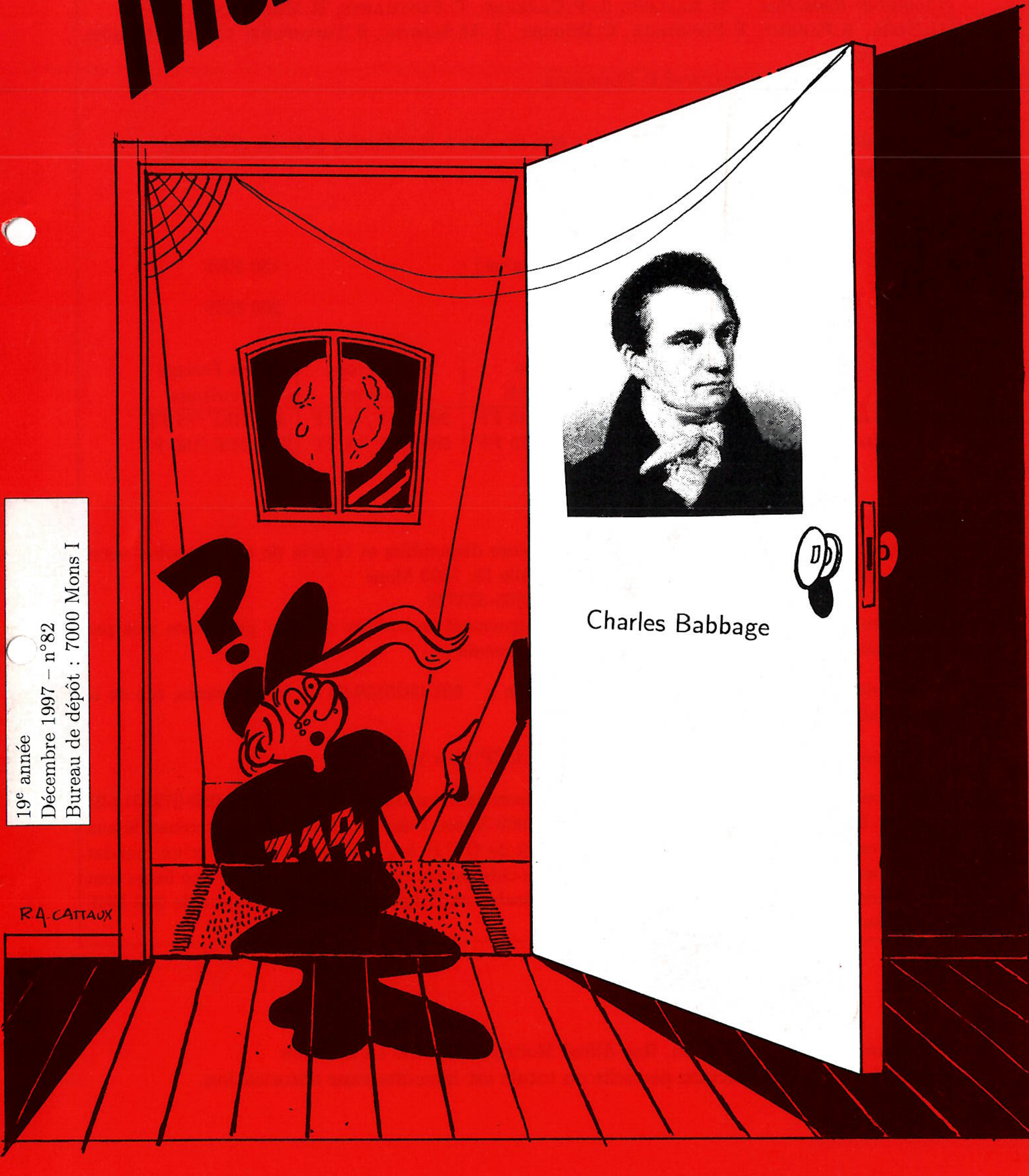
Math-Jeunes



19e année
Décembre 1997 – n°82
Bureau de dépôt : 7000 Mons I

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

---

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, R.MIDAVAINE, G.NOËL, A.PARENT, F.POURBAIX, G.ROBERT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX et F.POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).
Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :
Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons
Tél. 32-(0)65-373729
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N ° 82 Dix-neuvième année 1997

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 82, 18–21, 1997

Charles Babbage

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Biographie

Charles BABBAGE naquit à Walworth, Surrey (comté situé au sud de Londres), le 26 décembre 1791. C'est là que s'étaient établis ses parents, récemment mariés et qui étaient tous deux originaires du Devon. Le père de Charles exerçait à Londres une activité qui mêlait banque et commerce.

Parmi les ancêtres de la famille Babbage, on trouve des orfèvres établis dans le Devon, fait qui n'est sans doute pas étranger à l'intérêt de BABBAGE, dès son tout jeune âge, pour l'artisanat et la mécanique. Signalons au passage que c'est de ce même Devon qu'est issu Newcomen, le père de la machine à vapeur.

Charles BABBAGE était un enfant très imaginatif. Il acquit très tôt un esprit scientifique basé sur la poursuite systématique d'expériences : il alla même jusqu'à tester très sérieusement l'existence des fantômes et du diable. Il en tira, comme point positif, une moins grande frayeur à l'égard de toutes ces histoires de "sorcières" qui se racontent dans le Devon. Bonne chose pour lui, car son père s'étant retiré des affaires, il passa une grande partie de son adolescence dans ce comté voisin des Cornouailles.

Il était doué d'un remarquable pouvoir de concentration : très jeune, il avait remarqué que l'intérêt qu'il pouvait porter à un fait divers, un roman, ... lui permettait de faire abstraction d'un mal de tête ou d'une rage de dent.

Voici un extrait de *Passages from the Life of a Philosopher* publié dans [3] :

> *... when suffering under a form of toothache, not acute though tediously wearing, I often had recourse to a volume of Don Quixotte, and still more frequently to one of Robinson Crusoe. Although at first it required a painful effort of attention, yet it almost always happened, after a time, that I had forgotten the moderate pain in the overpowering interest of the novel.*

L'Angleterre qui l'avait vu naître était très "rurale" : même la ville de Londres n'était qu'à une heure de marche des comtés du sud qui ressemblaient à des jardins bien entretenus. Quatre-vingts ans plus tard, à la mort de BABBAGE en 1871, ce même pays était un des plus industrialisés d'Europe et BABBAGE n'était pas totalement étranger à cette mutation. Toute sa vie, avec quelques-uns de ses amis, il défendit l'idée suivante : sans application systématique de la méthode scientifique à l'industrie, cette dernière court à sa perte. Bien qu'avant tout mathématicien, il s'engagea à fond pour faire reconnaître l'importance capitale des sciences appliquées et cela, à l'échelle nationale. C'est une bataille qu'il n'a cependant pas gagnée !

On peut considérer qu'il a été influencé par deux révolutions : la réforme industrielle en Angleterre et la révolution politique et sociale en France. Il n'hésita pas à défendre des idées très continentales — il était l'ami des Bonaparte et du cercle de scientifiques qui les entourait : il eut même l'audace de prôner, en Angleterre, la supériorité de la notation différentielle de LEIBNIZ sur celle de NEWTON. Il fonda à Londres pas mal de sociétés scientifiques, fut l'ami de HERSCHEL, le fils du grand astronome, et de bien d'autres. En fait, il avait l'esprit très ouvert aux idées nouvelles et avait une âme de réformateur.

Dans les années 1830 en France, de Prony fut commissionné, durant la république, pour préparer des tables logarithmiques et trigonométriques en vue de célébrer l'avènement du système métrique. BABBAGE eut l'occasion de voir ce travail et imagina de dresser de telles tables de manière mécanique. C'est dans ce but qu'il mit au point son *differential engine*.

En France, de Prony avait organisé le travail en répartissant les tâches entre trois groupes d'hommes. Le premier groupe, composé d'une demi-douzaine des meilleurs mathématiciens français, élabora les formules les mieux adaptées à la réalisation de ce fastidieux projet. Ces formules étaient alors communiquées à un deuxième groupe, composé de sept ou huit mathématiciens compétents chargés de transformer les formules en ensembles de nombres. Enfin, ces ensembles de nombres étaient distribués aux membres du troisième groupe qui étaient chargés de terminer les calculs. Il s'agissait de soixante à quatre-vingts personnes dont les neuf dixièmes étaient tout juste capables d'effectuer des additions et des soustractions, ce qui suffisait amplement à la tâche qui leur avait été dévolue. La machine à différences de BABBAGE faisait à merveille — comme nous le verrons — le travail des membres du troisième groupe de de Prony.

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur le singulier et parfois inquiétant personnage qu'était Charles BABBAGE. Il eut l'occasion de rencontrer Ada LOVELACE, fille de Lord Byron (le célèbre poète) qui l'aida dans la conception de sa deuxième machine, l'*analytical engine*, ancêtre de l'ordinateur moderne (qui s'inspirait du métier à tisser inventé par le mécanicien français Jacquard à la fin du dix-huitième siècle) : programme et données sont stockés sur des cartes perforées. BABBAGE donna des conférences en Italie (avec l'appui de son ami MENABREA, docteur en sciences et membre du génie militaire). Il contribua aux progrès des chemins de fer en Angleterre, parfois même en introduisant des dispositifs "loufoques" mais utiles, comme le *tablier à vaches*, espèce de grille disposée à l'avant des locomotives et dont le but était de dégager la voie des divers débris qui pouvaient l'encombrer. Ses besoins en engrenages de précision pour la conception de sa machine analytique l'amenèrent à améliorer les techniques de moulage et d'usinage des pièces métalliques, ... Il avait parfois des côtés "un peu fous", comme lors de la dernière lutte qu'il mena à la fin de sa vie contre ce qu'il appelait "la nuisance des musiciens ambulants". Il supportait mal le bruit de tous ces orgues de Barbarie qui tonitruaient à toute heure dans les rues de Londres. Et ... son projet de loi devint effectivement une loi en 1864 : *An Act for the better Regulation of Street Music within the Metropolitan District.* Aussitôt, le célèbre mathématicien Augustus DE MORGAN écrivait à John HERSCHEL : *Babbage's Act passed, and he is a public benefactor. A grinder went away from before my house at the first word.*

Différences finies

Considérons un réel x, un autre réel h et notons :

$$\begin{aligned} x_0 &= x + 0 \cdot h = x \\ x_1 &= x + 1 \cdot h = x + h \\ x_2 &= x + 2 \cdot h = x + 2h \\ \vdots &= \vdots \\ x_j &= x + j \cdot h = x + jh \end{aligned}$$

où j est un naturel quelconque.

Soit une fonction définie par $y = f(x)$; calculons alors

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y_1 &= f(x_1) \\ y_2 &= f(x_2) \\ \vdots &= \vdots \\ y_j &= f(x_j) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi défini une fonction discrète, c'est-à-dire une fonction qui prend ses valeurs sur un ensemble fini de points.

Notons $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$; les Δy_j s'appellent *premières différences*. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2 \\ \cdots &= \cdots \\ \Delta y_j &= y_{j+1} - y_j \end{aligned}$$

Et pourquoi ne pas continuer à opérer des différences...

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_j &= \Delta(\Delta y_j)\\ &= \Delta y_{j+1} - \Delta y_j\\ &= y_{j+2} - y_{j+1} - (y_{j+1} - y_j)\\ &= y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j\end{aligned}$$

Les $\Delta^2 y_j$ s'appellent évidemment les *deuxièmes différences*, et il est évident que l'on peut généraliser en définissant les *énièmes différences :*

$$\boxed{\Delta^n y_j = \Delta^{n-1} y_{j+1} - \Delta^{n-1} y_j}$$

formule tout à fait générale si on convient de :

$$\boxed{\Delta^0 y_j = y_j}$$

Il n'est pas difficile mais cependant fastidieux de démontrer :

Théorème

$$\Delta^k y_j = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{j+k-i}$$

où les $\binom{k}{i}$ sont les coefficients binomiaux.

Il est également possible de montrer :

Théorème

Soient un réel x et un autre réel h ; soient $x_0 = x$, $x_1 = x + h$, $x_2 = x + 2h$, $\cdots$, $x_j = x + jh$ avec j naturel quelconque. Si $P_n(x)$ est une fonction polynôme de degré n en x et si $y_j = P_n(x_j)$, alors les différences $\Delta^n y_j$ sont égales à une constante $n!\,h^n\,a_0$ où a_0 est le coefficient du terme en x^n du polynôme $P_n(x)$.

Le "differential engine"

Prenons un exemple très simple, en l'occurence, celui cité par **Menabrea** dans son *Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage*, publié à la Bibliothèque Universelle de Genève en octobre 1842 sous le numéro 82.

Considérons le polynôme du deuxième degré $P_2(x) = x^2$ et calculons-en les valeurs lorsque x s'incrémente par pas de $h = 1$ à partir de $x_0 = 1$. Calculons également les différences finies. D'après le théorème ci-dessus, les deuxièmes différences sont toutes égales à une constante qui vaut $2!\,1^2\,1$ c'est-à-dire 2 ; en effet :

$A = \Delta^0 = x^2$	$B = \Delta^1$	$C = \Delta^2$
$y_0 = 1$		
	3	
$y_1 = 4$		2
	5	
$y_2 = 9$		2
	7	
$y_3 = 16$		2
	9	
$y_4 = 25$		2
	11	
$y_5 = 36$		2
	13	
$y_6 = 49$		2
	15	
$y_7 = 64$		2
	...	
...		...

Imaginons maintenant un dispositif mécanique, une "machine" munie de trois cadrans A, B et C ayant un millier, par exemple, de divisions. Réglons les aiguilles de ces cadrans sur 2 pour C, 5 pour B et 9 pour A. Déclenchons le mécanisme à partir du cadran C : un marteau qui lui est associé va frapper deux coups (ce qu'indique le cadran C) qui auront pour conséquence de faire avancer l'aiguille du cadran B de deux positions, ce qui amène cette aiguille sur la position 7 $(5 + 2)$. Le marteau associé au cadran B

va alors frapper sept coups qui vont engendrer l'avance de l'aiguille du cadran A de sept positions. Cette aiguille passe ainsi de la position 9 à la position 16. Si le cadran C se maintient à la position constante 2, en réitérant le processus, l'aiguille du cadran B passe à 9 et celle du cadran A à 25, ... Ainsi, sur le cadran A, grâce à un mécanisme simple, nous obtenons la suite des carrés parfaits. En réalité, le *differential engine* de **Babbage** n'utilise pas des cadrans, des aiguilles et des marteaux, mais bien des roues dentées, comme dans les horloges, par exemple.

En vertu du théorème sur les différences finies énoncé ci-dessus, le même mécanisme simple permet, en utilisant $(n+1)$ cadrans, de calculer "mécaniquement" les valeurs prises par n'importe quel polynôme de degré n en des valeurs de x régulièrement espacées. Il se fait que c'était là la tâche des membres du troisième groupe de de Prony. Tu auras l'occasion, au cours de tes études, de constater que les fonctions trigonométriques et logarithmiques entre autres, peuvent être approchées par des polynômes. La précision obtenue ou encore le nombre de décimales correctes dépend du nombre de termes des polynômes c'est-à-dire en fait de leur degré (cf. formules de **Taylor** et de **Mac Laurin**). Cependant, l'intervention humaine s'avérait encore nécessaire pour éviter la propagation des erreurs dues aux troncatures (erreurs liées au fait que l'on était limité à un certain nombre de décimales dans la manipulation des réels). Ces limitations de la machine donnèrent à **Babbage** l'envie d'en construire une autre, l'*analytical engine* — dont il a été question plus haut — qui, une fois le processus lancé, serait autonome, mais cela, c'est encore une autre histoire !

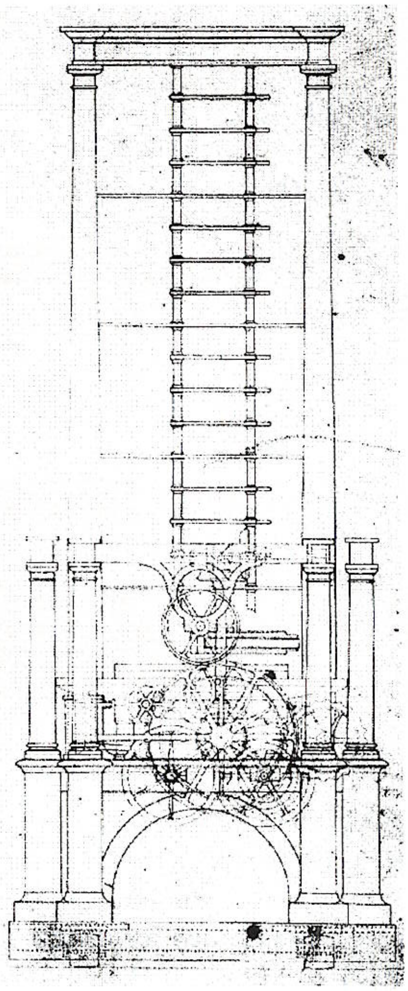
Bibliographie

[1] Michel **Ballieu**, *Différences finies, Charles Babbage et son differential engine*, Mathématique et Pédagogie, n. 73, 1989, p. 27 - 39.

[2] Anthony **Hyman**, *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*, Oxford University Press, 1983, ISBN 0-19-858170-X.

[3] *Charles Babbage : On the Principles and Development of the Calculator*, edited with an introduction by Philip **Morrison** and Emily **Morrison**, Dover Publications, Inc., New York, 1961, ISBN 0-486-24691-4.

[4] *The MacTutor History of Mathematics Archive*, adresse internet http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/



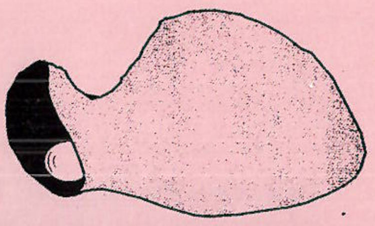
 Math-Jeunes n ° 82, 22–23, 1997

Pair ou impair : c'est super !!! (2)

Claude Villers

Un pari, pour suivre.

Mathieu déposa sur la table qui le séparait de notre groupe, un grand sac opaque au contenu mystérieux.



Ce sac contient des balles de ping-pong. Il s'y trouve un nombre connu n_b de balles blanches et un nombre connu n_j de balles jaunes. Je peux vous communiquer ces nombres si vous le souhaitez.
Le jeu consiste à prélever, au hasard, donc sans les voir, deux balles de ce sac. Si elles sont de même couleur, on les remplace par une balle blanche. Si elles sont de couleurs différentes, on les remplace par une balle jaune.
Je peux vous dire quelle sera la couleur de la dernière balle qui restera dans le sac.

Et vous, le pouvez-vous?

Voilà qui peut paraître curieux au premier abord.

Ce qui est certain, c'est que les tirages successifs auront pour conséquence que, à un certain moment, le sac ne contiendra plus qu'une balle. En effet, on retire chaque fois deux balles pour n'en remettre qu'une seule. Le nombre total de balles du sac diminue donc d'une unité à chaque tirage.

Cependant la couleur de la dernière balle contenue dans le sac semble dépendre du hasard et une réaction normale consiste à dire que sa couleur ne peut être connue à l'avance.

Et pourtant ...

Réfléchissez bien avant de lire la suite de ce texte.

* *
*

Examinons ce qui se produit à chaque tirage.

- Si on tire deux balles jaunes ($\{j, j\}$), on en remet une blanche donc n_j diminue de 2 et n_b augmente de 1.
- Si on tire deux balles blanches ($\{b, b\}$), on en remet une blanche donc n_j ne change pas et n_b diminue de 1.
- Si on tire une balle jaune et une balle blanche ($\{b, j\}$), on en remet une jaune donc n_j ne change pas et n_b diminue de 1.

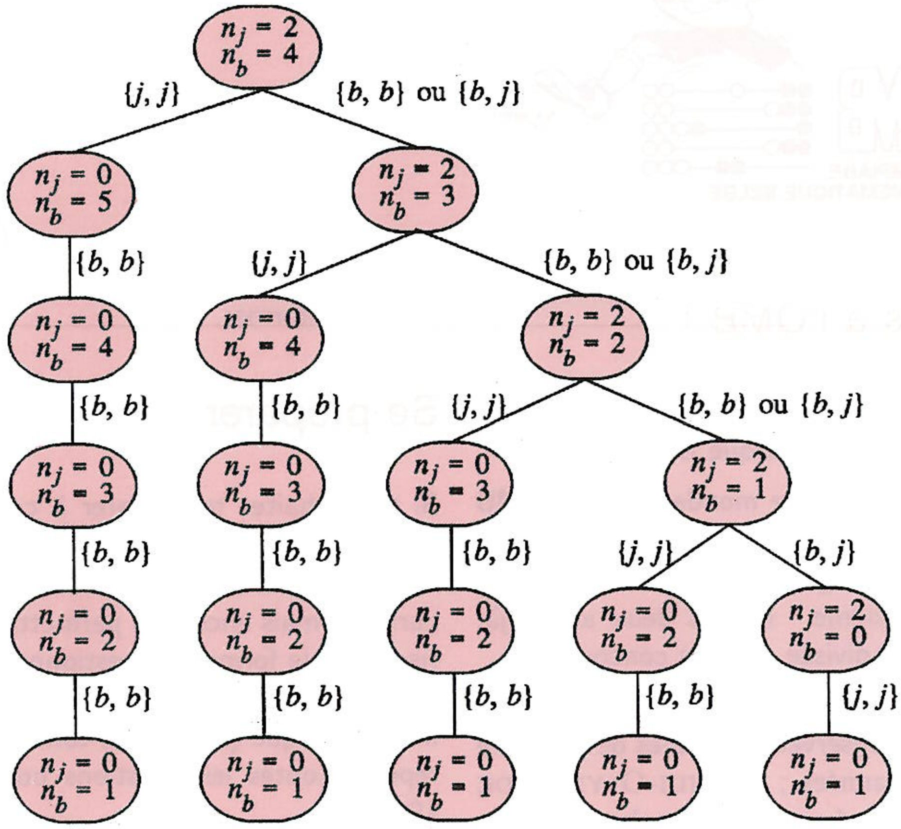
On en déduit qu'à chaque tirage, la *parité* de n_j reste inchangée (si n_j est pair au départ, il le reste et si n_j est impair au départ, il le reste également) alors que la *parité* de n_b change à chaque tirage (de pair, n_b devient impair et d'impair, n_b devient pair).

Remarquons également que le tirage de deux balles blanches produit le même effet que celui de deux balles de couleurs différentes.

Un exemple numérique

Si au départ $n_j = 2$ et $n_b = 4$, le sac contient 6 balles, il va falloir effectuer 5 tirages pour qu'il n'en reste qu'une.

L'arbre ci-après reprend toutes les situations possibles.



Comme vous pouvez le constater, on arrive toujours au même résultat : la dernière balle est blanche.

En fait, il suffit d'observer la parité de n_j au départ pour pouvoir déduire la couleur de la dernière balle qui restera dans le sac.

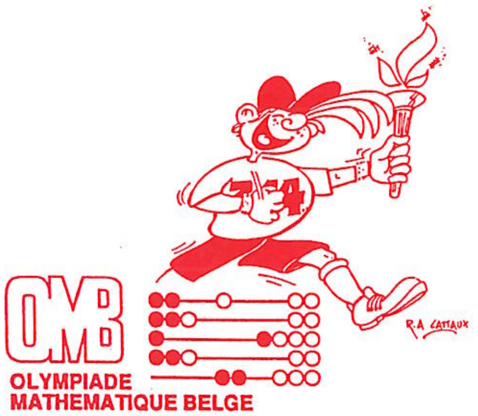
- Si n_j est pair au départ, il va le rester après chaque tirage donc il ne peut devenir 1. C'est donc n_b qui prendra cette valeur et la dernière balle sera blanche. n_j vaudra alors 0 qui est bien pair.
- Si n_j est impair au départ, il va le rester après chaque tirage donc il ne vaudra jamais 0. Après le dernier tirage, lorsqu'il ne restera qu'une balle dans le sac, il vaudra 1 et la dernière balle sera donc jaune. n_b vaudra alors 0.

À vous maintenant de pronostiquer la couleur de la dernière balle dans chacun des cas suivants :

1. $n_j = 1998$ et $n_b = 2001$
2. $n_j = 2001$ et $n_b = 1998$
3. $n_j = 2001$ et $n_b = 1789$

Remarquez que vous pouvez toujours réaliser l'expérience avec de vraies balles. Mais alors, bon courage !

Math-Jeunes n° 82, 24–28, 1997



C. Van Hooste

Participons à l'OMB !

Cette année, aura lieu la vingt-troisième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis deux ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours.

Ceux-ci se déroulent en parallèle. La MINI-OLYMPIADE est réservée aux élèves de première et de deuxième années ; la MIDI-OLYMPIADE accueille les élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la MAXI-OLYMPIADE est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre-eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Voici le calendrier de la 23^{e} Olympiade Mathématique Belge.

Mercredi 14 janvier 98 : éliminatoire
Mercredi 18 février 98 : demi-finale
Mercredi 22 avril 98 : finale (à Namur)
Samedi 9 mai 98 : proclamation (à Namur)

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire. Sache aussi que tu peux acquérir pour une somme relativement modique (240 F), le tome 3 des OMB qui reprend toutes les questions posées de 1988 à 1993.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte.

Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$, autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : cinq points pour une bonne réponse, zéro pour une mauvaise réponse.

Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois deux points. Tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Voici les questions promises, disposées par ordre chronologique. Elles composent un thème : "des hommes et des femmes, des garçons et des filles". Les indications mini et Maxi, ÉLI et DEMI signifient respectivement qu'elles ont été posées en catégorie mini ou maxi, en éliminatoire ou en demi-finale.

Essaie de les résoudre sans consulter les solutions proposées.

Des hommes et des femmes, des garçons et des filles

1.- Le forgeron [mini ÉLI 82]

Un forgeron veut fabriquer une chaîne fermée ayant 50 anneaux, à partir de 10 petits tronçons ayant chacun 5 anneaux. Quel est le nombre minimum d'anneaux qu'il devra ouvrir (puis ressouder) pour fabriquer cette chaîne fermée ?

Ⓐ 9 Ⓑ 10 Ⓒ 18 Ⓓ 19 Ⓔ 20

2.- L'âge moyen de la population [Maxi DEMI 83]

Dans une certaine population, le nombre de femmes est au nombre d'hommes comme 11 est à 10. Si l'âge moyen (moyenne arithmétique des âges) des femmes est 34 et si l'âge moyen des hommes est 32, alors l'âge moyen de la population est

Ⓐ $32\frac{9}{10}$ Ⓑ $32\frac{20}{21}$ Ⓒ 33 Ⓓ $33\frac{1}{21}$ Ⓔ $33\frac{1}{10}$

3.- Anne, Dominique et Patricia [Maxi ÉLI 84]

Anne achète 5 kg de pommes, 3 litres de lait et 2 bâtons de chocolat et paie 299 F. Dominique achète 6 kg de pommes, 2 litres de lait et 4 bâtons de chocolat et paie 338 F. Que devra payer Patricia pour 1 kg de pommes et 1 litre de lait ?

Ⓐ 58 F Ⓑ 60 F Ⓒ 62 F Ⓓ 65 F Ⓔ 68 F

4.- L'amoureux [mini ÉLI 84]

Un amoureux effeuille une marguerite à 29 pétales en chantant : *Elle m'aime un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout, un peu, beaucoup, ...* S'il enlève le premier pétale en prononçant le premier "un peu", il va arriver à la conclusion qu'il est aimé

Ⓐ un peu Ⓑ beaucoup Ⓒ passionnément
Ⓓ à la folie Ⓔ pas du tout

5.- Le promeneur [Maxi ÉLI 84]

Partant d'un point P d'une plaine, un homme marche 100 m en ligne droite dans une direction choisie au hasard et arrive en un point Q. Partant de Q, il marche à nouveau 100 m en ligne droite dans une direction aléatoire et arrive en un point R. Quelle est la probabilité que la distance $|PR|$ soit supérieure à 100 m ?

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{2}{3}$ Ⓔ $\frac{3}{4}$

6.- Les Suédoises [mini et Maxi ÉLI 85]

Quelle est la négation de la proposition suivante : "Toutes les Suédoises sont blondes et ont les yeux bleus" ?

Ⓐ Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde et qui n'a pas les yeux bleus.
Ⓑ Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde ou n'a pas les yeux bleus.

Ⓒ Aucune Suédoise n'est blonde et n'a les yeux bleus.

Ⓓ Aucune Suédoise n'est blonde ou n'a les yeux bleus.

Ⓔ Certaines Suédoises ne sont pas blondes et n'ont pas les yeux bleus.

7.- Un vélo pour deux amis [Maxi ÉLI 85]

Deux amis B et C ne disposent que d'un seul vélo. B part donc en vélo et pédale, avec une vitesse V, pendant x km, puis abandonne le vélo dans un fossé et continue à pied à la vitesse v ($v < V$). C part en même temps que B et marche à la vitesse v ; il trouve le vélo, l'enfourche et roule à la vitesse V jusqu'à ce qu'il rattrape B. Les deux amis se sont alors déplacés avec une vitesse moyenne de

Ⓐ v Ⓑ V Ⓒ $\dfrac{v+V}{2}$ Ⓓ $\dfrac{2vV}{v+V}$ Ⓔ $\sqrt{v \cdot V}$

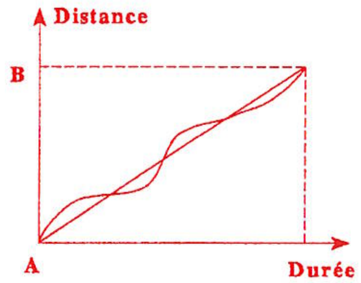
8.- L'équipe de football [mini ÉLI 85]

Une équipe de football (de 11 joueurs) emporte pour un tournoi une provision de maillots, de culottes et de bas. Il y a des maillots de 4 couleurs différentes, des culottes de 3 couleurs différentes et des bas de 2 couleurs différentes. De combien de manières l'équipe peut-elle s'habiller pour un match ?

Ⓐ 6 Ⓑ 11 Ⓒ 12 Ⓓ 18 Ⓔ 24

9.- Coureurs à pied [Maxi ÉLI 86]

Deux coureurs à pied X et Y quittent en même temps une ville A et se rendent à une ville B par une route rectiligne. Leur course est caractérisée par les graphiques ci-après (graphique de X : trait rectiligne ; graphique de Y : trait sinueux).



Laquelle des affirmations suivantes est-elle nécessairement vraie ?

Ⓐ X est toujours devant Y

Ⓑ X parcourt AB en allant d'un côté à l'autre de la route

Ⓒ X court à vitesse constante

Ⓓ Y court plus vite que X

Ⓔ X arrive le premier en B

10.- Les électeurs [mini ÉLI 86]

Dans une ville de 25 000 habitants, il y a 60% d'électeurs. Après un vote, on constate que 38% des électeurs ont voté pour le parti P, 32% pour le parti Q et 30% pour d'autres partis. Quel est le nombre de voix recueillies par P ?

Ⓐ 4 500 Ⓑ 5 700 Ⓒ 9 500 Ⓓ 12 500 Ⓔ 15 000

11.- Le Petit Prince [mini et Maxi ÉLI 87]

Le Petit Prince, qui mesure $1,2$ mètre, se promène le long de l'équateur de sa planète. Sa tête décrit un cercle plus grand que celui décrit par ses pieds. Quelle est approximativement la différence de longueur (en mètres) entre ces deux cercles ?

Ⓐ $1,2 \times 3,14$ Ⓑ $(1,2)^2 \times 3,14$

Ⓒ $1,2 \times 6,28$ Ⓓ $(1,2)^2 \times 6,28$

Ⓔ On doit connaître le rayon de la planète pour pouvoir répondre.

12.- La classe [mini ÉLI 87]

Dans une classe internationale mixte qui comporte 30 élèves, 25 élèves sont de nationalité belge et 10 élèves sont des filles. Quelle est, parmi les assertions suivantes, celle qui est certainement vraie ?

Ⓐ Il n'y a pas de fille belge.
Ⓑ Il y a au plus 5 filles belges.
Ⓒ Il y a exactement 5 filles belges.
Ⓓ Il y a au moins 5 filles belges.
Ⓔ Il y a moins de 15 garçons belges.

13.- Autour d'une table ronde [mini ÉLI 87]

Quatre femmes sont assises, un siège sur deux, autour d'une table ronde. De combien de manières leurs maris peuvent-ils occuper les sièges libres, si aucun d'eux ne peut s'asseoir à côté de son épouse ?

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 3 Ⓔ 4

14.- Le pickpocket [Maxi ÉLI 87]

Un pickpocket plonge la main dans une poche contenant 4 pièces de 20 francs et 3 pièces de 5 francs ; il en retire 3 pièces au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait "gagné" 45 francs ?

Ⓐ $\frac{1}{6}$ Ⓑ $\frac{3}{7}$ Ⓒ $\frac{18}{35}$ Ⓓ $\frac{10}{19}$ Ⓔ $\frac{12}{21}$

15.- Michèle [mini DEMI 88]

Michèle colle 42 cubes d'un cm d'arête et obtient un parallélépipède rectangle dont la base a un périmètre de 18 cm. Quelle est la hauteur (en cm) de ce parallélépipède ?

Ⓐ 2 Ⓑ $\frac{7}{3}$ Ⓒ 3 Ⓓ 6 Ⓔ 7

16.- Le confiseur [Maxi ÉLI 88]

Un confiseur fabrique des bonbons fourrés de forme sphérique. L'intérieur est une boule de crème dont le rayon vaut les 3/4 du rayon total du bonbon. L'extérieur est en chocolat. Quel est le rapport du volume de la crème au volume du chocolat ?

Ⓐ $\frac{27}{64}$ Ⓑ $\frac{27}{37}$ Ⓒ $\frac{3}{4}$ Ⓓ 3
Ⓔ aucune des réponses précédentes.

17.- Cinq adolescents [Maxi DEMI 89]

Cinq adolescents sont assis à une table ronde. Soit f le nombre d'adolescents assis à côté d'au moins une fille et soit g le nombre d'adolescents assis à côté d'au moins un garçon. Le nombre de couples possibles d'entiers (f, g) est

Ⓐ 7 Ⓑ 8 Ⓒ 9 Ⓓ 10 Ⓔ 11

18.- Frères et sœurs [mini DEMI 90]

Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une sœur et 9 sont des enfants uniques. Combien d'élèves ont un frère et une sœur ?

Ⓐ 1 Ⓑ 7 Ⓒ 10 Ⓓ 29 Ⓔ un autre nombre

19.- Poignées de mains [Maxi DEMI 90]

À une réunion, chaque homme serre la main à chaque autre participant, sauf à sa femme ; mais aucune femme ne serre la main à une autre femme. Si 13 couples mariés sont présents, combien de poignées de mains sont échangées entre ces 26 personnes ?

Ⓐ 78 Ⓑ 185 Ⓒ 234 Ⓓ 312 Ⓔ 325

20.- Quel âge ? [Maxi ÉLI 91]
(sans réponse préformulée)

Le lendemain de son anniversaire en 1991, une personne constate que son âge (en années) égale la somme des chiffres de son année de naissance. Quel est son âge ?

21.- Joueurs [mini ÉLI 92]

Voici la seule règle d'un jeu où, chacun à son tour, un participant énonce un nombre naturel :

chaque fois qu'un joueur énonce un multiple de 7, le joueur suivant doit énoncer un multiple de 5.

Si les valeurs énoncées sont successivement

25 10 35 14 20,

qui a commis la première erreur ?

Ⓐ le premier joueur ;
Ⓑ le deuxième joueur ;
Ⓒ le troisième joueur ;
Ⓓ le quatrième joueur ;
Ⓔ le cinquième joueur.

22.- Dans l'auberge [mini ÉLI 92]

Si un groupe d'élèves doit être réparti dans une auberge à raison de 2 élèves par chambre, il reste 2 élèves sans chambre. Par contre, si 3 élèves sont placés dans chaque chambre, il reste 2 chambres libres. Combien y a-t-il de chambres dans cette auberge ?

Ⓐ 4 Ⓑ 6 Ⓒ 7 Ⓓ 8 Ⓔ 12

23.- Célébrité [mini ÉLI 93]

Admettons que, dans une population donnée, une célébrité est une personne connue de toute autre personne, mais ne connaissant aucune autre personne. Le nombre de célébrités dans une population de 100 personnes est

Ⓐ toujours 0 ; Ⓑ toujours 1 ;
Ⓒ parfois 0, parfois 1 ;
Ⓓ parfois 0, parfois 100 ;
Ⓔ parfois 1, parfois 2.

24.- Jean [mini ÉLI 93]

Jean, qui pesait entre 65 et 70 kg, perd entre 3 et 4 kg. Son nouveau poids est entre

Ⓐ 61 et 66 kg ; Ⓑ 61 et 67 kg ;
Ⓒ 62 et 66 kg ; Ⓓ 62 et 67 kg ; Ⓔ 68 et 74 kg.

Réponses

Question n°	Réponse
1.	A
2.	D
3.	D
4.	D
5.	D
6.	B
7.	D
8.	E
9.	C
10.	B
11.	C
12.	D
13.	C
14.	C
15.	C
16.	B
17.	B
18.	C
19.	C
20.	19
21.	D
22.	D
23.	C
24.	B

Produits remarquables et aires

E. Debaisieux, *Institut du Sacré-Cœur, Mouscron*

Quelques problèmes

1. *On propose à un propriétaire d'échanger son terrain carré de côté $a + b$ contre deux terrains carrés, l'un de côté a et l'autre de côté b. Va-t-il accepter ?*

2. *Place quatre rectangles de dimensions a et b dans un carré de côté $a + b$. Écris de deux manières l'aire de la surface non couverte.*

3. • *Construis un carré de côté a. Dans un de ses coins, dessine un carré de côté b (b est naturellement plus petit que a) et découpe-le.*

• *D'un coup de ciseau, partage cette figure en deux morceaux identiques en suivant une des diagonales du grand carré initial.*

• *Juxtapose les deux pièces obtenues de manière à former un quadrilatère.*

• *Calcule l'aire de ce quadrilatère de deux manières.*

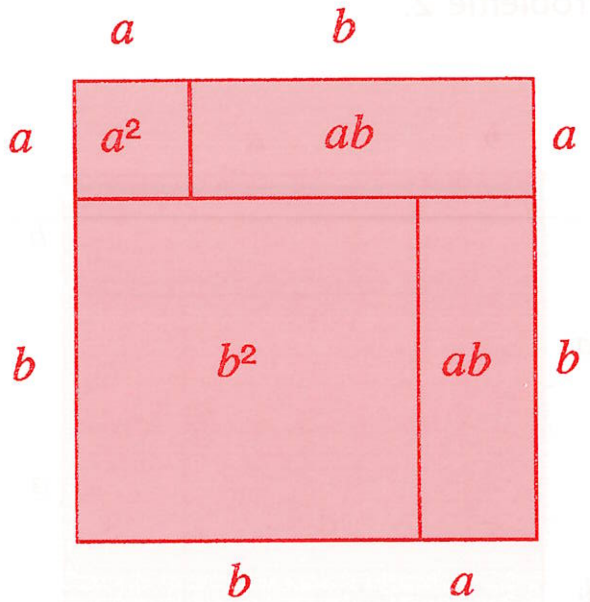
Avant de lire la suite, essaie de résoudre toi-même ces problèmes !

Solutions

Problème 1.

Pour y voir plus clair, faisons un petit dessin, représentons le terrain carré de côté $a + b$.

Celui-ci peut être découpé en un carré de côté a, un carré de côté b et deux rectangles de longueur b et de largeur a.



L'acheteur veut échanger le grand terrain carré (d'aire $(a + b)^2$) contre les deux petits terrains carrés (d'aires a^2 et b^2).

Le propriétaire va évidemment refuser car il serait lésé des deux morceaux de terrain rectangulaires (d'aire totale $ab + ab = 2ab$).

Remarquons au passage que la figure nous montre que

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

Suggestions

• Un petit calcul te permettra de vérifier facilement que cette formule reste vraie quelles que soient les valeurs de a et de b (positives et négatives).

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \ldots$$

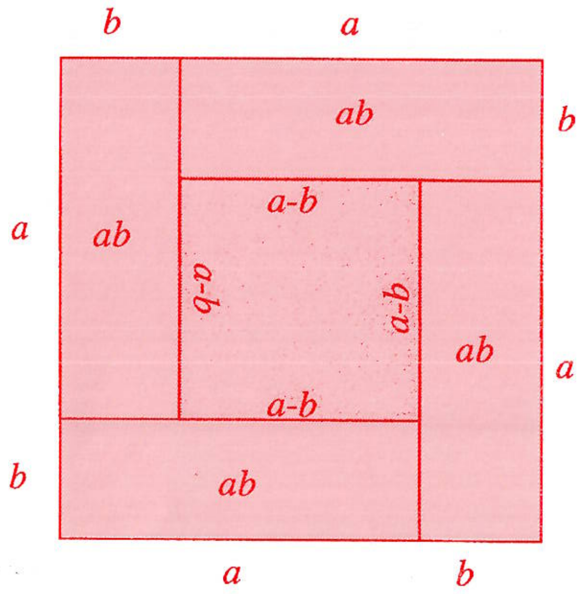
Il suffit de distribuer.

- À l'aide d'une figure, essaie d'établir la formule donnant le développement de

$$(a+b+c)^2.$$

Problème 2.

Commençons par construire la figure.



La surface non couverte par les rectangles est un carré de côté $a-b$, son aire vaut $(a-b)^2$.

Pour calculer cette aire, on peut également ôter de l'aire du grand carré ($(a+b)^2$), les aires des quatre rectangles ($4ab$ au total).

On a donc

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= a^2+b^2+2ab-4ab \\ &= a^2+b^2-2ab\end{aligned}$$

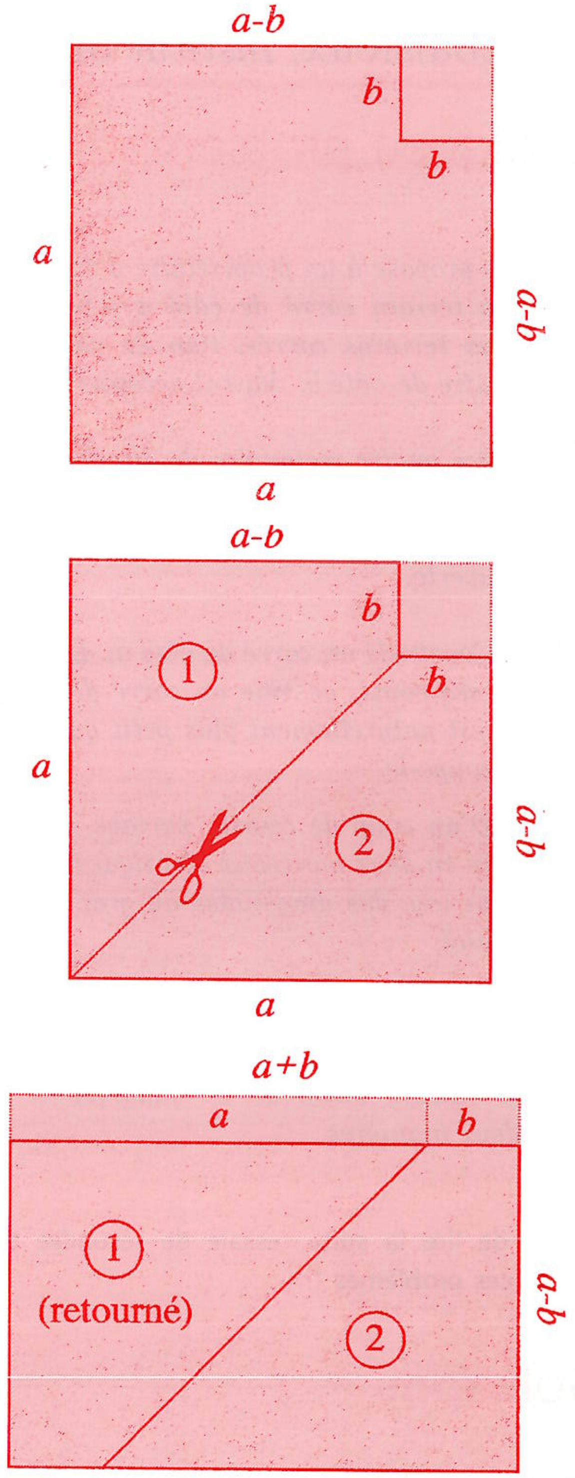
Et on retrouve la formule

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab}$$

Suggestion

Ici aussi, un petit calcul te permettra de vérifier que cette formule reste vraie quelles que soient les valeurs de a et de b.

Problème 3.



La première figure nous montre que l'aire de la surface grisée est égale à a^2-b^2 tandis que la dernière figure nous montre que cette même aire est égale à $(a-b)\cdot(a+b)$

Donc

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)}$$

Suggestion

Cette formule reste-t-elle vraie pour toutes les valeurs de a et de b ?

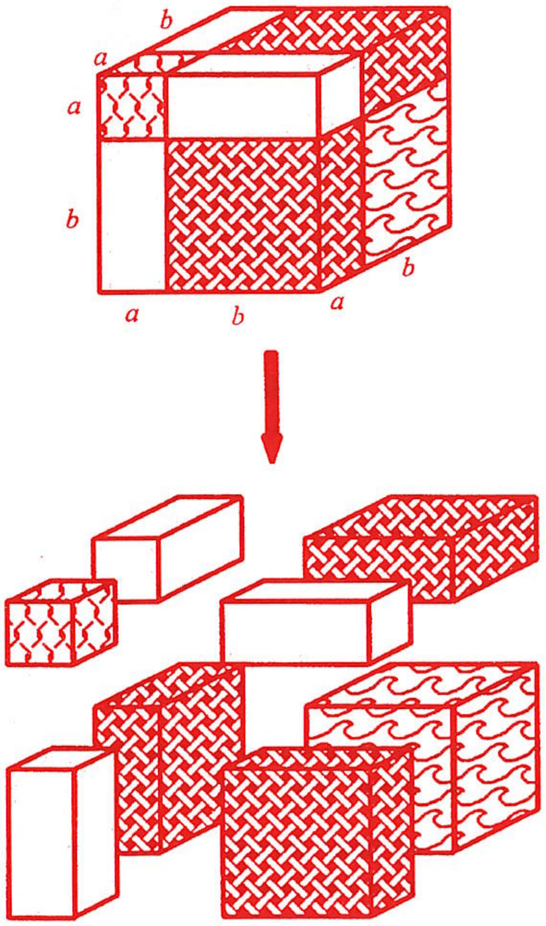
Source

Ces idées ont été émises lors d'un recyclage ICAFOC.

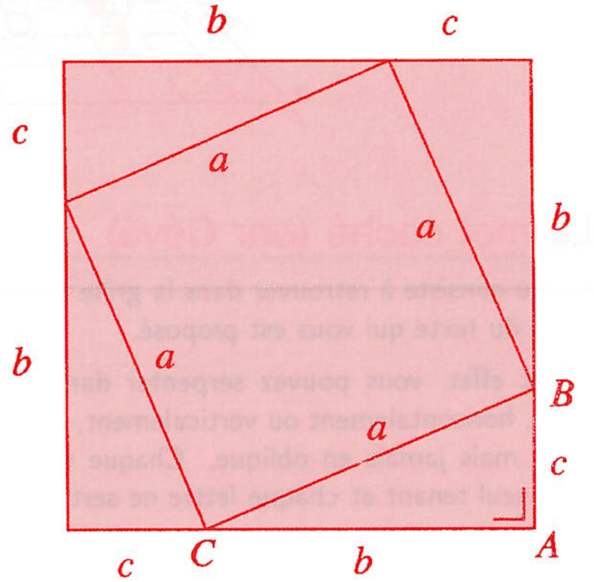
La rédaction propose

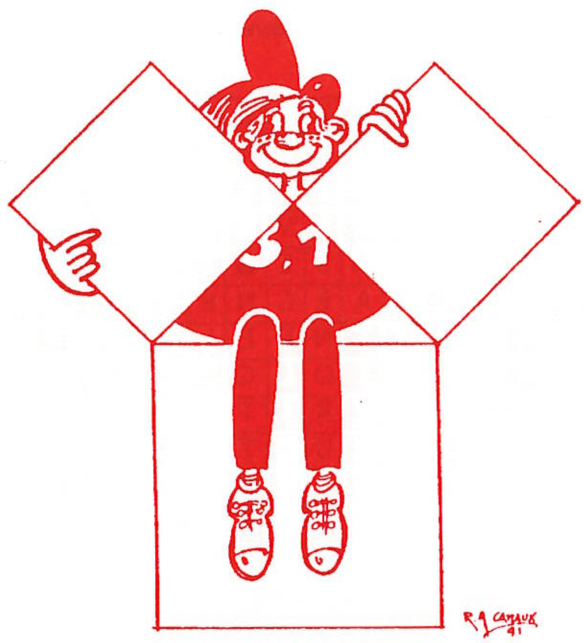
À l'aide des deux figures ci-dessous, retrouve un autre produit remarquable :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



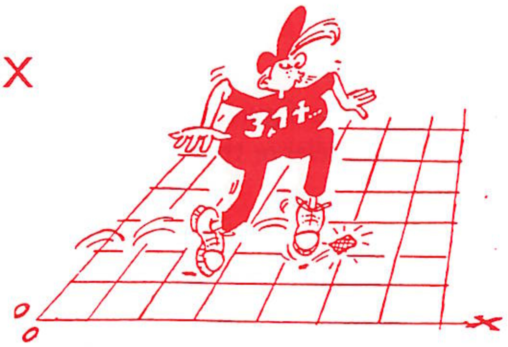
La figure ci-après te permettra de retrouver le célèbre théorème de Pythagore.





Math-Jeunes n° 82, 32–33, 1997

Jeux



Le mot caché (par Cévé)

Le jeu consiste à retrouver dans la grille tous les mots du texte qui vous est proposé.

À cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois.

Les lettres restantes forment le prénom et le nom d'un illustre mathématicien. Qui est-il ?

Très jeune, ... montre du goût pour les mathématiques. Il lit la géométrie de Legendre et étudie Lagrange. Il obtient le premier prix au concours général et un bel accessit en grec. Il effectue sa rhétorique en même temps que la deuxième année préparatoire de mathématiques à l'École Polytechnique.

R	T	I	E	M	E	E	U	Q	E	A	N	R	U	O	P
E	U	X	I	E	N	G	I	S	T	C	E	L	O	C	E
S	E	N	D	R	A	E	R	A	L	C	E	E	I	M	E
L	D	E	U	G	T	E	A	V	A	S	S	P	E	R	R
E	B	E	T	A	E	M	S	E	♣	I	T	R	E	P	P
T	N	O	M	L	H	A	E	G	N	E	R	R	I	A	R
R	U	T	M	A	T	T	N	E	E	L	A	E	O	T	A
E	D	I	E	U	Q	I	D	L	G	T	E	H	T	A	M
C	N	L	S	O	L	E	R	I	T	A	M	E	T	U	O
O	O	C	S	I	A	E	U	Q	T	E	L	S	E	L	G
U	D	E	L	I	G	S	I	E	N	E	E	D	L	I	M
R	S	E	N	E	U	A	T	E	F	F	I	L	E	M	E
Y	L	U	U	E	J	O	B	C	L	A	E	T	E	H	R
T	O	Q	I	X	R	I	U	T	T	N	E	O	R	I	Q
E	P	I	R	E	T	E	E	S	E	N	C	E	A	N	U
C	H	N	P	M	O	E	G	P	M	A	L	R	G	U	E

A. Parent

Ma revue préférée

Un carré est dit *magique* s'il vérifie les conditions :

1. La somme des nombres de toutes ses lignes ;
2. la somme des nombres de toutes ses colonnes ;
3. et la somme des nombres de ses deux diagonales

est toujours la même constante, appelée "constante du carré magique".

Ajoutons que les carrés magiques ci-dessous sont tous d'ordre 5 (5 lignes et 5 colonnes) et qu'ils sont constitués des nombres entiers situés entre 1 et 25 (inclus).

Pour connaître le titre de ma revue préférée, tu dois suivre le parcours ci-après :

1. Trouve la somme des vingt-cinq premiers nombres entiers naturels non nuls.

2. Trouve la constante du carré magique d'ordre 5 (c'est-à-dire à 5 colonnes et 5 lignes).

3. Complète le carré magique ci-dessous.

4. Associe à chaque nombre ainsi découvert, la lettre de l'alphabet dont il est le rang.

5. Arrange-les pour former le titre de ma revue préférée, sachant que l'une d'entre elles est répétée.

18	24		6	12
	11	17	23	4
22	3	9	15	16
			2	
	7			25

Mon activité favorite

En utilisant les mêmes règles que ci-dessus, découvre mon activité favorite.

Ici, aucune lettre n'est répétée.

	18	21		7
24	2	10		
8	11		22	
17		3	6	14
			20	23

Bataille navale

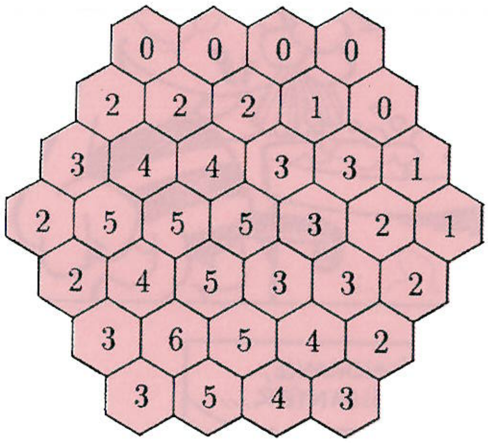
Dans l'échiquier ci-dessous, se cache un gros navire *rectangulaire*.

Voici un extrait du dialogue qui s'est tenu entre les deux joueurs :

A2 ? ... Rien
A5 ? ... Touché
E1 ? ... Rien
G3 ? ... Touché
F6 ? ... Rien
H3 ? ... Rien

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.



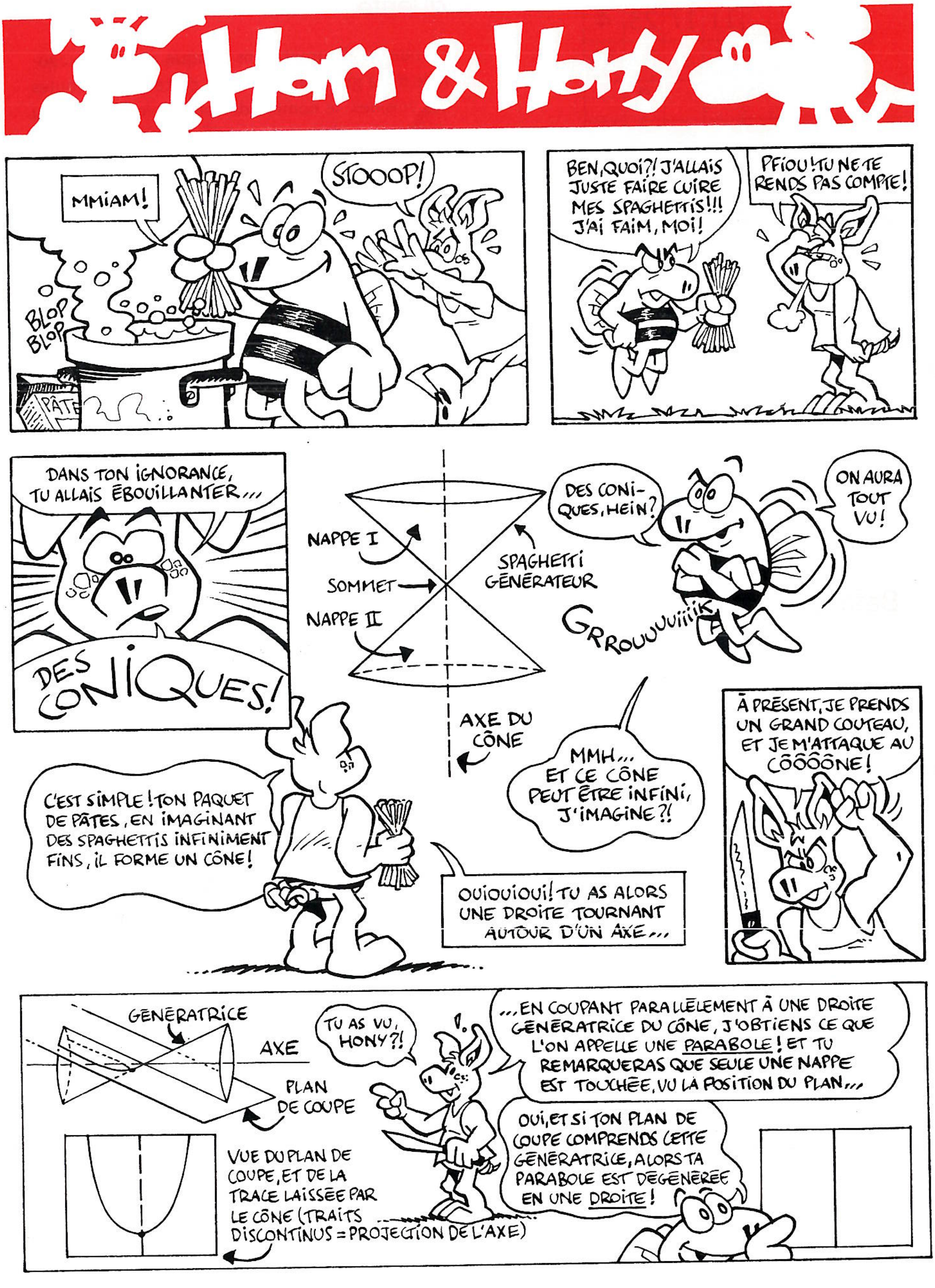
Grilles des moyennes

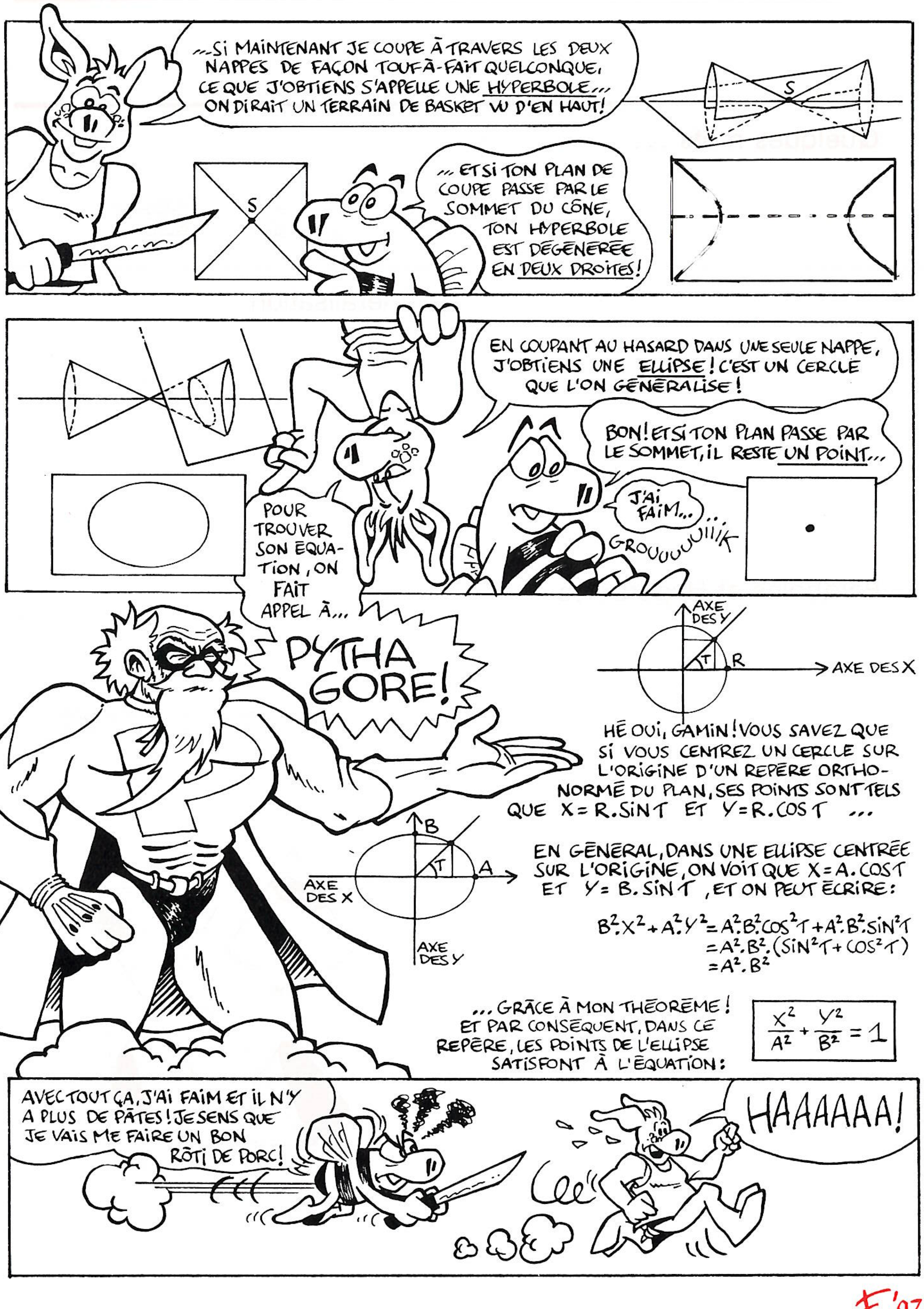
Complète les grilles ci-dessous en inscrivant, dans chaque case vide, la moyenne arithmétique des cases adjacentes.

	22	15	
13			9
30			1
	14	2	

	16	15	
20			47
27			52
	19	32	

Math-Jeunes n° 82, 34–35, 1997




...SI MAINTENANT JE COUPE À TRAVERS LES DEUX NAPPES DE FAÇON TOUT-À-FAIT QUELCONQUE, CE QUE J'OBTIENS S'APPELLE UNE HYPERBOLE... ON DIRAIT UN TERRAIN DE BASKET VU D'EN HAUT!
S
S
...ET SI TON PLAN DE COUPE PASSE PAR LE SOMMET DU CÔNE, TON HYPERBOLE EST DÉGÉNÉRÉE EN DEUX DROITES!
EN COUPANT AU HASARD DANS UNE SEULE NAPPE, J'OBTIENS UNE ELLIPSE! C'EST UN CERCLE QUE L'ON GÉNÉRALISE!
BON! ET SI TON PLAN PASSE PAR LE SOMMET, IL RESTE UN POINT...
J'AI FAIM...
GROUUUUUIIIK
POUR TROUVER SON ÉQUATION, ON FAIT APPEL À...
PYTHAGORE!
AXE DES Y
T
R
AXE DES X
HÉ OUI, GAMIN! VOUS SAVEZ QUE SI VOUS CENTREZ UN CERCLE SUR L'ORIGINE D'UN REPÈRE ORTHONORMÉ DU PLAN, SES POINTS SONT TELS QUE X = R.SIN T ET Y = R.COS T ...
B
T
A
AXE DES X
AXE DES Y
EN GÉNÉRAL, DANS UNE ELLIPSE CENTRÉE SUR L'ORIGINE, ON VOIT QUE X = A.COS T ET Y = B.SIN T, ET ON PEUT ÉCRIRE:
$B^2.X^2 + A^2.Y^2 = A^2.B^2.\cos^2 T + A^2.B^2.\sin^2 T$
$= A^2.B^2.(\sin^2 T + \cos^2 T)$
$= A^2.B^2$
...GRÂCE À MON THÉORÈME! ET PAR CONSÉQUENT, DANS CE REPÈRE, LES POINTS DE L'ELLIPSE SATISFONT À L'ÉQUATION:
$\boxed{\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1}$
AVEC TOUT ÇA, J'AI FAIM ET IL N'Y A PLUS DE PÂTES! JE SENS QUE JE VAIS ME FAIRE UN BON RÔTI DE PORC!
HAAAAAA!
F'97

Math-Jeunes n ° 82, 36–36, 1997

Les coniques vues par Ham et Hony

Frédéric Pourbaix, *Université de Mons-Hainaut*

Quelques mots . . .

Quelques temps après EUCLIDE, entre 262 et 180 avant J.-C., la théorie des coniques a été formalisée par APOLLONIUS DE PERGE dans le but de décrire les sections de cônes.

Ce n'est que fin du XVI^e siècle que Johannes KEPLER, sur base d'observations astronomiques, déduit que le mouvement des planètes ne peut qu'être basé sur des ellipses.

Au XVII^e siècle, dans son troisième livre des *Principia Mathematica*, Isaac NEWTON montre que les conclusions de KEPLER peuvent être déduites de faits expérimentaux beaucoup plus généraux (connues sous le nom de lois de NEWTON, comme la loi $F = m \cdot a$, . . .).

Paraboles et Hyperboles

Ham et Hony nous ont présenté l'équation d'une ellipse dans un repère orthonormé, lorsqu'elle est centrée sur l'origine de ce repère.

De même, on peut voir que l'équation d'une parabole, lorsque son sommet est sur l'origine du repère orthonormé, peut s'écrire :

$$\boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$$

où p est un nombre réel. Quant à l'équation d'une hyperbole lorsque ses deux axes de symétrie sont confondus avec les axes du repère orthonormé, elle est de la forme :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

où a et b sont tels que les deux asymptotes de l'hyperbole peuvent s'écrire :

$$\boxed{x = \frac{a}{b} \cdot y} \quad \text{et} \quad \boxed{x = -\frac{a}{b} y}$$

Généralisation

Amusez-vous ! Tout d'abord, essayez de trouver une formule générale pour résumer les trois types de coniques dans un repère orthonormé !

Puis, lors de vos longues soirées d'hiver où les diverses chaînes de télévision ne proposent que la 296^e rediffusion du *Gendarme de Saint-Tropez*, essayez plutôt de retrouver la formule générale donnant les coniques non nécessairement centrée sur l'origine du repère.

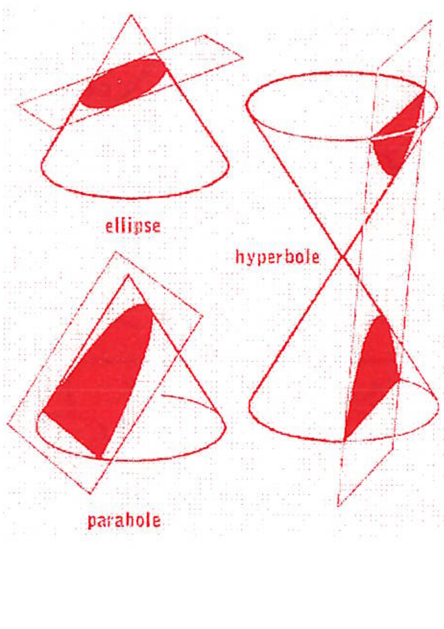
On suppose donc que les coniques peuvent être translatées, et peuvent avoir subi une rotation.

Vous devriez normalement retomber sur une formule du type :

$$\boxed{ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0}$$

où a, b, c, d, e et f sont des nombres réels tels que a, b et c ne sont pas simultanément nuls.

Bon amusement avec les cooooo. . . niques !



Les constructions à la règle et au compas

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Introduction

Dès le cinquième siècle avant Jésus-Christ — et peut-être même avant — les mathématiciens grecs se sont intéressés à des problèmes de géométrie dont la solution pouvait se construire au moyen de la règle (non graduée) et du compas. Quelles sont les causes qui peuvent expliquer un tel engouement pour la règle et le compas ? ... Jean-Claude CARREGA[2] avance plusieurs raisons :

• les courbes les plus simples sont la droite et le cercle et, les instruments les plus simples pour les construire sont évidemment la règle et le compas. Mais il admet que cette raison élémentaire n'explique pas nécessairement l'attachement profond des Grecs pour ce type de construction ;

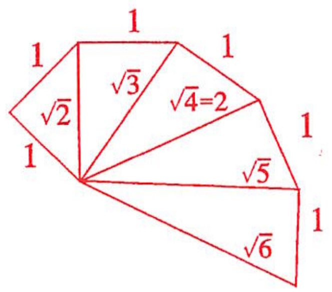
• l'influence de PLATON (-423, -348) et de son Académie n'est certainement pas négligeable. Pour PLATON, le cercle tracé au compas n'est qu'un modèle imparfait du cercle idéal répondant à la définition mathématique. Les figures tracées ne sont qu'un pâle reflet de la perfection qui appartient au monde des idées. PLATON n'aime guère les instruments de mesure ou de construction, fatalement imparfaits, mais il fait une exception pour la règle et le compas qui, à ses yeux, respectent la symétrie des configurations ;

• EUCLIDE a tenté de donner à la géométrie une base solide mais il n'y est pas nécessairement parvenu. Souvent le recours à une figure claire réalisée à l'aide d'instruments simples, tels la règle et le compas, est le bienvenu ;

• si les Pythagoriciens connaissaient bien les entiers naturels et les fractions d'entiers naturels, d'autre nombres firent entretemps leur apparition, $\sqrt{2}$, par exemple. Dans EUCLIDE, on trouve la démonstration du fait que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme de fraction $\frac{p}{q}$ où p et q sont des naturels non nuls. Le raisonnement est très simple :

Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et que nous supposons p et q premiers entre eux, ce qui signifie qu'ils n'ont aucun diviseur commun ou encore que la fraction a été simplifiée "au maximum" (fraction irréductible), alors $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ou encore, $p^2 = 2q^2$.
p^2 est donc un nombre divisible par 2, mais puisque c'est un carré, il est même divisible par 4 ! Donc p est divisible par 2 : $p = 2r$.
Ainsi, $2q^2 = 4r^2$ ou $q^2 = 2r^2$ et donc q est aussi un nombre pair, ce qui contredit le fait que p et q avaient été supposés n'avoir aucun diviseur commun ...

Il n'est pas interdit de penser que les constructions à la règle et au compas ont pu servir à cautionner l'existence de nombres tels que $\sqrt{2}$, constructions liées au théorème dit de PYTHAGORE.



Dans ses treize livres qui constituent *Les Éléments*, EUCLIDE (troisième siècle avant Jésus Christ) fait une synthèse remarquable des mathématiques de son époque. Il ne semble pas avoir découvert de grandes nouveautés, mais son originalité, si elle existe, se situe au niveau de la présentation des résultats connus (choix des axiomes, ...) Toutes les constructions géométriques étudiées s'effectuent uniquement à l'aide de la règle et du compas. Mais déjà bien avant EUCLIDE, comme il vient d'être signalé, les mathématiciens grecs s'étaient intéressés aux constructions à la règle et au compas et s'étaient heurtés à de grandes difficultés. Trois problèmes sont célèbres, la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle.

La quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné.

La duplication du cube consiste à construire à la règle et au compas l'arête d'un cube ayant un volume deux fois plus grand que le volume d'un cube donné.

La trisection de l'angle consiste à construire à la règle et au compas les demi-droites partageant un angle quelconque en trois angles égaux.

Tous ces problèmes sont insolubles si on limite les outils à la règle et au compas. En 1637, René DESCARTES (1596 – 1650) montre le lien existant entre les constructions à la règle et au compas et la résolution des équations du premier et du second degré. On trouve là un début de preuve de l'impossibilité de la duplication et de la trisection. En 1837, Pierre Laurent WANTZEL (1814 – 1848) précise les travaux de DESCARTES et donne une caractérisation algébrique des coordonnées des points constructibles à la règle et au compas. Il en résulte l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Enfin, en 1882, Ferdinand LINDEMANN (1852 – 1939) prouve la transcendance de π, ce qui signifie que π n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers, résultat qui permet de conclure à l'impossibilité de la quadrature du cercle. Il aura fallu vingt-quatre siècles d'étude pour arriver à cette conclusion !

Théorème de Mohr-Mascheroni

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Georg MOHR en 1672 et Lorenzo MASCHERONI en 1797. Il s'énonce ainsi :

> Tout point constructible à la règle et au compas est en fait constructible avec le compas seulement.

Une démonstration de ce théorème — ce que nous ne ferons pas ici — repose sur une méthode analytique, c'est-à-dire qu'elle fait intervenir les coordonnées des points constructibles au compas dans une certaine région du plan.

Parmi les nombreux problèmes posés et résolus par Lorenzo MASCHERONI, dans son ouvrage intitulé *Géométrie du compas*, on trouve celui-ci :

> Construire au compas seulement le centre d'un cercle donné sans son centre.

Cet énoncé est connu sous le nom de *problème de Napoléon*. Bonaparte, lors de la campagne d'Italie, avait rencontré MASCHERONI. De retour en France, il signala à l'Académie des Sciences l'œuvre de MASCHERONI et notamment le problème que nous venons de citer, pour lequel il donnait une solution personnelle (?). Pierre Simon de LAPLACE aurait alors dit : *Nous attendions tout de vous, général, sauf des leçons de géométrie.*

Il est facile de voir que le problème est trivial si on peut utiliser les deux instruments règle et compas.

Nous attendons tes propositions, ami lecteur ...

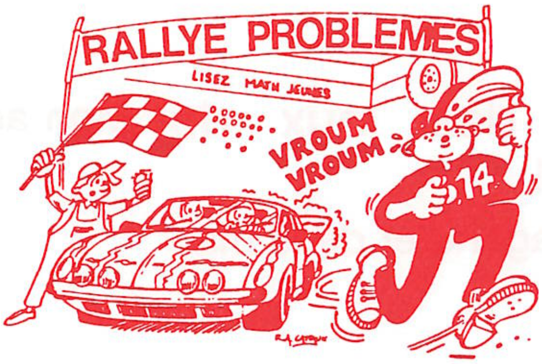
Bibliographie

[1] Michel BALLIEU, *La page du mathémartiste, in* Math-Jeunes, n° 80, 1997, p. 98 - 100.

[2] Jean-Claude CARREGA, *Théorie des Corps, La règle et le compas*, Édition Hermann, Paris 1981.

[3] EUCLIDE, *The thirteen Books of Elements*, translated with introduction by Sir Thomas L. Heath, Dover Puclications Inc., New York.

[4] Edmond MAZET, Université de Lille III, *Séminaire Euclide*, organisé par Altaïr, Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'ULB, conjointement avec l'Université de Mons-Hainaut, 1993.



C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1997 – 1998. Rappelons que les deux premiers problèmes concernent (en principe) les élèves de première et deuxième années, les deux suivants, les élèves de troisième et quatrième années et les deux derniers, les élèves de cinquième et sixième années.

Même si vous n'avez pu répondre qu'à un seul problème jusqu'à présent, ne vous découragez pas, vous pouvez encore figurer dans la liste des gagnants.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de *Math-Jeunes* et envoyez-les à Cl. Festraets, 36 rue J.B. Vandercammen à 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 13 février 1998.

* *

*

mini 3 Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1 000 et qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7 ?

mini 4 Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. Un jeune lecteur s'amuse à additionner tous les numéros des pages et trouve ainsi 1 998. Malheureusement son total est faux, car par erreur, une page a été comptée deux fois. Quel est le numéro de cette page ?

midi 3 Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur L articulés autour de deux points distants de L. Chaque essuie-glace couvre un demi-cercle dont le diamètre est situé sur le bord du pare-brise (assimilé à une ligne droite). Quelle est l'aire totale balayée ?

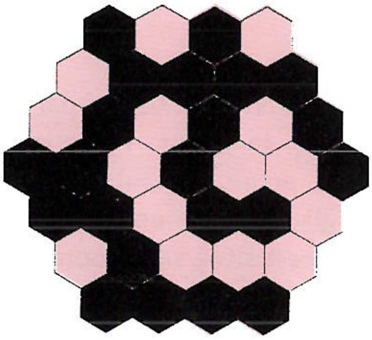
midi 4 Avec un billet de 100 BEF, j'ai acheté des timbres à 1 BEF, à 4 BEF et à 12 BEF. J'ai acheté au moins un timbre de chaque sorte et en tout 40 timbres. Peux-tu trouver combien j'ai acheté de timbres de chaque sorte ?

maxi 3 De la ville A située sur la rive d'un fleuve, on doit envoyer régulièrement des marchandises vers la ville B située à 100 km en aval et à 40 km de la rive (on suppose que le cours du fleuve est une ligne droite). On décide de tracer une route allant de la rive du fleuve vers la ville B. Le prix du transport de marchandises par le fleuve est deux fois moindre que par route. Comment faut-il tracer la route pour que le prix du transport de A vers B soit minimum ?

maxi 4 Un adolescent écrit son âge après celui de son père. De ce nombre de quatre chiffres, il soustrait la valeur absolue de la différence de leurts âges et trouve 4 289. Quels sont leurs âges respectifs ?

Solutions des jeux du numéro 81

Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Le mur des nombres

236				
109	127			
55	54	73		
33	22	32	41	
16	17	5	27	14

Solutions des jeux de ce numéro

Le mot caché

Le nom du mathématicien est Évariste GALOIS.

Ma revue préférée

18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25

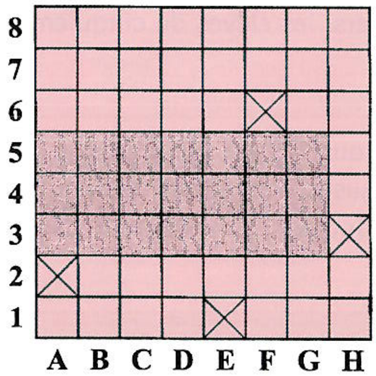
En associant (1,A), (2,B), (3,C), ..., (25,Y), on trouve bien évidemment la revue *Math-Jeunes*.

Mon activité favorite

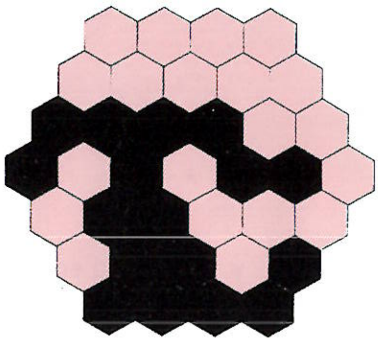
15	18	21	4	7
24	2	10	13	16
8	11	19	22	5
17	25	3	6	14
1	9	12	20	23

Il s'agit ici des *Olympiades*.

Bataille navale



Jeu de l'hexagone et de la marguerite



Grilles des moyennes

	22	15	
13	16	12	9
30	17	8	1
	14	2	

	16	15	
20	23	30	47
27	26	35	52
	19	32	

Elle naquit également en décembre, cette mathématicienne qui joua un rôle non négligeable dans la vie de Charles Babbage. Très exactement le 10 décembre 1815 à Picadilly, Middlesex (aujourd'hui à Londres). Son nom : Lady Augusta Ada King, comtesse de Lovelace.

Fille du poète Lord Byron, elle ne connut pas ses parents qui se séparèrent peu après sa naissance. Elle fut éduquée par des tuteurs et reçut de De Morgan un enseignement mathématique de haut niveau.

Elle rencontra Babbage le 5 juin 1833 lors d'une party ; il lui fit une forte impression. Le 21 juin, elle assistait avec sa mère à l'une des soirées qu'il donnait et au cours de laquelle elle s'intéressa beaucoup à l'*Analytical Engine*.

Dix ans plus tard, elle publie une traduction avec notes du travail de L.F. Menabrea intitulé *Notions sur la machine analytique de Charles Babbage* (1842). Dans ses notes, elle décrit comment on peut programmer la machine pour calculer les nombres de (Jacob) Bernoulli.

De l'*Analytical Engine*, elle dira : *Il tisse des motifs algébriques comme le métier à tisser de Jacquard tisse des fleurs et des feuilles.*

Elle mourra le 27 novembre 1852 à Marylebone (Londres).