, 1958. ISBN 0 - 486 - 20492 - 8

[2] Lewis CARROLL, *Logique sans peine*, traduction et présentation de Jean GATTEGNO et Ernest COUMET, illustrations de Max ERNST, Éditions Hermann, 1982, ISBN 2 - 7056 - 5544 - 1

[3] Bertrand RUSSELL, *The Principles of Mathematics*, George Allen & Unwin (Publishers) Ltd, London, 1985, ISBN 0 - 04 - 510021 - 7



OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

C. VAN HOOSTE

Cette année, pour la seconde fois consécutive, l'Olympiade Mathématique Belge était divisée en trois niveaux (Mini, Midi et Maxi). Le succès de cette épreuve, sans doute la plus importante du calendrier scolaire, ne s'est pas démenti. En effet, vous étiez 20869 à participer aux éliminatoires en janvier; puis, en février, 2691 à tenter l'exploit en demi-finales; enfin, en avril, 114 à lutter pour la gloire lors des finales.

Ami lecteur, tu trouveras ci-dessous les grilles des réponses correctes pour les questionnaires des éliminatoires et des demi-finales, des solutions détaillées à certaines questions posées lors des demi-finales (les énoncés figurent dans le *Math-Jeunes* n°79); ainsi que la solution détaillée à l'une des questions posées en finale. Comme d'habitude, je t'invite à participer; en effet, si tu estimes que tu possèdes une solution meilleure ou simplement différente à une question résolue ci-après ou encore une solution intéressante à une autre question, tu peux nous l'envoyer et nous la publierons. Ainsi, tu apporteras ta contribution à la rédaction de cette rubrique.

GRILLES DES RÉPONSES CORRECTES

MINI Eliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	C	11	E	21	D
2	13	12	C	22	E
3	E	13	B	23	E
4	D	14	D	24	B
5	C	15	C	25	28
6	A	16	A	26	D
7	C	17	C	27	B
8	D	18	B	28	B
9	D	19	E	29	999
10	C	20	91	30	C

MIDI Eliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	999	11	12	21	A
2	C	12	D	22	D
3	C	13	E	23	C
4	D	14	C	24	B
5	C	15	D	25	C
6	D	16	C	26	C
7	C	17	C	27	D
8	B	18	D	28	12
9	C	19	D	29	79
10	D	20	D	30	C

MAXI Eliminatoire

Q	R	Q	R	Q	R
1	B	11	E	21	E
2	C	12	E	22	10
3	D	13	A	23	D
4	C	14	D	24	E
5	D	15	29	25	A
6	C	16	B	26	32
7	D	17	B	27	B
8	D	18	B	28	B
9	15	19	D	29	D
10	C	20	A	30	C

MINI Demi-Finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	D	11	D	21	A
2	8	12	E	22	12
3	A	13	A	23	D
4	E	14	C	24	C
5	D	15	B	25	E
6	A	16	E	26	B
7	B	17	C	27	B
8	D	18	B	28	90
9	A	19	754	29	D
10	C	20	D	30	B

MIDI Demi-Finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	E	11	E	21	B
2	D	12	D	22	D
3	C	13	25	23	E
4	B	14	A	24	D
5	A	15	365	25	E
6	D	16	B	26	E
7	E	17	40	27	A
8	A	18	C	28	D
9	D	19	A	29	C
10	B	20	160	30	A

MAXI Demi-Finale

Q	R	Q	R	Q	R
1	E	11	B	21	A
2	25	12	D	22	D
3	D	13	A	23	D
4	D	14	A	24	A
5	C	15	C	25	E
6	8	16	D	26	C
7	B	17	B	27	C
8	E	18	B	28	20
9	E	19	E	29	B
10	E	20	E	30	705

Voici enfin le palmarès de la 22ème Olympiade Mathématique Belge.

MINI	MIDI	MAXI
<u>Premier Prix</u> Matthieu REMY	<u>Premier Prix</u> Zhe HAN	<u>Premier Prix</u> Camille ENAUD
<u>Deuxième Prix</u> Nicolas BOUTET	<u>Deuxièmes Prix</u> Tom SCHAUL Arnaud BOURDOUX Sarah VAN BOGAERT	<u>Deuxièmes Prix</u> Jean VAN SHAFTINGEN Eric VANDENBUSSCHE
<u>Troisièmes Prix</u> Axel BAUDSON Xavier KUYPERS Christian DELACROIX	<u>Troisièmes Prix</u> Benjamin FUKS Ming-Koon HSU Pierre-Emmanuel CAPRACE	<u>Troisièmes Prix</u> Michel BAES Jean-Charles DELVENNE Laure NINOVE Laurent DOYEN Saji MASSON
<u>Quatrièmes Prix</u> Cédric CHEVALIER Guy HENRARD Daniel SCHWEITZER David DI PIETRO Damien JACQUES Jérôme URBAIN Gabriel KRIER Nicolas FRANCO Guillaume DUMONT	<u>Quatrièmes Prix</u> Wei HSIA Jérôme GOFFIN	<u>Quatrièmes Prix</u> Antoine VIGIER Thomas GOOR Christophe DELFOSSE Emilie BURTON François BIOUL Nicolas WAUTHOZ
<u>Prix Spéciaux</u> Cédric CHEVALIER David DI PIETRO Damien JACQUES Gabriel KRIER Xavier CHARLES Etienne LEFEBVRE	<u>Prix Spéciaux</u> Tom SCHAUL Ming-Koon HSU Wei HSIA Florian DRECHSLER Pierre GRAMME Mir Emad HASHEMI Serge LEDOUX	<u>Prix Spéciaux</u> Laure NINOVE Antoine VIGIER Nicolas WAUTHOZ Jérôme LEVIE Louis WYERS Paul-Olivier DEHAYE Pierre MAON Dominic PINTO

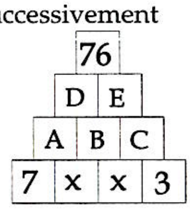
<u>Prix VANHAMME</u>: Fabian RADOUX.

Demi-finale MINI

Question 7 <u>Le mur</u>

Déterminons le nombre que porte chaque brique en partant du bas du mur pour remonter vers la brique du sommet. Pour ce faire, utilisons les notations de la figure ci-dessous. Nous avons successivement

$$\begin{cases} A = 7 + x \\ B = 2x \\ C = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = A + B = 7 + 3x \\ E = B + C = 3x + 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 76 = D + E = 6x + 10$$



De là, nous tirons $x = 11$.

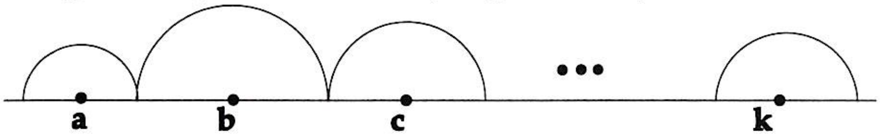
Question 18 <u>Les sauts de kangourou</u>

Note préliminaire

L'expression "telle distance vaut x km à 1 km près" signifie que la différence entre la distance approchée ainsi donnée (x km) et la vraie valeur de cette distance ne dépasse pas 1 km; donc que cette vraie valeur est comprise entre $(x - 1)$ km et $(x + 1)$ km.

Solution

Appelons $a, b, c, \ldots, k$ les mesures (exprimées en km) des rayons des demi-cercles constituant les sauts du kangourou tout au long de son déplacement de 3 km (cf. fig. ci-dessous).



Nous avons $2a + 2b + 2c + \ldots + 2k = 3$. La distance que parcourt le kangourou "en l'air" est alors

$$\pi a + \pi b + \pi c + \ldots + \pi k = \pi(a + b + c + \ldots + k) = \pi \frac{3}{2} \approx 4{,}5.$$

Cette distance est donc approximativement égale à 5 km, à 1 km près.

Question 23 Le cône et le cylindre

Bases théoriques

- Le volume d'un cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
- Le volume d'un cône est égal au tiers du volume du cylindre ayant le même rayon et la même hauteur.
- Ainsi, le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Solution

Appelons v le volume du récipient conique et V le volume du réservoir cylindrique.
Notons R et H respectivement le rayon et la hauteur du cylindre, r et h respectivement le rayon et la hauteur du cône. Nous avons $r = \frac{R}{2}$, $h = 2H$ et $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 (2H) = \frac{1}{6}\pi R^2 H = \frac{1}{6} V$.
Ainsi, il faut verser 6 fois le contenu du récipient conique pour remplir le réservoir cylindrique.

Question 25 Le chiffre 1

Déterminons d'abord le nombre de chiffres 1 nécessaires pour écrire tous les naturels de 1 à 999.
Il faut 100 chiffres 1 pour commencer tous les naturels de 100 à 199. Il faut aussi 100 chiffres 1 comme chiffre des dizaines pour les naturels de 10 à 19, de 110 à 119, de 210 à 219, ..., de 910 à 919. Il faut encore 100 chiffres 1 comme chiffre des unités pour les naturels 1, 11, 21, ... , 101, 111, 121, ... , 901, 911, 921, ... , 991. Au total, il faut 300 chiffres 1 pour écrire les naturels de 1 à 999.

Voici une autre manière de faire ce calcul. Complétons l'écriture de tous les naturels de 0 à 999 pour qu'ils comprennent tous 3 chiffres: 000, 001, 002, ... , 009, 010, 011, ... , 099, 100, 101, ... , 999.

Pour les écrire, nous avons utilisé 1000 fois 3 chiffres, soit 3000 chiffres. Mais, dans cette écriture, les différents chiffres jouent un rôle égal; chacun d'eux est donc employé 300 fois. Supprimer les 0 inutiles ne modifiant en rien l'usage des autres chiffres, le chiffre 1 est bien utilisé 300 fois.

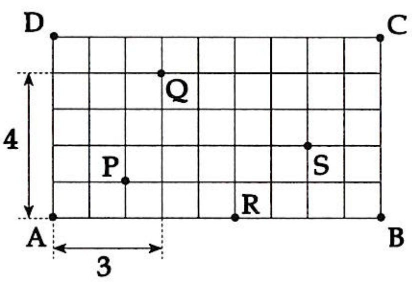
Pour écrire tous les naturels de 1000 à 1999, il faut utiliser 1000 fois le chiffre 1 en première position (à gauche) et encore 300 fois pour les trois autres positions (comme pour écrire les naturels de 000 à 999). La suite des naturels à écrire s'arrête à 1997, il ne faut donc pas comptabiliser les chiffres 1 nécessaires pour écrire 1998 et 1999. Au total, le nombre de chiffres 1 nécessaires pour écrire les naturels de 1 à 1997 est égal à

$$300 + (1000 + 300 - 2) = 1598.$$

Question 27 Quadrillage

Note préliminaire

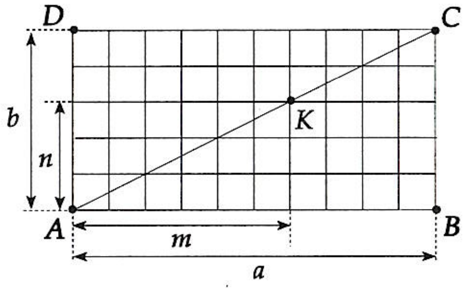
Sur une feuille de papier quadrillé, dessinons un rectangle $ABCD$ dont les côtés sont tracés sur des lignes du quadrillage. Repérons les sommets des carrés par leur "coordonnée", mesurée à partir du coin inférieur droit du rectangle (cf. fig. ci-contre); celle-ci consiste en un couple de nombres indiquant respectivement le nombre de carrés à franchir horizontalement et verticalement pour atteindre le point considéré.



Voici les coordonnées de quelques points représentés sur cette figure :
coord $A = (0,0)$, coord P = (2,1), coord Q = (3,4), coord R = (5,0), coord S = (7,2).

Supposons maintenant que la coordonnée de C soit (a,b), a et b étant deux naturels non nuls. Alors, la diagonale AC passe par le sommet K du quadrillage de coordonnée (m,n) si et seulement si $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$.

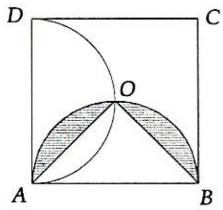
Ami lecteur, lorsque tu seras en troisième année, tu seras capable de démontrer cette propriété; sans aucun doute, tu y reconnaîtras des triangles semblables. N'oublie pas !



Solution
Le quadrillage de la feuille proposée comprend 60 carrés sur 42. Dès lors, la coordonnée du coin supérieur droit de la feuille est (60,42). D'après la note préliminaire ci-dessus, la diagonale de la feuille aboutissant en ce sommet passe par le point du quadrillage de coordonnée (m,n) si et seulement si $\frac{m}{n} = \frac{60}{42}$ avec $0 < m < 60$.
Cette condition étant remplie pour les points de coordonnée (10,7), (20,14), (30,21), (40,28) et (50,35), la diagonale précitée passe par 5 sommets du quadrillage.

Question 28 Dalles carrées (sans réponse préformulée)
Soit d la mesure en centimètres du côté des dalles carrées.
Pour qu'il n'y ait pas de découpe, il faut que d divise 630 et 270. Autrement dit, d doit être un diviseur commun de 630 et de 270. Comme les dalles doivent être les plus grandes possibles, d doit être le Plus Grand Commun Multiple de 630 et de 270. Par conséquent, d vaut 90.

Question 30 Premier pétale
Appelons $ABCD$ le carré donné (cf. fig. ci-contre). Les deux demi-cercles se coupent au centre O du carré. Traçons les segments $[OA]$ et $[OB]$.



Alors, il est facile de voir que l'aire S de la partie ombrée (cf. fig. de l'énoncé) vaut l'aire de la partie hachurée sur la figure ci-contre. Celle-ci est la différence entre l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et l'aire du triangle OAB rectangle et isocèle. Comme l'aire de ce triangle équivaut à un quart de l'aire du carré, nous avons $S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$.

Demi-finale MIDI

Question 21 Enveloppes
Soit x le temps nécessaire à la nouvelle machine, fonctionnant seule, pour fabriquer 500 enveloppes.
En une minute, la première machine fabrique $\frac{500}{8}$ enveloppes et la seconde en fabrique $\frac{500}{x}$. Travaillant simultanément, elles fabriquent $\frac{500}{2}$ enveloppes. On doit donc avoir $\frac{500}{8} + \frac{500}{x} = \frac{500}{2}$ ou $\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Question 25 Fractions
De la première des trois égalités données, nous tirons $a = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ et, de là, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$.
Ainsi, en procédant de la même manière dans les deux autres égalités, nous obtenons trois égalités équivalentes aux trois égalités initiales: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}$ et $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$. (1) (2) (3)
En effectuant, membre à membre, l'opération (1) + (2) - (3), nous obtenons $2 . \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$.

D'où, nous tirons $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc + ac - ab}{abc}$ et $x = \frac{2abc}{-ab + ac + bc}$.

Question 27 Deux erreurs conduisent à la vérité !

Base théorique
Une équation du second degré qui admet pour solution les réels a et b est équivalente à l'équation

$$(x - a)(x - b) = 0,$$

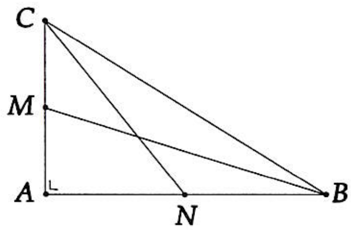
donc, à l'équation $x^2 - (a + b)\,x + ab = 0.$

Solution
L'équation obtenue par le premier élève est équivalente à $x^2 - 10x + 16 = 0$.
Celle trouvée par sa voisine est équivalente à $x^2 + 10x + 9 = 0$.
Si nous choisissons 1 comme coefficient du terme du second degré pour l'équation correcte, alors le coefficient du terme du premier degré de cette équation est nécessairement -10 car l'erreur du premier élève réside dans le terme indépendant de son équation. Quant au terme indépendant de la bonne équation, il vaut obligatoirement 9 puisque seul le terme indépendant de l'équation du second élève est erroné.
Il s'ensuit que l'équation correcte était $x^2 - 10x + 9 = 0$.

Question 28 L'hypoténuse et les deux médianes
Soit ABC le triangle rectangle, le sommet de l'angle droit se situant en A.
Appelons respectivement M et N les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$ (cf. fig. ci-dessous) et utilisons les notations suivantes: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $m = |BM|$, $n = |CN|$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ABM et ACN, rectangles en A, nous avons

$$m^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad n^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$



D'où, en additionnant membre à membre, nous tirons $m^2 + n^2 = \frac{5}{4}(c^2 + b^2)$ et, de là, $m^2 + n^2 = \frac{5}{4}a^2$.

Nous avons donc $a = 2\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{5}}$.

Comme m et n valent 5 et $\sqrt{40}$, nous obtenons $a = 2\sqrt{\frac{25 + 40}{5}} = 2\sqrt{13}$.

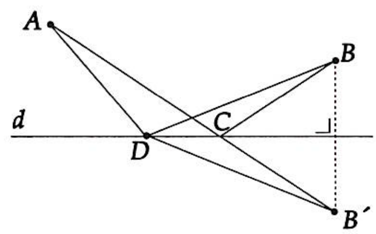
Question 30 Somme minimale

Base théorique
Résolvons le problème de géométrie suivant. **Etant donné une droite d et deux points A et B, situés dans le même demi-plan de bord AB, déterminer un point C de d tel que le trajet pour aller de A à B en passant par C soit le plus court possible.**

Soit B' le symétrique de B par rapport à d (cf. fig. ci-contre). Le point d'intersection des droites d et AB' est le point C cherché. En effet, si D est un autre point de d, nous avons

$$|AC| + |CB'| = |AB'| < |AD| + |DB'|,$$

en vertu de l'inégalité triangulaire. Comme toute symétrie orthogonale conserve les distances, de l'inégalité ci-dessus, nous déduisons $|AC| + |CB| < |AD| + |DB|$, inégalité qui exprime que le trajet A-C-B est plus court que le trajet A-D-B.



Solution
Le problème revient à trouver la position du point C sur l'axe Oy pour que le trajet A-C-B soit le plus court possible. D'après la base théorique, C est le point commun à l'axe Oy et à la droite AB', B' étant le symétrique de B par rapport à l'axe Oy.

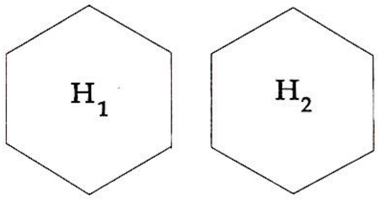
La coordonnée de B' est (-2,1). Le coefficient angulaire de la droite AB' est $m = \frac{5-1}{5+2} = \frac{4}{7}$. L'équation de la droite AB' est alors $y - 1 = \frac{4}{7}(x+2)$ ou $4x - 7y + 15 = 0$. Le point d'intersection de AB' avec l'axe Oy est $C(0, \frac{15}{7})$. Ainsi, l'ordonnée de C est $k = \frac{15}{7}$.

Demi-finale MAXI

Question 15 <u>Rotations</u>

Base théorique
Dans le plan, la composée d'un rotation non nulle et d'une translation est une rotation.

Solution



Appelons H_1 et H_2 les deux hexagones (cf. fig. ci-contre).
Soit r une rotation qui applique H_1 sur H_2 et t la translation qui applique H_1 sur H_2.
La translation t^{-1} applique H_2 sur H_1; par conséquent, l'isométrie $r \circ t^{-1}$ applique H_2 sur lui-même. Or, cette isométrie est une rotation (cf. la base théorique). Appelons-la r'. Donc, quelle que soit la rotation r (qui applique H_1 sur H_2), il existe une rotation r' (qui applique H_2 sur lui-même) telle que $r' = r \circ t^{-1}$ ou $r = r' \circ t$.
Comme il existe exactement six rotations qui appliquent H_2 sur lui-même (d'angles 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°), dont une rotation nulle, il y a <u>seulement</u> cinq rotations qui appliquent H_1 sur H_2.

Question 27 <u>Fonction exponentielle</u>

Base théorique
Toute fonction exponentielle $x \to a^x$ de base a plus grande que 1, définie sur l'ensemble des réels, y est strictement croissante.

Solution
En étudiant le graphique de f, nous observons que $f(x)$ est strictement positif dans $\mathbb{R}_0^+$ et strictement négatif dans $\mathbb{R}_0^-$. Comme la fonction exponentielle de base 2 est strictement croissante dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : g(x) = 2^{f(x)} > 2^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0^- : g(x) = 2^{f(x)} < 2^0 = 1.$$

Parmi les graphiques proposés, seul **(C)** vérifie ces deux propriétés.

Question 28 <u>Tableau triangulaire</u> (sans réponse préformulée)

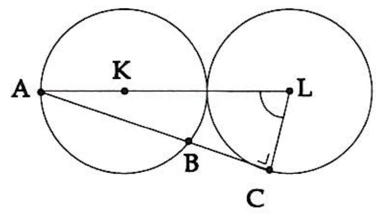
Base théorique
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes de cette somme par la moyenne des premier et dernier termes de celle-ci.

Solution
Appelons respectivement $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ les naturels situés à la fin des 1ère, 2ème, ..., $n$ième, ... lignes du tableau. Comme la première ligne comprend un seul nombre, la seconde ligne, deux nombres, ... , la $n$ième ligne, n nombres, le dernier nombre de la $n$ième ligne est $L_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Les nombres de la $n$ième ligne, exprimés en fonction du dernier d'entre eux, sont donc $L_n - (n-1), \ldots, L_n - 1, L_n$ et leur somme vaut

$$S_n = L_n + (L_n - 1) + \ldots + (L_n - (n-1)) = n\,\frac{L_n + L_n - (n-1)}{2} = n\,\frac{n(n+1) - (n-1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Ainsi, la somme des nombres de la 50ème ligne est $S_{50} = \frac{50\,.\,(50^2+1)}{2} = 62\,525$ et la somme des chiffres de S_{50} est égale à 20.

Question 29 Maximiser



Désignons par R le rayon des cercles donnés.
Le triangle CAL est rectangle en C (cf. fig. ci-contre); par le théorème de Pythagore, nous avons $|AC|^2 = |AL|^2 - |LC|^2 = |AL|^2 - R^2$. Cette relation montre clairement que $|AC|$ est maximum si et seulement si $|AL|$ est maximum. Par ailleurs, il est évident que $|AL|$ est maximum si et seulement si A appartient à la droite des centres KL. Cette condition étant remplie, nous avons $\cos \widehat{CLK} = \dfrac{|CL|}{|AL|} = \dfrac{R}{3R} = \dfrac{1}{3}$.

Question 30 Triangles (sans réponse préformulée)
Appelons Ω l'ensemble $\{P, P_1, \dots, P_4, Q, Q_1, \dots, Q_5, R, R_1, \dots, R_6\}$.
Pour établir le compte des triangles qui ont leurs trois sommets dans Ω, comptons le nombre de triangles (dégénérés ou non) qui ont leurs trois sommets dans Ω et, parmi ceux-ci, dénombrons ceux qui ont leurs trois sommets sur une des droites PQ, PR ou QR.

Nombre de triangles qui ont leurs trois sommets dans Ω: C_{18}^3

Nombre de triangles qui ont leurs trois sommets sur PQ: C_8^3

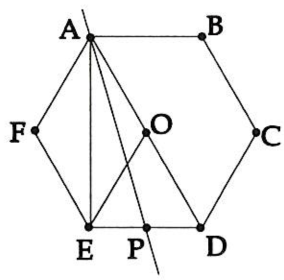
Nombre de triangles qui ont leurs trois sommets sur PR: C_7^3

Nombre de triangles qui ont leurs trois sommets sur QR: C_6^3

Nombre de triangles non dégénérés qui ont leurs trois sommets dans Ω: $C_{18}^3 - C_8^3 - C_7^3 - C_6^3 = 705$.

MINI FINALE ♦ Question 1

Dans le plan, construire par un sommet d'un hexagone régulier une droite qui partage l'intérieur de l'hexagone en deux régions dont l'une a une aire double de l'autre.



Solution
Soit $ABCDEF$ l'hexagone régulier donné. Par le sommet A, traçons une droite qui partage cet hexagone ainsi qu'il est souhaité. Admettons que cette droite coupe le côté $[DE]$ en P (cf. fig. ci-contre). Nous avons donc

$$\text{aire } ABCDP = 2 \times \text{aire } APEF.$$

En désignant par H l'aire de l'hexagone, nous avons aire $ABCDP = \dfrac{2}{3}H$.

Comme $ABCD$ est un demi-hexagone, nous en déduisons aire $ADP = \dfrac{2H}{3} - \dfrac{H}{2} = \dfrac{H}{6}$.

Or, l'aire du triangle ODE (O étant le centre de l'hexagone) vaut précisément le sixième de l'aire de l'hexagone. Et, l'aire du triangle ADE est double de celle du triangle ODE du fait que la base $[AD]$ du premier est deux fois plus longue que la base $[OD]$ du second. Nous avons donc aire ADP = aire $ODE = \dfrac{1}{2}$ aire ADE.

Pour qu'il est soit ainsi, il faut que la base $[DP]$ du triangle ADP ait une longueur égale à la moitié de la base $[ED]$ du triangle ADE. Il s'ensuit que P est le milieu de $[ED]$.

Ainsi, la droite issue de A comprenant le milieu de $[ED]$ divise l'hexagone en deux parties dont l'une a une aire double de celle de l'autre.

MIDI Finale ♦ Question 2

Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x+a)^2 + (y+b)^2 = (z+c)^2 \end{cases}$

d'inconnues x, y et z (c'est-à-dire exprimer en fonction de a, b et c, l'ensemble S des triplets (x,y,z) qui satisfont ce système).

Solution (par l'algèbre)
Après avoir développé la seconde équation et, puis, éliminé certains termes en utilisant la relation donnée et la première équation, nous obtenons $2ax + 2by = 2cz$ ou $ax + by = cz$. (1)
Elevons au carré les deux membres de cette nouvelle équation: $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = c^2z^2$. (2)
Par ailleurs, multiplions membre à membre la relation donnée et la première équation:

$$a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2 \qquad (3)$$

Maintenant, en effectuant la soustraction membre à membre (3) - (2), nous trouvons

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0 \quad \text{ou} \quad (bx - ay)^2 = 0$$

D'où, nous tirons $bx - ay = 0$. (4)

En multipliant par a les deux membres de (1) et par b les deux membres de (4) et en additionnant ensuite membre à membre, nous avons $(a^2 + b^2)x^2 = acz$. De là, en usant une nouvelle fois de la relation donnée, il vient $c^2x = acz$ et, après simplification, $cx = az$. (5)
Les équations (4) et (5) permettent d'écrire $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.
Ceci exprime que toute solution du système à résoudre doit être un multiple du triplet (a,b,c).
Pour achever, assurons-nous que tout multiple du triplet (a,b,c) est effectivement une solution du système.
Soit $(x,y,z) = k(a,b,c)$ avec $k \in \mathbb{R}$. Nous avons $x^2 + y^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = z^2$

et $(x + a)^2 + (y + b)^2 = (k+1)^2a^2 + (k+1)^2b^2 = (k+1)^2(a^2 + b^2) = (k+1)^2c^2 = (z + c)^2$

ce qui prouve que $(x,y,z) = k(a,b,c)$ vérifie bien les deux équations du système.

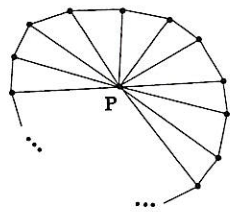
Par conséquent, l'ensemble des solutions du système est $S = \{k(a,b,c) : k \in \mathbb{R}\}$.

MAXI FINALE ♦ Question 1

Un polygone convexe à 1997 côtés est pavé par des polygones dont chaque côté est soit un côté du polygone initial, soit un côté d'un autre polygone du pavage. Un tel pavage peut-il consister en
a) 1997 triangles ? b) 1997 quadrilatères ? c) 1998 triangles ?

Solution
Soit un n-gone convexe (polygone convexe à n côtés).

a) Fixons un point P à l'intérieur de ce n-gone (cf. fig. ci-dessous).
En traçant les segments qui relient P à chacun des sommets de ce polygone, nous créons ainsi un pavage du n-gone en n triangles qui répond aux conditions imposées.
Ainsi, un pavage d'un 1997-gone convexe, tel qu'imposé, en 1997 triangles est réalisable.



b) Considérons un pavage du n-gone en n quadrilatères, conforme aux conditions imposées.
Le nombre total de côtés constituant ces quadrilatères est forcément égal à $4n$. Parmi ceux-ci, il y a les n côtés du n-gone; il reste donc $3n$ côtés situés à l'intérieur du n-gone. Or, chaque côté intérieur au n-gone est nécessairement commun à deux des quadrilatères du pavage. Par conséquent, pour qu'un tel pavage soit possible, il faut que $3n$ soit divisible par 2; donc que n soit pair.
De là, il ressort qu'un pavage d'un 1997-gone convexe, tel qu'imposé, en 1997 quadrilatères est impossible.

c) Considérons un pavage du n-gone en $(n+1)$ triangles, conforme aux conditions imposées.
Le nombre total de côtés constituant ces triangles est forcément égal à $3(n+1)$. Parmi ceux-ci, il y a les n côtés du n-gone; il reste donc $(2n+3)$ côtés situés à l'intérieur du n-gone. Or, chaque côté intérieur au n-gone est nécessairement commun à deux des triangles du pavage. Par conséquent, pour qu'un tel pavage soit possible, il faudrait que $(2n+3)$ soit divisible par 2; ce qui n'est pas le cas.
Il découle de cela qu'un pavage d'un 1997-gone convexe, tel qu'imposé, en 1998 triangles est impossible.

Paul Erdös, un mathématicien universel.

Gérald Troessaert, *I.S.I. Arlon*

Paul ERDÖS s'est éteint ce 20 septembre 1996 alors qu'il assistait à un congrès de mathématique à Varsovie.

Claude Berge et Paul Erdös

Il était né le 26 mars 1913 à Budapest (Hongrie). Son immense talent s'est manifesté très tôt ; à l'âge de trois ans il effectue de tête des multiplications de trois chiffres. Ses parents, tous deux professeurs de mathématique, l'encouragent à étudier cette science et, à 19 ans, il apporte sa première contribution importante en démontrant une propriété observée en 1845 par Joseph BERTRAND :

> **$\forall n$ entier $\geqslant 2$, il y a toujours au moins un nombre premier (1) compris entre n et $2n$.**

L'universalité de Erdös se manifeste au travers de ses voyages, de ses collaborateurs et des domaines qu'il a étudiés.

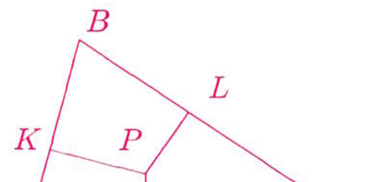
- En vrai nomade, il a visité tous les centres mathématiques importants du monde, y apportant ses idées novatrices. Il fut un véritable agent fertilisateur, faisant profiter les groupes de recherche de sa prodigieuse imagination. Ses nombreux déménagements l'inspiraient, ce qu'il résumait par la formule : *« Another roof, another proof. »* (2)

- Aucun mathématicien n'a eu autant de collaborateurs que Paul ERDÖS. Il a publié plus de 1 500 articles et livres, la plupart avec d'autres mathématiciens issus du monde entier (environ 450). Il aimait surtout travailler avec des jeunes chercheurs dont beaucoup sont maintenant d'éminents spécialistes.

- Les problèmes étudiés par Paul ERDÖS explorent les frontières de l'univers mathématique. Ses découvertes touchent la plupart des branches mathématiques, de la théorie des nombres à la géométrie en passant par les probabilités et les fondements de l'analyse.

Mais le génie de ERDÖS était surtout dans l'art de poser des questions et des problèmes dont beaucoup sont restés célèbres. Certains de ces problèmes sont devenus des théorèmes bien connus des amateurs de problèmes mathématiques comme, par exemple, le fameux

Théorème de Erdös - Mordell (1935)



(1) Un nombre **premier** est un nombre qui possède **exactement deux diviseurs**, 1 et lui-même.

(2) « Autre toit, autre démonstration »

Un point P intérieur à un triangle ABC se projette en K, L, N sur les côtés de ce triangle.
Alors

$$PA + PB + PC \geqslant 2(PK + PL + PN)$$

L'égalité se produit ssi le triangle est équilatéral et P est son centre.

ou le

Théorème de Erdös - Szekeres (1935)

D'une suite de $(mp + 1)$ nombres réels, on peut toujours extraire une suite croissante de $(m + 1)$ termes ou bien une suite décroissante de $(p + 1)$ termes.

Beaucoup d'autres problèmes, à l'énoncé pourtant simple, sont encore non résolus. On dit qu'ils sont ouverts. En voici deux exemples :

1. Sept points sont donnés dans le plan. Prouver qu'on peut toujours choisir trois de ces points tels que les trois distances déterminées par ces points sont toutes différentes.

2. Soit P un point arbitraire intérieur à un triangle ABC. Si a_1, a_2, a_3 sont les distances de P aux sommets du triangle et x, y, z les distances aux trois côtés du triangle, déterminer le minimum de $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{x + y + z}$.

Paul Erdös avait l'habitude de proposer des prix (en dollars US) pour la résolution de ses problèmes. Certains ont calculé qu'il ne pourrait payer si tous ses problèmes étaient résolus au même moment. Malheureusement, il n'aura pas à tenir ses promesses.

Les amateurs de problèmes mathématiques sont en deuil, un des plus brillants et excentriques mathématiciens du vingtième siècle nous a quittés dans le plein exercice de son art.

Bibliographie

[1] G. Berzsenyi, *Happy birthday, Uncle Paul*, Quantum Volume 4, number 5, p. 28-29.

[2] G. Berzsenyi, *In memoriam : Paul Erdös (1913-1996)*, Quantum Volume 7, number 2, p. 40-41.

[3] R. Cuculière, Paul Erdös, *Les mathématiques pour sixième sens*, Tangente n° 55, p. 20-22.

Voici une solution en 46 coups du *Fore and Aft Puzzle* paru dans *Math-Jeunes* n° 76. Elle nous a été envoyée par Jack G. Segers. Les carrés du jeu sont numérotés de gauche à droite et de haut en bas de 1 à 17. Cette solution est alors :

10-8-7-9-12-6-3-9-15-16-10-8-9-11-14-12-
6-5-8-2-1-7-9-◇-11-17-16-10-13-12-6-4-7-9-
10-8-2-3-9-15-12-6-9-11-10-8-9.

Au point milieu ◇, les jetons forment un motif symétrique. Cette solution serait due à H. E. Dudeney. De nombreux lecteurs du magazine *Scientific American* ont trouvé d'autres solutions élégantes en 46 coups. J. R. Lawson de Schenectady (N.Y.), âgé de 14 ans, a trouvé 48 solutions différentes en 46 coups. C. A. Dunning Jr, de Baltimore et F. B. Exner de Seattle ont donné des démonstrations du fait que le nombre minimum de coups était effectivement 46.

Math-Jeunes n° 80, 111–113, 1997

Histoires d'e

Pascal Dupont, *Fac. Univ. Sc. Agronomiques Gembloux*

Dans les cours d'analyse, le nombre e est parfois défini comme la limite de la suite

$$\left\langle 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots \right\rangle$$

c'est-à-dire

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et parfois comme la somme illimitée

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

L'équivalence de ces deux définitions, si elle n'est pas très compliquée à montrer, n'est pas non plus évidente. En outre, la plupart des textes d'analyse ne l'établissent pas directement : elle résulte par exemple, comme sous-produit, du développement de l'exponentielle en série de Mac-laurin. Cette courte note a pour objet de montrer, d'abord, que les deux définitions ont un sens, c'est-à-dire que la limite existe et que la série converge, et ensuite, que leurs valeurs coïncident. Elle est inspirée de [3], un petit livre peu connu, et cependant fort recommandable.

1. Posons, pour $n > 0$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et, pour faire joli, $a_0 = 1$. Le premier de nos buts est de montrer que la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Considérons également la série

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

c'est-à-dire (voir l'encadré « Les séries ») la suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Les séries
L'algèbre nous apprend ce qu'est la somme de deux nombres. Il est ensuite possible de définir, de proche en proche, des sommes de trois termes, de quatre termes, ..., et ainsi nous sommes à même d'additionner n'importe quel nombre fini de termes. Mais la somme d'une série, c'est-à-dire d'une infinité de termes, est une autre histoire ! La solution repose sur le concept de limite : il ne s'agit donc plus d'algèbre, mais d'analyse. Ainsi, pour définir la somme de la série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, *on calcule d'abord les sommes partielles* $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, *etc. ; ce qu'on appelle somme de la série est alors la limite de ces sommes partielles :* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. *Mais ceci nécessite des précautions : une limite, cela n'existe pas toujours ; donc les séries n'auront pas toutes une somme. Celles qui en ont une sont dites convergentes.*

Notre deuxième but est de montrer que cette suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi convergente ; notre troisième but est de montrer que les limites de ces deux suites sont les mêmes.

2. D'après le théorème du binôme,

$$a_n = \mathbf{C}_n^0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \mathbf{C}_n^1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \cdots + \mathbf{C}_n^n \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

où $\mathbf{C}_n^k$ est le coefficient binomial

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si $k \leqslant n$ et $\mathbf{C}_n^k = 0$ si $k > n$.

Si n et k sont deux naturels, posons donc

$$b_{n,k} = \frac{\mathbf{C}_n^k}{n^k},$$

Le symbole de sommation

Que signifie une construction telle que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,?$$

Tout simplement ceci : dans le terme général a_k, nous devons remplacer l'indice de sommation k successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux bornes indiquées, ici 1 et n ; ceci nous fournit successivement les termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qu'il ne nous reste plus qu'à additionner. Ainsi, l'expression ci-dessus ne représente rien d'autre que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Pour ceux qui ont la fibre informatique, on peut encore dire que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ est la valeur de la variable s après exécution du petit programme suivant :

$s \leftarrow 0$;
pour k **de** 1 **à** n, $s \leftarrow s + a_k$.

de sorte que

$$a_n = b_{n,0} + b_{n,1} + \cdots + b_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}.$$

Si $k = 0$, $b_{n,0} = 1$, tandis que si $k > 0$,

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= \frac{n\,(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!\,n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right); \end{aligned}$$

en particulier, $b_{n,k} = 0$ dès que $k > n$.

Suggestion : Le lecteur avisé et intéressé dressera une table à double entrée de ces nombres $b_{n,k}$ par exemple, pour n et k inférieurs ou égaux à 5 ou 6 ; il « sentira » ainsi beaucoup mieux la suite de l'argumentation. *La table est vraiment admirable, mais cette colonne est trop étroite pour que je puisse l'y consigner !*

Ces coefficients jouissent encore des propriétés suivantes :

(1) Pour tous n et k, $b_{n,k} \leqslant b_{n+1,k}$;

(2) Pour tous n et k, $b_{n,k} \leqslant \dfrac{1}{k!}$;

(3) Pour tout k, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n,k} = \dfrac{1}{k!}$.

Les deux premières propriétés découlent directement, lorsque $k > 0$, de ce que

$$1 - \frac{j}{n} \leqslant 1 - \frac{j}{n+1} \leqslant 1$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, et la troisième de ce que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1$$

pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

3. Comme chacun des termes de la série est positif, la suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'après la propriété (1) ci-dessus,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} b_{n+1,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k} = a_{n+1},$$

donc la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est également croissante.

D'après la propriété (2) ci-dessus, et en tenant compte que

$$k! = 2 \times 3 \times \cdots \times k \geqslant 2^{k-1}$$

pour tout $k > 0$: d'abord,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n\,;$$

ensuite, $$s_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \overset{(\star)}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

on a utilisé pour $(\star)$ la règle de sommation d'une suite géométrique

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}\,;$$

donc les suites $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ et $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées.

Or un théorème d'analyse affirme que :

> *Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée est convergente.*

On se rappelle que cette propriété distingue de manière essentielle les réels des rationnels ! Des deux observations précédentes, il résulte donc que ces deux suites sont convergentes ; nous noterons provisoirement :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Comme, pour tout n, $a_n \leqslant s_n \leqslant 3$, ces deux limites satisfont $a \leqslant s \leqslant 3$.

4. Introduisons encore

$$c_{n,m} = b_{n,0} + b_{n,1} + \cdots + b_{n,m}.$$

Ainsi, $a_n = c_{n,n}$; en fait, puisque $b_{n,k} = 0$ lorsque $k > n$, $a_n = c_{n,m}$ pour tout $m \geqslant n$; de là, puisque tous les $b_{n,k}$ sont positifs, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant c_{n,m}$.

Dès lors, en utilisant la propriété (3) plus haut, il vient :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty} c_{n,m} = \\ = \sum_{k=0}^{m} \lim_{n\to\infty} b_{n,k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m,$$

quel que soit m ; il en résulte que

$$a \geqslant \lim_{m\to\infty} s_m = s.$$

Ceci, avec l'inégalité en sens inverse établie plus haut, montre que $a = s$; depuis EULER, au dix-huitième siècle (à ce sujet, voir par exemple [1] ou, pour davantage de détails [2]), la valeur commune de ces deux limites est traditionnellement notée e, initiale de *exponentielle* – ou, comme de petits futés le font malicieusement remarquer, de *Euler* !

Bibliographie

[1] Stella BARUK, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Éd. du Seuil, Paris, 1992.

[2] Carl B. BOYER, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1985.

[3] Jacques DOUCHET, Bruno ZWAHLEN, *Calcul différentiel et intégral, 1 – Fonctions d'une variable réelle*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983.

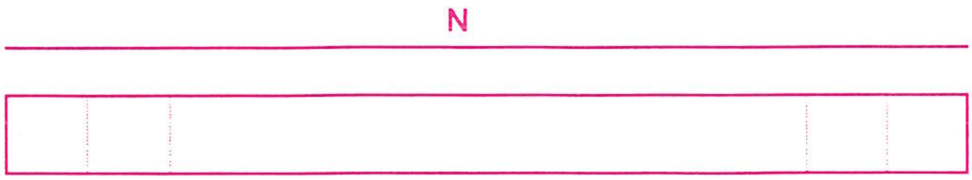
 Math-Jeunes n° 80, 114-118, 1997

La règle efficace (suite et fin)

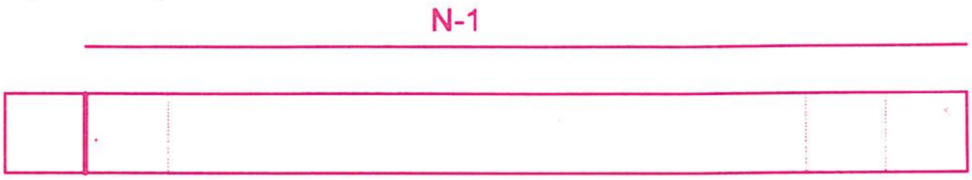
Jean-Michel Slowik, *Lycée d'Arras (France)*

5. À la recherche d'autres règles efficaces

Prenons une règle de longueur N.

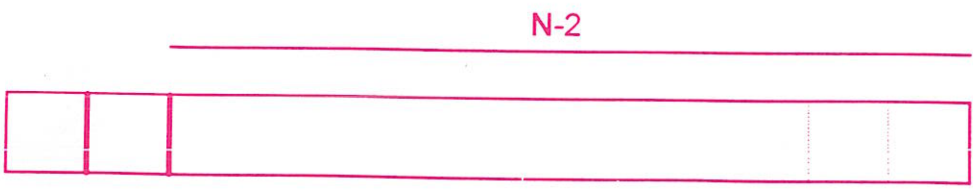


Si $N = 1$: *c'est une règle efficace.*
Si $N > 1$: il nous faut la longueur $N - 1$, quitte à retourner la règle, il faut placer une marque en première position.

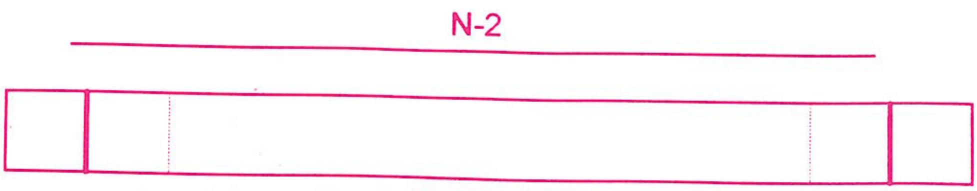


D'où la première régle :

Nous voyons apparaître les longueurs 1, $N - 1$, N.
Pour que ces trois longueurs soient différentes, il faut $N \geqslant 3$.
Si $N = 3$: on obtient les longueurs 1, 2, 3. *C'est une règle efficace.*
Si $N > 3$: $N - 2 > 1$, il nous faut alors placer la longueur $N - 2$. Plusieurs choix se présentent à nous :

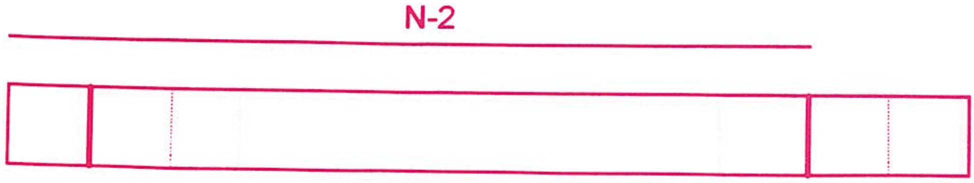
1. 

   Impossible ! On a deux fois la longueur 1.

2. 

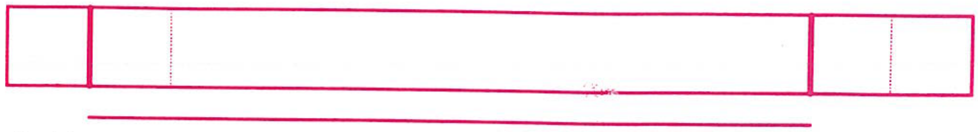
   Impossible ! On a deux fois la longueur 1.

3.



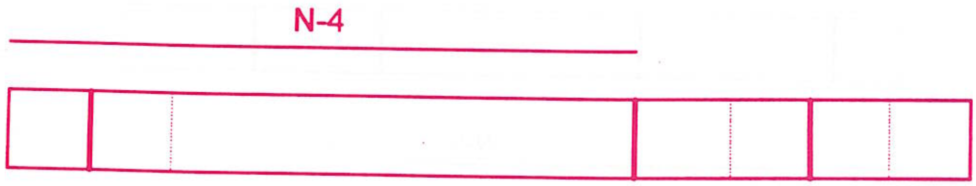
Ça, c'est bien !

D'où la nouvelle règle



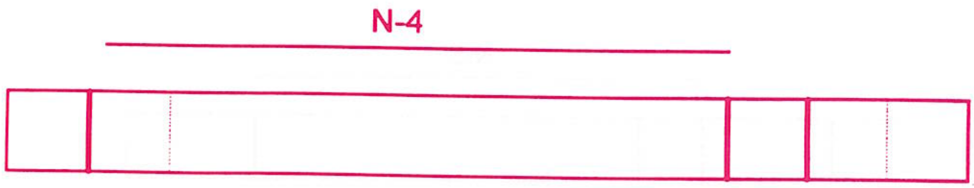
Regardons-la bien.
Les mesures apparentes sont 1, 2, $N-2$, $N-1$, N mais aussi $N-3$ ($\neq 0$). Pour qu'il n'y ait pas de répétition, il faut absolument que $N-3>2$, soit $N>5$.
$N=6$ convient. On trouve les longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6. *C'est une règle efficace.*
Supposons donc $N>6$.
On obtient les longueurs 1, 2, $N-3$, $N-2$, $N-1$, N.
Mais $N-4>2$, il est donc nécessaire de placer cette longueur qui s'intercale entre 2 et $N-3$.
Il y a beaucoup de cas à étudier.

1.



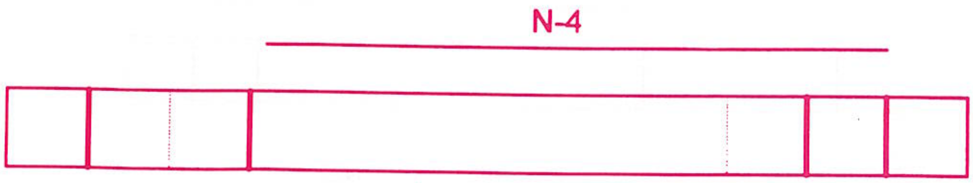
Impossible ! On a deux fois la longueur 2.

2.



Impossible ! On a deux fois la longueur 1.

3.



Impossible ! On a deux fois la longueur 1.

4.

Et tout paraît bien.

Voilà la règle obtenue :

Regardons-la bien. On voit les longueurs : 1, 2, 3, 4, $N-4$, $N-3$, $N-2$, $N-1$, N.

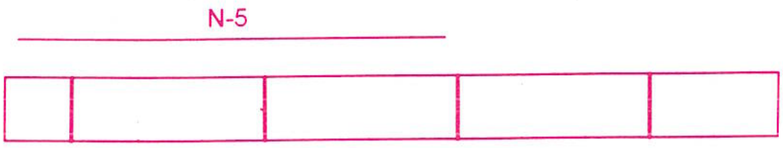
Mais voilà qu'apparaît $N-6$! (comme $N > 6$, $N-6 \neq 0$)

On a donc les longueurs : 1, 2, 3, 4, $N-6$, $N-4$, $N-3$, $N-2$, $N-1$, N. Pour qu'elles soient toutes différentes, il faut $N-6 > 4$.

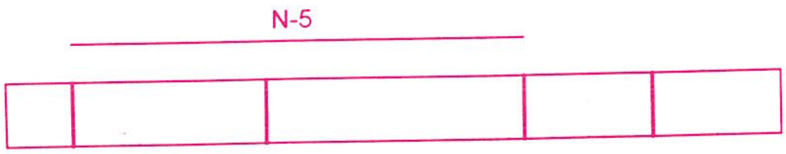
Soit $N > 10$. Plus la peine de chercher une règle efficace de longueur inférieure à 10 !

Mais alors, mais alors, il manque $N-5$!!!

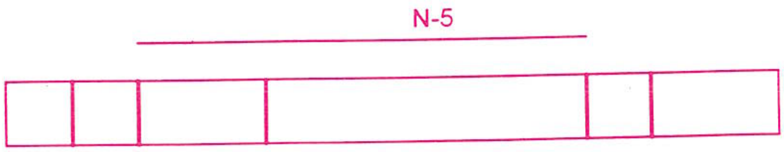
Comment placer $N-5$? Essayons :



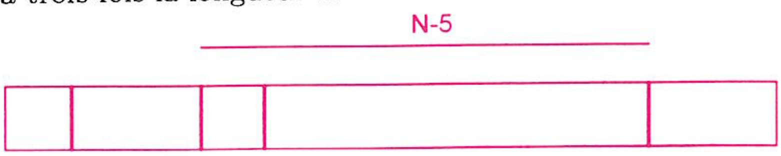
Impossible ! On a deux fois la longueur 3.



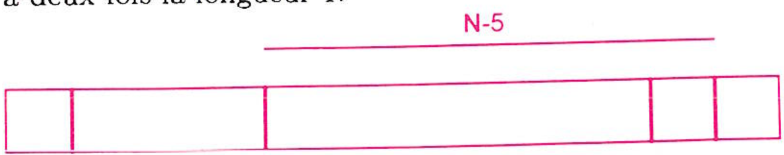
Impossible ! On a deux fois la longueur 2.



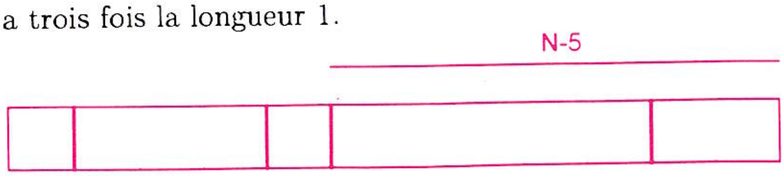
Impossible ! On a trois fois la longueur 1.



Impossible ! On a deux fois la longueur 1.



Impossible ! On a trois fois la longueur 1.



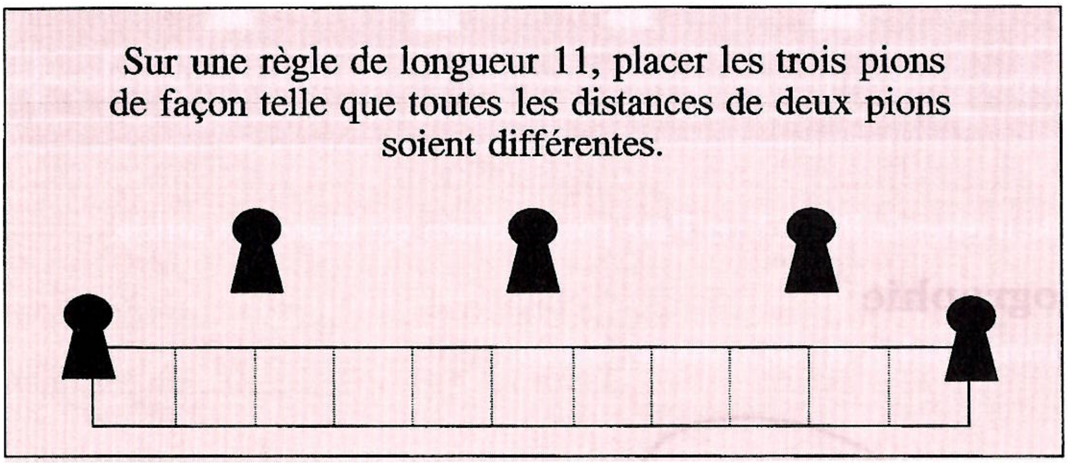
Impossible ! On a deux fois la longueur 1.

Et tout s'écroule ! On ne peut pas placer $N-5$.

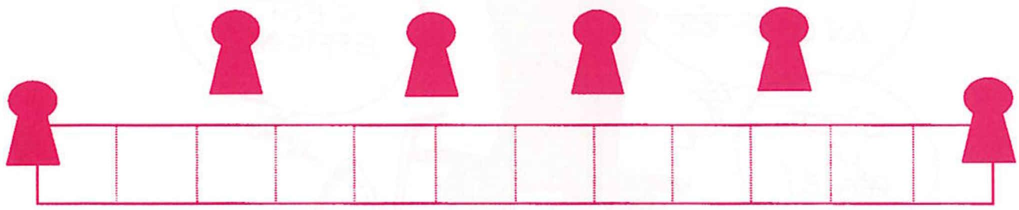
Il n'existe que trois règles efficaces. Elles sont de longueur 1, 3 et 6.

6. Epilogue

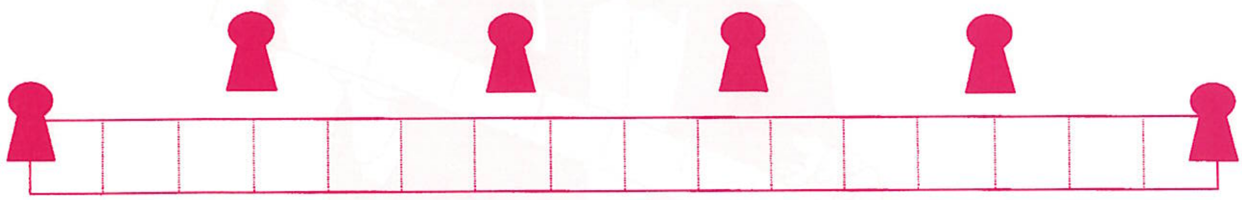
On a vu qu'il était impossible de placer trois marques sur une règle de longueur 10, de manière telle que toutes les distances soient deux à deux différentes.
Mais qu'en est-il sur une règle de longueur 11 ?
À vous de résoudre ce premier problème :



On peut poser le même problème avec 4 pions à placer sur une règle de longueur 12.



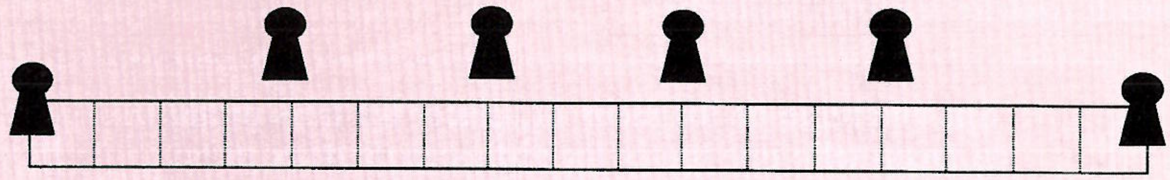
Ce problème n'a pas de solution car avec quatre marques, on obtient 15 mesures. Pour qu'elles soient différentes, il faut que la règle soit au moins de longueur 15 ! 15 ne convient pas, la règle serait efficace. Il faut tenter 16.



Tous les nombres entre 1 et 16 sont atteints sauf un !
De toute façon, si x ($x \neq 8$) était atteinte, $16 - x$ le serait aussi. Toutes les mesures se regrouperaient par deux et on obtiendrait un nombre pair de mesures. Comme on en veut un nombre impair (15), il y a un problème ... sauf si on coupe au milieu ...

Mais alors il apparaît deux longueurs 8, c'est impossible ! 16 ne convient pas.
Et 17 ?
D'où le second problème :

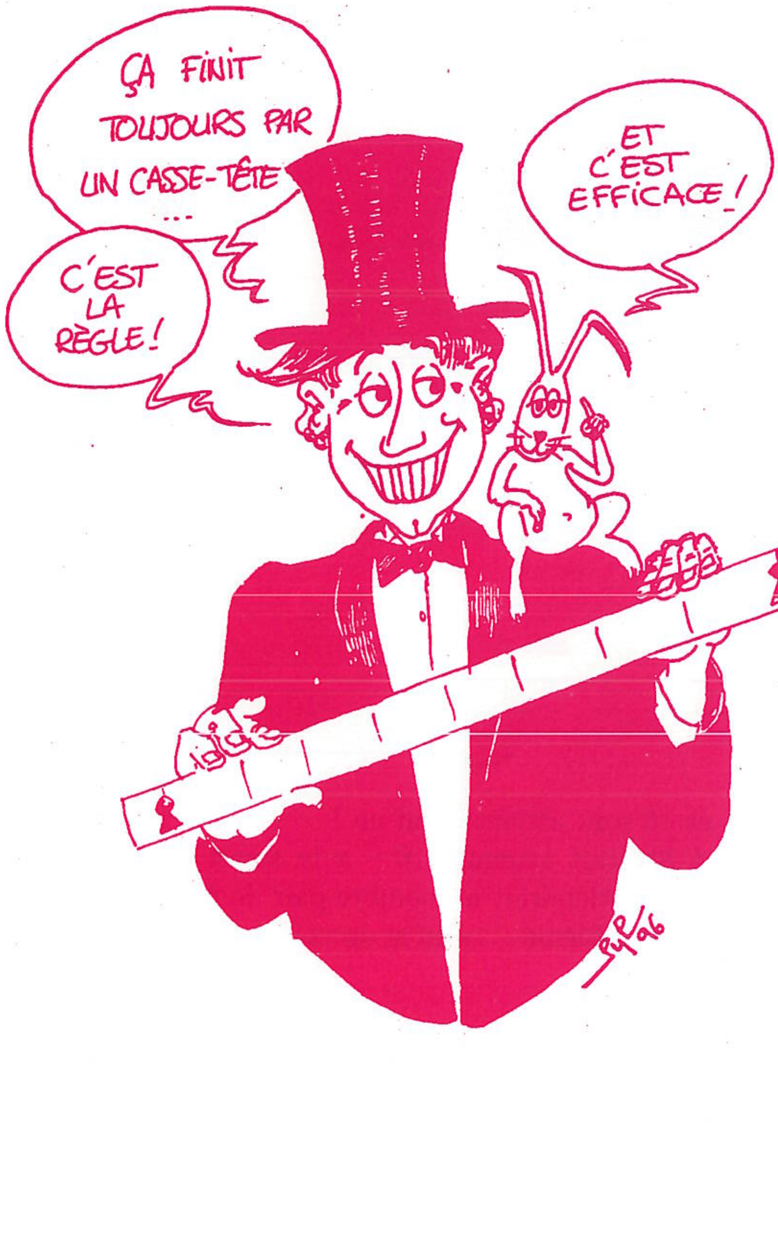
Sur une règle de longueur 17, placer les quatre pions de façon telle que toutes les distances de deux pions soient différentes.



La rédaction remercie Pierre Yves PIRA pour le dessin qui illustre cet article.

Bibliographie

Mathematical puzzling, A. GARDINARD, Oxford.



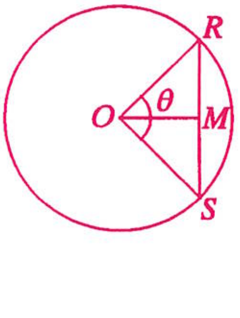
Le paradoxe de Bertrand n'a rien de paradoxal

José Paris, *Institut de Statistique, UCL, Louvain-La-Neuve*

Le paradoxe de Bertrand est un problème de probabilité géométrique qui a fait couler beaucoup d'encre. Il a été formulé la première fois à une époque où la théorie des probabilités ne reposait pas sur les bases solides qu'on lui connaît aujourd'hui, ce qui explique beaucoup de choses. Je me propose de montrer ici qu'il ne comporte en réalité qu'une seule question. Comme dans tout problème concret, pour la traiter, on doit formuler une hypothèse de travail. Sur la base de celle-ci, et quelle que soit la démarche utilisée pour trouver la solution à la question posée, on obtient toujours la même valeur numérique pour la probabilité considérée, montrant ainsi que le problème ne contient aucun paradoxe. Pour vérifier cette affirmation, on doit combiner la géométrie, la trigonométrie et la technique du changement de variable en probabilité. Comme l'a fait remarquer Jean WILMET, les possibilités utilisées pour aborder le problème correspondent aux manières différentes de définir la corde en géométrie.

Ce problème classique connaît plusieurs versions de difficulté comparable. Celle décrite ci-dessous était présentée par Monsieur BAPTIST dans son cours aux étudiants de sciences actuarielles sous la forme « Quelle est la probabilité que la longueur d'une corde prise au hasard dans un cercle soit inférieure au rayon du cercle ? ».

Pour la simplicité, celui-ci sera pris égal à l'unité, ce qui ne change rien au problème.



Géométriquement, le problème de la longueur de la corde RS peut être abordé de plusieurs manières :

1. à partir de l'angle θ qui sous-tend la corde, mesuré au centre du cercle,
2. en considérant la distance $|OM|$ du point milieu de la corde au centre du cercle,
3. en déterminant la longueur de la corde à partir de son point milieu,
4. en considérant le cercle qui contient les points milieux des cordes non acceptables.

Nous allons maintenant montrer que, quelle que soit la démarche suivie, la réponse reste la même quand l'hypothèse de base reste la même. Mais nous verrons également que toutes les hypothèses de base ne sont pas équivalentes. Nous traiterons le problème en supposant que

> L'angle θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \pi]$.

Cela signifie que sa densité de probabilité est constante sur cet intervalle, soit

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'objectif est atteint si $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$. La probabilité qu'il en soit ainsi est

$$P[0 < \theta < \frac{\pi}{3}] = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\pi} = \frac{1}{\pi}[\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Si maintenant nous prenons la distance $|OM|$ comme variable aléatoire X, nous avons :

$$|OM| = X = \cos\frac{\theta}{2}$$

Par la formule du changement de variable, nous avons :

$$P(X \leqslant x)$$

$$= P[\cos\tfrac{\theta}{2} \leqslant x] = P[\theta \geqslant 2\arccos x]$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}\arccos x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

L'objectif est atteint lorsque $\frac{\sqrt{3}}{2} < |OM| < 1$ et la probabilité qu'il en soit ainsi est

$$P\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2} < X < 1\right]$$
$$= 1 - \tfrac{2}{\pi}\arccos 1 - 1 + \tfrac{2}{\pi}\arccos\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{3}$$

Si on cherche la densité de X en dérivant (1), on trouve :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que cette densité n'est plus constante. Au contraire, elle est d'autant plus grande que x est proche de 1 (soit θ proche de 0).

Enfin si nous prenons la longueur de la corde comme variable aléatoire Y, nous avons

$$|RS| = Y = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

Par la formule du changement de variable, nous avons

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant y) &= P[2\sin\tfrac{\theta}{2} \leqslant y] \\ &= P[\theta \leqslant 2\arcsin\tfrac{y}{2}] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{y}{2} & \text{si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

L'objectif est atteint lorsque $0 < |RS| < 1$ et la probabilité qu'il en soit ainsi est

$$P[0 < Y < 1] = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Si on cherche la densité de Y en dérivant (2), on trouve :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} & \text{si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la densité est d'autant plus grande que y est proche de 2 (soit θ proche de π).

Finalement, l'aire du cercle de rayon $|OM|$ est $\pi \cdot |OM|^2 = \pi \cdot X^2$. Le point M milieu de la corde est adéquat si $\frac{3}{4} < X^2 < 1$ soit lorsque $\frac{\sqrt{3}}{2} < X < 1$ et la probabilité qu'il en soit ainsi est encore évidemment la même.

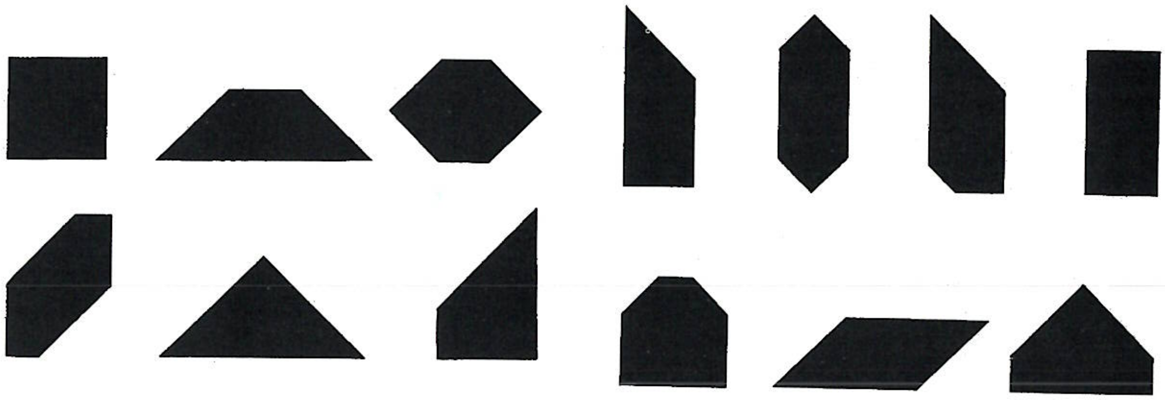
Les courageux qui ont bien compris le mécanisme et reprendront le problème en supposant que X est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ trouveront la réponse $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ceux qui supposeront que Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2]$ trouveront la réponse $\frac{1}{2}$. Ceux qui supposeront que le point M suit une loi uniforme (à deux dimensions) dans le disque trouveront la réponse $\frac{1}{4}$ (on notera, en particulier, que l'aire du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ égale, dans ce cas, celle de la couronne délimitée par le cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et celui de rayon 1).

On voit donc que le problème ne contient en lui-même aucun paradoxe. C'est la manière inadéquate de le traiter qui pourrait le laisser croire.

Quand on vous dit que la probabilité de parcourir en un temps donné la distance qui sépare votre domicile de votre lieu de travail varie avec le moyen de locomotion utilisé, vous n'êtes pas surpris. *Mutadis mutandis*, on rencontre la même chose dans le paradoxe de Bertrand.

Tangram

Voici les treize Tangrams convexes différents dont nous avons parlé dans le numéro 77 :



Et enfin, voici les solutions des Tangrams proposés :