Math-Jeunes

19e année
Octobre 1997 – n°81
Bureau de dépôt : 7000 Mons I

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, F.Pourbaix, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux et F.Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).
Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :
Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons
Tél. 32-(0)65-373729
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 81 Dix-neuvième année 1997

Math-Jeunes

Michel Ballieu, **Évariste Galois** **2**

6 *Geoffrey Delcroix,* **Que serais-je sans mes racines ?**

BD **8**

10 *Frédéric Pourbaix,* **Le codage de Ham et Hony**

Rallye Problèmes **11**

13 *Claude Villers* **Pair ou impair : c'est super ! ! ! (1)**

Évariste Galois

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Évariste GALOIS est né à Bourg-la-Reine, près de Paris, le 25 octobre 1811. La vie de ce brillant mathématicien sera très courte, puisqu'il meurt à Paris le 31 mai 1832.

Il est célèbre pour sa contribution à la théorie des groupes. Un groupe est un ensemble muni d'une opération et qui jouit de propriétés particulières. GALOIS s'est intéressé plus particulièrement aux groupes de permutations, comme nous le verrons plus loin. Son père, Nicolas Gabriel Galois et sa mère Adelaïde Marie Demante avaient tous deux reçu une bonne éducation en philosophie, littérature classique et religion. Mais on ne trouve chez eux aucun signe d'activité mathématique. Jusqu'à l'âge de douze ans, sa mère sera son seul professeur. Elle lui enseignera le grec, le latin et la religion par le biais de laquelle elle lui communiquera son propre scepticisme. Nicolas Gabriel était un homme public important; il sera élu maire de Bourg-la-Reine en 1815.

La vie de GALOIS se déroule dans une France très troublée politiquement. Cela aura une influence non négligeable sur son destin. Après la prise de La Bastille le 14 juillet 1789, la monarchie de Louis XVI est mise en difficulté. Le roi sera finalement exécuté le 21 janvier 1793. Suit alors un régime de terreur avec énormément de jugements politiques. La France connaît enfin des temps meilleurs lorsque ses armées, sous le commandement de Napoléon Bonaparte remporte victoire sur victoire. Napoléon devient Premier Consul en 1800 et Empereur en 1804. En 1811, année de la naissance de GALOIS, Napoléon est au faîte de sa puissance mais 1815 voit la fin du règne de l'Empereur. La campagne ratée de Russie en 1812 est suivie d'autres défaites : la coalition (Russie, Angleterre, Prusse, Autriche...) entre à Paris le 31 mars 1814. Napoléon est contraint à abdiquer le 6 avril et Louis XVIII est installé roi par la coalition. L'année 1815 voit la fameuse campagne des Cents Jours : Napoléon entre dans Paris le 20 mars mais est vaincu à Waterloo le 18 juin et abdique une seconde fois le 22. Louis XVIII est réinstallé roi. Il meurt en septembre 1824; Charles X devient le nouveau roi.

Le 6 octobre 1823, GALOIS est inscrit au célèbre Lycée Louis-le-Grand, en quatrième année. Durant sa première année, il y eut une petite rebellion et quarante élèves furent renvoyés. GALOIS n'en faisait pas partie et durant l'année scolaire 1824-25, ses résultats furent bons. Il remporta plusieurs prix. Cependant, en 1826, il dut redoubler, sa rhétorique n'ayant pas été jugée assez bonne.

Février 1827 marque un tournant important dans sa vie : il s'inscrit dans sa première classe de mathématiques celle de Monsieur Vernier. Il est très vite absorbé par les mathématiques et son directeur d'études écrit : *C'est la passion pour les mathématiques qui le domine; je pense que le mieux pour lui serait que ses parents lui permettent de n'étudier que cela; il perd son temps ici et ne fait rien d'autre que tourmenter ses professeurs et ramasser des punitions.*

Les rapports d'école sur GALOIS commencent alors à le décrire comme singulier, bizarre, orginal et renfermé. Monsieur Vernier disait de lui : *Intelligence, progrès sensible, mais pas assez de méthode.*

En 1828, GALOIS se présente aux examens d'entrée à l'École Polytechnique mais échoue. C'était l'université dominante de Paris et il souhaitait y entrer non seulement pour des raisons académiques mais sans doute aussi à cause des mouvements politiques qui existaient au sein des étudiants. Il voulait suivre l'exemple de ses parents en étant un fervent républicain.

De retour à Louis-le-Grand, il entre dans la classe de mathématiques de Louis Paul Émile RICHARD (1795 - 1849), un excellent mathématicien qui fut aussi le professeur de LE VERRIER, SERRET et HERMITE. Il n'avait pu, comme il le souhaitait, faire une carrière militaire à cause d'un accident de jeunesse qui l'avait handicapé. Il est à noter qu'à cette époque en France, être éminent mathématicien (géomètre entre autres) et poursuivre une carrière militaire allaient souvent de pair. GALOIS travaillait cependant de plus en plus à ses propres recherches et de moins en moins à son travail scolaire. Il étudie à cette époque la *Géométrie* de LEGENDRE et les traités de LAGRANGE. RICHARD dit de lui : *Cet étudiant travaille seulement dans les plus hautes sphères des mathématiques.*

En avril 1829, GALOIS voit publier son premier article mathématique (sur les fractions continues) dans les *Annales de Mathématiques*. Le 25 mai et le premier juin, il soumet des articles sur la solution algébrique d'équations à l'Académie des Sciences. CAUCHY est désigné comme referee (c'est-à-dire la personne qui décide si oui ou non l'article vaut la peine d'être publié).

Le 2 juillet 1829, son père se suicide; cet homme d'une bonne nature n'a pu supporter la cabale fomentée par le curé de Bourg-la-Reine contre son maire. GALOIS en est très affecté. Quelques semaines plus tard, il se présente pour la seconde fois à l'examen d'entrée en Polytechnique et pour la seconde fois, il échoue, en partie à cause du fait qu'il passe ces examens dans des conditions très mauvaises liées à la mort de son père, en partie parce qu'il est maladroit dans la communication de ses idées mathématiques les plus profondes. Il se résout alors à fréquenter l'École Normale qui était une annexe de Louis-le-Grand, et à faire ce qu'il faut pour obtenir son Baccalauréat, ce qu'il aurait pu éviter en entrant à l'École Polytechnique. Il le passe et reçoit son diplôme le 29 décembre 1829. Le rapport de son examinateur mentionne : *Cet élève est parfois obscur dans l'expression de ses idées, mais il est intelligent et fait preuve d'un remarquable esprit de recherche.* Son examinateur en littérature est d'un tout autre avis : *C'est le seul étudiant qui m'a répondu pauvrement, il ne connaît absolument rien. On m'avait dit que cet étudiant avait des capacités extraordinaires en mathématiques. Cela m'étonne beaucoup, car après son examen, je le croyais être de petite intelligence.*

GALOIS envoie à CAUCHY un autre travail sur la théorie des équations mais apprend par le *Bulletin de Férussac* qu'un article posthume d'ABEL a une intersection non vide avec ce qu'il a écrit. Il prend alors l'avis de CAUCHY et lui soumet en février 1830 un nouvel article sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. Le papier est envoyé à FOURIER, secrétaire de l'Académie pour participer au Grand Prix de Mathématiques mais FOURIER meurt en avril 1830 et le travail de GALOIS ne fut jamais retrouvé.

GALOIS a également travaillé sur la théorie des fonctions elliptiques et sur les intégrales abéliennes. Avec l'appui de Jacques STURM, il publie trois articles dans le *Bulletin de Férussac* en avril 1830. En juillet 1830, Charles X a fui la France ; il y a des émeutes dans les rues de Paris et le directeur de l'École Normale, Monsieur Guigniault enferme les étudiants pour les empêcher de prendre part à ces émeutes. GALOIS tente d'escalader le mur pour se joindre au mouvement mais échoue. En décembre 1830, Monsieur Guigniault écrit des articles de presse attaquant les étudiants et GALOIS lui répond dans la *Gazette des Écoles*, lui reprochant la séquestration des étudiants. Cela lui vaut le renvoi et il rallie alors l'Artillerie de la Garde Nationale, une branche républicaine de la milice. Le 31 décembre 1830, l'Artillerie de la Garde Nationale est abolie par décret royal : le roi Louis-Philippe la ressent comme une menace contre le trône.

De son vivant, il publie encore deux petits articles, l'un en décembre 1830 dans les *Annales de Gergonne*, l'autre le 2 janvier 1831 dans la *Gazette des Écoles*.

À la fin de 1830, dix-neuf officiers de l'Artillerie de la Garde Nationale avaient été arrêtés et inculpés de conspiration visant à faire tomber le gouvernement. Ils furent finalement acquittés et le 9 mai 1831, deux cents républicains se rassemblent pour fêter l'événement. Durant le repas, GALOIS aurait levé son verre et l'épée nue en main, proféré des menaces à l'encontre du roi Louis-Philippe, ce qui lui vaut d'être arrêté et incarcéré à la prison Sainte-Pélagie. Il en sort, mais le 14 juillet, jour anniversaire de la prise de la Bastille, il est à nouveau arrêté pour port de l'uniforme de l'Artillerie de la Garde Nationale qui était devenue illégale. Il portait également un fusil chargé, plusieurs pistolets et une épée. Il est ainsi renvoyé à Sainte-Pélagie. Il y reçoit une lettre de POISSON lui signifiant que l'argument de son mémoire n'est pas assez clair pour pouvoir juger de sa rigueur. En mars 1832, une épidémie de choléra oblige le transfert des prisonniers à la pension Sieur Faultrier. Là, apparemment, GALOIS tombe amoureux de la fille du médecin qui y réside, Stéphanie-Félicie Poterin du Motel. Une fois relâché, GALOIS lui écrit plusieurs lettres mais elle tente de prendre ses distances. Le 30 mai, il est amené à se battre en duel avec Pescheux d'Herbinville ; la raison de ce duel n'est pas claire mais elle est certainement liée à Stéphanie.

En marge du manuscrit que GALOIS écrivit la nuit précédant le duel, on peut lire la note suivante : *Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai plus le temps (Note de l'A.)* C'est sans doute ce qui a donné naissance à la légende selon laquelle il aurait passé sa dernière nuit à écrire tout ce qu'il savait en théorie des groupes.

Lors du duel, GALOIS fut blessé et abandonné par d'Herbinville et ses propres seconds ; il fut trouvé par un paysan et mourut à l'hôpital Cochin le 31 mai. Ses obsèques eurent lieu le 2 juin. Ce fut le foyer d'un ralliement républicain suivi d'émeutes qui durèrent plusieurs jours.

Le frère de GALOIS et son ami Chevalier envoyèrent ses écrits mathématiques à GAUSS, JACOBI et d'autres. C'était le vœu de GALOIS que JACOBI et GAUSS donnent leur avis sur son travail. On n'a pas de témoignage sur les commentaires que l'un et l'autre ont pu faire. Cependant, les écrits parvinrent à LIOUVILLE qui, en septembre 1843, annonça à l'Académie qu'il avait trouvé dans les manuscrits de GALOIS une solution concise *aussi correcte qu'elle n'est profonde à ce problème adorable : étant donnée une équation irréductible de degré premier, savoir si oui ou non elle est soluble par radicaux*. LIOUVILLE a publié ces papiers de GALOIS dans son *Journal* en 1846.

On ne peut pas vraiment dire que la théorie de GALOIS soit abordable par un élève du secondaire, mais il est cependant possible de comprendre ce qu'elle a apporté de neuf à la science des équations. L'histoire des équations du second degré remonte aux civilisations qui se sont succédé en Mésopotamie, cette zone qui s'étend entre le Tigre et l'Euphrate. Les problèmes étaient écrits en cunéiforme sur des tablettes d'argile. On peut dater des énoncés conduisant à une équation du second degré aux environs de 2 000 avant Jésus-Christ. En ce qui concerne les équations des troisième et quatrième degrés, il faudra attendre le seizième siècle pour obtenir des formules qui sont associées à des noms tels que Scipio DEL FERRO, Nicolo TARTAGLIA, Jérôme CARDAN, ...

Pour les équations de degré supérieur à quatre (cinq, six, ...), même si de grands mathématiciens tels EULER se sont penchés là-dessus, il faudra attendre GALOIS pour avoir une réponse tout à fait générale. Il a l'idée d'associer aux racines de l'équation un certain ensemble de permutations de ces racines, ensemble qui a les propriétés de groupe (qui porte aujourd'hui le nom de *groupe de Galois de l'équation donnée*) Le théorème qu'il parvient à démontrer est le suivant : *Pour qu'une* *équation algébrique soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que son groupe de Galois soit résoluble.* Or, on peut montrer que pour $n > 4$, aucun groupe de Galois n'est résoluble et il s'ensuit donc qu'aucune équation générale de degré supérieur ou égal à cinq n'est résoluble algébriquement. Comment fait-on alors ? Tout simplement, on utilise des techniques d'*approximations successives* dont ton professeur de mathématiques te parlera certainement dans le cadre du cours de cinquième année.

Bibliographie

[1] Robert BOURGNE et J.-P. AZRA, *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1962, ISBN 2-04-002599-5 ou 2-04-008276-X.

[2] Carl B. BOYER, Uta C. MERZBACH, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1989, ISBN 0-471-50357-6.

[3] Howard EVES, *Great Moments in Mathematics (after 1650)*, The Dolciani Mathematical Expositions (nr. seven), published ans distributed by the Mathematical Association of America, 1983, ISBN 0-88385-311-6.

[4] Morris KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (3 vol.), Oxford University Press, 1972, ISBN 0-19-506135-7, 0-19-506136-5, 0-19-506137-3.

[5] Norreddine MAHAMMED, *Sur la résolution des équations algébriques*, IREM de Lille, Novembre 1995.

[6] D.E. SMITH, *History of Mathematics* (2 vol.), Dover Publications, Inc., 1958, ISBN 0-486-20429-4, 0-486-20430-8.

[7] Ian STEWART, *Les Mathématiques*, Pour la Science, diffusion Belin, 1989, ISBN 2-9029-1871-2.

[8] Dirk J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1987, ISBN 0-486-60255-9.

[9] *The MacTutor History of Mathematics Archive*, adresse internet http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Que serais-je sans mes racines ?

Geoffrey Delcroix, *Université de Mons Hainaut*

1. Racine cubique

Pour extraire la racine cubique d'un cube parfait, il suffit de mémoriser le tableau suivant :

0	a	pour cube	0
1	a	pour cube	1
2	a	pour cube	8
3	a	pour cube	27
4	a	pour cube	64
5	a	pour cube	125
6	a	pour cube	216
7	a	pour cube	343
8	a	pour cube	512
9	a	pour cube	729

On en déduit donc qu'un cube se terminant par 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 correspond à une racine cubique se terminant par le **même chiffre**, tandis qu'un cube se terminant par 2, 3, 7 ou 8 correspond à une racine cubique se terminant par **10 moins ce chiffre**, c'est-à-dire respectivement par 8, 7, 3 ou 2.

Exemples

(a) Soit à extraire la racine cubique de 636 056. On scinde ce nombre en deux parties. Pour déterminer le chiffre des dizaines, on recherche le cube juste inférieur aux milliers (il y a ici 636 milliers) ; en l'occurence, c'est 512 qui correspond à un chiffre des dizaines de 8. Pour l'unité, il suffit d'appliquer la règle susmentionnée, à savoir : le cube se termine par 6 qui correspond à la racine cubique 6. La réponse est donc **86**.

(b) Pour extraire la racine cubique de 1 061 208, on scinde encore le nombre en deux parties (la première étant ses trois derniers chiffres et la seconde, ceux qui restent). On cherche le cube juste inférieur à 1 061 ; en l'occurence, c'est 1 000 qui correspond à un chiffre des centaines de 1 et à un chiffre des dizaines de 0 (puisque $10^3 = 1\,000$) ; pour l'unité, le cube se terminant par 8, cela correspond à la racine cubique 2 et la réponse est donc **102**.

2. Racine cinquième

L'extraction de la racine cinquième d'une cinquième puissance parfaite est tout à fait simple. Afin d'y parvenir, il suffit de mémoriser à nouveau un petit tableau :

10	$\leftrightarrow$	100 000
20	$\leftrightarrow$	3 millions
30	$\leftrightarrow$	24 millions
40	$\leftrightarrow$	100 millions
50	$\leftrightarrow$	300 millions
60	$\leftrightarrow$	777 millions
70	$\leftrightarrow$	1,6 milliard
80	$\leftrightarrow$	3,2 milliards
90	$\leftrightarrow$	5,9 milliards
100	$\leftrightarrow$	10 milliards

Exemples

(a) Soit à extraire la racine cinquième de 69 343 957. Pour chaque résolution de ce type de problème, il faudra prendre la cinquième puissance du tableau se trouvant juste avant le nombre dont il faut extraire la racine cinquième. Ici, le nombre est 69 343 957. Il faudra donc prendre 24 millions ; on observe, dans le tableau, que cela correspond à 30. Pour obtenir le chiffre des unités, il suffit de prendre l'unité du nombre 69 343 957, c'est-à-dire 7 car celui-ci correspond toujours au chiffre des unités de la racine. On trouve donc **37**.

(b) Cherchons maintenant la racine cinquième de 503 284 375. Opérons de la même manière que ci-dessus :

- prenons la cinquième puissance juste en dessous ; c'est 300 millions (voir tableau) ;
- ces 300 millions correspondent à 50 ;
- l'unité de 503 284 375 est 5 ;
- le résultat est donc **55**.

3. Racine carrée

Pour extraire la racine carrée d'un carré parfait inférieur à 1 000 000, il existe également une technique efficace.

Exemples

(a) Soit à extraire la racine carrée de 142 129. Scindons encore le nombre en deux parties, mais ici, la première partie est constituée des deux derniers chiffres du nombre (29). Pour déterminer les dizaines, il suffit de trouver le carré parfait juste inférieur à 1 421 (qui constitue la seconde partie du nombre). Ici, c'est 1 369 dont la racine carrée vaut 37. Pour obtenir le chiffre des unités, on fait appel au tableau suivant, qui fait correspondre aux nombres de 0 à 9 le dernier chiffre de leurs carrés :

Nombre	Dernier chiffre de son carré
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

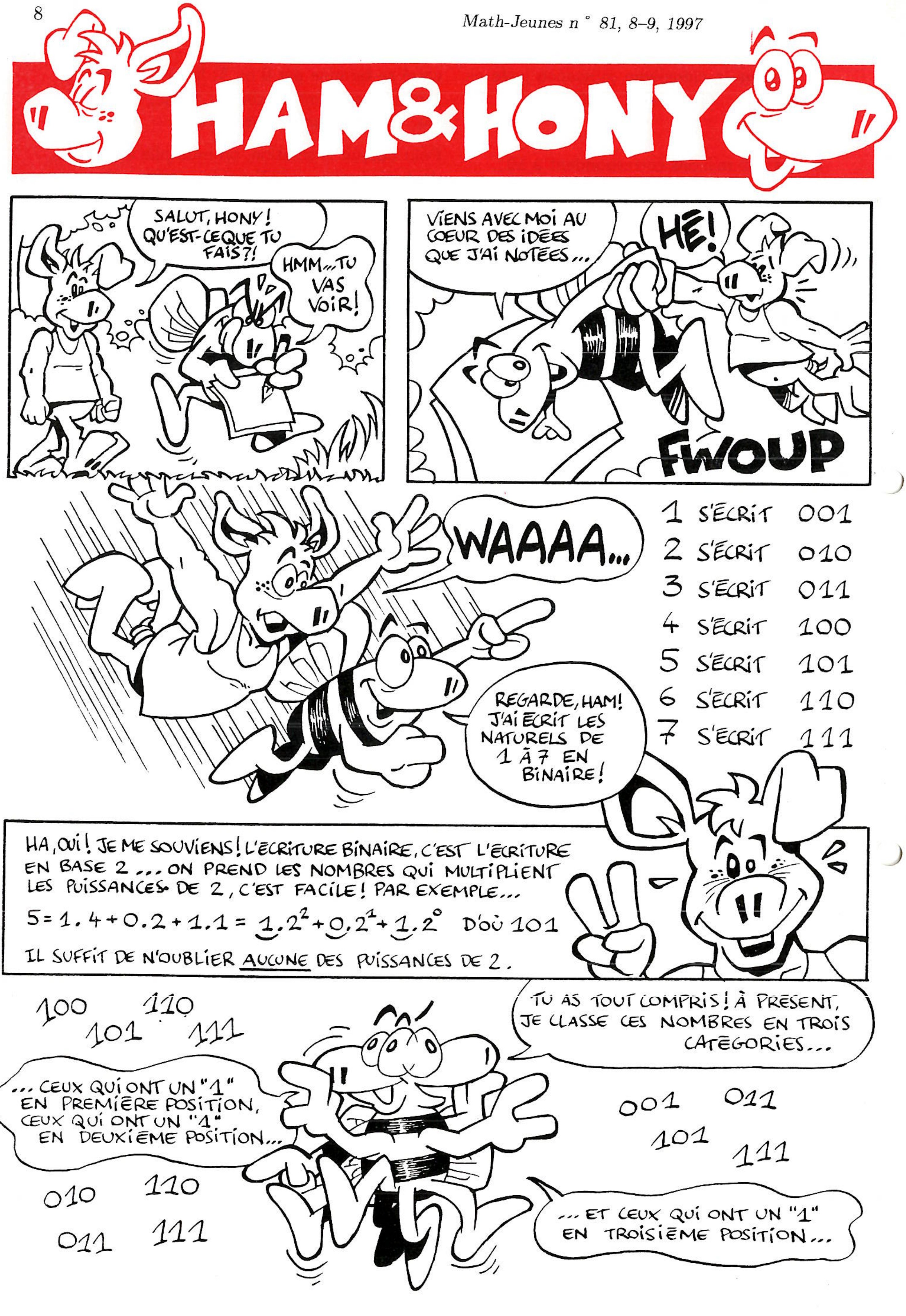
On en déduit donc que si le dernier chiffre du carré est 1, 4, 6 ou 9, le dernier chiffre de la racine carrée sera respectivement 1 ou 9, 2 ou 8, 4 ou 6, 3 ou 7. Et si le dernier chiffre du carré se termine par 0 ou 5, la racine carrée se termine par le même chiffre. Donc, dans notre cas, il y a hésitation entre 3 et 7.

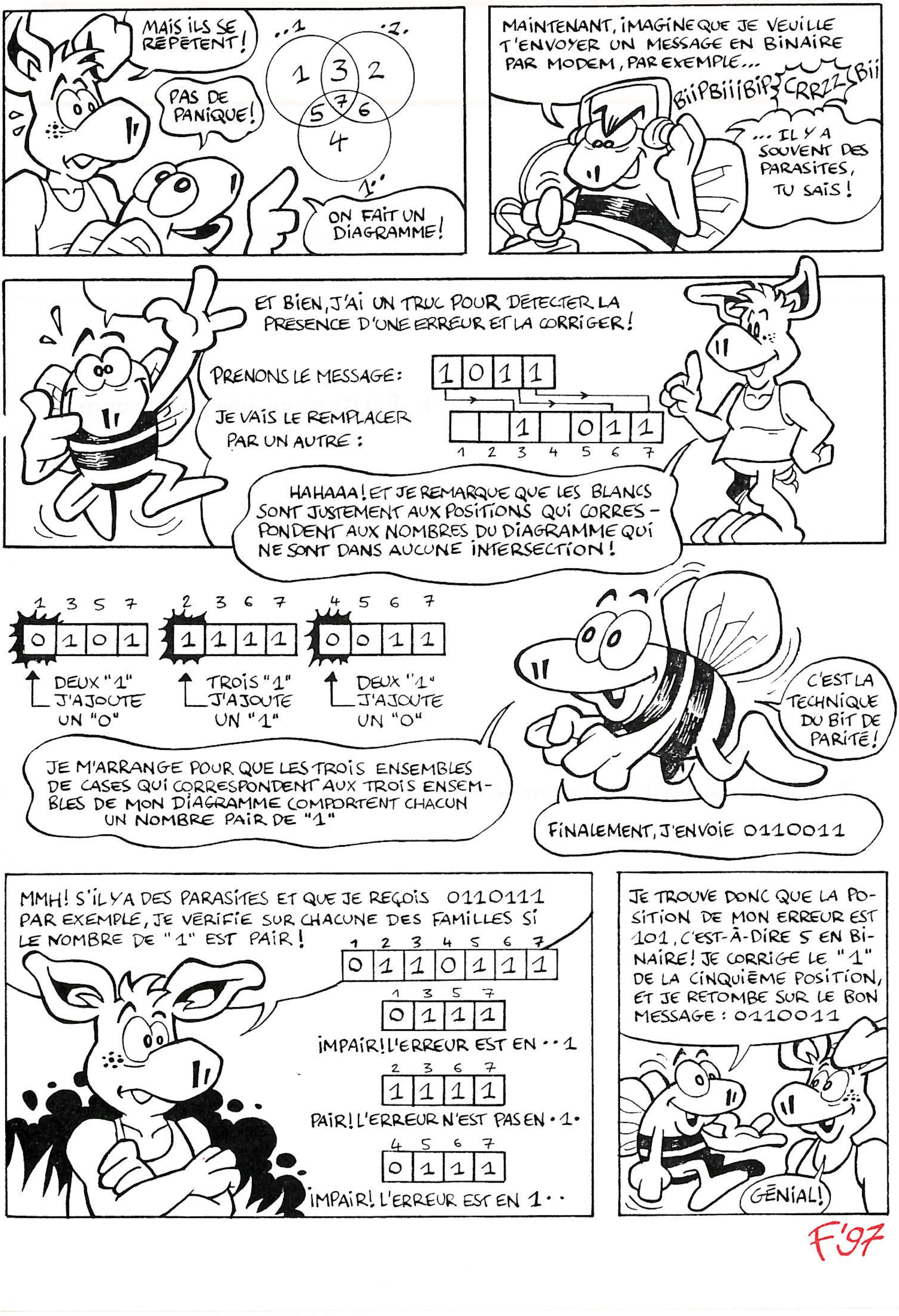
Pour obtenir la solution, on multiplie le nombre de dizaines obtenu (37) par le nombre entier qui lui est juste supérieur (37×38), ce qui revient à ajouter le nombre à son carré : $1\,369 + 37 = 1\,406$. On compare ce résultat à 1 421 ; s'il lui est inférieur, on prend le plus grand des deux chiffres entre lesquels on hésitait, sinon, le plus petit. Dans notre cas, 1 406 étant inférieur à 1 421, nous optons pour le plus grand des deux chiffres, à savoir 7. Le résultat est donc ici **377**.

(b) Cherchons la racine carrée de 186 624. Opérons de la même manière que ci-dessus :

- les deux parties sont 1 866 et 24 ;
- le carré parfait juste inférieur à 1 866 est 1 849 ;
- la racine carrée de 1 849 vaut 43 ;
- le chiffre des unités du nombre étant 4, pour la racine, il y a hésitation entre 2 et 8 ;
- $43 \times 44 = 1\,892$
- puisque $1\,892 > 1\,866$, on prend le plus petit, à savoir 2 ;
- le résultat est donc **432**.

Je désire remercier tout particulièrement mon professeur d'analyse et de méthodologie, Monsieur Guy Noël pour ses remarques et l'apport de son expérience à la réalisation de cet article.


HAM & HONY
SALUT, HONY ! QU'EST-CE QUE TU FAIS ?!
HMM... TU VAS VOIR !
VIENS AVEC MOI AU COEUR DES IDÉES QUE J'AI NOTÉES...
HÉ !
FWOUP
WAAAA...
1 S'ÉCRIT 001
2 S'ÉCRIT 010
3 S'ÉCRIT 011
4 S'ÉCRIT 100
5 S'ÉCRIT 101
6 S'ÉCRIT 110
7 S'ÉCRIT 111
REGARDE, HAM ! J'AI ÉCRIT LES NATURELS DE 1 À 7 EN BINAIRE !
HA, OUI ! JE ME SOUVIENS ! L'ÉCRITURE BINAIRE, C'EST L'ÉCRITURE EN BASE 2 ... ON PREND LES NOMBRES QUI MULTIPLIENT LES PUISSANCES DE 2, C'EST FACILE ! PAR EXEMPLE...
$5 = 1.4 + 0.2 + 1.1 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$ D'OÙ 101
IL SUFFIT DE N'OUBLIER AUCUNE DES PUISSANCES DE 2.
TU AS TOUT COMPRIS ! À PRÉSENT, JE CLASSE CES NOMBRES EN TROIS CATÉGORIES...
100 110 101 111
... CEUX QUI ONT UN "1" EN PREMIÈRE POSITION, CEUX QUI ONT UN "1" EN DEUXIÈME POSITION...
001 011 101 111
010 110 011 111
... ET CEUX QUI ONT UN "1" EN TROISIÈME POSITION...


MAIS ILS SE RÉPÈTENT !
PAS DE PANIQUE !
..1 .1. 1..
1 3 2 5 7 6 4
ON FAIT UN DIAGRAMME !
MAINTENANT, IMAGINE QUE JE VEUILLE T'ENVOYER UN MESSAGE EN BINAIRE PAR MODEM, PAR EXEMPLE...
BIIPBIIIBIP CRRZZ BII
... IL Y A SOUVENT DES PARASITES, TU SAIS !
ET BIEN, J'AI UN TRUC POUR DÉTECTER LA PRÉSENCE D'UNE ERREUR ET LA CORRIGER !
PRENONS LE MESSAGE: 1011
JE VAIS LE REMPLACER PAR UN AUTRE : _ _ 1 _ 0 1 1
1 2 3 4 5 6 7
HAHAAA ! ET JE REMARQUE QUE LES BLANCS SONT JUSTEMENT AUX POSITIONS QUI CORRESPONDENT AUX NOMBRES DU DIAGRAMME QUI NE SONT DANS AUCUNE INTERSECTION !
1 3 5 7
0 1 0 1
DEUX "1" J'AJOUTE UN "0"
2 3 6 7
1 1 1 1
TROIS "1" J'AJOUTE UN "1"
4 5 6 7
0 0 1 1
DEUX "1" J'AJOUTE UN "0"
C'EST LA TECHNIQUE DU BIT DE PARITÉ !
JE M'ARRANGE POUR QUE LES TROIS ENSEMBLES DE CASES QUI CORRESPONDENT AUX TROIS ENSEMBLES DE MON DIAGRAMME COMPORTENT CHACUN UN NOMBRE PAIR DE "1"
FINALEMENT, J'ENVOIE 0110011
MMH ! S'IL Y A DES PARASITES ET QUE JE REÇOIS 0110111 PAR EXEMPLE, JE VÉRIFIE SUR CHACUNE DES FAMILLES SI LE NOMBRE DE "1" EST PAIR !
1 2 3 4 5 6 7
0 1 1 0 1 1 1
1 3 5 7
0 1 1 1
IMPAIR ! L'ERREUR EST EN ..1
2 3 6 7
1 1 1 1
PAIR ! L'ERREUR N'EST PAS EN .1.
4 5 6 7
0 1 1 1
IMPAIR ! L'ERREUR EST EN 1..
JE TROUVE DONC QUE LA POSITION DE MON ERREUR EST 101, C'EST-À-DIRE 5 EN BINAIRE ! JE CORRIGE LE "1" DE LA CINQUIÈME POSITION, ET JE RETOMBE SUR LE BON MESSAGE : 0110011
GÉNIAL !
F'97

Le codage de Ham et Hony

Frédéric Pourbaix, *Université de Mons Hainaut*

1. À quoi cela sert-il ?

Dans le monde actuel, de gigantesques flots d'informations sont transmis d'ordinateur à ordinateur via des fibres optiques, des satellites, etc. Ces informations sont toujours écrites en langage binaire (un langage dont l'alphabet n'est composé que de deux caractères, 0 et 1, comme nous l'explique Ham dans les pages qui précèdent).

Mais lors des transmissions, beaucoup de malheurs peuvent se produire, comme par exemple des parasites qui parviennent à modifier le contenu du message. Il est alors utile de s'assurer au préalable que celui qui reçoit le message aura la possibilité de détecter la présence d'éventuelles erreurs, et de les corriger (ce qui est encore mieux !). C'est l'intérêt de la méthode que proposent Ham et Hony ... Leur illustration est cependant peu réaliste, car on y suppose que seule une erreur s'est glissée dans le message. La présence de deux erreurs ou plus envoie sur les roses leur système, comme vous pouvez vous en rendre compte sur un exemple. Il y a d'autres méthodes pour détecter plusieurs erreurs (distance de Hamming, etc).

2. Positions des bits de parité

Pourquoi Hony a-t-il décidé de placer ses bits de parité sur les positions qui ne correspondent à aucune intersection dans le diagramme ? Tout simplement parce qu'il n'avait pas le choix ! En effet, supposons qu'il ait placé les bits de parités en 3, 5 et 6 par exemple. Le message 1011 est donc codé par 10*1**1 où la première étoile est donnée par le bit de parité sur ce qui se trouve en les positions 1, 5 et 7 (puisque la première famille est 1, 3, 5, 7 et que la première étoile est en 3). Mais en 5 se trouve aussi une étoile ! On ne sait donc pas calculer le bit de parité ici. Afin de n'avoir pour chaque famille de positions qu'un blanc sur quatre bits, on est obligé de choisir les positions ne se trouvant dans aucune des intersections.

3. Généralisation

Cette méthode peut se généraliser d'une façon beaucoup moins visuelle que ce que nous présentent nos deux amis, en transcrivant matriciellement le "truc" utilisé ici.

4. Écriture en base quelconque

Prenons un naturel n supérieur ou égal à 2. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les naturels strictement plus petits que n. Un naturel quelconque m peut s'écrire en base n. Il suffit de chercher les a_i appartenant à $\mathcal{E}$ tels que :

$$m = a_0 \times n^0 + a_1 \times n^1 + a_2 \times n^2 + \cdots + a_k \times n^k$$

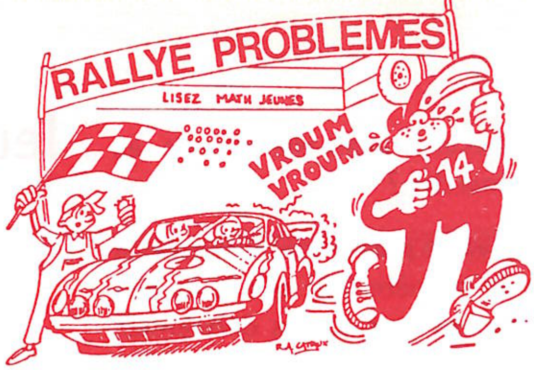
En base n, le naturel m s'écrira alors

$$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

Essayez d'écrire quelques grands naturels en prenant $n = 10$, vous serez bien surpris ! Puis essayez en base 2, puis 3, etc.

Bon amusement !

Vous pouvez également, en vous basant sur ce qui précède, tenter de démontrer qu'en base 10, tout naturel du type *abcabc*, comme par exemple 486 486 est divisible par 13 !



C. Festraets

Le rallye problèmes 1997 – 1998 comporte trois étapes ; elles seront publiées dans les numéros 81, 82 et 83 de *Math-Jeunes*. Il y a trois catégories de questions : mini, midi et maxi. Les problèmes de la première catégorie sont plus spécialement destinés aux élèves de première et deuxième années, ceux de la deuxième catégorie, aux élèves de troisième et quatrième années et enfin, les problèmes de la dernière catégorie, aux élèves de cinquième et sixième années. Cependant tout élève, quel que soit son âge, peut résoudre eet envoyer la solution de n'importe quel problème. Certains des problèmes proposés ne nécessitent que des connaissances mathématiques élémentaires ; en outre, il faut faire preuve d'esprit logique et trouver le bon raisonnement, ce qui n'est pas toujours facile ! Ces problèmes sont signalés par un astérisque.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. la réponse finale ne suffit pas ; il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Au cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seraient hélas pas pris en considération.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant au moins pris part aux trois étapes (correspondant à leur niveau d'âge) peuvent espérer intervenir dans le classement final. Bien sûr, plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances d'obtenir un prix.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées à Cl. FESTRAETS, 36 rue J.B. Vandercammen à 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 20 décembre 1997.

mini 1$*$ Trois cubes A, B, C sont coloriés, l'un en rouge, un deuxième en blanc et le dernier en bleu (mais pas nécessairement dans l'ordre A, B, C. Une seule des propositions suivantes est vraie :

- A est rouge ;
- B n'est pas rouge ;
- C n'est pas bleu.

Quelle est la couleur de chaque cube ?

mini 2 Sur le Mississipi, un bateau à vapeur descendant dans le sens du courant relie la ville A à la ville B en cinq heures tandis que, remontant le courant à la même vitesse, il met sept heures pour aller de B à A.

Combien de temps mettra un radeau se laissant porter par le courant pour aller de A à B ?

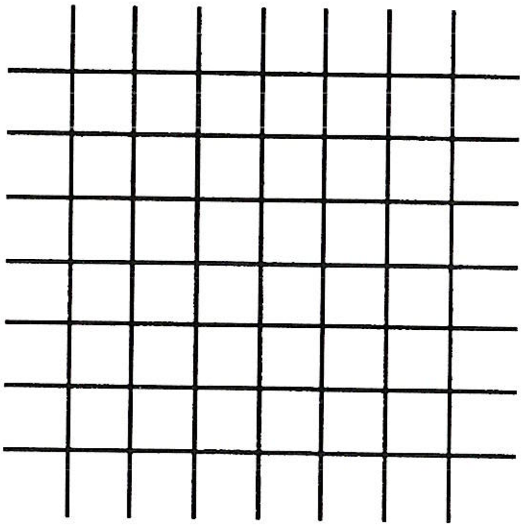
midi 1 Deux paysannes vont au marché y vendre leurs œufs. Ensemble, elles ont cent œufs. Arrivées au marché, elles vendent chacune leurs œufs et, sur le chemin du retour, elles remarquent qu'elles ont gagné la même somme d'argent. Mais, dit l'une, si j'avais eu vos œufs, je les aurais vendus pour 450 BEF. Et si j'avais eu vos œufs répond l'autre, je les aurais vendu pour 200 BEF.

Combien chacune avait-elle d'œufs en partant au marché ?

midi 2 Dans une vaste prairie sont disposées n personnes de manière telle que leurs distances mutuelles sont toutes différentes. Ces personnes participent à un jeu (fort intelligent !) : chacune a en main une tarte à la crème et doit la lancer sur la personne la plus proche.

Quel est le nombre maximum de tartes qu'une personne est susceptible de recevoir ?

maxi 1∗ Couvrons le plan avec un réseau de carrés isométriques.

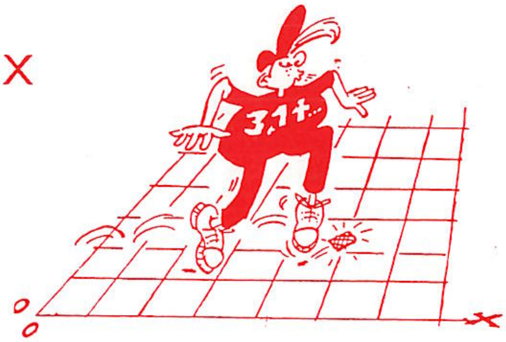


Est-il possible de placer les lettres a, b, c, d aux sommets de ce réseau de manière que

1. chaque carré élémentaire ait quatre lettres différentes en ses quatre sommets ;
2. les lettres a, b, c, d apparaissent au moins une fois dans chaque ligne et au moins une fois dans chaque colonne.

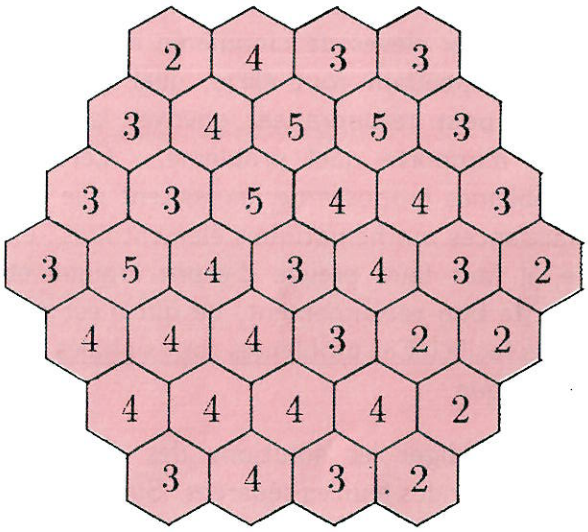
maxi 2 Quel peut être le reste de la division de la centième puissance d'un nombre entier par 125 ?

Jeux



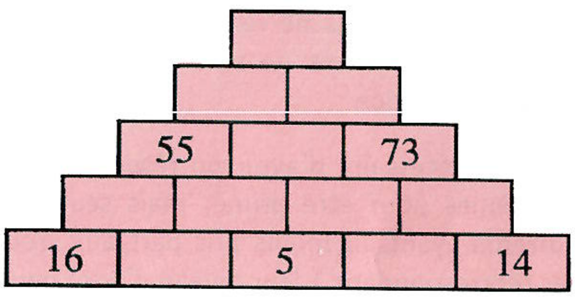
Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toute ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.



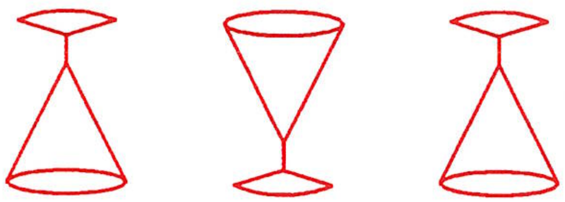
La solution des jeux paraîtra dans le prochain numéro.

Pair ou impair : c'est super ! ! ! (1)

Claude Villers

Une histoire, pour commencer.

Devant ses copains ébahis, Mathieu aligna trois verres dans les positions représentées ci-dessous.



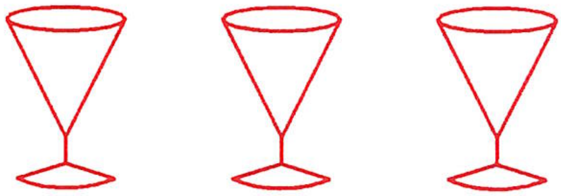
— *Je vais les mettre en bonne position pour pouvoir les remplir tous. Mais pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ? ? ?*

— *Je vais donc retourner* **deux et seulement** *deux verres à la fois.*

— *D'abord, les deux verres de gauche, ce qui donne ceci.*

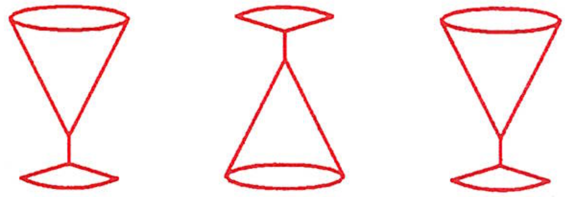
— *Ensuite, les deux verres extrêmes.*

— *Et je termine par les deux verres de gauche.*



— *Comme cela, je peux maintenant remplir les trois verres !*

— *Qui donc veut faire comme moi ?*, dit-il en retournant le verre central.



Je vous invite maintenant à accepter de jouer le jeu et à effectuer, au départ de cette situation, les mêmes transformations que Mathieu.

C'est fait ?

Alors, vous êtes peut-être surpris de constater que ces mêmes transformations conduisent à une position des verres qui ne permet pas de les remplir (sans catastrophe).

Recommencez l'expérience et bien vite vous trouverez la raison pour laquelle Mathieu a réussi à placer les verres en bonne position la première fois alors que vous n'y êtes pas arrivés la deuxième fois.

Je suis certain que vous avez découvert le petit truc de Mathieu.

La position des verres qu'il va manipuler n'est pas la même que celle qu'il propose la deuxième fois. Pour ses manipulations, Mathieu veille à commencer avec le verre central à l'endroit tandis qu'il lance son défi quand le verre central est à l'envers. On dit habituellement que la première situation est une position gagnante alors que la deuxième est une position perdante.

C'est certainement très bien d'avoir vu qu'il y avait un truc et aussi d'avoir détecté en quoi il consistait. Mais ce qui serait mieux encore ce serait de trouver une explication un peu rigoureuse de ce truc.

Nous allons donc utiliser quelques notions simples de mathématiques pour atteindre ce but.

Tout d'abord, pour simplifier, convenons de représenter un verre à l'endroit (oui, on peut le remplir) par 1 et un verre à l'envers (non, on ne peut pas le remplir) par 0. C'est une démarche classique en mathématique et en particulier dans une de ses branches qui s'appelle "la logique".

La situation utilisée par Mathieu est donc 0 1 0 tandis que celle qu'il laisse à son interlocuteur est 1 0 1.

On voit bien qu'elles sont différentes.

De plus la première peut étre qualifiée d'impaire car la somme des éléments qui la représente est $0+1+0=1$ (non multiple de 2). La deuxième situation est alors qualifiée de paire car $1+0+1=2$ (qui est bien multiple de 2).

Que se passe-t-il pour cette caractéristique quand on retourne deux et seulement deux verres à la fois ?

Examinons donc tous les cas possibles.

Ils sont au nombre de 4 car il y a 2 possibilités pour chaque verre ce qui fait au total $2\times 2=4$ cas à observer. Ce n'est pas insurmontable.

Allons-y !

La situation 0 0 (qui est paire) devient 1 1 (qui est paire).
La situation 1 1 (qui est paire) devient 0 0 (qui est paire).
La situation 0 1 (qui est impaire) devient 1 0 (qui est impaire).
La situation 1 0 (qui est impaire) devient 0 1 (qui est impaire).

Et nous constatons que la manipulation imposée ici ne change pas la parité de la caractériqtique de la situation de départ.

Or Mathieu voulait obtenit 1 1 1 qui est impaire. Il devait donc obligatoirement démarrer avec une situation également impaire. C'est pourquoi il a utilisé 0 1 0 qui est gagnante.

Remarquons au passage qu'il aurait pu utiliser celle représentée par 1 0 0 ou par 0 0 1 et même par 1 1 1 mais cela n'aurait pas eu beaucoup de sens.

Lorsqu'il propose la situation 1 0 1 qui est de caractéristique paire, il met son "adversaire" dans une situation perdante.

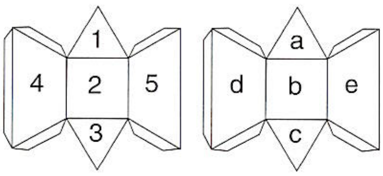
Cette idée de trouver une caractéristique à une situation et d'observer comment sa parité évolue, peut parfois constituer un outil puissant pour traiter certains problèmes.

Ne la perdez donc pas de vue. Elle pourrait vous être utile.

12^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques
1/4 de Finales Individuels

1 - DES VACANCES ENSOLEILLÉES (coefficient 1)
Aimé et Théo sont deux amis qui ont passé leurs dernières vacances ensemble. A la fin de chaque demi-journée, Aimé a noté sur son carnet de bord un S si elle avait été plutôt ensoleillée, et un N comme "nuages" dans tous les autres cas.
A la fin de leur séjour, nos deux amis font le point :
Aimé : «T'as vu, nous avons eu 30 demi-journées de soleil et 16 demi-journées de nuages.»
Théo : « Exact ! Et regarde, il y a exactement 10 journées qui ont été ensoleillées du matin au soir. »
Combien de journées entièrement nuageuses ont-ils eu pendant leur séjour ?

2 - LES DEUX PATRONS (coefficient 2)

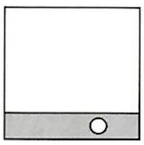


Voici deux patrons identiques de solides.
On assemble ces deux solides.
Quelles faces faut-il mettre en vis-à-vis pour construire une pyramide à base triangulaire (ou tétraèdre) ?

3 - LA FFJM DANS TOUS SES ÉTATS (coefficient 3)
Avec les lettres F, F, J et M, il est possible de former différents sigles : FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques), MFJF (Mouvement Furtif des Jeunes Frondeurs), ...
Combien de sigles peut-on ainsi écrire, en comptant les deux exemples donnés ?

4 - PENTAMINOS TROUES (coefficient 4)
Nina possède cinq pentaminos troués (les trous sont circulaires). Elle désire les placer de telle sorte que :

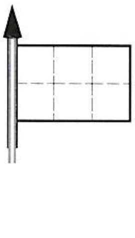
* l'assemblage forme un carré
* il ne doit y avoir qu'un seul trou par colonne et par ligne
* les pièces peuvent être retournées



Aidez Nina en complétant le figure ci-contre.

5 - QUAND ON AURA 20 ANS ... (coefficient 5)
1998 est divisible par la somme de ses chiffres : 1998 / (1+9+9+8) = 74. De plus, les chiffres composant le nombre obtenu sont tous différents de ceux du millésime de l'année.
Quelle sera la prochaine année à vérifier la même propriété ?

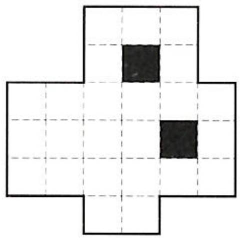
6 - LE CONCOURS DE COLORIAGE (coefficient 6)
La ville d'Hexacarré a décidé d'adopter un fanion qui sera porté sur tous les véhicules officiels. Ce fanion devra être composé de six carrés disposés en rectangle (voir dessin), et comporter trois couleurs : 1 carré bleu, 2 carrés blancs et 3 carrés rouges. Un concours est ouvert ... à qui trouvera la disposition la plus belle.



Quel est le nombre maximum de propositions différentes que les organisateurs du concours pourront recevoir ?

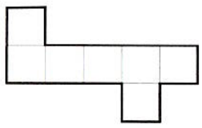
7 - L'AÏEUL (coefficient 7)
Maurice, l'arrière grand-père de José, n'est certes pas centenaire, mais il a tout de même un âge très avancé. Tout ce que l'on peut vous dire c'est que l'année dernière, son âge était un multiple de huit, et que l'année prochaine, il sera un multiple de sept.
Quel est l'âge de Maurice ?

8 - LE PARTAGE (coefficient 8)
Sur un terrain se trouvent deux étangs. Ce terrain, sans les étangs, doit être partagé en quatre parties superposables. Chaque parcelle, formée de petits carrés entiers, doit être d'un seul tenant



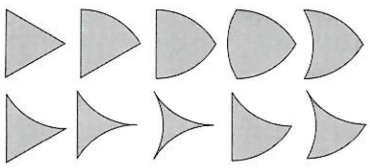
Faîtes le partage

9 - AIRE MAXIMALE (coefficient 9)
Bernard et Gilles ont fabriqué six pièces retournables identiques à celle-ci (voir dessin). Ils vont réaliser une chaîne fermée avec les six pièces de telle sorte que l'aire de la figure intérieure soit la plus grande possible. Deux pièces doivent toujours se toucher par au moins un côté d'un petit carré.

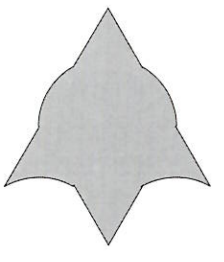


Quelle est l'aire maximale ?

10 - CURVICA TRIANGULAIRE (coefficient 10)
A son ami Jean qui a créé le jeu "curvica", Francis a envoyé le problème suivant :

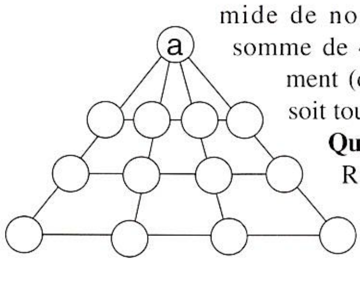


Dix pièces composées à partir de triangles équilatéraux sont données figure ci-dessus). On peut les tourner et les retourner à loisir. Il s'agit ici de composer la figure ci-contre ...



Trouverez-vous avant Jean ?

11 - LA PYRAMIDE DE NOMBRES (coefficient 11)
On place les nombres de 1 à 13 dans les cercles de cette pyramide de nombres, de telle sorte que la somme de 4 nombres formant un alignement (dans n'importe quelle direction) soit toujours la même.



Quel nombre doit-on placer en a ?
Répondez 0 si vous pensez qu'une telle pyramide est impossible à réaliser.

12 - MOTS CROISÉS (coefficient 12)

Maurice Croisé (dit Momo), Victor Hizontal et Sylvère Tical sont trois fanas de mots croisés. Aujourd'hui, ils sont en face d'une grille vierge un peu bizarre et difficilement exploitable. Il faut dire que la méthode utilisée pour la créer est pour le moins originale.

Cette grille comporte 19 lignes et 98 colonnes.

Victor a écrit l'alphabet dans l'ordre, ligne par ligne, à raison d'une lettre par case, en commençant par la lettre A dans la case (1 ; 1) et en répétant l'alphabet autant de fois que nécessaire pour aller jusqu'à la case (19 ; 98).

Son collègue Sylvère en a fait autant, mais en travaillant quant à lui colonne par colonne.

Maurice a alors noirci toutes les cases où apparaissait deux fois la même lettre, comme par exemple les deux A de la case (1 ; 1).

Combien la grille comporte-t-elle de cases noires ?

13 - UN ANGLE TRES OCCUPÉ (coefficient 13)

Le point O est le centre commun des cercles C_1 et C_2 de rayons respectifs $R_1 = 10$ cm et $R_2 = 5$ cm. Le point P est situé sur le cercle C_2. Le point Q a été choisi sur le cercle C_1 de telle manière que l'angle OQP soit le plus grand possible.

Donnez la mesure en degrés de l'angle OQP.

14 - L'ETRANGE SURFACE (coefficient 14)

ABC est un triangle équilatéral de côté 10 cm. On projette le côté [AB] de ce triangle orthogonalement sur toutes les droites passant par C.

Quelle est l'aire de la surface formée par toutes les projections ?

On donnera cette aire en cm², arrondie au cm² le plus proche (on prendra 1,732 pour $\sqrt{3}$ et 3,1416 pour π).

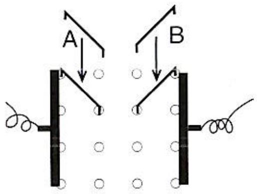
15 - TRIANGLE PRESQUE ÉQUIANGLE (coefficient 15)

Un triangle ABC est tel que AB = 10 cm et AC = 26 cm.

Quelle longueur faut-il donner au côté BC pour que le plus petit angle du triangle ABC soit le plus grand possible ?

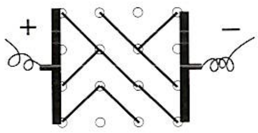
On donnera la réponse en millimètres, si besoin est arrondie au millimètre le plus proche.

16 - PASSERA, PASSERA PAS ? (coefficient 16)



On dispose de deux électrodes métalliques entre lesquelles se trouve un réseau à mailles carrées de 3 petits carrés sur 3. Pour chaque petit carré élémentaire de ce réseau, on peut enficher une barrette conductrice sur une des diagonales (les deux positions possibles sont illustrées en A et B.

Gilles enfiche 9 barrettes (une par petit carré), en choisissant à chaque fois au hasard une des deux diagonales (un exemple est donné ci-contre). Il applique ensuite une tension électrique aux bornes des deux électrodes.



Quelle est la probabilité pour que le courant passe ? On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Les **catégories** sont les suivantes:

- CM: Elèves de 4ᵉ et 5ᵉ primaire
- C1: Elèves de 6ᵉ primaire et de 1ʳᵉ secondaire
- C2: Elèves de 2ᵉ et 3ᵉ secondaire
- L1: Elèves de 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ secondaire
- L2: Etudiants d'écoles supérieures et candidatures universitaires (2 premières années)
- GP: Grand public (adultes)
- HC: Haute compétition (adultes)

Les différentes étapes:

Phase 1: les quarts de finale - octobre à fin janvier 1998

Epreuves individuelles

Elles sont diffusées par la presse associée au championnat:
MATH-JEUNES, LE SOIR, TANGENTE, LA CLASSE, HYPERCUBE, LA RECHERCHE.

A ce stade de l'épreuve la participation est entièrement gratuite, et il n'est pas nécessaire de répondre correctement à toutes les questions pour espérer se qualifier.

Epreuves collectives dans les établissements scolaires

L'insituteur, le professeur de mathématique peut organiser une épreuve collective en classe. Il lui suffit de demander un dossier de participation comportant les explications, le questionnaire, les solutions.

POUR TOUTE INFORMATION:

FFJM
B.P. 157 — 7700 Mouscron

Télécopie: 056/33.14.53
Courrier électronique: andre.parent@ping.be
Adresse internet: http://www.ping.be/ffjm

BULLETIN REPONSE

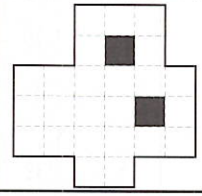
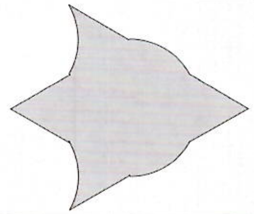
à retourner **au plus tard le 31/1/98**
à FFJM — BP157, 7700 Mouscron
MATH JEUNES

Report du total |_|_|_|_|

Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
....Tel ....
CATEGORIE (impératif) **CM**☐ **C1**☐ **C2**☐ **L1**☐ **GP**☐ **L2**☐ **HC**☐
☐ Adhérent FFJM en 1997: n° FFJM ....
☐ J'adhère pour 1998 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C2), 450 F (L1), 500 F (L2), 650 F (GP et HC)
au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP 157 – 7700 MOUSCRON

N° du Pb	Votre solution	Points (1-0)	Coef. (0 à 6)
	catégorie : CM		
1	nombre de journées entièrement nuageuses : |_|		
2	il faut mettre en vis-à-vis les faces : |_| et |_|		
	catégories : CM C1		
3	on peut écrire |_|_| sigles		
4	dessinez les 4 autres pentaminos :		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	prochaine année ayant cette propriété : |_|_|_|_|		
6	nombre de propositions différentes : |_|_|		
	TOTAL		

(toutes catégories sauf CM - **Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !**)

N° du Pb	Nbre de solutions	Votre ou vos solutions	Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
		catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC		
7	**.... solution(s)**	1) |_|_| ans 2) |_|_| ans		
8	**1 solution demandée**			
9	**1 solution**	aire : |_|_| faites un dessin ci-contre :		
10	**1 solution demandée**			
11	**.... solution(s)**	1) n^{bre} en a : |_|_| 2) n^{bre} en a : |_|_|		
		catégories : L1 GP L2 HC		
12	**1 solution**			
13	**.... solution(s)**	1) .... ° 2) .... °		
14	**1 solution**	.... cm ²		
		catégories : L2 HC		
15	**.... solution(s)**	1) .... mm 2) .... mm		
16	**1 solution**			
		TOTAL		