1998

Math-Jeunes

19e année
Janvier 1998 — n° 83
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, R.MIDAVAINE, G.NOËL, A.PARENT, F.POURBAIX, G.ROBERT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX et F.POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).
Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :
Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 83 Dix-neuvième année 1998

Math-Jeunes

Michel Ballieu, **Charles Ludwidge Dodgson** 42

45 *Guy Noël et Yolande Noël-Roch,* **Un peu d'histoire : les chiffres de Monseigneur Lemaître**

Claude Villers, **Pair ou impair : c'est super !!! (3)** 49

51 *Rallye-Problèmes*

Jeux 55

57 *Vingt-troisième Olympiade Mathématique Belge*

Pierre Marlier, **Problème de géométrie élémentaire** 59

62 *Michel Ballieu,* **Les constructions à la règle et au compas**

Math-Jeunes n° 83, 42–44, 1998

Charles Ludwidge DODGSON

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

Charles Ludwidge **DODGSON** naquit le 27 janvier 1832 à Daresbury, Cheshire (Grande-Bretagne). Fils d'un clergyman, il fréquenta la *Rugby School* de 1846 à 1850 puis obtint avec brio le diplôme de mathématiques au *Christ Church College* (Oxford University) en 1854. Si bien que, jusqu'en 1881, il enseignera les mathématiques dans ce même *College* d'Oxford.

Il consacra une partie de sa vie à écrire des traités et des ouvrages mathématiques à l'usage des étudiants. Martin **GARDNER** dit de lui qu'il était un mathématicien compétent mais pas très créatif, que ses principales contributions concernent les « récréations mathématiques ».

Son sens profond de la beauté mathématique, se mêlant à un grand intérêt pour les jeux l'amènent à avoir un penchant certain pour les puzzles, paradoxes logiques, trucs de magie, énigmes, calembours, anagrammes, vers acrostiches, ... qu'il publiera sous un pseudonyme qui t'est peut-être plus familier que **DODGSON**. Il aimait également beaucoup les jeux de cartes et les échecs, ce qui aura une influence non négligeable sur certaines de ses publications ... littéraires !

Bien qu'ordonné diacre le 22 décembre 1861, il ne sera jamais prêtre, en partie parce qu'il était quelque peu bègue, mais surtout sans doute parce qu'il s'était découvert d'autres centres d'intérêt. L'un d'eux, la photographie, va donner une orientation inattendue à sa vie a priori de mathématicien.

Harry **FURNISS**, qui a illusré au moins une de ses œuvres littéraires, écrit dans *The Confessions of a Caricaturist*, publiées en 1902 :

> *The name of Charles Ludwidge Dodgson is practically unknown outside of Oxford University, where he was a mathematical lecturer of Christ Church,; but the name and fame of « Lewis Carroll » author of these inimitable books for children, both young and old, « Alice's Adventures in Wonderland » and « Through the Looking-glass and what Alice found there » are known and beloved all over the world.*

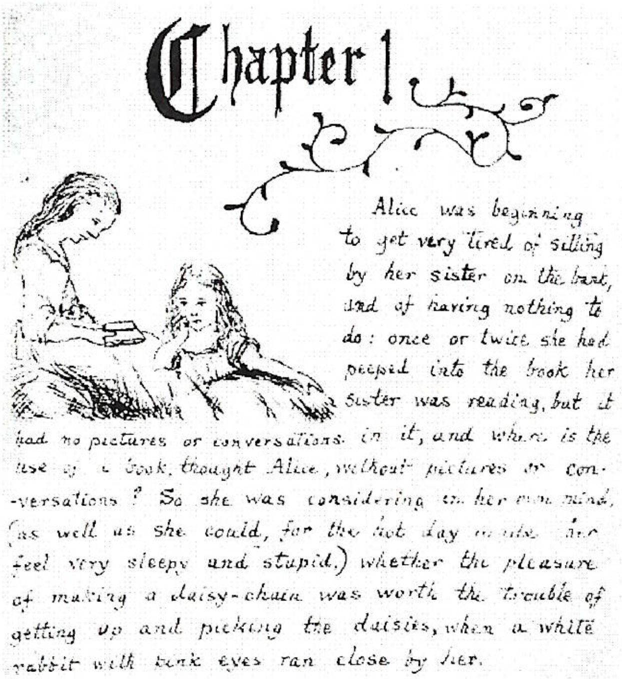
Nous y voilà ... Charles Ludwidge **DODGSON** n'est autre que le véritable nom de Lewis **CARROLL** , l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*, l'une de ses œuvres les plus connues.

Comme nous l'avons dit, l'un de ses passe-temps favoris était la photographie et il avait pris l'habitude de prendre pour modèle l'une des trois filles de Henry George **LIDDELL** qui avait été élu Doyen de Christ Church en 1855.

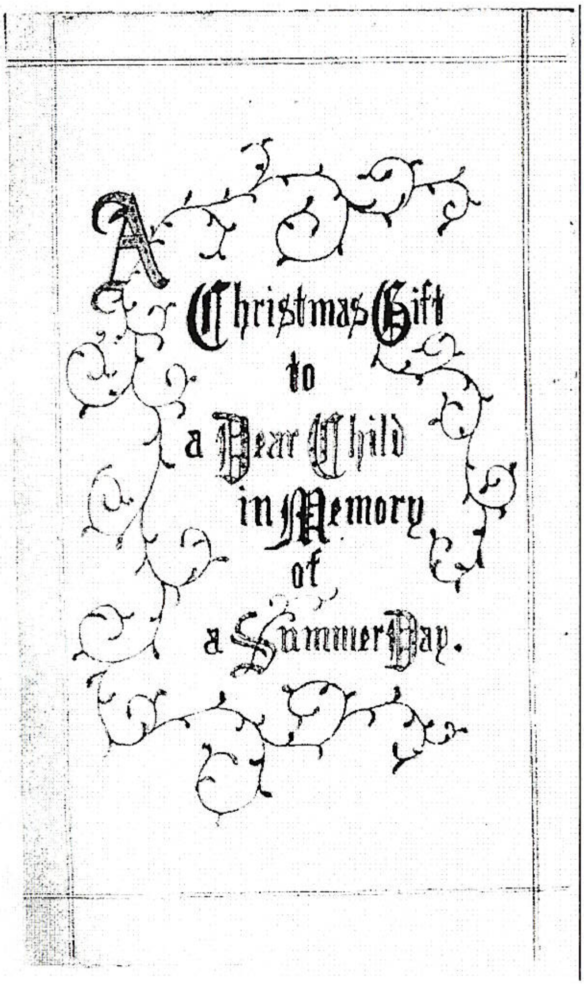
Le 4 juillet 1862 à Oxford, lors d'une promenade en barque sur la rivière Isis (un affluent de la Tamise) avec son ami Robinson **DUCKWORTH** et les trois filles du Doyen **LIDDELL**, il eut l'idée d'écrire cette féerie bien connue « Alice au pays des merveilles ». Il y eut plusieurs versions : le titre original était *Alice's Adventures under Ground*. Ce premier écrit réalisé vers février 1863 fut détruit probablement par **CARROLL** lui-même en 1864, lorsqu'il prépara une copie manuscrite plus élaborée — avec trente-sept illustrations de sa main — qu'il offrit comme cadeau de Noël 1864 à Alice **LIDDELL**.

Le texte commence ainsi :

Alice commençait à se sentir lasse de n'avoir rien à faire, assise sur le talus à côté de sa sœur : une fois ou deux, elle avait jeté un coup d'œil sur le livre que lisait sa sœur, mais il n'y avait dans ce livre ni images, ni dialogues ; et, pensait Alice, à quoi peut bien servir un livre sans images ni dialogues ? Ainsi, elle était en train de se demander (autant qu'elle le pouvait, car la chaleur de cette journée lui engourdissait plutôt l'esprit) si le plaisir de tresser une guirlande de pâquerettes valait la peine qu'elle se levât pour cueillir les pâquerettes, lorsqu'un lapin blanc aux yeux roses s'approcha d'elle en courant.


Chapter 1.

Alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank, and of having nothing to do: once or twice she had peeped into the book her sister was reading, but it had no pictures or conversations in it, and where is the use of a book, thought Alice, without pictures or conversations? So she was considering in her own mind, (as well as she could, for the hot day made her feel very sleepy and stupid,) whether the pleasure of making a daisy-chain was worth the trouble of getting up and picking the daisies, when a white rabbit with pink eyes ran close by her.



Durant sa vie qui s'achèvera suite à une bronchite le 14 janvier 1898 à Guilford dans le Surrey, seront publiés (liste non exhaustive des principaux ouvrages) :

- la version définitive de *Alice's Adventures in Wonderland* (1865).
- *Phantasmagoria and other Problems* (1869).
- *Through the Looking-glass* (1871).
- *Sylvie and Bruno* (1873).
- *The Hunting of the Snark* (1874).
- *Euclid and his modern rivals* (1879, sous son vrai nom).
- *A Tangled Tale* (1885).
- *The Game of Logic* (1887).
- *Pillow Problems* (1893).
- *What the Tortoise said to Achilles* (1894).
- *Symbolic Logic* (1896).

Parmi les jeux de mots auxquels il s'est intéressé, il qualifiait de *doublet* celui dont le but était de lier deux mots donnés (qui, de préférence ont un certain rapport entre eux) de même longueur par une chaîne, tout en respectant certaines règles. Sans entrer dans les détails, voici un exemple de ce qu'il appelait *doublet* qui fait passer de HEAD (tête) à TAIL (queue) :

HEAD	tête
HEAL	guérir
TEAL	sarcelle
TELL	raconter
TALL	grand
TAIL	queue

Tu peux facilement imaginer qu'il est possible de transposer ce type de jeu en langue française ... Par exemple, sur un thème ancien :

EAU	flotte
PAU	ville de France
PEU	ou rien ?
FEU	rouge ?
FER	blanc ?
FAR	gâteau breton
FAN	de qui ?
FIN	non, ce ne l'est pas vraiment ...
VIN	!!!

et ... cela s'est passé à Cana, paraît-il ! Mais nous implorons ton pardon, ami lecteur, pour avoir succombé à une aussi vile tentation ...

À toi maintenant de nous envoyer tes meilleurs *doublets*, que nous ne manquerons pas de publier.

Bibliographie

[1] Lewis CARROLL, *Alice's Adventures under Ground, A facsimile of the 1864 manuscript*, Introduction by Martin GARDNER, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-21482-6.

[2] Lewis CARROLL, *Alice's Adventures in Wonderland* (édition bilingue), Aubier Flammarion, Paris, 1970.

[3] Lewis CARROLL, *Through the Looking-glass and The Hunting of the Snark* (édition bilingue), Aubier Flammarion, Paris, 1971.

[4] Lewis CARROLL, *The Humorous Verse of Lewis Carroll*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-20654-8.

[5] Lewis CARROLL, *Logique sans peine*, Hermann, 1982, ISBN 2-7056-55441.

[6] Lewis CARROLL, *Pillow Problems and a Tangled Tale*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-20493-6.

[7] Lewis CARROLL, *Sylvie and Bruno*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-25588-3.

[8] Lewis CARROLL, *Symbolic Logic and Game of Logic*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-20492-8.

[9] Martin GARDNER, *The Universe in a Handkerchief*, Copernicus, An Imprint of Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-94673-X.

[10] Edward WAKELING, *Lewis Carroll's Games and Puzzles (a compilation)*, Dover Publications, Inc., New York in association with the Lewis Carroll birthplace Trust, Daresbury, Cheshire, England, ISBN 0-486-26922-1.

[11] *Dictionnaire des Auteurs*, Laffont-Bompiani, Collection Bouquins, ISBN 2-221-50150-0.

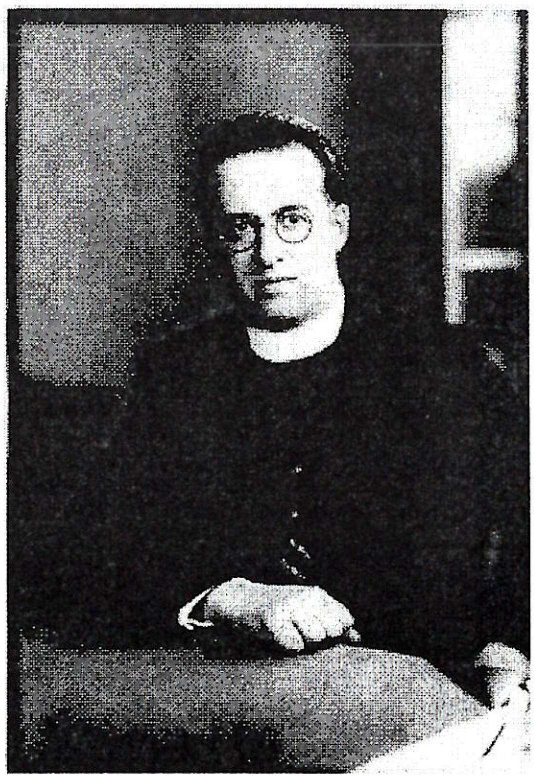
[12] *The MacTutor History of Mathematics Archive*, adresse internet http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Un peu d'histoire : les chiffres de Monseigneur LEMAÎTRE

Guy Noël et Yolande Noël-Roch

1. Monseigneur Georges LEMAÎTRE, 1894–1966

Peut-être avez-vous déjà entendu parler de Mgr Georges **LEMAÎTRE** ? Professeur à l'Université Catholique de Louvain, il était aussi membre de l'Académie Royale de Belgique et président de l'Académie Pontificale des Sciences. Mais il est surtout connu pour ses travaux en cosmologie. C'est lui qui eut l'idée du **big bang**, cette explosion d'un **noyau primitif** d'où serait né l'univers. Une explosion qui n'aurait pas fini de produire ses effets puisque les objets dont est composé l'univers continueraient de s'éloigner les uns des autres à une vitesse prodigieuse.



Ce n'est pas de cosmologie que nous allons nous préoccuper aujourd'hui, mais d'un autre sujet, bien plus terre à terre, que Mgr **LEMAÎTRE** n'avait cependant pas jugé indigne de ses préoccupations.

Le 3 juillet 1954, Mgr **LEMAÎTRE** présente à l'Académie Royale de Belgique une communication intitulée *Comment calculer?* Donnons-lui la parole afin qu'il nous explique ses idées ([1])

Prius Sedens Cogitat

Luc XIV

Ce texte de l'évangile de saint Luc évoque un des plus anciens calculs dont l'humanité a gardé le souvenir; le bâtisseur s'assied et pense en vue d'évaluer les frais auxquels s'élèvera la construction de la tour qu'il rêve de bâtir.

On acceptera volontiers qu'il est difficile de ne pas s'asseoir pour calculer et peut-être croira-t-on qu'il est impossible en tous cas de le faire sans penser.

Et pourtant, si les machines ne pensent pas, pourquoi les hommes seraient-ils obligés de le faire ? Pourquoi ne parviendraient-ils pas à calculer « machinalement » et à réduire leur intervention proprement humaine à ce minimum qu'ils exercent en mettant la machine en marche.

([1]) Le texte reproduit ici est extrait de la brochure

Ainsi, Mgr **Lemaître** veut rendre l'homme capable de calculer sans réfléchir, comme une machine, de façon à libérer l'esprit pour des tâches plus nobles. Voilà qui peut vous paraître curieux. S'il ne voulait pas se fatiguer à faire des calculs, pourquoi Mgr **Lemaître** ne les faisait-il tout simplement pas à la machine ?

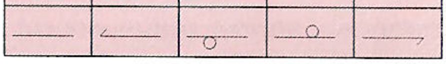
Il faut se rappeler qu'en 1954, les ordinateurs étaient inconnus du grand public. Même les universités n'en disposaient pas. Par exemple, ce n'est qu'aux environs de 1965 que l'Université Libre de Bruxelles acquit son premier ordinateur. Encore cet appareil était-il bien moins puissant que les PC que l'on trouve actuellement dans tous les bureaux, laboratoires et peut-être même chez vous. Quant aux calculatrices électroniques de poche, elles ne datent que du début des années 70 !

Mgr **Lemaître** n'avait à sa disposition que des machines à calculer mécaniques ou électro-mécaniques, des machines bruyantes, lourdes, lentes et encombrantes, des machines peu commodes, ne disposant d'aucune mémoire. Pour chaque opération, il fallait introduire les nombres, puis noter le résultat, avant de pouvoir passer à l'opération suivante. Souvent, un bon calculateur travaillait plus vite que les machines. Rien d'étonnant à ce que Mgr **Lemaître**, qui avait certainement beaucoup de calculs à effectuer, ait cherché à mettre au point un système lui permettant de « calculer sans fatigue ». C'est ce système que nous allons décrire.

2. De nouveaux chiffres

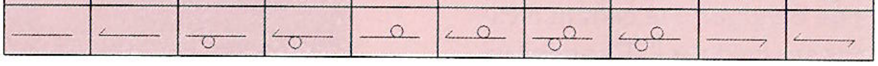
Mgr **Lemaître** commence par inventer de nouveaux chiffres en vue d'écrire les nombres. Il décide d'utiliser cinq signes élémentaires, qui remplaceront 0, 1, 2, 4 et 8. En voici les dessins.

0	1	2	4	8



Mais, comment écrire 3, 5, 6, 7 et 9 ? Très simple : puisque $3 = 2 + 1$, pour écrire 3, on superpose les dessins de 1 et de 2 : 3 s'écrit . On procède de la même manière pour les autres nombres, en les décomposant en sommes de 1, 2, 4 et 8 : $5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 2 + 4$ et $9 = 1 + 8$. On obtient ainsi le tableau suivant :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

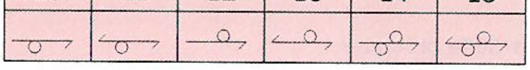


Avec les 4 signes , , et , on peut écrire n'importe lequel des chiffres de 1 à 9, un signe n'apparaissant jamais deux fois dans un chiffre donné. Le chiffre 0 s'obtient en n'utilisant aucun des quatre signes précédents : il ne subsiste que la barre horizontale.

On remarque que les signes qui constituent un chiffre donné se succèdent toujours **de gauche à droite** : le trait du 1 précède la boucle du 2, laquelle est à gauche de la boucle du 4. À l'extrême droite vient le trait du 8.

Mais par ce procédé, il est évidemment possible d'écrire d'autres nombres à l'aide d'un seul chiffre. Par exemple, puisque $10 = 2 + 8$, nous pouvons écrire 10 sous la forme . De cette manière, nous pouvons aller jusque 15, qui utilise les 4 signes élémentaires autres que 0. On complète ainsi le tableau ci-dessus par le suivant :

10	11	12	13	14	15



Comment continuer ? Il faut trouver un moyen d'écrire 16, puis 17, 18, ... Le problème est analogue à celui qui se présente dans le système décimal usuel : après avoir écrit les nombres de zéro à neuf, il faut trouver un moyen d'écrire dix, onze, douze, ... La solution est alors d'utiliser deux chiffres : dix s'écrit 10 ce qui signifie $1 \times$dix$+0$. Onze s'écrit 11 car onze vaut $1 \times$dix$+1$, ..., trois mille neuf cent vingt s'écrit 3920 faisant apparaître la décomposition en 3 milliers, 9 centaines, 2 dizaines et 0 unité.

Avec les chiffres de Mgr **LEMAÎTRE**, nous pouvons procéder de la même manière en faisant apparaître d'abord des « seizaines » :

16 vaut une seizaine, c'est-à-dire 1 seizaine + 0 unité. Nous pourrions l'écrire . Mais avec Mgr **LEMAÎTRE**, nous allons l'écrire . De cette façon, nous respectons l'ordre gauche – droite utilisé pour les signes qui représentent 1, 2, 4, 8.

De même 17 vaut 1 unité + 1 seizaine. Nous l'écrirons . $18 (= 2 + 1 \times 16)$ s'écrit , ... Le plus grand nombre que nous pouvons écrire avec deux chiffres est , c'est-à-dire quinze + quinze seizaines.

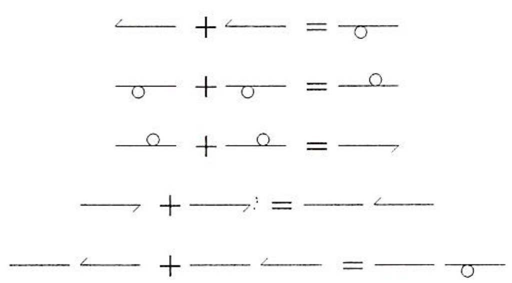
Le nombre suivant est seize seizaines, c'est-à-dire seize au carré (256). Le rôle joué en décimal par la centaine (« 100-aine ») va être, dans notre système, joué par la « 256-aine ». Trois chiffres sont nécessaires pour écrire ce nombre : $256 =$. Ensuite le système continue de la même façon : $257 =$, ..., $3920 =$, c'est-à-dire unité + seizaines + 256-aines.

Question : Quels sont les plus petits nombres nécessitant 4 chiffres, 5 chiffres, ... ?

3. Additionner sans fatigue

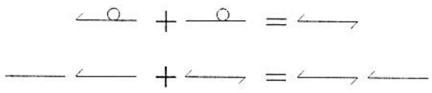
Pour additionner deux nombres, le premier principe à appliquer est de juxtaposer des signes élémentaires différents. Par exemple (traduisez en décimal) :

Quand un signe donné apparaît dans les deux termes d'une somme, on le remplace par un signe du rang suivant, ce qui amène parfois à introduire un chiffre supplémentaire :

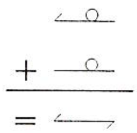


......

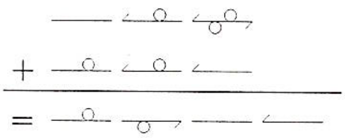
Ainsi :



Rien n'empêche de disposer les calculs de la façon habituelle :



On contrôle ainsi mieux le calcul à effectuer. Lorsqu'un même signe apparaît à la même position dans les deux termes à additionner, on le remplace par un signe du rang suivant. Celui-ci doit alors se combiner avec le ou les signes identiques figurant dans les deux termes. Considérons l'exemple suivant :



Les premiers chiffres des deux nombres sont et . Ils n'ont pas de signe commun. Il suffit de les superposer. Le premier chiffre de la somme est donc .

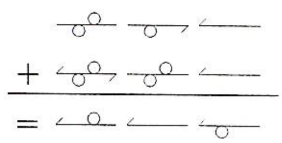
Les seconds chiffres des deux nombres sont et . Ils comportent tous deux , qui sera donc remplacé par . De même les deux seront remplacés par . Le second chiffre de la somme est donc .

Regardons enfin les troisièmes chiffres : et . Tous deux commencent par . Il apparaît ainsi un . Mais le premier terme comportait aussi un . Nous en avons donc deux, ce qui fait apparaître un , lequel va à son tour se combiner avec le du premier terme, etc. Finalement nous nous retrouvons avec deux , ce qui nous amène à introduire un chiffre supplémentaire ne comportant que le signe .

Cette procédure montre pourquoi Mgr **Lemaître** tenait à écrire les nombres de gauche à droite : de cette façon lorsque nous lisons un nombre, nous rencontrons les chiffres dans le même ordre, c'est-à-dire dans l'ordre dans lequel nous les manipulons lorsque nous calculons.

Dans la disposition habituelle de l'addition écrite, telle qu'on l'utilise dans la vie courante, nous devons renverser le sens normal de lecture, puisque le chiffre des unités est situé à l'extrême droite. Comparez les deux additions suivantes :

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 6 \\ +\ 3\ 6\ 7 \\ \hline =\ 8\ 2\ 3 \end{array}$$



Des règles analogues s'appliquent à la soustraction, essayez de les énoncer.

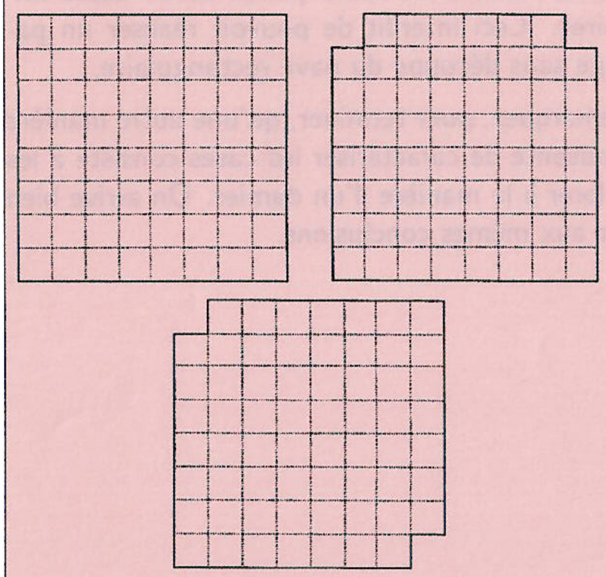
Dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*, nous aborderons le problème de la multiplication. Réfléchissez-y !

Pair ou impair : c'est super !!! (3)

Claude Villers

Un problème de pavage !

Mathieu avait disposé devant lui trois figures planes.
La première était un carré de côté 8 (l'unité n'importe pas).
La deuxième provenait d'un carré identique au précédent mais dont on avait enlevé deux carrés de côté 1 dans deux « coins » consécutifs (c'était donc devenu un octogone).
La troisième provenait d'un carré identique au premier mais dont on avait enlevé deux carrés de côté 1 dans deux « coins » opposés (c'était donc devenu un octogone également).
Mathieu avait reçu pour mission de paver ces trois polygones à l'aide dedalles rectangulaires 1×2 qui ne peuvent être coupées (1 et 2 sont les dimensions des dalles dans l'unité utilisée pour les polygones).



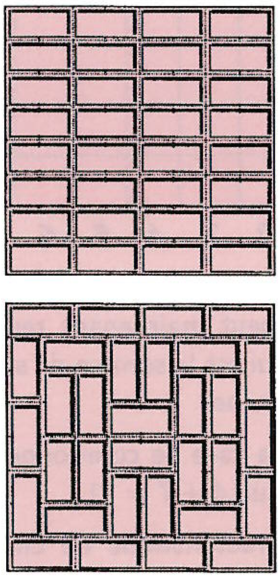
Pouvez-vous aider Mathieu à réaliser ces pavages ?
Pour ce faire, munissez-vous d'une feuille de papier quadrillé et d'un crayon. Bonne recherche !

Avez-vous réussi à créer ces pavages ?

Des pavages du carré se construisent assez facilement, vous en trouverez, ci-dessous, deux exemples parmi tant d'autres.

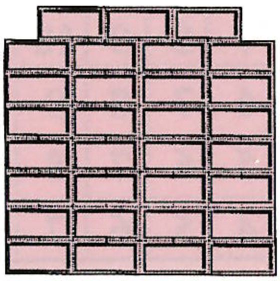
Comme chaque pavé utilisé recouvre deux cases unitaires et que le carré se compose de 64 cases unitaires (8×8), il ne semble pas y avoir d'impossibilité dans la réalisation d'un pavage.

Il n'en aurait pas été de même si Mathieu avait dû paver un carré 9×9, par exemple.



Les octogones, quant à eux, comportent 62 cases unitaires $(64 - 2)$. Rien ne s'oppose donc à ce qu'on essaye de les paver avec des rectangles 1×2.

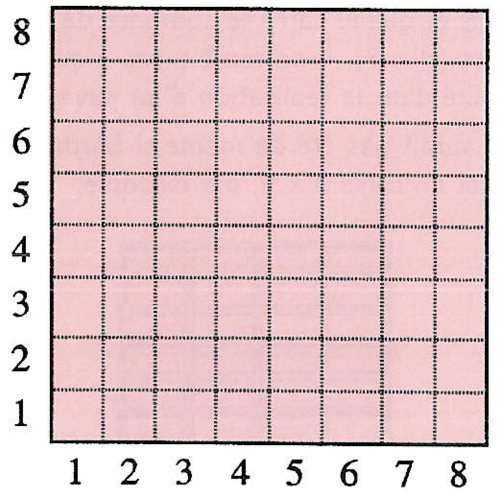
Le premier de ces octogones se pave sans grandes difficultés. En voici un exemple.



Le problème se corse quand on essaye de paver le deuxième octogone.

Peut-être vous y êtes-vous cassé les dents en concluant que le problème était certainement sans solution ?

Tentons de prouver cette impossibilité ; à cet effet, numérotons de 1 à 8 les lignes et les colonnes du carré. La numérotation proposée n'est pas la seule possible.



Chaque case peut maintenant recevoir une caractéristique qui est la somme de ses numéros de ligne et de colonne.

Par exemple, la case de coordonnée (4,7) reçoit la caractéristique $4 + 7 = 11$.

Écrivons la caractéristique de chacune des 64 cases.

9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9

Constatez que les caractéristiques varient de 2 à 16 (elles se répètent donc) et, fait important, qu'elles sont paires ou impaires.

Observez aussi comment elles se disposent : les nombres pairs et les nombres impairs alternent aussi bien dans les lignes que dans les colonnes.

Que va alors recouvrir chaque pavé rectangulaire ?

La réponse est simple : il va recouvrir une case paire et une case impaire.

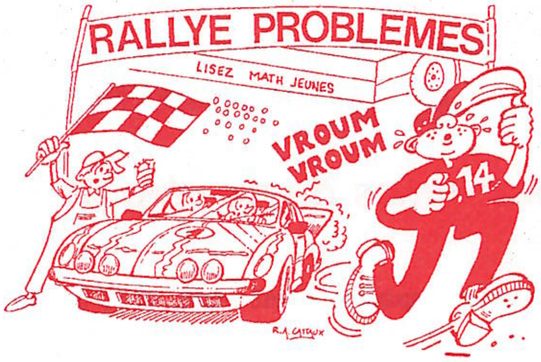
Une condition nécessaire **mais non suffisante** pour pouvoir paver un polygone est donc qu'il comporte autant de cases paires que de cases impaires.

C'est le cas du carré qui comporte 32 cases paires et 32 cases impaires.

C'est aussi le cas du premier octogone qui provient du carré dont on a enlevé une case paire et une case impaire et qui comporte donc 31 cases paires et 31 cases impaires.

Par contre, le deuxième octogone provient du carré dont on a enlevé deux cases paires ou deux cases impaires et qui ne comporte donc plus le même nombre de cases paires et de cases impaires. Ceci interdit de pouvoir réaliser un pavage sans découpe du pavé rectangulaire.

Remarquez, pour terminer, qu'une autre manière amusante de caractériser les cases consiste à les colorer à la manière d'un damier. On arrive bien sûr aux mêmes conclusions.



C. Festraets

Voici les derniers problèmes de ce rallye 1997 – 1998.

N'oubliez pas d'envoyer vos solutions sur des feuilles séparées (ne mettez pas la solution d'un problème au recto et celle d'un autre au verso d'une même feuille). Ces solutions doivent parvenir au plus tard le 20 mars 1998 à Cl. FESTRAETS, 36 rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

⋆ ⋆

⋆

mini 5 La « factorielle » d'un nombre naturel non nul n est désignée par $n!$ et est égale au produit de tous les naturels inférieurs ou égaux à n ; par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Quel est le chiffre des unités de la somme

$$S = 1!+2!+3!+\cdots+99!+100!\ ?$$

mini 6 Dans chaque case d'un échiquier 8×8, on écrit un nombre, soit 0, soit 1, soit -1. On fait alors la somme des nombres écrits dans chacune des colonnes, dans chacune des lignes et dans chacune des deux diagonales. Est-il possible que ces sommes soient toutes différentes ?

midi 5 Trois cercles passent par l'origine d'un système d'axes rectangulaire. Le centre du premier cercle est dans le premier quadrant, le centre du deuxième cercle, dans le deuxième quadrant et celui du troisième cercle, dans le troisième quadrant. Soit P un point situé à l'intérieur des trois cercles. À quel quadrant le point P appartient-il ?

midi 6 Deux horloges similaires en apparence portent, comme il est d'usage, les chiffres de 1 à 12. Elles indiquent actuellement l'heure exacte. L'une gagne une seconde toutes les heures et l'autre gagne trois secondes toutes les deux heures. Dans combien de jours les deux horloges indiqueront-elles à nouveau simultanément l'heure exacte ?

maxi 5 On considère le tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \cdots & 1\,995 & & 1\,996 & & 1\,997 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \cdots & & 3\,991 & & 3\,993 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & & \cdots & & & 7\,984 & & \\
& & & & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

dans lequel, à partir de la deuxième ligne, chaque nombre est la somme des deux nombres situés à droite et à gauche au-dessus de lui.

Démontrer que le dernier nombre de ce tableau est un multiple de 1 997.

maxi 6 Démontrer que tout nombre premier distinct de 2 et de 5 possède au moins un multiple de la forme $111\ldots11$ (son écriture en numération décimale ne comporte que des chiffres 1).

Solution des problèmes du numéro 81

mini 1 Une seule des trois propositions est vraie, donc les deux autres sont fausses. Si la première est vraie, alors

A est rouge $\qquad$ B est rouge $\qquad$ C est bleu

ce qui est impossible, puisqu'il n'y a pas deux cubes de la même couleur. Si la deuxième est vraie, alors

A n'est pas rouge $\qquad$ B n'est pas rouge $\qquad$ C est bleu

ce qui est à nouveau impossible, car le cube rouge n'est ni A, ni B, ni C. Si la troisième est vraie, alors

A n'est pas rouge $\qquad$ B est rouge $\qquad$ C n'est pas bleu

donc A est bleu, B est rouge et C est blanc.

mini 2 Solution de C. TROESSAERT, 1e année, Institut Centre Ardenne de Libramont.

Soit L la distance entre A et B. La vitesse du bateau à l'aller est de $\frac{L}{5}$ et la vitesse du bateau au retour est de $\frac{L}{7}$. On les soustrait pour avoir le double de la vitesse du courant. Cela donne $\frac{L}{5} - \frac{L}{7} = \frac{7L - 5L}{35} = \frac{2L}{35}$. On divise cette différence par 2, ce qui donne la vitesse du courant $\frac{L}{35}$. Donc le radeau mettra 35 heures pour aller de la ville A à la ville B.

Autre solution : chacun sait qu'il faut 3 heures pour parcourir 300 km à la vitesse 100 km/h. Autrement dit, la distance parcourue par un mobile est égale à la vitesse moyenne de ce mobile, multipliée par le temps de parcours (avec, bien entendu, des unités convenables ; ici les distances sont mesurées en km, le temps en h et les vitesses en km/h).

Désignons par V la vitesse du bateau et par v celle du courant. Lorsque le bateau descend le fleuve, sa vitesse propre s'additionne à celle du courant, tandis que lorsqu'il remonte le fleuve, sa vitesse propre est diminuée de celle du courant.

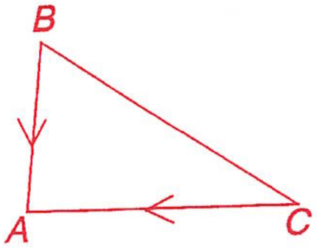
La distance de A à B est donc égale à $(V + v) \cdot 5$ en descendant le courant et à $(V - v) \cdot 7$ en le remontant, ce qui donne : $(V + v) \cdot 5 = (V - v) \cdot 7$ ou $5V + 5v = 7V - 7v$, c'est-à-dire $12v = 2V$ ou $V = 6v$. La distance de A à B est égale à $(6v + v) \cdot 5 = 35v$, ce qui nous indique que le radeau, qui a uniquement la vitesse v du courant, mettra 35 heures pour aller de A à B.

midi 1 Soient x le nombre d'œufs de la première paysanne et $(100-x)$ celui de la seconde. Si la première avait eu $(100-x)$ œufs, elle les aurait vendus pour 450 BEF ; elle vend donc ses œufs à $\frac{400}{100-x}$ BEF pièce. Si la deuxième avait eu x œufs, elle les aurait vendus pour 200 BEF ; elle vend donc ses œufs à $\frac{200}{x}$ BEF pièce.

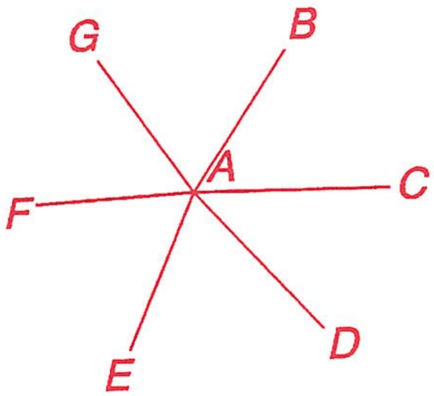
La première paysanne a ainsi vendu ses x œufs pour un total de $\left(x \cdot \frac{450}{100-x}\right)$ BEF et la deuxième a vendu ses $(100-x)$ œufs pour un total de $(100-x) \cdot \frac{200}{x}$ BEF.

Comme elles ont gagné la même somme d'argent, nous obtenons l'équation $x \cdot \frac{450}{100-x} = (100-x) \cdot \frac{200}{x}$, ce qui donne successivement $x^2 \cdot 450 = (100-x^2) \cdot 200$, $450x^2 = (10\,000 - 200x + x^2) \cdot 200$ et $450x^2 = 2\,000\,000 - 40\,000x + 200x^2$. Finalement, on obtient une équation du second degré $x^2 + 160x - 8\,000 = 0$ dont les solutions sont 40 et -200. Puisque le nombre d'œufs ne peut être négatif, la première paysanne avait 40 œufs et la seconde, 60.

midi 2 Considérons trois personnes occupant les positions A, B et C et supposons que A reçoive deux tartes envoyées par B et C. Si B envoie sa tarte sur A et pas sur C, c'est que la distance $|BA|$ est plus courte que la distance $|BC|$ et si C envoie sa tarte sur A, et pas sur B, c'est que la distance $|CA|$ est plus courte que la distance $|CB|$.

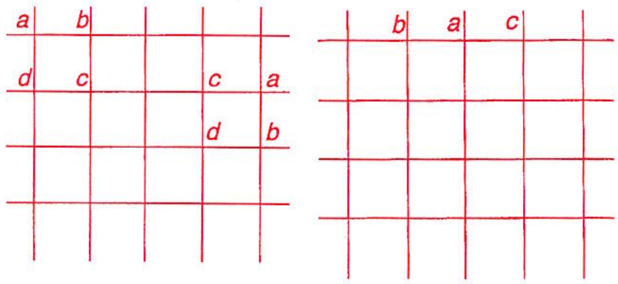


Dans le triangle ABC, BC étant le plus long des trois côtés, l'angle A qui est opposé à BC est le plus grand des trois angles. Or la somme des angles vaut 180°, donc le plus grand angle a une amplitude strictement supérieure à 60°.
Dès lors, si A recevait 6 tartes envoyées par B, C, D, E, F et G, les amplitudes des angles BAC, CAD, DAE, EAF, FAG et GAB seraient toutes strictement supérieures à 60° et la somme de ces amplitudes serait strictement supérieure à 360°, ce qui est impossible.

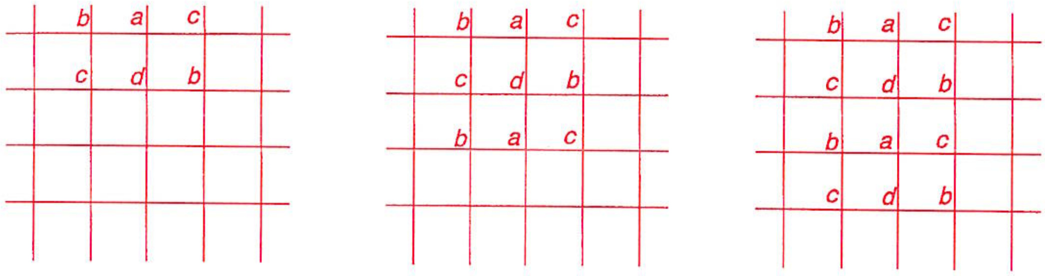


A recevra donc au plus 5 tartes.

maxi 1 Puisque les 4 sommets de chaque carré élémentaire sont marqués a, b, c, d, il y a au moins une ligne ou une colonne où les lettres a, b apparaissent en deux sommets voisins. Supposons que ce soit sur une ligne. Sur cette ligne, il y a au moins trois sommets successifs où apparaissent les lettres a, b, c (ou bien les lettres a, b, d) car sinon cette ligne ne contiendrait que des « a » et des « b » et la seconde condition ne serait pas remplie. On a donc par exemple la situation de la figure située à droite.



Ce qui donne successivement, pour que la première condition soit remplie :



et ainsi de suite.

Les première et troisième colonnes ne contiennent que b et c, la deuxième ne contient que a et d. Il n'est donc pas possible de satisfaire simultanément aux deux conditions.

maxi 2 Le reste (par défaut ou par excès) de la division d'un entier par 5 est 0, 1, -1, 2 ou -2. Tout entier peut donc s'écrire sous la forme $5a+b$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$.

Calculons $(5a+b)^{100}$ par la formule du binôme de Newton :

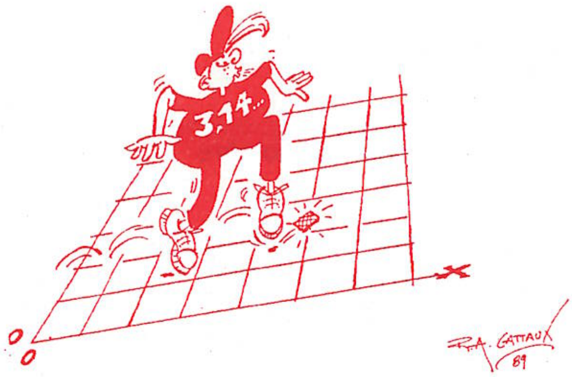
$$\begin{aligned}(5a+b)^{100} &= \mathrm{C}_{100}^{0}\,(5a)^{100}b^{0} + \mathrm{C}_{100}^{1}\,(5a)^{99}b^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{100}^{97}\,(5a)^{3}b^{97} \\ &\qquad + \mathrm{C}_{100}^{98}\,(5a)^{2}b^{98} + \mathrm{C}_{100}^{99}\,(5a)^{1}b^{99} + \mathrm{C}_{100}^{100}\,(5a)^{0}b^{100} \\ &= \mathrm{C}_{100}^{0}\,(5a)^{100}b^{0} + \mathrm{C}_{100}^{1}\,(5a)^{99}b^{1} + \cdots + \mathrm{C}_{100}^{97}\,(5a)^{3}b^{97} \\ &\qquad + 50 \times 99 \times 25a^{2}b^{98} + 100 \times 5ab^{99} + b^{100}\end{aligned}$$

Tous les termes de cette somme sont multiples de 125, sauf éventuellement le dernier. Le reste cherché ne dépend donc que de la valeur de b^{100}.

Si $b = 0$, alors le reste vaut 0.
Si $b \pm 1$, alors $b^{100} = 1$ et le reste vaut 1.
Si $b \pm 2$, alors

$$\begin{aligned}b^{100} &= 2^{100} = 4^{50} = (5-1)^{50} = \mathrm{C}_{50}^{0}\,5^{50} - \mathrm{C}_{50}^{1}\,5^{49} + \cdots - \mathrm{C}_{50}^{47}\,5^{3} + \mathrm{C}_{50}^{48}\,5^{2} - \mathrm{C}_{50}^{49}\,5^{1} + \mathrm{C}_{50}^{50}\,5^{0} \\ &= \mathrm{C}_{50}^{0}\,5^{50} - \mathrm{C}_{50}^{1}\,5^{49} + \cdots - \mathrm{C}_{50}^{47}\,5^{3} + 25 \times 49 \times 25 - 50 \times 5 + 1\end{aligned}$$

Tous les termes excepté le dernier sont multiples de 125, donc le reste vaut 1. On peut conclure que le reste de la division de la centième puissance d'un nombre entier par 125 vaut soit 0, soit 1.



Jeux

A. Parent

Le mot caché (par Cévé)

Le jeu consiste à retrouver dans la grille tous les mots du texte qui vous est proposé.

À cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois.

Les lettres restantes forment le prénom et le nom d'un illustre mathématicien. Qui est-il ?

... est probablement reconnu comme un des grands créateurs des notations mathématiques modernes. Génie universellement reconnu, il a enrichi presque toutes les branches des mathématiques pures et appliquées. Il a été un mathématicien prolifique.

s	n	o	u	p	a	p	i	q	u	e	b	a	r	g
a	t	i	r	e	s	p	l	e	m	e	r	n	d	u
t	o	n	a	m	c	i	e	n	m	s	a	n	s	n
g	e	h	t	t	i	r	e	c	o	t	s	c	h	i
i	n	e	m	a	n	o	c	a	l	o	e	s	e	v
e	m	l	i	u	n	t	e	d	i	r	e	s	r	e
t	a	s	e	p	r	e	s	e	f	p	l	l	e	m
h	u	n	d	r	o	r	e	l	i	q	u	e	a	e
e	m	a	c	e	b	a	t	u	s	s	e	e	d	n
q	i	t	o	e	l	b	e	e	e	d	n	r	o	t
u	e	s	n	m	e	n	t	♣	r	e	s	q	m	n
u	o	t	u	u	r	s	t	i	p	e	n	u	e	u
t	c	r	t	e	t	h	a	q	u	i	r	l	i	l
e	s	e	a	m	a	e	m	s	e	c	h	i	s	e

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1		A				
2	A					
3						
4						
5						E
6					E	

Verticalement et horizontalement

1. 215 460
2. 315 000
3. 8 316 000
4. 12 474 000
5. 405 000
6. 3 420 000

Puzzles

Chaque énigme consiste à découvrir un nombre à l'aide d'informations numérotées.

Le jeu consiste bien entendu à trouver ce nombre mais en précisant à partir de quel indice on l'obtient avec certitude.

Ces puzzles proviennent du livre « Logic number problems » par Wade H. Sherard III chez Dale Seymour Publications.

Puzzle 1

1. C'est un nombre entier de 3 chiffres.
2. Il est divisible par 5.
3. C'est un nombre pair.
4. Tous les chiffres sont différents.
5. Le chiffre des dizaines est supérieur à celui des unités.
6. Le chiffre des centaines est supérieur à celui des dizaines.
7. Il est inférieur à 400.
8. Il est divisible par 3.
9. Il a un seul chiffre impair.
10. Le chiffre des dizaines est 1.

Puzzle 2

1. C'est un nombre entier de 3 chiffres.
2. Le chiffre des dizaines est 5.
3. Il est divisible par 4.
4. Il est divisible par 9.
5. Tous les chiffres sont différents.
6. Le chiffre des unités est supérieur à celui des dizaines.
7. Le chiffre des centaines est supérieur à celui des unités.
8. Il est inférieur à 800.
9. Il est divisible par 7.
10. Le chiffre des unités est 6.

Solution des jeux

Le mot caché

Le nom du mathématicien à découvrir est EULER (1707–1783).

Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	G	A	L	O	I	S
2	A	J	O	U	T	E
3	L	O	U	V	E	T
4	O	U	V	E	R	T
5	I	T	E	R	E	E
6	S	E	T	T	E	R

Puzzles

Puzzle 1

La réponse est 210 au huitième indice.

Puzzle 2

La réponse est 756 au cinquième indice.

C. Van Hooste

Dix problèmes pour préparer les demi-finales

Les éliminatoires à peine passées, on pense déjà à se préparer pour les demi-finales. Rien de tel pour cela que de se mettre à résoudre quelques problèmes nouveaux. Pour vous proposer ceux qui suivent, nous nous sommes inspirés d'épreuves mathématiques se déroulant dans d'autres pays.

1.- Division

Etant donné deux naturels, on effectue la division de l'un par l'autre. On augmente alors le dividende de 65 et le diviseur de 5 et on constate que le quotient et le reste ne changent pas. Quel est ce quotient ?

Ⓐ13 Ⓑ14 Ⓒ15 Ⓓ16 Ⓔ17

2.- Polygones

On considère n points d'un cercle. Ensuite, on joint ces points de p en p jusqu'à revenir au sommet de départ. Combien de sommets possède le polygone ainsi formé ?

Ⓐn Ⓑ$\dfrac{n}{p}$ Ⓒ$\dfrac{\mathrm{PPCM}(n,p)}{n}$

Ⓓ$\dfrac{n}{\mathrm{PGCD}(n,p)}$ Ⓔ$\dfrac{\mathrm{PPCM}(n,p)}{\mathrm{PGCD}(n,p)}$

3.- 1998 *(sans réponse préformulée)*

On décompose 1998 en un produit de deux naturels. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le plus petit de ces deux naturels ?

4.- Le parallélipipède *(sans réponse préformulée)*

Les diagonales des faces d'un parallélipipède rectangle ont respectivement pour mesures 30, 40 et 50. Quelle est la mesure de la diagonale de ce parallélipipède ?

5.- Quelle somme !

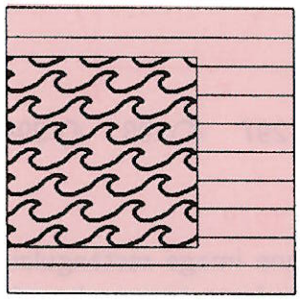
Que vaut la somme

$$1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \ ?$$

Ⓐ999 Ⓑ1 998 Ⓒ1 996 003 Ⓓ1 997 001 Ⓔ1 997 998

6.- Le tapis

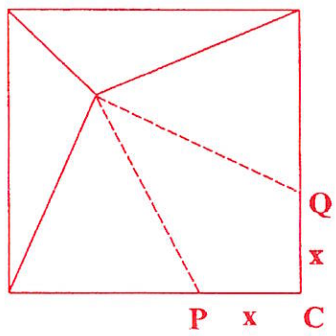
Sur le plancher d'une chambre carrée est disposé un tapis carré (cf. la figure ci-dessous). La surface couverte par ce tapis a la même aire que la surface non couverte et le côté du tapis mesure 4 mètres de moins que celui de la chambre. Quelle est donc l'aire de ce tapis, mesurée en m^2 ?



Ⓐ$16(3+2\sqrt{2})$ Ⓑ$12(4+3\sqrt{2})$ Ⓒ$8(6+5\sqrt{2})$ Ⓓ$6(8+3\sqrt{2})$ Ⓔ$48(1+\sqrt{2})$

7.- Partage

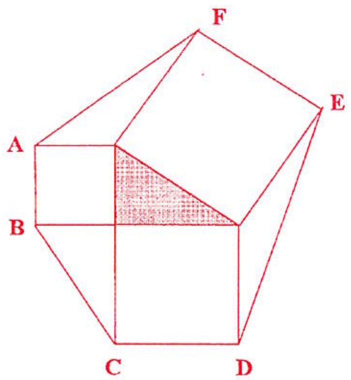
Un terrain de forme carrée de 300 m de côté doit être partagé en cinq parts de même aire. Le géomètre-expert désigné pour effectuer le travail a déjà déterminé deux parts de même forme et de même aire (en traits pleins sur la figure ci-dessous). Sachant qu'il a l'intention de terminer le partage comme indiqué en traits discontinus sur la figure, quelle doit être la mesure x (en mètres) des segments $[CP]$ et $[CQ]$?



(A) 80 (B) 81 (C) 90 (D) 100 (E) 120

8.- L'hexagone

Des carrés ont été construits sur les côtés d'un triangle rectangle (cf. la figure ci-dessous). Sachant que les côtés de l'angle droit de ce triangle mesurent respectivement 6 et 8, quelle est la mesure de l'aire de l'hexagone $ABCDEF$?



(A) 296 (B) 297 (C) 298 (D) 299 (E) 300

9.- Le format 16/9

Le format d'une image rectangulaire est donné par le rapport de sa largeur à sa hauteur. Sur un téléviseur (à coins carrés) de format 4/3, on regarde un film retransmis dans le format 16/9. Sachant que, dans ce format, l'image occupe toute la largeur de l'écran, quel est alors le pourcentage de la surface de l'écran non exploitée ?

(A) 9 % (B) 12 % (C) 18 % (D) 20 % (E) 25 %

10.- L'autoroute des vacances

Un automobiliste a calculé qu'il atteindrait son lieu de vacances à neuf heures du soir s'il effectuait le trajet à 90 km/h de moyenne. Par contre, il ne serait que sept heures s'il parvenait à maintenir une moyenne de 120 km/h. Quelle doit être sa moyenne, exprimée en km/h et arrondie au nombre entier le plus proche, pour qu'il arrive à destination à huit heures ?

(A) 101 (B) 103 (C) 105 (D) 107 (E) 109

Les réponses correctes aux éliminatoires de la 23ème OMB

Q.	Mini	Midi	Maxi	Q.	Mini	Midi	Maxi
1	D	C	C	16	D	2	E
2	D	B	D	17	B	A	E
3	13	B	B	18	E	B	C
4	C	E	A	19	E	A	A
5	A	B	D	20	A	E	B
6	E	D	2	21	B	D	D
7	A	D	C	22	C	6	62
8	C	A	E	23	E	E	B
9	28	A	D	24	4	C	A
10	A	B	A	25	C	E	E
11	B	C	6	26	D	C	D
12	B	4	B	27	B	C	E
13	A	D	50	28	E	50	A
14	E	C	C	29	62	B	D
15	D	D	B	30	E	E	C

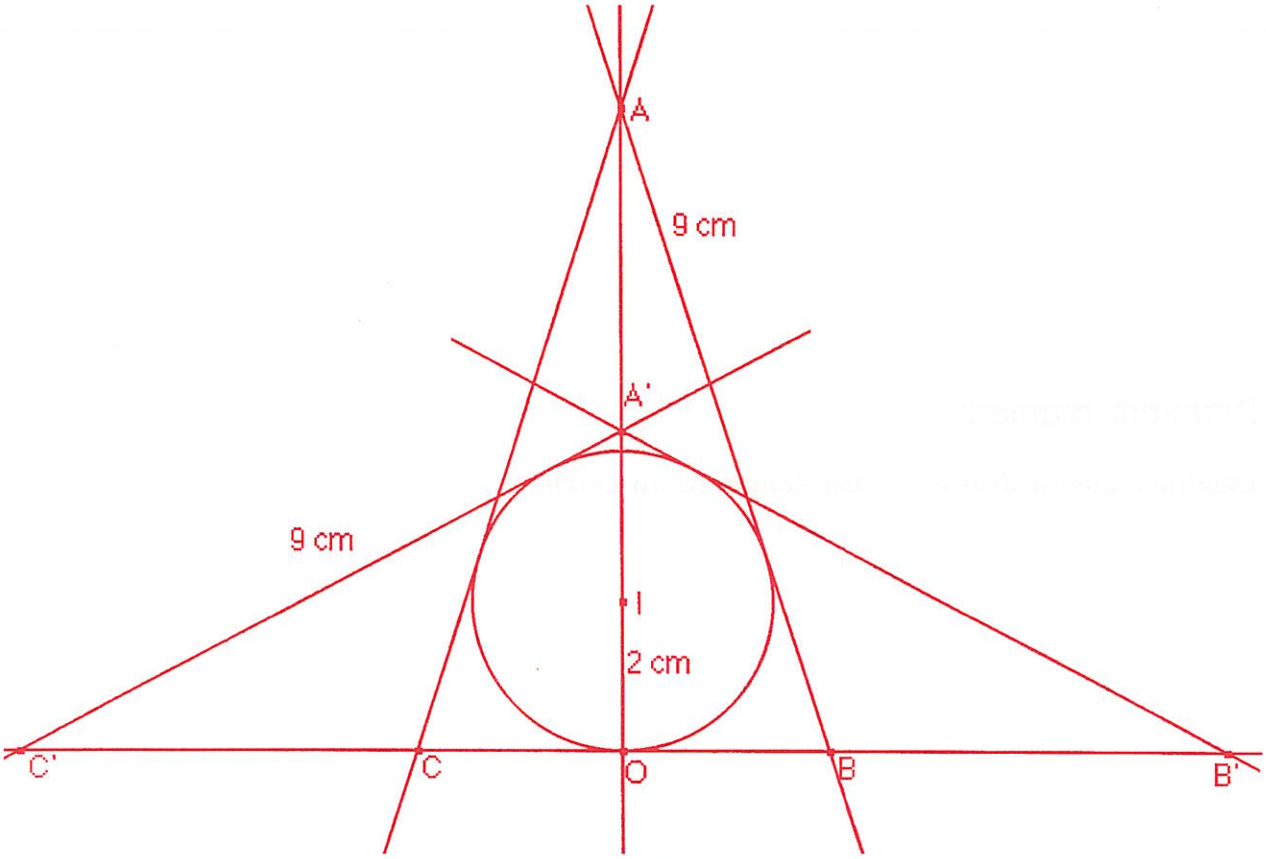
Les réponses correctes aux dix problèmes de préparation

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	37	60	D	A	D	A	E	B

Problème de géométrie élémentaire

Pierre Marlier

Problème - On demande de construire le(s) triangle(s) isocèle(s) dont les côtés égaux ont une longueur de 9 cm et le cercle inscrit un rayon de 2 cm.



À première vue, le problème est simple : on trace une droite (BC sur la figure) ; par un point O quelconque sur cette droite, on trace la perpendiculaire, puis le cercle de 2 cm de rayon ayant son centre (I) sur cette perpendiculaire et tangent à BC ; ce sera le cercle inscrit.

≪ Il n'y a plus qu'à ≫ tracer les tangentes AB et AC pour avoir une des solutions. On imagine sans peine qu'il y en a deux : ABC et $A'B'C''$. Toute la difficulté est de localiser A et A' (ou B et B' par des constructions à la règle et au compas).

Une autre approche ≪ simple ≫ est de tracer un segment $[AB]$ de 9 cm de longueur, puis une parallèle à ce segment à 2 cm de distance, de prendre un point I sur cette parallèle et de tracer le cercle de centre I et de 2 cm de rayon. Par le point A, on trace alors l'autre tangente au cercle et on y place (du bon côté) un point C tel que $|AC| = 9$ cm. On trace alors le segment $[BC]$ qui, si on a eu de la chance, est lui aussi tangent au cercle. Sinon, ≪ il n'y a plus qu'à ≫ déplacer le point I sur la droite à laquelle il appartient pour que le cercle soit inscrit au triangle. La difficulté est du même niveau que dans l'approche précédente.

Remarque - Ces constructions sont assez faciles à réaliser avec le logiciel CABRI (I ou II).

Plusieurs professeurs se sont essayés sans succès à résoudre ce problème *à la règle et au compas*. En désespoir de cause, ils ont abordé la question par les méthodes de la géométrie analytique.

Il va de soi qu'on peut le faire de multiples façons ; en voici deux qui se réfèrent à la première approche géométrique décrite ci-dessus et à la figure qui l'illustre.

Le choix des coordonnées

On choisit de placer l'origine en O et de prendre OB et OA comme axes.

Le point I a donc pour coordonnées $(0, 2)$.

A a pour coordonnées $(0, y_A)$ et $B(x_B, 0)$, avec les conditions $x_B > 0$ et $y_A > 0$.

D'où les équations du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite AB :

$$\mathcal{C} \equiv x^2 + (y-2)^2 = 4 \qquad (1)$$

$$AB \equiv y_A x + x_B y - x_B y_A = 0 \qquad (2)$$

Le fait que $|AB| = 9$ s'exprime par

$$x_B^2 + y_A^2 = 81 \qquad (3).$$

Première manière

Exprimer que la droite AB est tangente au cercle $\mathcal{C}$

Chercher l'intersection de la droite et du cercle revient à résoudre le système des équations (1) et (2). Par substitution, on trouve pour équation d'intersection

$$(x_B^2 + y_A^2) \cdot y^2 - 2 \cdot y_A \cdot y \cdot (x_B^2 + 2y_A) + x_B^2 \cdot y_A^2 = 0$$

qui, en utilisant la relation (3), se transforme en

$$81y^2 - 2y_A y(81 - y_A^2 + 2y_A) + (81 - y_A^2)y_A^2 = 0$$

Il faut maintenant exprimer que cette équation admet une racine double, c'est-à-dire que son réalisant (ou discriminant) est nul, ce qui donne, après simplifications

$$(81 - y_A^2 + 2y_A)^2 - 81(81 - y_A^2) = 0$$

et après qu'on ait effectué et à nouveau simplifié

$$y_A^3 - 4y_A^2 - 77y_A + 324 = 0.$$

En ayant recours à des logiciels appropriés (CDSM4 ou DERIVE par exemple), on découvre que cette équation admet une racine négative qu'on ne retient pas en raison de nos conditions initiales, et deux racines positives qui sont les ordonnées des points A et A', soit $8,573\,298$ et $4,272\,354$ respectivement.

Un coup d'œil sur la figure confirme qu'on ne s'est (vraisemblablement) pas trompé dans les calculs. Par ailleurs, ces calculs confirment l'hypothèse plus intuitive qu'il ne doit y avoir que deux solutions.

En utilisant la relation (3), on trouve aisément que les valeurs correspondantes pour x_B sont $2,738\,352$ et $7,921\,299$. Ici encore un coup d'œil sur la figure convainc de la plausibilité.

Deuxième manière

Exprimer que la distance d(I, AB) est 2.

Dans cette manière, on va utiliser l'équation normale d'une droite. C'est dire qu'en manipulant les valeurs absolues, il faudra s'interroger sur les conditions de validité de ce qu'on écrit.

On est donc amené à affiner les conditions initiales qu'on avait écrites. Sur base d'un examen de la figure, on peut préciser que non seulement $x_B > 0$ et $y_A > 0$ mais que $x_B > 2$ et $y_A > 4$.

Compte tenu de (3), l'équation normale de AB est

$$\frac{1}{9}|y_a x + x_B y - x_B y_A| = 0$$

D'où d$(I, AB) = 2$ se traduit par $|2x_B - x_B y_A| = 18$ ou $x_B|2 - y_A| = 18$, car $x_B > 0$.

En élevant au carré (ce qui élimine les problèmes de signe) et en éliminant x_B entre cette équation et (3), on retrouve, après simplification, l'équation rencontrée précédemment :

$$y_A^3 - 4y_A^2 - 77y_A + 324 = 0$$

Et si on avait préféré éliminer y_A ?

L'équation $x_B|2 - y_A| = 18$ se serait traduite par 1'alternative

$x_B(2 - y_A) = 18$ ou $x_B(y_A - 2) = 18$.

La première possibilité est à exclure parce que $y_A > 4$ implique $2 - y_A < 0$; ce nombre négatif multiplié par le positif x_B ne peut donc être égal à 18. Reste donc la deuxième possibilité qui, après élimination de y_A, avec (3) donne

$$x_B^4 - 77x_B^2 + 72x_B + 324 = 0.$$

Ici encore, on fait appel aux logiciels appropriés pour apprendre que cette équation du 4^e^ degré a 4 racines réelles : deux négatives à ne pas retenir et les deux positives qu'on a rencontrées précédemment.

Le fait qu'on ait rencontré des équations du 3^e^ ou du 4^e^ degré donne à penser que le problème proposé **ne peut pas** être résolu par des constructions à la règle et au compas.

Math-Jeunes n° 83, 62–64, 1998

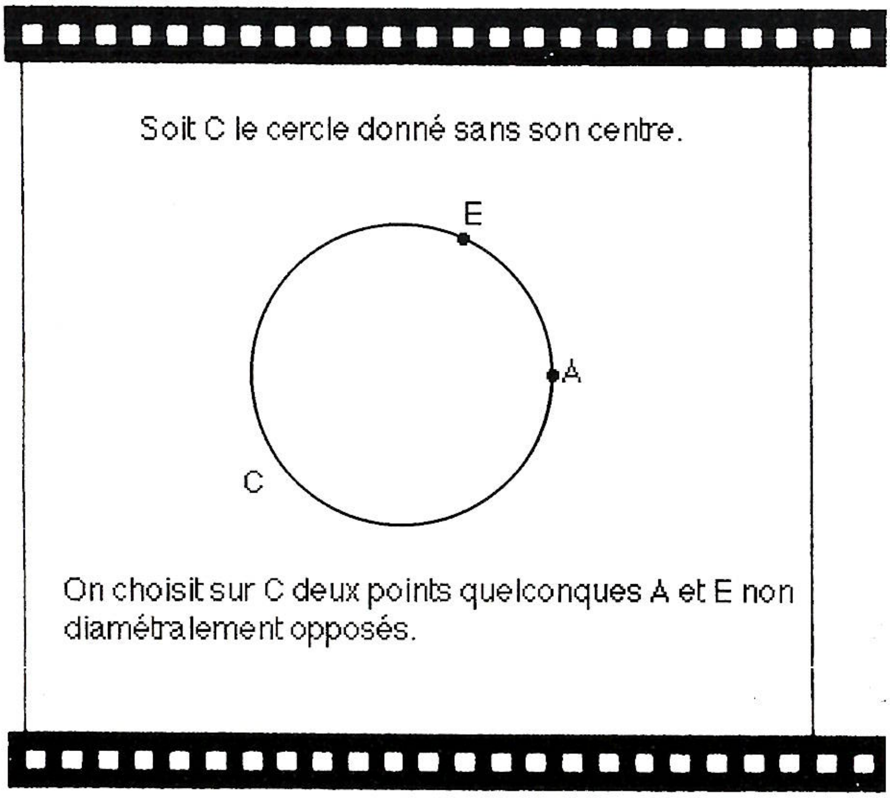
Les constructions à la règle et au compas

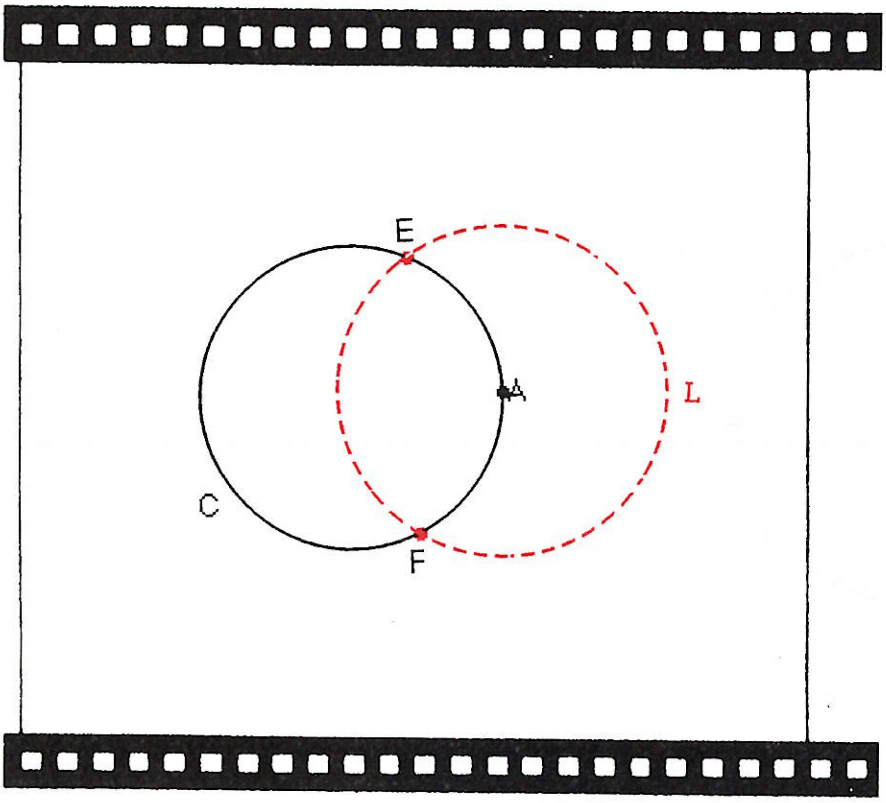
Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

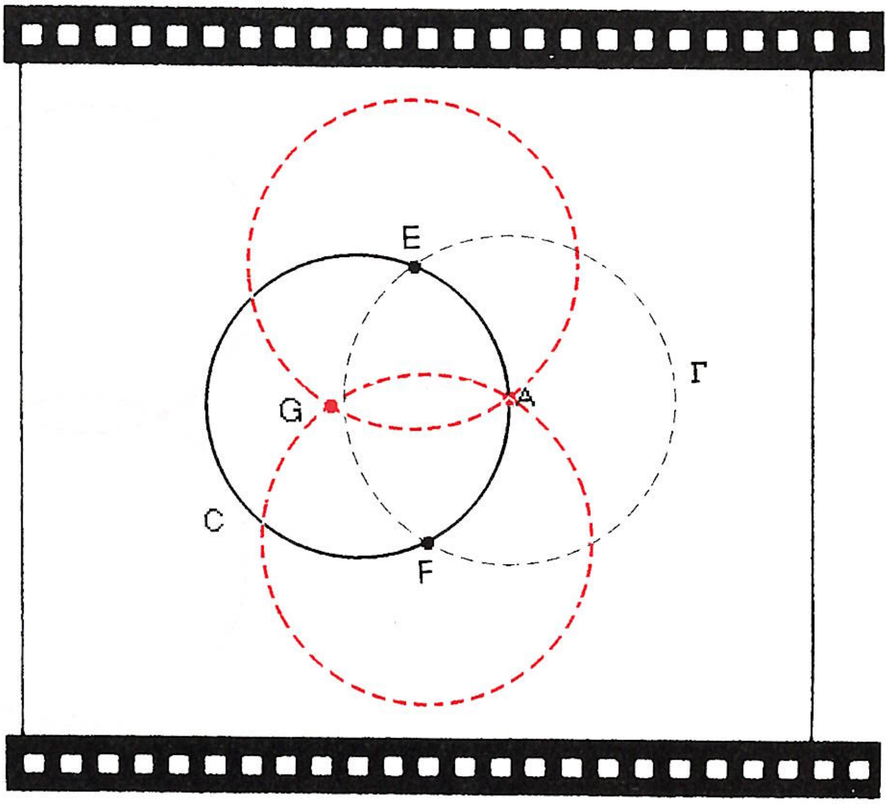
Rappelle-toi ce problème que nous t'avons proposé dans le numéro 82 de ta revue préférée *Math-Jeunes*.

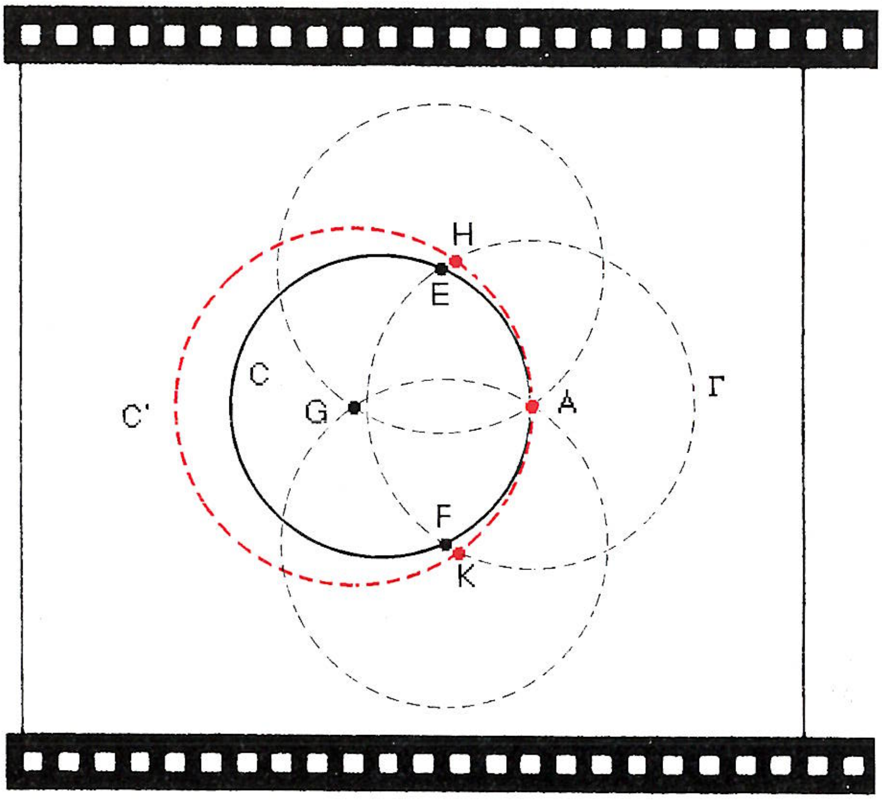
> **Problème de Napoléon**
> *Construire au compas seulement le centre d'un cercle donné sans son centre.*

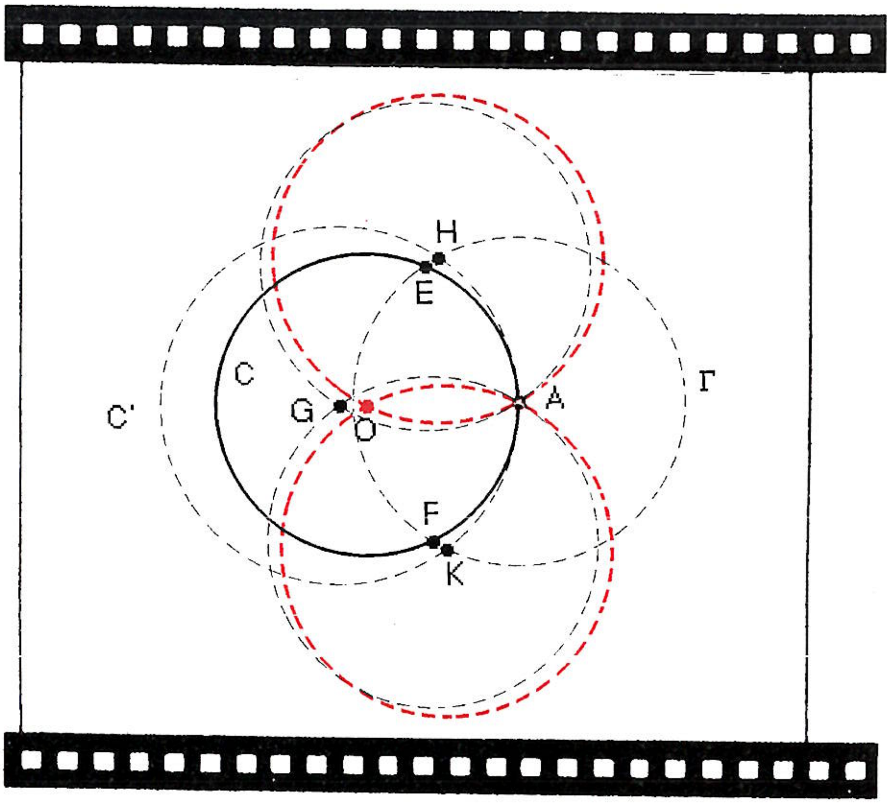
Nous te donnons ci-dessous le film de la construction. Il reste à justifier chaque étape, ce que nous te proposons de faire. Nous attendons ton courrier ...




E
A
L
C
F


E
Γ
G
A
C
F

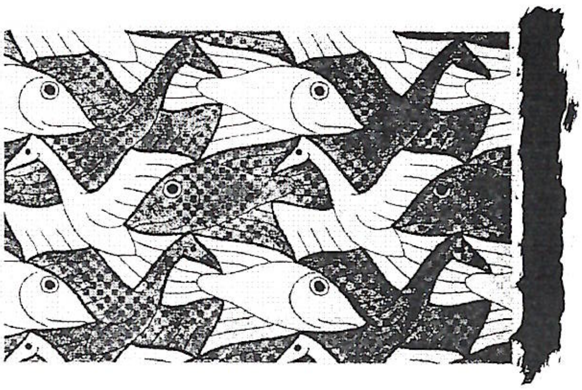

H
E
C
C'
G
A
Γ
F
K


H
E
C
C'
G
O
A
Γ
F
K

Nous sommes en 1998 ! Si tu as lu le premier article de cette revue, tu en as conclu qu'il y a eu exactement cent ans (le 24 janvier) que Lewis **Carroll** est mort ...

Et cela fera également cent ans (le 17 juin) qu'est né à Leeuwarden (Pays-Bas) Maurits Cornelius **Escher**, artiste, mathématicien et voyageur. Il vécut douze ans en Italie, deux ans en Suisse, cinq ans à Bruxelles ... À partir de 1941, il s'installera à Baarn en Hollande où il meurt le 27 mars 1972.

Ses parents souhaitaient qu'il soit architecte, mais cela ne l'intéressait pas du tout. Ce sont peut-être des souvenirs d'Italie et de mosaïques islamiques d'Espagne qui l'ont conduit à développer un style très personnel de pavages.



Il aimait également beaucoup les illusions d'optique et les «objets impossibles.» Discutes-en avec ton professeur de mathématiques ...