Math-Jeunes

19^e année
Mars 1998 — n° 84
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, F.Pourbaix, G.Robert, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
Illustrations : R.A.Cattaux et F.Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons
Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 84 Dix-neuvième année 1998

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 84, 66–72, 1998

Les chiffres arabes

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

1. Introduction

Vous avez certainement déjà entendu dire que nous écrivons les nombres en chiffres arabes ... Qu'en est-il au juste ? Dans son ouvrage *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* [3], John Lennart BERGGREN (Simon Fraser University, Canada) signale que

Les mathématiciens musulmans furent les premiers à écrire les nombres comme nous le faisons, et bien que nous soyons les héritiers des Grecs en ce qui concerne la géométrie, une partie du legs du monde musulman est notre arithmétique. Et cela reste vrai même si ce furent les mathématiciens indiens ([1]), *probablement quelques siècles avant l'avènement de la civilisation islamique, qui commencèrent à utiliser un système de numération possédant les deux caractéristiques suivantes :*

1. *les nombres de un à neuf sont représentés par neuf chiffres, tous s'écrivant facilement en un ou deux traits ;*
2. *le chiffre le plus à droite d'un nombre représente le nombre des unités et une unité de n'importe quelle place vaut dix fois autant que celle qui se trouve à sa droite. Ainsi, un chiffre en deuxième position (à partir de la droite) compte le nombre de dizaines ; un chiffre en troisième position, le nombre de centaines (dix fois dix) et ainsi de suite. Un caractère spécial, le zéro est utilisé pour indiquer qu'une position donnée est vide.*

Ce qui précède décrit notre système actuel d'écriture de tous les nombres et nous pouvons donc résumer en disant que les Indiens furent les premiers à utiliser un système chiffré décimal positionnel. « Chiffré » signifie que les neuf premiers nombres sont représentés par neuf symboles, au lieu d'une accumulation de barres, comme chez les Babyloniens ou les Égyptiens. Décimal veut dire que la base est dix.

Nous ajouterons à cette longue citation que « positionnel » signifie que chacun des neuf symboles a une valeur différente selon la place, la position qu'il occupe dans le nombre. Ainsi, dans 33, le « 3 » le plus à droite vaut trois unités et l'autre, à sa gauche, trois dizaines, ce qui n'est pas vrai dans d'autres types de notation des nombres. Par exemple, dans l'écriture du même trente-trois en « chiffres romains », XXXIII, chacun des X vaut dix unités, quelle que soit sa position et chacun des I vaut une unité, quelle que soit sa position également.

Alors, ... chiffres **arabes** ou chiffres **indiens** ? Et le **zéro** d'où sort-il ? ...

Nous allons tenter de donner un début de réponse à ces questions. Il ne faut cependant pas perdre de vue que l'histoire des systèmes de numération garde encore beaucoup de secrets qui nous seront peut-être un jour révélés par l'étude de manuscrits non encore exploités. On peut malheureusement craindre que certaines pratiques d'écriture des nombres, certains modes de transmission de ces pratiques, ... ne seront jamais connus parce que les textes qui s'y rapportent sont définitivement perdus.

2. Les premiers systèmes de numération

Les premières formes de numéraux hiéroglyphes pourraient être apparus en Égypte à l'époque prédynastique (vers 3000 avant Jésus-Christ) ; en Mésopotamie, région qui correspond actuellement plus ou moins à l'Iraq et s'étendra vers

([1]) *Indiens d'Asie, bien sûr.*

l'Iran, la Syrie, ..., les premiers numéraux cunéiformes ou plutôt proto-cunéiformes datent d'environ la même période. Les témoignages mésopotamiens sont nettement plus nombreux que les égyptiens car le support d'écriture papyrus égyptien est un matériau beaucoup plus fragile que la tablette d'argile mésopotamienne. À côté des centaines de milliers de tablettes d'argile retrouvées, classées et répertoriées, la principale source de documentation égyptienne est le papyrus Rhind composé par le scribe **Ahmes** vers 1650 avant Jésus-Christ qui dit l'avoir recopié d'après un document datant de plus ou moins 2000-1800 qui lui-même transmettrait des résultats connus d'**Imhotep** (vers 2650 avant Jésus-Christ) (?)

Tablette numérique de la fin de l'époque d'Uruk ($\approx$ 3100 av. J.-C.)

Les Sumériens vont développer un système sexagésimal, c'est-à-dire de base 60. Ceci ne nous est pas totalement étranger : pensons aux degrés, minutes, secondes de la trigonométrie qui viennent de là. L'intérêt du nombre 60 est qu'il possède beaucoup plus de diviseurs que 10, par exemple ; dès lors, l'utilisation de « morceaux » de nombres entiers, de « rompus » , en fait, ce que nous appelons « fractions », s'en trouve grandement facilitée.

Les Akkadiens, qui succèdent aux Sumériens vers 2400, préfèreront un système décimal, donc de base 10. Cependant, le passage entre les deux bases était fréquent et les habitudes ont varié selon les régions et les époques.

Sans vouloir entrer dans le détail de ces systèmes de numération, nous dirons simplement que la grande majorité des textes mathématiques mésopotamiens que nous possédons, datent de deux périodes bien précises : la première, dite **paléo-babylonienne**, contemporaine de la dynastie **Hammurapi** ; elle va de plus ou moins 1800 à 1600 avant notre ère (le système est devenu totalement sexagésimal et parfaitement positionnel), et la seconde, dite **séleucide** qui correspond aux trois derniers siècles avant Jésus-Christ. Durant cette dernière période, les Mésopotamiens utilisent un symbole spécial (que nous appelons **zéro**) qui permet de lever l'ambiguïté lorsqu'une position dans le nombre est inoccupée. Par exemple, avec les chiffres que nous utilisons, cela correspondrait à écrire « 203 » plutôt que « 2 3 » où on laisse un blanc pour indiquer qu'il n'y a pas de dizaine. Il est bien évident que si on écrit rapidement le nombre, l'espace blanc entre le 2 et le 3 peut devenir tellement petit qu'on ne sait plus s'il s'agit de vingt-trois ou de deux cent trois !

En Égypte, à l'époque ptolémaïque, il existe également un symbole spécial qui joue le même rôle : indiquer l'absence d'une position dans le système sexagésimal utilisé en astronomie. Remarquons qu'il ne faut pas lier cette période dite ptolémaïque, qui est celle de la dynastie des Ptolémée (trois derniers siècles avant notre ère) à l'astronome Claude **Ptolémée** (celui de l'*Almageste*), qui a vécu au deuxième siècle après Jésus-Christ.

3. Quelques remarques préliminaires

1. En astronomie, les Arabes continuent à utiliser le système sexagésimal et il est « à peu près évident » qu'il provient de celui des Babyloniens. Mais, voilà un des points d'interrogation dont nous avons déjà fait mention : comment a-t-il été transmis, par la voie syrienne, persane ? L'absence de documents ne permet pas de conclure !

2. Le système décimal positionnel est effectivement indien, mais les Indiens ne l'ont pas étendu pour représenter des parties de l'unité au moyen de fractions décimales. Ce sont effectivement les Arabes qui furent les premiers à utiliser ce système pour écrire les entiers **et** les parties d'entiers comme nous le faisons, à calculer avec les dixièmes, les centièmes, les millièmes, ... de la même manière qu'on calcule avec les unités, les dizaines, les centaines, les milliers, ... tout à fait comme nous le pratiquons aujourd'hui. On en trouve les premières traces dans le *Livre des chapitres sur l'arithmétique indienne*, écrit à Damas vers les années 952-953 de notre ère par **Abu'l Ḥasan al-Uqlīdisī** ; ce surnom provient du fait qu'il « gagnait » sa vie en copiant des manuscrits d'**Euclide** (*Uqlīdis* en arabe).


THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*

TOT LEYDEN,
By Chriſtoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.

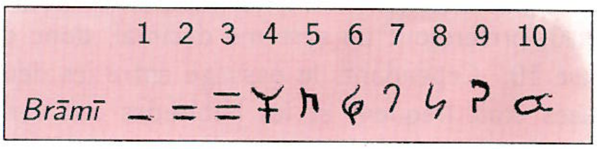
Al-Uqlīdisī utilise un point décimal : lorsqu'il divise, par exemple, 19 cinq fois par deux, il obtient $\dot{0}59375$. Plus tard, au début du quinzième siècle, **Jamshīd al-Kāshī** donne une théorie complète du calcul au moyen des fractions décimales, théorie identique à celle que nous connaissons aujourd'hui (sans faire de différence entre les chiffres situés à gauche ou à droite du point décimal) dans son ouvrage *La clé du calcul* (1427). Pour rappel, chez nous, Simon **Stevin** a publié *Thiende (Disme)*, un opuscule d'une dizaine de pages sur les fractions décimales, en 1585 !

Voilà pourquoi nous préférons parler de système décimal positionnel **indo-arabe** ... Il est indien pour ce qui est de l'écriture des entiers, arabe, pour la transmission de cette écriture en Occident et son extension aux fractions décimales.

4. Le système décimal positionnel indien

Plus d'un historien des mathématiques s'accordent pour dire que le système fut utilisé par **Bhāskara I** vers 522 de notre ère. Il n'a évidemment pas été créé de toute pièce un « beau » jour de cette « bonne » année 522 ! C'est au contraire un matériau évolutif et il est donc très difficile de fixer une date précise. On peut trouver plus de détails dans l'ouvrage *Written Numerals* de **Van der Waerden** et **Folkerts**, Walton Hall, UK, The Open University Press, 1976.

Joseph[5] signale qu'en Inde, les numéraux *Brāmī*, dont on trouve des traces vers 150 avant notre ère dans une grotte du centre de l'Inde aux environs de Poona, ont connu un certain développement. On peut voir une autre forme de numéraux *Brāmī* à Nasik (ville proche de l'actuelle Bombay) et ils devraient dater de plus ou moins 100 après Jésus-Christ. Ce système comporte des symboles différents pour 1 et les chiffres de 4 à 9, pour le nombre 10 et ses puissances. Il existe aussi des symboles pour les multiples de 10 jusqu'à 90 et pour les multiples de 100 jusqu'à 900.

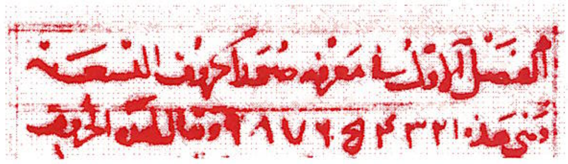


Bien sûr, ce ne sont pas les chiffres que nous connaissons ... Il est difficile de ne pas leur trouver une certaine parenté ! Mais, revenons-en à « notre » système.

Son existence fut connue assez tôt en Syrie, car vers 662, l'évêque Severus Sebokht, un lettré appartenant à l'Église Nestorienne (une des Églises chrétiennes de l'Orient à cette époque) écrit, depuis son monastère de Kenneshra (près de Diarbekr), sur le cours supérieur de l'Euphrate :

> *Je ne parlerai pas de la science des Indiens, qui ne sont même pas Syriens, de leurs subtiles découvertes en science astronomique, découvertes qui sont même plus ingénieuses que celles des Grecs et des Babyloniens, de leur méthode précieuse de calcul qui dépasse tout entendement ; je veux seulement dire que ce calcul se fait au moyen de neuf signes. Si ceux qui croyaient être arrivés aux limites de la science parce qu'ils parlent grec avaient connu ces choses, peut-être auraient-ils été convaincus, même s'il était un peu trop tard, qu'il existe d'autres hommes qui connaissent des choses, pas seulement des Grecs, mais aussi des gens qui parlent d'autres langues.*

Au milieu du neuvième siècle, le Syrien **Ibn Waḥshīya** est l'un des premiers auteurs musulmans à mentionner les numéraux indiens comme étant un alphabet. **Al-Jāḥiẓ** († 868-869) le philosophe et **al-Mas'ūdī** († 956) attribuent tous les deux l'origine de ces numéraux aux Indiens. **Abū Sahl ibn Tamim** († 950) écrit dans le *Sefer Yezirah* qu'il a utilisé les neuf signes dans son ouvrage sur le calcul indien *Ḥisāb al-ghubār*. **Al-Nadīm** († 995) mentionne les numéraux indiens dans le *Fihrist* c'est-à-dire le catalogue des ouvrages arabes publiés jusqu'à cette époque. Ce *Fihrist* nous est parvenu dans sa langue originale. **Ibn Labbān**, vers l'an 1000, dans la première phrase de son livre [6] décrit son ouvrage comme le livre des principes de l'arithmétique indienne et donne les neuf numéraux écrits de droite à gauche



Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind de Kūshyār ibn Labbān, MS Istanbul, Aya Sofya Library, 4857

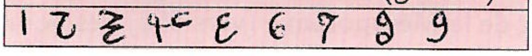
Il utilisait un petit cercle pour le zéro. C'est l'un des plus anciens ouvrages sur la numération indienne qui nous est parvenu dans le texte arabe. Et on pourrait encore multiplier les témoignages qui attestent de l'origine indienne de cette numération.

La plus ancienne œuvre arabe connue qui explique ce système indien fut écrite au début du neuvième siècle par **Al Khwārizmī** (qui est aussi l'auteur d'un célèbre traité d'algèbre, mais cela, c'est encore une autre histoire !). Il venait d'Asie Centrale et n'était pas Arabe ; il n'était guère exceptionnel dans le monde musulman de cette époque que des savants ne soient point islamisés. Mais se pose tout de même la question de savoir où **Al-Khwārizmī** a bien pu apprendre l'arithmétique indienne. Peut-être à Baghdad où, vers 780, la visite d'une délégation de savants du Sind (l'actuel Pakistan) à la cour du calife **Al-Manṣūr** aboutit à la traduction d'ouvrages astronomiques sanskrits. C'est encore là un point d'interrogation ! Quelle que soit la manière par laquelle ce savoir fut transmis à **Al-Khwārizmī**, son œuvre contribua à répandre la numération indienne, à la fois dans le monde islamique et dans le monde latin occidental. Malheureusement, son ouvrage dont le titre pourrait être traduit par *Le livre de l'addition et de la soustraction en se basant sur le calcul indien* ne nous est pas parvenu en langue arabe. Nous possédons une mauvaise traduction latine faite au douzième siècle qui se trouve à la bibliothèque de l'Université de Cambridge.

Nous terminerons en disant que, dans les écrits arabes, après la conquête de l'Égypte, de la Syrie et de la Mésopotamie (vers 650), les nombres s'écrivaient habituellement soit en toutes lettres, soit à l'aide de caractères empruntés à l'alphabet grec. Aux huitième et neuvième siècles, apparaît une véritable écriture alphabétique arabe des chiffres, qui se répand jusqu'au dixième siècle, mais l'ordre d'utilisation des lettres est celui de l'alphabet sémitique et non celui de l'alphabet arabe. Le système est sexagésimal et est appelé *ḥisāb al-jummal*, ce qui signifie *calcul par somme*, somme des valeurs numériques des lettres de l'alphabet. Dans ce système, les dizaines sont écrites à droite des unités. Ainsi, par exemple,

ا, ب, ج, د, ...	: 1, 2, 3, 4, ...
ك, كا, كب, كج, كد ...	: 20, 21, 22, 23, 24, ...

Le zéro est désigné par un signe particulier. Mais dès la première moitié de ce dixième siècle, et peut-être avant, se répand le système de numération de position de base 10 (dont nous ne cessons de parler) dans lequel les nombres sont représentés par ce que l'on a appelé les *chiffres arabes d'Orient*, avec un signe particulier pour le zéro. **Youschkevitch** dit : « il s'agissait vraisemblablement d'une certaine modification des chiffres *Brāhmī* employés depuis longtemps dans de vastes régions de l'Inde. » À peu près en même temps, les chiffres arabes d'Occident, dénommés *ghubār*, font leur apparition dans la péninsule ibérique. *Ghubār* signifie poussière et fait sans doute référence à ces nombres qu'on écrivait sur une tablette recouverte de poussière ou de sable et qui pouvait ainsi être effacée à souhait. **Fibonacci** parle, dans son célèbre *liber abbaci*, d'une *tabula dealbata*. Au départ, ces nombres ont été utilisés sans symbole spécial pour le zéro. Au cours des siècles, il y a eu peu de modifications des chiffres arabes d'Orient, contrairement à ce qu'on a pu constater pour les chiffres arabes d'Occident. Voici les deux graphies auxquelles nous venons de faire allusion :

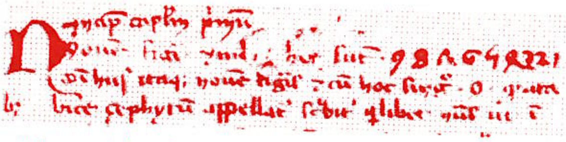
« nos » chiffres									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
chiffres arabes d'Orient									
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
chiffres arabes d'Occident (*ghubār*)									
									

5. Léonard de Pise

C'est le mathématicien du mois ! Et pourtant, nul ne sait à quel mois il est né ! On possède effectivement peu de renseignements sur **Léonard de Pise, Leonardo Pisano** ou encore **Fibonacci**, autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *liber abbaci* : son père était *publicus scriba*, scribe, comptable pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie (*Béjaïa* en Kabylie (Algérie)). Il fait venir auprès de lui le jeune Léonard afin qu'il apprenne, au contact des Arabes, les méthodes de calcul par le biais des figures, des signes indiens. Après avoir acquis cette science, **Fibonacci** parcourra tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence, ...) pour communiquer son savoir et apprendre plus encore.

On peut considérer qu'il est né vers 1170 et qu'il vivait encore vers 1240 ; l'historien italien des mathématiques, Gino **Loria** fait allusion à un décret de la République de Pise, portant ce millésime et lui octroyant un traitement pour services rendus.

Quant à son nom ! **Fibonacci** ? Fils du débonnaire, de l'homme au grand cœur ou fils de *Bonaccio* ? Peu importe ... Il vaut mieux retenir qu'il a contribué à répandre en Occident l'arithmétique basée sur la numération de position (chiffres indo-arabes). Cette notation avait été introduite chez nous bien avant l'époque où vécut **Fibonacci**, mais les habitudes littérales grecques et romaines restaient encore bien ancrées. S'il n'y a pas grand chose d'original dans le *liber abbaci*, l'Histoire peut tout de même concéder à **Fibonacci** qu'il a fortement « milité » pour convaincre ses contemporains de la supériorité du système positionnel indien sur le système littéral qui continuait à être utilisé dans les pays occidentaux. Il avait une connaissance approfondie des *Éléments* d'**Euclide** ; on ne sait trop s'il comprenait suffisamment l'arabe pour l'avoir lu dans les nombreuses traductions de l'époque ou s'il avait pu consulter les traductions latines (à partir de l'arabe) de **Gérard de Crémone** ou d'**Adelhard de Bath**.



Liber abbaci, manuscrit I72 SUP, biblioteca Ambrosiana, Milano

Parmi ses œuvres, on trouve une première version du *liber abbaci* rédigée en 1202. Elle sera remaniée en 1228, notamment sous l'impulsion de son ami Michel **Scott**, cité par **Dante Alighieri** dans sa *Divina Commedia* (*Inferno*, Canto XX, 115-117) :

> *Quell'altro che ne' fianchi è cosi poco,*
> *Michele Scotto fu, che veramente*
> *de le magiche frode seppe 'l gioco.*

Philosophe originaire d'Écosse, Michel **Scott** est astrologue de Frédéric II de Hohenstaufen, empereur germanique, roi de Sicile et protecteur des sciences. **Scott** est aussi commentateur d'Aristote et traducteur d'Avicenne. Il est resté fameux en Écosse comme magicien.

En 1223, **Fibonacci** « publiera » la *Practica Geometriae*. Vers 1225, suivront le *Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometrium pertinentium*, l'*Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum* et le *liber quadratorum*.

Maître Théodore était également astrologue, attaché à la cour de Frédéric II de Hohenstaufen. En la présence de Frédéric II, **Fibonacci** résolut quelques questions importantes qu'il consigna dans ses œuvres. Quant au *Liber Quadratorum*, il est la conséquence d'un défi proposé à **Fibonacci** par **Jean de Palerme**, mathématicien attaché à la cour de Frédéric II.

En gros, le *liber abbaci* est un traité d'arithmétique qui prône les avantages de la méthode d'écriture positionnelle indienne. La plupart du temps, l'auteur donne une démonstration de ce qu'il avance et bien souvent, cette dernière repose sur des arguments géométriques empruntés à **Euclide**, car, comme **Fibonacci** le signale, arithmétique et géométrie s'interpénètrent et se viennent mutuellement en aide. L'ouvrage est émaillé de nombreux exemples — parfois trop — car il se veut didactique. **Leonardo Pisano** l'a divisé en quinze chapitres.

Avant d'enfin conclure ce long article, il nous reste à signaler que le *liber abbaci* est sans doute l'œuvre la plus connue de **Fibonacci**, car dans ses récréations mathématiques, au chapitre douze, il introduit une suite de nombres liée à la reproduction de « petits lapins » qui est célèbre dans le monde entier et est toujours source de recherches (parles-en à ton professeur de mathématiques).

Nous sommes conscients du fait qu'il est impossible de donner, en quelques pages, un aperçu de l'histoire des systèmes de numération, comme nous avons tenté de le faire ici. Nous avons malheureusement dû utiliser des raccourcis. Nous espérons cependant ne pas avoir trop trahi la réalité historique. Nous demandons l'indulgence des spécialistes.

Bibliographie

[1] Michel **Ballieu**, *Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement ...*, Nouvelles tendances en histoire et philosophie des sciences, Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Colloque national (15-16/10/1992), p. 123-133.

[2] Michel **Ballieu** et Djamil **Aïssani**, *Le savoir mathématique en Petite Kabylie au dix-neuvième siècle* (à paraître), Colloque international, Béjaïa (Algérie), 9-11 novembre 1997.

[3] J. L. **Berggren**, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986.

[4] Rida A. K. **Irani**, *Arabic Numeral Forms* in *Studies in the Islamic Exact Sciences*, E.S. Kennedy, colleagues and former students, American University of Beirut, 1983, p. 710-721.

[5] George Gheverghese **Joseph**, *The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics*, Penguin Books, 1992.

[6] Kūshyār ibn **Labbān**, *Principles of Hindu Reckoning*, a translation with introduction and notes by Martin **Levey** and Marvin **Petruck** of the Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind, The University of Wisconsin Press, Madison and Milwaukee, 1965.

[7] O. **Neugebauer**, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publications, Inc., New York.

[8] Ahmad S. **Saidan**, *Numération et arithmétique*, in Histoire des sciences arabes, sous la direction de Roshdi Rashed, Seuil, 1997.

[9] Simon **Stevin**, *Thiende (Disme)*, IREM, Université de Paris VII, reproduction de textes anciens, avril 1980.

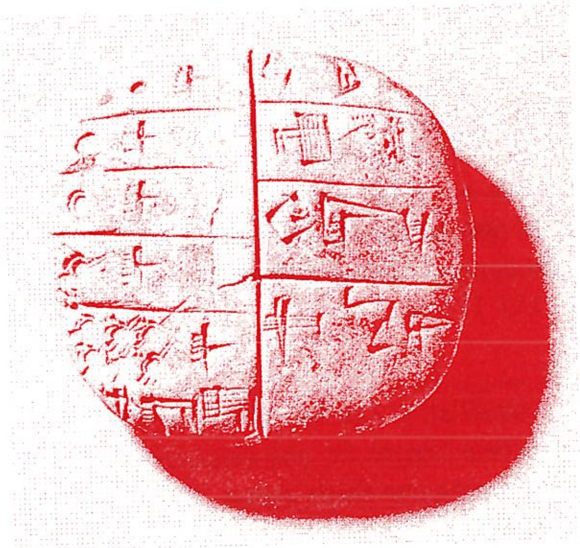
[10] Philippe **Talon**, *Introduction aux mathématiques babyloniennes*, in *D'Imhotep à Copernic*, Actes du Colloque International, ULB, 3-4 novembre 1989, Peeters, Leuven, 1992.

[11] Adolf P. **Youschkevitch**, *Les mathématiques arabes (VIII^e - XV^e siècles*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1976.

[12] Jim **Ritter** (Université de Paris VIII), *Le rôle du nombre dans l'invention de l'écriture*, exposé fait à l'ULB le 20 février 1998.

[13] *En Syrie, aux origines de l'écriture*, Catalogue de l'exposition (Société Générale de Banque, du 26 décembre 1997 au 31 mars 1998), en collaboration avec l'ULB et la KUL.

[14] *The MacTutor History of Mathematics Archive*, adresse internet http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

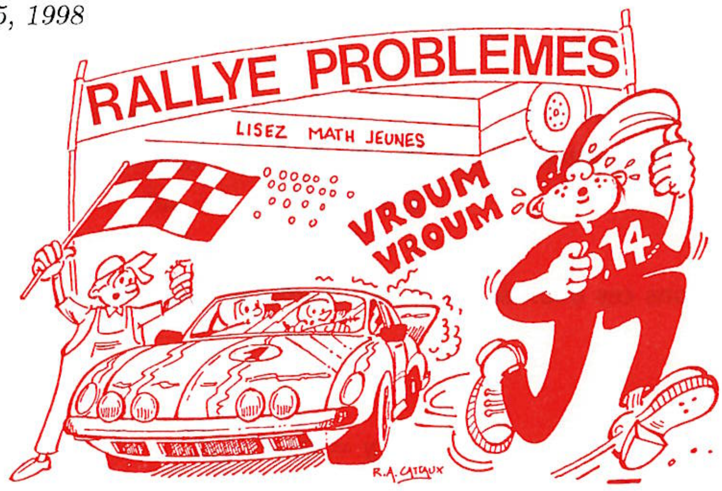


Texte mathématique. Ebla ($\approx$ 2500 av. J.-C.).
Cette tablette porte, dans la colonne de gauche, les nombres les plus élevés du système sexagésimal, de 10×60^2 à 60^4.

* *
*

Le *doublet* ci-après vous est proposé par Yolande Noël-Roch. Si vous en avez oublié le principe, reportez-vous à la page 44 du *Math-Jeunes* précédent.

MATH	tu les aimes
MATE	pas brillante
MARE	aux canards
TARE	une masse
TORE	un anneau
TORT	il tue
SORT	nous t'en jetons un bon
SOIT	honni ... qui mal y pense
SOIE	spécialité chinoise
JOIE	de faire des math.



C. Festraets

Solution des problèmes du numéro 82

mini 3 De 1 à 1 000, il y a deux cents nombres entiers divisibles par 5, car ($5 \times 200 = 1\,000$) et cent quarante-deux nombres entiers divisibles par 7 (car $7 \times 142 = 994$).
Mais parmi les deux cents nombres entiers divisibles par cinq, il en est qui sont multiples de sept, et de même, parmi les cent quarante-deux nombres entiers divisibles par sept, il en est qui sont multiples de cinq. Ce sont en fait les multiples de trente-cinq et il y en a vingt-huit (car $35 \times 28 = 980$).
Au total, nous obtenons donc $200 + 142 - 28 = 314$ nombres multiples de 5 ou de 7. Il reste ainsi $1\,000 - 314 = 686$ nombres qui ne sont multiples ni de 5, ni de 7.

mini 4 On sait que

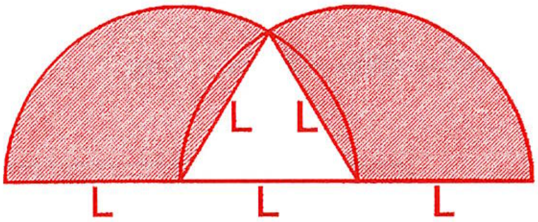
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Ainsi, par exemple, $1+2+3+4+5 = \dfrac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15$. Si les pages du livre sont numérotées de 1 à n et si le comptage a été fait correctement (ce qui n'est pas le cas), on doit avoir

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1\,998$$

ou encore, $n^2 + n = 3\,996$. 63 est le plus grand entier positif dont le carré est inférieur à 3 996 mais $63^2 + 63 > 3\,996$. Essayons avec 62 : on arrive à 1 953 et si la page 45 a été comptée deux fois, cela fait effectivement 1 998. Il y a peut-être une autre solution avec $n = 61$ mais cela implique que la page 107 (alors qu'il n'y en a que 61) a été comptée deux fois !

midi 3 L'aire totale balayée est celle d'un tiers de disque de rayon L (hachuré à gauche sur la figure) plus celle d'un triangle équilatéral de côté L plus celle d'un tiers de disque de rayon L (hachuré à droite sur la figure).



$$\text{Aire} = \frac{1}{3}\pi L^2 + \frac{1}{2} L \cdot L \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\pi L^2$$

ce qui donne

$$L^2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

midi 4 Désignons respectivement par x, y, et z le nombre de timbres à 1 BEF, à 4 BEF et à 12 BEF. On a acheté quarante timbres pour un prix total de 100 BEF, d'où

$$\begin{aligned} x + y + z &= 40 \\ x + 4y + 12z &= 100 \end{aligned}$$

Si nous soutrayons ces deux équations et isolons y, nous obtenons

$$3y + 11z = 60$$

ou encore

$$y = 20 - \frac{11z}{3}.$$

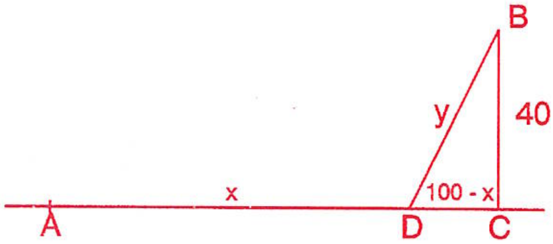
Puisque y est un nombre entier, z doit être un multiple de 3 ($z = 3k$ où k est un naturel.) Il vient alors

$$y = 20 - 11k \text{ et}$$

$$x = 40 - (20 - 11k) - 3k = 20 + 8k.$$

y est positif et non nul, donc $k \leqslant 1$.
Si $k = 0$, on obtient $z = 0$, solution à rejeter puisqu'on a acheté au moins un timbre à douze francs. Si $k = 1$, $z = 3$, $y = 9$ et $x = 28$. Ce qui implique que l'on a acheté 28 timbres à 1 BEF, 9 timbres à 4 BEF et 3 timbres à 12 BEF.

maxi 3 Désignons par x la distance $|AD|$ parcourue sur le fleuve et par y la longueur de la route $|DB|$.



Le coût du transport est proportionnel à $x + 2y$. Il s'agit de déterminer x et y pour que $x + 2y$ soit minimum. Posons $m = x + 2y$. Dans le triangle rectangle BCD, on a

$$(100 - x)^2 = y^2 - 40^2$$

d'où

$$100 - x = \sqrt{y^2 - 40^2}$$

ce qui nous donne m en fonction de y :

$$m = 100 - \sqrt{y^2 - 40^2} + 2y$$

Calculons y.

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 - 40^2} &= 100 + 2y - m \\ y^2 - 40^2 &= (100 + 2y - m)^2 \\ &= 100^2 + 4y^2 + m^2 + 400y - 200m - 4my \\ 3y^2 - 4y(m - 100) + \\ (m - 100)^2 + 40^2 &= 0 \\ y &= \tfrac{1}{3}\left(2(m - 100) \pm \sqrt{4(m - 100)^2 - 3(m - 100)^2 - 3 \cdot 40^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(2(m - 100) \pm \sqrt{(m - 100)^2 - 3 \cdot 40^2}\right) \end{aligned}$$

y est un réel si et seulement si $(m-100)^2 \geqslant 3 \cdot 40^2$; la plus petite valeur de $(m-100)^2$ est donc $3 \cdot 40^2$ et comme m est positif, on a $m - 100 = 40\sqrt{3}$, ce qui nous donne en fin de compte

$$y = \frac{80\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x = 100 - \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

Dans le triangle BDC, remarquons que $\sin \widehat{CDB} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{40}{80\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\widehat{CDB} = 60°$.

La route fait donc un angle de soixante degrés avec le fleuve.

maxi 4 Soient x l'âge du fils et y l'âge du père. On a $y > x$ et l'énoncé s'exprime par l'équation

$$100y + x - (y - x) = 4\,289$$

Calculons la valeur de y :

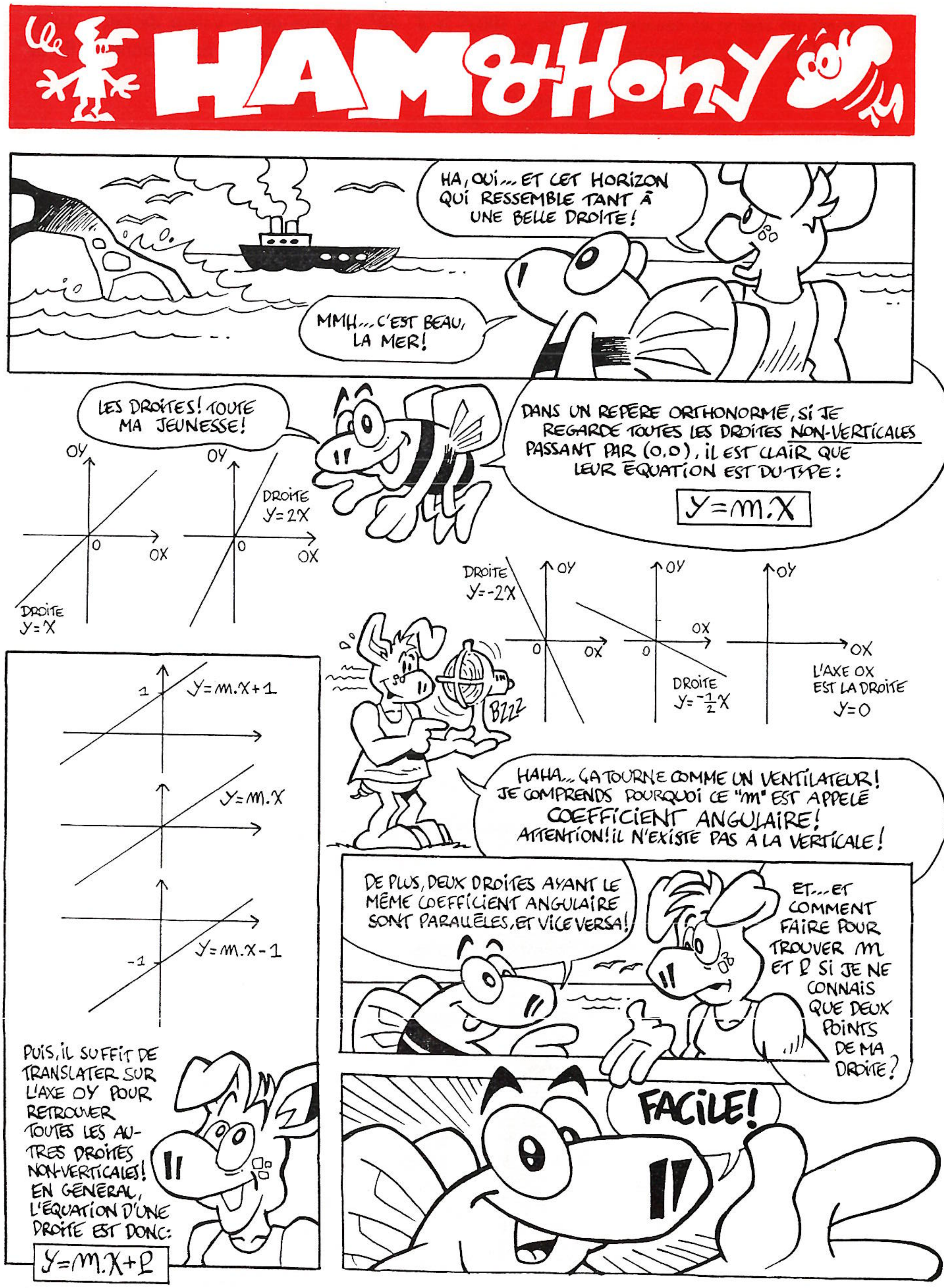
$$\begin{aligned} 99y + 2x &= 4\,289 \\ y &= \frac{4\,289 - 2x}{99} \\ &= 43 + \frac{32 - 2x}{99} \end{aligned}$$

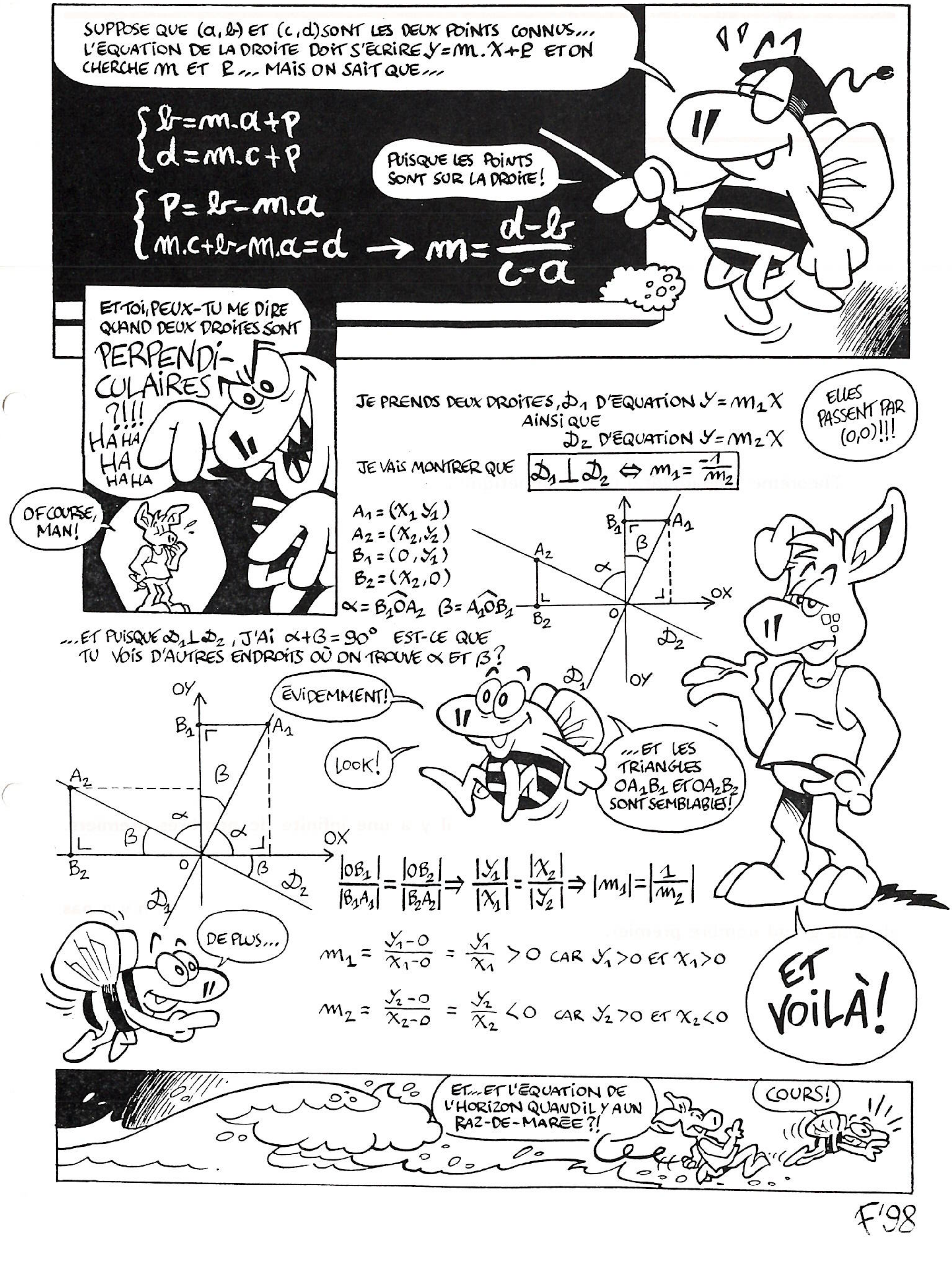
Si $y = 43$, alors $x = 16$; le père a 43 ans et le fils en a 16.

Si $y > 43$, alors $\frac{32 - 2x}{99} \geqslant 1$, ce qui conduit à x négatif et est impossible.

Si $y < 43$, on arrive à la conclusion que l'âge du fils est supérieur à celui du père, ce qui est également impossible.

Math-Jeunes n° 84, 76–77, 1998




SUPPOSE QUE (a,b) ET (c,d) SONT LES DEUX POINTS CONNUS... L'ÉQUATION DE LA DROITE DOIT S'ÉCRIRE $y = m.x + p$ ET ON CHERCHE m ET p... MAIS ON SAIT QUE...
$\begin{cases} b = m.a + p \\ d = m.c + p \end{cases}$
PUISQUE LES POINTS SONT SUR LA DROITE!
$\begin{cases} p = b - m.a \\ m.c + b - m.a = d \end{cases} \rightarrow m = \frac{d-b}{c-a}$
ET TOI, PEUX-TU ME DIRE QUAND DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES ?!!! HA HA HA HA HA HA
OF COURSE, MAN!
JE PRENDS DEUX DROITES, $\mathcal{D}_1$ D'ÉQUATION $y = m_1 x$ AINSI QUE $\mathcal{D}_2$ D'ÉQUATION $y = m_2 x$
ELLES PASSENT PAR (0,0)!!!
JE VAIS MONTRER QUE $\boxed{\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}}$
$A_1 = (x_1, y_1)$
$A_2 = (x_2, y_2)$
$B_1 = (0, y_1)$
$B_2 = (x_2, 0)$
$\alpha = B_1\widehat{O}A_2 \quad \beta = A_1\widehat{O}B_1$
B_1 A_1 A_2 β α OX O B_2 $\mathcal{D}_2$ $\mathcal{D}_1$ OY
...ET PUISQUE $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$, J'AI $\alpha + \beta = 90°$ EST-CE QUE TU VOIS D'AUTRES ENDROITS OÙ ON TROUVE α ET β ?
ÉVIDEMMENT!
LOOK!
...ET LES TRIANGLES OA_1B_1 ET OA_2B_2 SONT SEMBLABLES!
OY B_1 A_1 A_2 β α β α OX B_2 O β $\mathcal{D}_2$ $\mathcal{D}_1$
$\frac{|OB_1|}{|B_1A_1|} = \frac{|OB_2|}{|B_2A_2|} \Rightarrow \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|x_2|}{|y_2|} \Rightarrow |m_1| = \left|\frac{1}{m_2}\right|$
DE PLUS...
$m_1 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1} > 0$ CAR $y_1 > 0$ ET $x_1 > 0$
$m_2 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{y_2}{x_2} < 0$ CAR $y_2 > 0$ ET $x_2 < 0$
ET VOILÀ!
ET... ET L'ÉQUATION DE L'HORIZON QUAND IL Y A UN RAZ-DE-MARÉE ?!
COURS!
F'98

Math-Jeunes n°84, 78–81, 1998

Combien y a-t-il de nombres premiers ?

G. Troessaert, *Institut Supérieur Industriel Arlon*

Un nombre premier est un nombre naturel qui possède exactement deux diviseurs. Classés en ordre croissant, les premiers nombres premiers sont

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ \ldots$$

Les nombres premiers sont importants car ils constituent les briques fondamentales à partir desquelles on peut, par multiplication, construire tous les nombres naturels supérieurs à 1, par exemple

$$94\,860 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$$

Ce résultat est connu sous le nom de :

Théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout nombre naturel n supérieur à 1 se factorise de façon unique sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \ldots \ \cdot p_k^{\alpha_k}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres naturels non nuls.

Le plus petit nombre premier est 2, mais y a-t-il un plus grand nombre premier ? Combien y a-t-il de nombres premiers ?

La réponse à ces questions a été donnée très tôt par le mathématicien grec **Euclide** (3^e siècle av. J.-C.) qui, dans son traité *Les éléments* prouve qu'**il y a une infinité de nombres premiers.** Ceci signifie que quel que soit le nombre choisi, aussi grand soit-il (par exemple mille millards de mille ...), le nombre de nombres premiers est plus grand.

Euclide répond aussi à la question de savoir s'il y a un plus grand nombre premier : **il n'y a pas de plus grand nombre premier,** car s'il y en avait un (appelons-le P), il n'y aurait alors pas de nombre premier supérieur à P ce qui impliquerait un nombre fini de nombres premiers (il y en aurait moins de P).

La démonstration d'**Euclide** se fait par l'absurde. Il suppose au départ qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers et à partir de cette hypothèse, il développe un raisonnement qui le conduit à une contradiction. Un raisonnement correct ne peut conduire à une contradiction que si son argument de départ est faux. Suivons **Euclide** dans sa démonstration.

Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers ; écrivons-les : $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Formons le produit $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Le nombre $P + 1$ est plus grand que tous les nombres premiers, il n'est donc pas premier. S'il n'est pas premier, il est divisible par au moins un nombre premier p_i. Dans ce cas, P et $P+1$ sont tous deux divisibles par p_i ce qui est absurde car deux nombres consécutifs n'ont pas de diviseurs premiers communs (peux-tu le prouver ?). Il y a donc une infinité de nombres premiers.

Il existe une preuve moins connue due à **Euler**, mathématicien suisse né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783. Cette preuve est basée sur la divergence de la série harmonique, la décomposition en facteurs premiers et la jolie formule

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{1}$$

On appelle **série harmonique** la somme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

Supposons que cette somme ait pour valeur un nombre fini H,

$$H = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

En remplaçant 1 par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ par $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ par $\frac{1}{8}$, ... , on construit une somme plus petite que H et donc

$$H > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\cdots$$

Ensuite, on regroupe les termes 2 par 2, et on obtient

$$H > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

On constate que le second membre de cette inégalité est H et on obtient la contradiction $H > H$, ce qui signifie que la série harmonique diverge, c'est-à-dire que la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$, croissante (on ajoute toujours des termes positifs), devient plus grande que n'importe quel nombre réel.

Cette propriété de la série harmonique n'est pas évidente car quand on construit la somme, on ajoute des termes de plus en plus petits. Par exemple, il faut 12 367 termes pour dépasser 10.

Reste à démontrer la formule (1).

Soit

$$S = 1+x+x^2+\cdots+x^n,$$

on a

$$x\cdot S = x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}.$$

En soustrayant, on obtient

$$S - x\cdot S = (1-x)\cdot S = 1-x^{n+1}$$

et donc

$$S = 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Nous pouvons maintenant étudier la preuve d'**EULER**.

Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Par le principe de factorisation, tout entier n peut être exprimé sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Considérons la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres

$$2, 3, \ldots, n-1, n$$

et appelons α le plus grand des exposants obtenus dans toutes ces factorisations.

On définit le produit

$$\begin{aligned} P = & \left(1 + \tfrac{1}{p_1} + \tfrac{1}{p_1^2} + \cdots + \tfrac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \tfrac{1}{p_2} + \tfrac{1}{p_2^2} + \cdots + \tfrac{1}{p_2^\alpha}\right)\ldots \\ & \ldots\left(1 + \tfrac{1}{p_k} + \tfrac{1}{p_k^2} + \cdots + \tfrac{1}{p_k^\alpha}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

Si on développe ce produit, on obtient $(\alpha+1)^k$ termes, parmi lesquels on retrouvera $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$.

En effet, prenons par exemple le nombre 9 180 dont la décomposition en facteurs premiers est $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$. Le nombre $\frac{1}{9\,180} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17}$ sera obtenu en faisant le produit des termes suivants :

le 3^e^ terme de la parenthèse $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$, le 4^e^ terme de $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right)$, le 2^e^ terme de $\left(1 + \frac{1}{5} + \cdots\right)$, le 2^e^ terme de $\left(1 + \frac{1}{17} + \cdots\right)$ et les premiers termes de toutes les autres parenthèses, à savoir 1.

Nous avons donc l'inégalité

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < P$$

D'autre part, par la formule (1), pour chaque facteur de P, on a

$$1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^\alpha} = \frac{1 - \left(\frac{1}{p_i}\right)^{\alpha+1}}{1 - \frac{1}{p_i}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

car en éliminant $\left(\frac{1}{p_i}\right)^{\alpha+1}$, on augmente le numérateur de la fraction.

En remplaçant chaque parenthèse de (2) par sa majoration, on a

$$P < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Cette inégalité est valable pour tout n, elle exprime donc que le nombre

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

est plus grand que la somme de la série harmonique ; or, on sait que c'est impossible. On obtient ainsi la contradiction qui prouve qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.

Remarques :

1. Le problème étudié est un problème datant de l'antiquité qui a été résolu durant l'antiquité.

   Un problème semblable résiste toujours aux mathématiciens, il concerne les nombres premiers jumeaux. Deux nombres premiers sont dits *jumeaux* lorsqu'ils diffèrent de 2 (par exemple : 11 et 13 ; 29 et 31). On ne sait toujours pas combien il y a de nombres premiers jumeaux. Les mathématiciens pensent qu'il y en a une infinité mais personne jusqu'à présent n'est parvenu à le démontrer.

2. Ce petit article utilise quelques notions importantes. Pour te familiariser un peu avec celles-ci, voici quatre petits problèmes :

   a) Trouve tous les nombres premiers inférieurs à 200.

   b) Décompose les nombres suivants en facteurs premiers : 360, 320 100, 1 981 340.

   c) Démontre que deux nombres premiers jumeaux encadrent toujours un multiple de 6 (sauf 3 et 5, pourquoi ?).

   d) Considérons un échiquier 8×8. On place un grain de riz sur la première case, 2 grains sur la deuxième, 4 grains sur la troisième, 8 grains sur la quatrième et ainsi de suite jusqu'au moment où on recouvre toutes les cases de l'échiquier. Evalue le nombre de grains déposés. Compare ce résultat à la production de riz de la Chine en 1985, soit 171 479 000 tonnes.

Référence :

J.P. GROSSMAN, Shreds and Slices : an Abundance of Primes, Mathematical Mayhem Vol 5, Issue 4, pages 3- 4.

 Math-Jeunes n° 84, 82–84, 1998

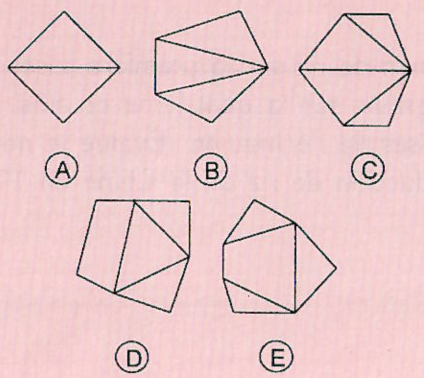
Pair ou impair : c'est super !!! (4)

Claude Villers

Trouver un bon chemin !

Mathieu semblait préoccupé. L'air interrogateur, il s'adressa à ses copains :
— *En me préparant à participer à l'Olympiade Mathématique Belge, j'ai retrouvé la question suivante, posée en 1997* (MINI-éliminatoire, question n° 14).

> Dans lequel des réseaux routiers schématisés ci-dessous existe-t-il un circuit (c'est-à-dire un chemin revenant à son point de départ) empruntant une et une seule fois chacune des routes entre deux carrefours (symbolisés par les intersections) ?



—*J'ai trouvé la réponse correcte mais c'est au prix de nombreux essais de tracés pour chacun des réseaux proposés. Je me demande s'il n'existe pas une méthode pour répondre plus astucieusement à une telle question. Je vous propose donc de répondre à la question de l'Olympiade puis de m'aider à rechercher une éventuelle méthode fournissant une réponse rapide à ce genre de question.*
Tous se mirent au travail.
Nous vous invitons, ami lecteur, à faire comme eux avant de lire la suite de l'article.

Vous avez certainement tous trouvé que le réseau Ⓓ est celui qui répond aux conditions de la question.

Partons à la recherche d'une méthode générale permettant de répondre rapidement à une telle question.

Pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple ?

C'est une attitude classique, en mathématique, que de commencer ses investigations en simplifiant les problèmes auxquels on est confronté.

Le plus simple, ici, est de s'intéresser à un sommet du réseau.

Voyons ce qui peut s'y passer.

Commençons par établir tous les rôles possibles de ce sommet.

CAS N° 1 Il peut être point de départ sans être point d'arrivée.

CAS N° 2 Il peut être point d'arrivée sans être point de départ.

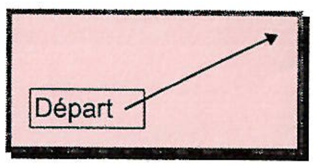
CAS N° 3 Il peut être à la fois point de départ et point d'arrivée.

CAS N° 4 Il peut être point de passage.

Illustrons chacun de ces cas et essayons d'en tirer quelques conclusions.

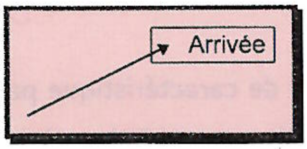
CAS N° 1

On constate que le fait d'être point de départ engendre UN segment dont ce point est extrémité.



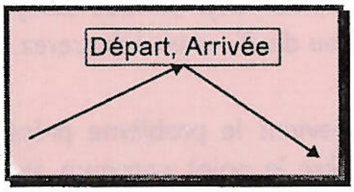
Cas n° 2

Le fait de jouer le rôle de point d'arrivée engendre également UN segment dont ce point est extrémité.



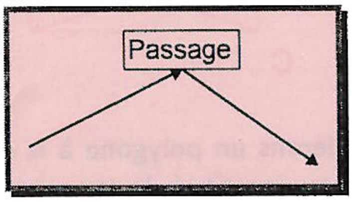
Cas n° 3

Dans ce cas, qui n'est que la conjonction des deux précédents, le double rôle de point d'arrivée et de point de départ engendre DEUX segments ayant ce point pour extrémité.

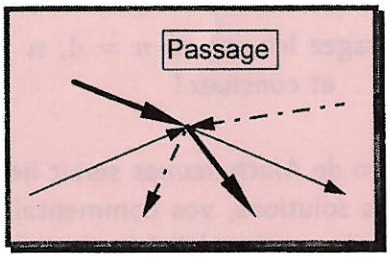


Cas n° 4

Ce cas correspond pratiquement au précédent. Le rôle de point de passage engendre aussi DEUX segments dont ce point est extrémité.



En outre, rien n'interdit à un même sommet du réseau de servir plusieurs fois de point de passage.



Dès lors, ce rôle multiple engendre en ce sommet 2, 4, 6, . . . segments c'est-à-dire un *nombre pair* de segments.

On dira que le sommet a une **caractéristique paire**.

De même, un sommet qui est, à la fois, point de départ et point de passage sera extrémité d'un *nombre impair* de segments du réseau.

On dira qu'il a une **caractéristique impaire**.

Il est peut-être bon maintenant de résumer ce que nous avons découvert.

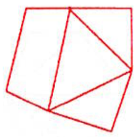
Rôle du sommet considéré	Nombre de segments du réseau au sommet considéré	Caractéristique du sommet
Seulement départ	1	**impaire**
Seulement arrivée	1	**impaire**
Départ et arrivée	2	**paire**
Passage	2, 4, 6, 8, . . .	**paire**
Départ et passage	3, 5, 7, . . .	**impaire**
Passage et arrivée	3, 5, 7, . . .	**impaire**

Ce qui précède nous donne un moyen facile et rapide de répondre à la question de l'Olympiade, à l'origine de notre recherche. La notion de parité sera à nouveau d'une aide précieuse.

On cherche le réseau qui permet un parcours dans lequel tous les points sont d'éventuels points de passage et où un sommet est à la fois point de départ et d'arrivée.

Le tableau ci-dessus nous montre que tous les sommets doivent être de caractéristique paire.

Seul le réseau D possède cette propriété (comptez les nombres de segments en chaque sommet).



D

La réponse correcte était donc D

Remarquons au passage que chaque sommet pouvait servir à la fois de point de départ et d'arrivée.

À vos crayons pour dessiner quelques circuits sur ce réseau.

Pour aller plus loin

Il serait dommage de s'arrêter ici car une question se pose de manière naturelle.

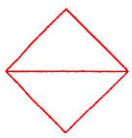
À quelle condition un réseau peut-il être parcouru totalement, sans passer deux fois sur le même segment, si le point de départ et le point d'arrivée ne coïncident pas ?

Une fois encore, la réponse se trouve dans le tableau ci-avant.

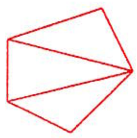
Celui-ci nous montre clairement que les seuls réseaux satisfaisant la condition sont ceux qui comprennnent deux et seulement deux sommets de caractéristique impaire. Ce sont les sommets de départ et d'arrivée. Tous les autres sont des points de passage donc doivent être de caractéristique paire.

C'est le cas des réseaux Ⓐ, Ⓑ et Ⓔ proposés dans la question de l'Olympiade.

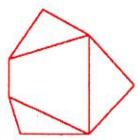
À vous de rechercher de tels parcours sur ces réseaux.



Ⓐ



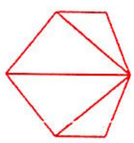
Ⓑ



Ⓔ

Ce n'est pas le cas du réseau Ⓒ qui possède quatre sommets de caractéristique impaire.

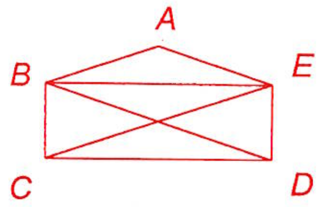
Il est impossible de parcourir totalement ce réseau sans passer plus d'une fois sur un même segment.



Ⓒ

Pour s'exercer

Ce qui précède permet de résoudre le problème classique du tracé, d'un seul trait, de l'enveloppe que voici.



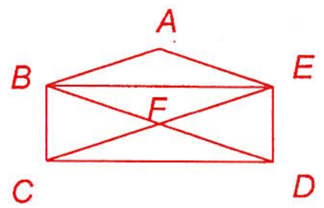
A, B, E sont de caractéristique paire.

C et D sont de caractéristique impaire.

Il y a deux points de caractéristique impaire donc le réseau peut être dessiné totalement d'un trait sans passer plus d'une fois sur les segments qui le composent.

Mais pour y arriver il faut partir de C et arriver en D (ou le contraire). Si vous essayez de partir de A, de B ou de E, vous échouerez à coup sûr.

- Que devient le problème précédent si on considère le point commun aux deux diagonales du rectangle $BCDE$ comme sommet dans le réseau ?



- Considérons un polygone à n sommets et le réseau constitué de ces n sommets, des côtés et des diagonales du polygone.

  Peut-il être tracé d'un trait sans passer plus d'une fois sur chacun des segments qui le composent ?

  Envisagez les cas où $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, ... et concluez !

La rédaction de *Math-Jeunes* serait heureuse de recevoir vos solutions, vos commentaires et vos découvertes à ce sujet. N'hésitez pas à lui transmettre les résultats de vos réflexions personnelles ou collectives.

La région perdue

J-M Slowik, *Lycée Robespierre, Arras (France)*

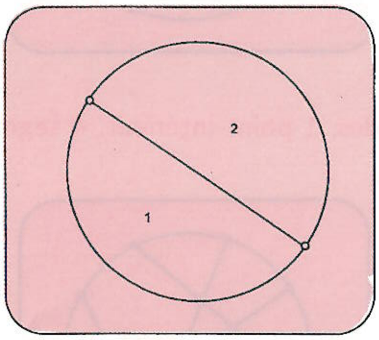
On marque n points sur un cercle et on trace toutes les cordes possibles joignant deux de ces points. Deux cordes concourantes se coupent en un point, dit **point intérieur**.

On supposera que trois cordes quelconques ne sont pas concourantes.

> **Question 1.** *En combien de régions le disque est-il divisé par les cordes joignant n points du cercle ?*

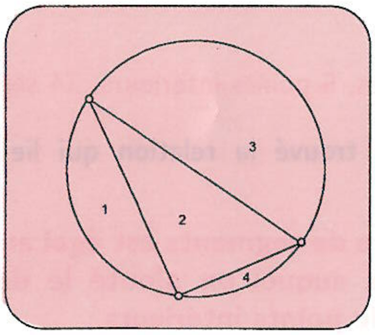
Essayons à la main.

$n = 2$



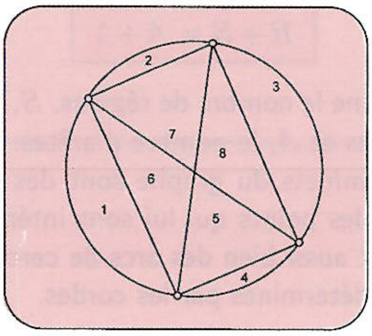
$R(2) = 2$

$n = 3$



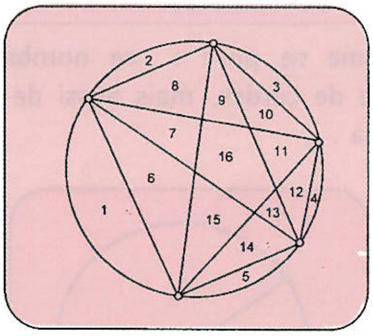
$R(3) = 2^2 = 4$

$n = 4$



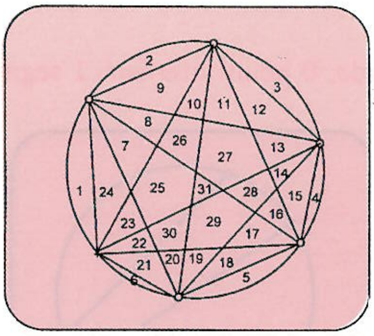
$R(4) = 2^3 = 8$

$n = 5$



$R(5) = 2^4 = 16$

$n = 6$



On rêve de trouver $R(6) = 2^5 = 32$.

Hélas, on trouve $R(6) = 31$!!!
Une région s'est perdue !

Nous allons tenter d'expliquer ce phénomène.

Pourquoi tout se passse-t-il bien au début? Pourquoi rien ne va-t-il plus lorsque $n = 6$?

Pour le calcul du nombre de régions, nous nous servirons de la formule d'**Euler** propre aux graphes :

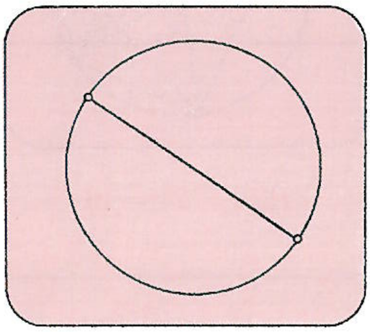
$$\boxed{R + S = A + 1}$$

où R désigne le nombre de régions, S, le nombre de sommets et A, le nombre d'arêtes. Précisons que les sommets du graphe sont des points du cercle ou des points qui lui sont intérieurs. Les arêtes sont aussi bien des arcs de cercle que des segments déterminés par les cordes.

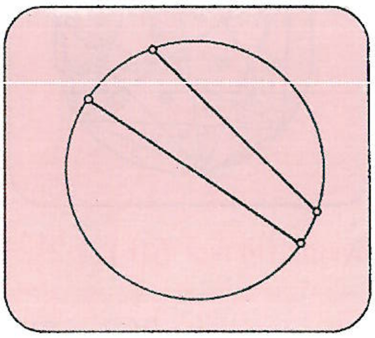
Intéressons-nous également au nombre de segments déterminés par les cordes.

Question 2. *Combien de segments sont-ils déterminés par les cordes?*

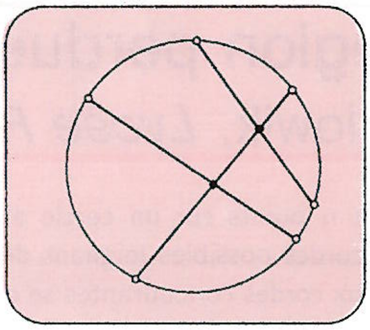
Un problème se pose : ce nombre dépend du nombre de cordes, mais aussi de la figure. Voyons cela ...



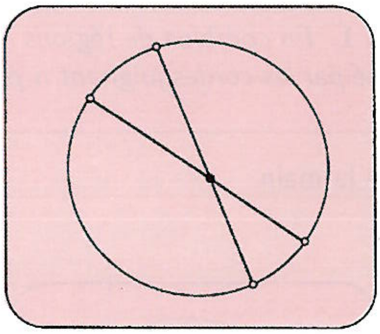
1 corde, 0 point intérieur, 1 segment



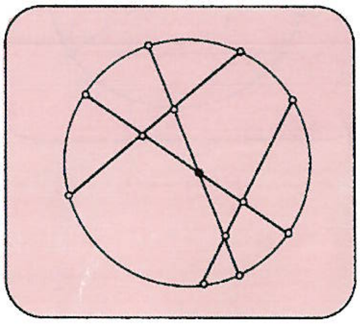
2 cordes, 0 point intérieur, 2 segments



3 cordes, 2 points intérieurs, 7 segments



2 cordes, 1 point intérieur, 4 segments



4 cordes, 5 points intérieurs, 14 segments

Avez-vous trouvé la relation qui lie ces trois nombres?

Le nombre de segments est égal au nombre de cordes auquel on ajoute le double du nombre de points intérieurs.

En effet, s'il n'y a aucune intersection de cordes à l'intérieur du cercle, il y a alors autant de segments que de cordes; et ce calcul est à peine différent dans le cas contraire : si deux cordes se coupent, leur point d'intersection « coupe » ces deux cordes en deux, ce qui crée deux nouveaux segments. Donc, le mécanisme est simple : **un point donne deux nouveaux segments**, d'où le décompte ci-dessus.

Cas particulier : lorsqu'on dispose n points sur le cercle de telle manière qu'en traçant toutes les cordes possibles, trois d'entre elles ne sont jamais concourantes, alors le nombre total de cordes est le nombre de façons de choisir 2 points parmi n, c'est-à-dire C_n^2 avec $n \geqslant 2$.

Le nombre de points intérieurs est le nombre de façons de choisir 4 points parmi n ou encore C_n^4 avec $n \geqslant 4$.

Nous avons donc

$$\boxed{S_n = C_n^2 + 2 \cdot C_n^4}$$

où S_n désigne le nombre maximum de segments déterminés par n points sur un cercle, lorsqu'on trace toutes les cordes.

Reprenons notre quête, à partir de la formule

$$\boxed{R + S = A + 1}$$

R désigne, rappelons-le, le nombre de régions c'est-à-dire l'inconnue que nous recherchons. S est le nombre de sommets : le nombre de points sur le cercle plus le nombre de points intérieurs, ce qui fait $n + C_n^4$, où $n \geqslant 2$ (nous prenons la liberté de poser $C_2^4 = C_3^4 = 0$, ce qui n'a rien de gênant). A est le nombre d'arêtes c'est-à-dire le nombre de segments et d'arcs de cercle ou $C_n^2 + 2 \cdot C_n^4 + n$ avec $n \geqslant 2$. Ainsi, si R_n désigne le nombre de régions obtenues au départ de n points, il vient : $R_n = C_n^2 + 2 \cdot C_n^4 + n + 1 - (n + C_n^4)$ ou $R_n = 1 + C_n^2 + C_n^4$, ce qui s'écrit plus joliment :

$$\boxed{R_n = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4}$$

mais surtout, en utilisant une propriété du **triangle de Pascal** :

$$\boxed{R_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4}$$

Cette formule explique le **mystère de la région perdue**. Rappelons que nous sommes convenus que $C_2^4 = C_3^4 = 0$.

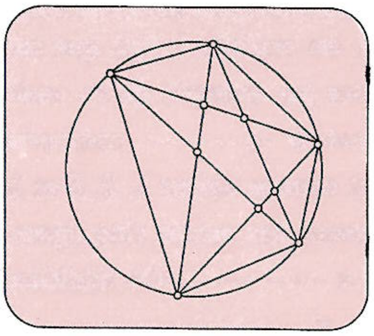
Pour $n = 2$, $R_2 = C_1^0 + C_1^1 = (1+1)^1 = 2^1 = 2$.
Pour $n = 3$, $R_3 = C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$.
Pour $n = 4$, $R_4 = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8$.
Pour $n = 5$, $R_5 = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = (1+1)^4 = 2^4 = 16$.

Pour $n = 6$, patatras !
$R_6 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 31 \neq (1+1)^5 = 32$.

et voilà le secret du mystère !

Notez qu'en passant, nous avons rencontré :

Question annexe. *Quel est le nombre maximum de points intérieurs déterminés par les n diagonales ?*



Pour 5 points, on compte $I(5) = 5$.

En essayant les différents cas à la main, on trouve :

$$\begin{array}{ccc} I(3) = 0 & I(4) = 1 & I(5) = 5 \\ I(6) = 15 & I(7) = 35 & I(8) = 70 \end{array}$$

Un point intérieur est déterminé par le choix de 4 points du cercle ; donc le nombre de points intérieurs est le nombre de choix de 4 points parmi n, soit :

$$\boxed{I(n) = C_n^4}$$

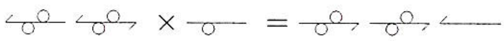
 Math-Jeunes n° 84, 88–91, 1998

Un peu d'histoire : les chiffres de Monseigneur Lemaître (suite)

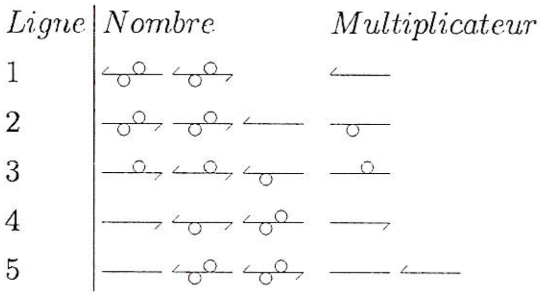
Guy Noël et Yolande Noël-Roch

4. La multiplication

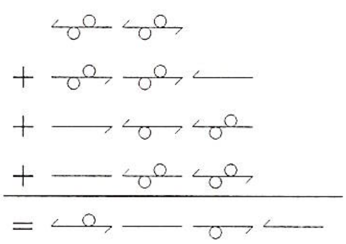
Pour la multiplication, l'opération de base est la multiplication par 2 : les signes élémentaires étant 1, 2, 4, 8, pour multiplier un nombre par 2, on remplace chaque signe par le suivant, sauf qui est remplacé par . Ainsi



Ayant appris à multiplier par 2, on sait aussi multiplier par 4, 8, 16, ... Pour multiplier par un nombre quelconque, on exploite le fait que son écriture est une décomposition en somme de puissances de 2. Supposons par exemple qu'on veuille multiplier 247 par 27, pardon, par . Le multiplicateur comporte deux chiffres. Ensemble les deux chiffres contiennent quatre signes ayant comme valeur 1, 2, 8 et 16. Pour multiplier par , on va écrire les unes en dessous des autres cinq lignes donnant les valeurs de , × , ..., × . On additionne ensuite les lignes correspondant aux multiplicateurs , , et .



Il reste à additionner les nombres figurant dans les lignes 1, 2, 4 et 5 :



L'algorithme qui s'impose ainsi naturellement lorsqu'on écrit les nombres dans le système de Mgr **LEMAÎTRE** est en fait très ancien. Il remonte aux égyptiens puisqu'on le découvre notamment sur le célèbre papyrus Rhind, datant de 1650 avant Jésus-Christ, dans le cadre (plus compliqué) de la multiplication d'une fraction par un entier.

5. Un système hybride

Dans le système que nous venons de décrire, les nombres sont écrits en hexadécimal, c'est-à-dire dans le système de numération de base 16, comportant 16 chiffres différents désignant les nombres de 0 à 15. La simplicité de l'écriture de Mgr **LEMAÎTRE** réside dans le fait que chaque chiffre est lui-même décomposé en signes élémentaires représentant des puissances de deux. C'est un système « hexadécimal codé en binaire » .

Ce système bouscule les habitudes de façon importante. En écrivant les nombres de gauche à droite, au lieu de les écrire de droite à gauche. Mais surtout en utilisant la base 16, alors que la numération parlée est le reflet de la numération décimale : « soixante-sept » est adapté à « 6 fois dix + 7 » , non à « 4 fois seize + 3 » , même si on l'écrit « fois seize + » .

Dans sa brochure « *Calculons sans fatigue* » , Mgr **LEMAÎTRE** n'a pas eu l'audace de préconiser le système hexadécimal pur. Il conserve le système décimal, n'utilise que les chiffres de 0 à 9 mais les écrit avec ses signes élémentaires. C'est un système « décimal codé binaire » . Des systèmes de ce genre ont parfois été utilisés en informatique. Du système pur, Mgr **LEMAÎTRE** conserve aussi l'écriture des nombres de gauche à droite.

C'est donc un système hybride dans lequel dix s'écrit , onze , douze , etc. Dans un tel système, les calculs sont automatiquement plus compliqués : au lieu d'avoir simplement + = , on a + = . De même + = devient + = . Les procédures de report dans les calculs deviennent fatalement plus complexes.

En n'osant pas préconiser le système hexadécimal pur, Mgr **LEMAÎTRE** perdait une grande partie de l'avantage de son système d'écriture ! Le poids des traditions est souvent un obstacle à la simplicité !

En 1998, l'omni-présence des machines à calculer électroniques modifie profondément la situation en enlevant beaucoup de son intérêt à la recherche d'une méthode de « calcul sans fatigue » qui nécessiterait toujours un entraînement important. Il subsiste le plaisir de rencontrer un nouvel habillage des numérations hexadécimale et binaire et celui de rencontrer un système mixte : le décimal codé binaire.

6. Le minicomputer de Papy

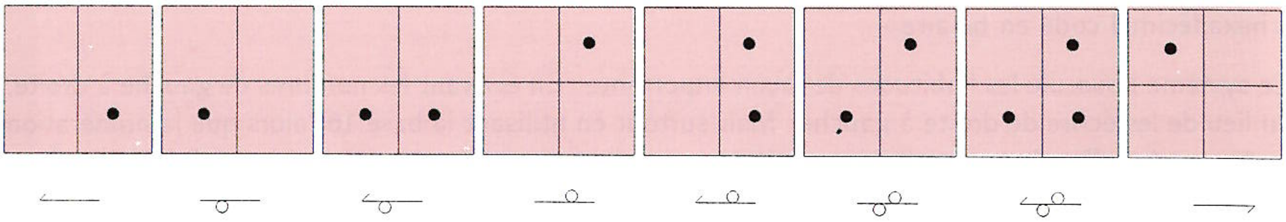
Notre petit compte-rendu historique serait incomplet si nous ne faisions pas mention du « Minicomputer » de Papy. Vers la fin des années soixantes, Georges Papy, professeur à l'ULB, et initiateur en Belgique de la réforme dite des « mathématiques modernes » , imagine d'adapter les idées de Mgr **LEMAÎTRE** à l'enseignement du calcul à l'école primaire.

Son but n'est pas d'apprendre aux élèves à « calculer sans fatigue » , mais bien à calculer tout court. Il remplace les chiffres écrits par un matériel constitué de plaques carrées divisées en quatre parties sur laquelle des pions sont déposés. Les valeurs des pions sont indiquées sur le tableau que voici :

8	4
2	1

De plus, les quatre cases d'une plaque sont coloriées avec les couleurs des règlettes Cuisenaire [1] 1, 2, 4 et 8 : blanc pour la case 1, rouge pour la case 2, violet pour la case 4 et marron pour la case 8. Ce choix de couleurs est destiné à faciliter l'apprentissage des élèves ayant utilisé les réglettes Cuisenaire tout au début de l'école primaire.

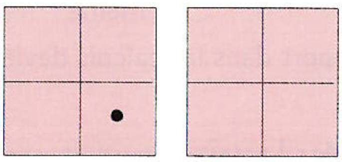
Pour utiliser ces plaques, Papy adopte les principes du système de chiffres de Mgr **Lemaître**. Voici les configurations de pions correspondant aux chiffres de 1 à 8 :

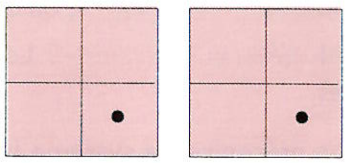


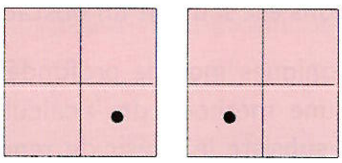
Question : Quelle est la configuration qui correspond à ?

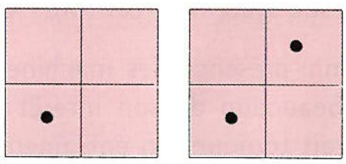
A partir de 10, les nombres sont écrits dans le système hybride « décimal codé binaire » , une plaque par chiffre. De plus les plaques sont placées de droite à gauche, pour respecter l'ordre utilisé dans la vie courante. On rencontre ainsi, à partir de la droite : la plaque des unités puis celles des dizaines, des centaines, ...

Voici quelques exemples :

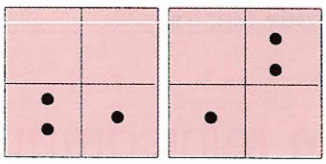
10 : 

11 : 

12 : 

26 : 

Pour exécuter 26+34, on commence par coder le nombre 26 comme ci-dessus. Ensuite sur les mêmes plaques, on code le nombre 34, sans se préoccuper des pions qui constituaient le codage de 26. On a alors la disposition ci-contre :

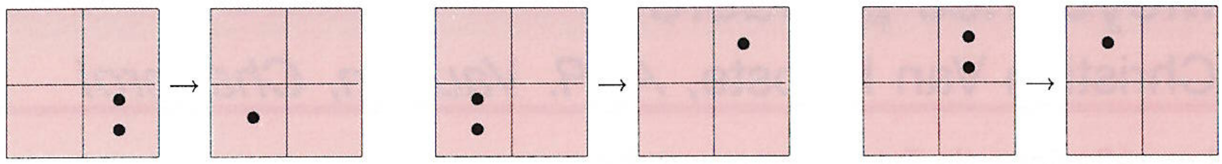


Pour obtenir le résultat, plusieurs principes sont utilisés, identiques à ceux qui ont été ébauchés dans le système hybride de Mgr **Lemaître** :

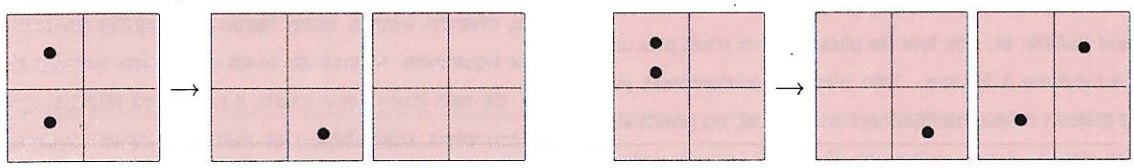
---

[1] Georges Cuisenaire, Directeur des Ecoles Primaires Communales de la ville de Thuin, avait inventé un jeu de réglettes colorées en vue du premier enseignement du calcul. Ce système continue d'être utilisé en de nombreux pays.

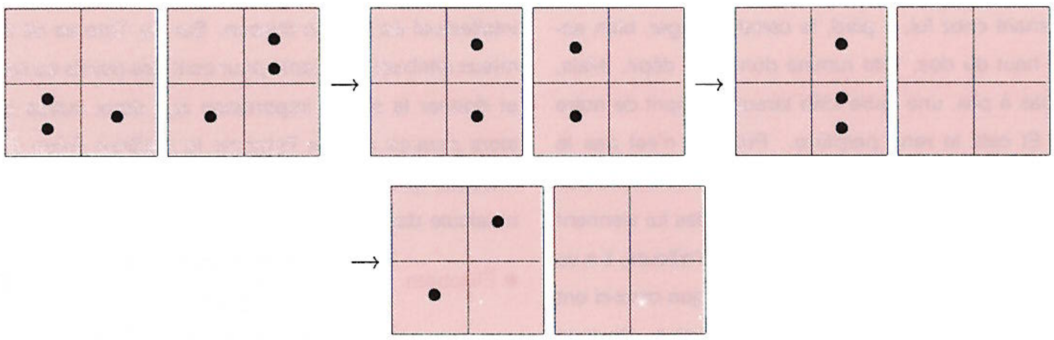
- A cause du code binaire, sur chaque plaque :



- A cause du système décimal :



Dans le cas de $26 + 34$, cela peut donner, en plusieurs étapes :



...et la somme vaut 60 !

Il va de soi que la multiplication, les produits par 2, 10 et les puissances de ces nombres s'obtiennent par des manipulations très commodes.

La méthode de Papy semble plus aisée à maîtriser que la manipulation des chiffres originaux de Mgr **Lemaître**. Le minicomputer et les réglettes Cuisenaire sont destinés à l'apprentissage du calcul plutôt qu'à sa pratique quotidienne. Il arrive donc un moment où les élèves doivent, d'eux-mêmes, se détacher de ces supports matériels.

Bibliographie

[1] Georges **Lemaître**, *Calculons sans fatigue, Ed. Nauwelaerts, Louvain, 1955.*

[2] **Frédérique**, Les enfants et la mathématique Vol. 1 à 4, , Ed. Didier, Bruxelles-Montréal-Paris, 1970 à 1976.

Math-Jeunes n° 84, 92–96, 1998

Moyennes pondérées

Christian Van Hooste, *A. R. Vauban, Charleroi*

Les réflexions de Toto, le gars sympa

Aujourd'hui est un bien mauvais jour pour Toto. Il vient de recevoir son bulletin et, une fois de plus, celui-ci n'est pas une invitation à l'Hymne à la Joie. Toto n'en est évidemment pas surpris ; le bulletin reflète parfaitement son travail, ou plutôt son manque de travail. Il est seulement dépité. Il est vrai qu'une erreur (c'est humain), une erreur heureuse, aurait pu se glisser dans ce fichu périodique ...

Tout en retournant chez lui, à pied, le cartable, léger, bien accroché sur le haut du dos, Toto rumine donc son dépit. Mais, petit à petit, pas à pas, une autre idée taraude l'esprit de notre bonhomme. Et cela le rend perplexe. Puisqu'il n'est pas le meilleur élève de la classe — et il ne le revendique sûrement pas — qui l'est donc? Quelques noms de condisciples lui viennent alors en tête : Elisabeth, François, Mathieu, ... D'ailleurs, il a vu leurs bulletins et se souvient très bien des notes que ceux-ci ont obtenues dans certaines branches dites importantes. De quoi rêver !

	Français	Math	Anglais
Élisabeth	6	8	9
François	10	6	7
Mathieu	7	9	7

En dehors de ses moments de rêverie, plus ou moins longs, mais tout à fait indispensables pour son équilibre psychologique, Toto reste attentif aux discours de ses professeurs. Il a ainsi entendu, maintes fois, le prof de français affirmer qu'≪une bonne maîtrise de la langue maternelle est primordiale pour la compréhension des autres cours≫.

À mi-chemin entre l'école et sa maison, cette phrase, ressurgissant comme une lueur, lui inspire alors l'idée qu'il faudrait attribuer cinquante pour cent des points pour le cours de français et partager les autres cinquante pour cent de manière égale entre les cours de math et d'anglais. Partant de là, Toto calcule la moyenne des trois ténors de la classe :

- Élisabeth $\dfrac{6 \times 50 + 8 \times 25 + 9 \times 25}{100} = 7,25;$
- François $\dfrac{10 \times 50 + 6 \times 25 + 7 \times 25}{100} = 8,25;$
- Mathieu $\dfrac{7 \times 50 + 9 \times 25 + 7 \times 25}{100} = 7,50.$

Incontestablement, se dit Toto, dont le calcul mental est un des points forts, François est le meilleur élève de la classe.

Mais, chemin faisant, notre héros se rappelle encore qu'entre deux équations, le prof de math aime bien insister sur le fait que, de nos jours, sans math, il n'y a pas d'issue, que toutes les branches scientifiques et même certaines autres, telle la psychologie, la sociologie ou l'économie, utilisent des modèles mathématiques pour décrire les phénomènes étudiés, enfin que les math devraient constituer cinquante pour cent du bagage intellectuel de tout un chacun. Sur ce, Toto se dit qu'il vaudrait mieux attribuer cinquante pour cent des points au cours de math et donner la même importance aux deux autres cours. Mais alors sera-ce encore François le meilleur élève de la classe, François qui n'est précisément pas le plus fort en math? Toto recalcule donc les moyennes :

- Élisabeth $\dfrac{6 \times 25 + 8 \times 50 + 9 \times 25}{100} = 7,75;$
- François $\dfrac{10 \times 25 + 6 \times 50 + 7 \times 25}{100} = 7,25;$
- Mathieu $\dfrac{7 \times 25 + 9 \times 50 + 7 \times 25}{100} = 8,00.$

Cette fois, il faut bien admettre, se dit Toto, que c'est Mathieu le premier de la classe.

Toutefois, un peu plus loin, au pied de la côte qui mène à sa maison, de nouveau, il entend la voix d'un de ses profs. C'est maintenant le prof de langue moderne qui parle : ≪Le monde entier parle anglais, tous les scientifiques publient les résultats de leurs recherches en anglais. Certes le français vous a permis de comprendre ce qu'on vous a enseigné jusqu'ici ; oui, le cours de math vous a donné le moyen d'apprendre les lois de la physique, de la chimie, de l'économie. Mais, à l'heure où l'on surfe sur Internet, il faut pouvoir communiquer avec le reste de la planète. Et, dans ce domaine, l'anglais est essentiel ; c'est cinquante pour cent de votre potentiel d'ouverture vers l'extérieur ≫.

Pour la seconde fois, Toto revoit son jugement : ≪Si j'attribue cinquante pour cent des points pour le cours d'anglais et l'autre partie des points, en deux parts égales, pour les math et le français, qui va être le roi de la classe?≫Toto se remet alors à calculer :

- Élisabeth $\dfrac{6 \times 25 + 8 \times 25 + 9 \times 50}{100} = 8,00;$

- François $\dfrac{10 \times 25 + 6 \times 25 + 7 \times 50}{100} = 7,50;$
- Mathieu $\dfrac{7 \times 25 + 9 \times 25 + 7 \times 50}{100} = 7,50.$

≪ Pas d'hésitation possible, ce n'est pas un roi, c'est une reine, c'est Elisabeth, la reine de la classe ! ≫, conclut Toto.

Arrivé au seuil de la porte de sa maison, tout à coup, Toto est pris d'un doute. ≪ Et si le cours de gymn était le plus important de tous les cours ; sans une bonne santé, on n'est rien. Tout compte fait, c'est peut-être moi le "king" de la classe ; j'ai une note de 10 en gymn. alors que les trois autres, les forts en thème, n'ont que 5 . . . ≫

Mais, Toto n'aura probablement pas le temps de recommencer un autre calcul, car, derrière la porte, une dure réalité l'attend : son père est là, impatient de voir arriver le bulletin.

Les moyennes pondérées, invention de Toto et des mathématiciens

Étant donné n nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ leur **moyenne arithmétique** est égale au quotient de leur somme par n. Ainsi qu'on peut le voir sur une machine à calculer, la moyenne arithmétique de ces nombres est généralement notée $\overline{x}$:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Mais, notre héros Toto vient de nous montrer que l'on pouvait calculer la moyenne des nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ d'une autre manière. À chacun de ces nombres, on attribue un certain poids :

$$\alpha_1 \text{ pour } x_1,\ \alpha_2 \text{ pour } x_2, \ldots \alpha_n \text{ pour } x_n$$

ces poids étant des réels positifs. On multiplie alors chaque nombre par son poids et on additionne le tout ; enfin, on divise le résultat obtenu par la somme des poids. Cela donne une **moyenne pondérée** ([1]) des nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$:

$$\boxed{m = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}$$

([1]) Pondéré vient de la famille de mots latins *pondus, ponderis* (qui signifie le poids) et *ponderare* (qui signifie peser, estimer, évaluer).

Évidemment, cette moyenne n'est pas unique ; elle varie en fonction des poids $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ attribués aux nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$. Ces poids peuvent être fixés arbitrairement, à la manière de notre ami Toto. Il y a donc autant de moyennes pondérées des nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ que de façons de choisir leurs poids, soit une infinité.

Parmi les moyennes pondérées de ces n nombres, il y a, entre autres, leur moyenne arithmétique $\overline{x}$. Pour l'obtenir, il suffit tout simplement d'attribuer un même poids α à chaque nombre :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n}{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha} \\ &= \frac{\alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n\alpha} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \overline{x} \end{aligned}$$

Ainsi, classer les élèves d'un groupe d'après la moyenne arithmétique de leurs notes n'est pas plus significatif que de les classer d'après toute autre moyenne pondérée calculée avec ces mêmes notes, la moyenne arithmétique n'étant qu'une moyenne pondérée particulière. D'ailleurs, dans la classe de Toto, les calculs faits par celui-ci avec des pondérations différentes conduisent à des classements différents. Et si Toto avait eu le temps d'intégrer le cours de gymn. dans ses calculs, peut-être que, lui Toto, . . .

Les poids attribués $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aux nombres $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$, permettent de donner plus ou moins d'importance à ces nombres. Augmenter le poids d'un nombre, c'est renforcer son influence sur la moyenne ; diminuer ce poids, c'est la réduire. Ainsi, les trois condisciples de Toto peuvent, chacun à leur tour, se parer du titre de meilleur élève de la classe parce que les pondérations successives choisies par Toto attribuent le plus grand poids à leur meilleure note, augmentant de la sorte considérablement l'influence de cette note et réduisant, par là même, celle des deux autres.

On pourrait même donner à un de ces nombres un poids nul ; cela reviendrait à réduire à néant son influence dans le calcul de la moyenne. C'est ce que fait encore Toto en ne donnant aucun poids aux cours, autres que ceux de français, de math et d'anglais.

En admettant que les notes de Toto en français, math et anglais soit respectivement 5, 4 et 3, sauriez-vous, cher lecteur, en choisissant convenablement la pondération, faire en sorte que Toto soit considéré comme le ≪ king ≫de la classe ? Cela pourrait sans doute lui remonter le moral et, surtout, lui donner d'éventuels moyens de défense auprès de son père. Bien entendu, il faut pour cela tenir compte de la note attribuée en gymn. sans quoi il y a peu d'espoir d'y arriver.

En effet, ami lecteur, vous pourriez démontrer que **toute moyenne pondérée (à poids positifs) de n nombres est toujours comprise entre le plus petit et le plus grand, de ces nombres.**

Soient p et g respectivement le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Du fait que les poids $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ attribués à ces nombres sont positifs, nous avons

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ &\geqslant \frac{\alpha_1 p + \alpha_2 p + \cdots + \alpha_n p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = \\ &\frac{p(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ &\leqslant \frac{\alpha_1 g + \alpha_2 g + \cdots + \alpha_n g}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = \\ &\frac{g(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = g \end{aligned}$$

donc $p \leqslant m \leqslant g$.

Pourriez-vous aussi démontrer que tout nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être considéré comme une moyenne pondérée particulière de ces nombres ?

Soient p et g respectivement le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous devons démontrer que, pour tout nombre μ tel que $p \leqslant \mu \leqslant g$, il existe une pondération des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui donne une moyenne pondérée égale à μ.

Parmi les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il en existe deux, x_i et x_j, respectivement égaux à p et à g. Pour créer une pondération qui répond à la question, commençons par attribuer un poids nul aux nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sauf à x_i et à x_j. À ces derniers, donnons comme poids, respectivement les réels positifs $\mu - p$ et $g - \mu$. La moyenne pondérée correspondante est alors égale à μ comme souhaité. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} m &= \frac{(g-\mu)x_i + (\mu - p)x_j}{(\mu - p) + (g - \mu)} \\ &= \frac{(g-\mu)p + (\mu - p)g}{g - p} \\ &= \frac{\mu g - \mu p}{g - p} \\ &= \frac{\mu(g-p)}{g-p} = \mu. \end{aligned}$$

Pondérations équivalentes

Appelons pondération la suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ des poids respectivement attribués aux nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, poids auxquels nous imposons deux conditions :

- chaque poids est un réel positif (éventuellement nul) ;
- la somme des poids n'est pas nulle.

Nous savons comment Toto a produit trois pondérations différentes pour les notes attribuées aux cours de français, de math et d'anglais et ce qu'il en a résulté quant au classement des élèves d'après leur moyenne (pondérée). Pondérer revêt donc un caractère subjectif et un changement de pondération modifie les moyennes et, en général, bouleverse un classement établi d'après ces moyennes. Cependant, une modification qui ne consisterait qu'à multiplier tous les poids d'une pondération donnée par un même nombre strictement positif n'affecterait en rien la moyenne pondérée. En effet, pour $k > 0$,

$$\frac{(k\alpha_1)x_1 + (k\alpha_2)x_2 + \cdots + (k\alpha_n)x_n}{k\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k\alpha_n} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Décidons d'appeler **pondérations équivalentes** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deux pondérations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dont les poids sont proportionnels, c'est-à-dire telles que

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

et de noter cette équivalence de la manière suivante :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

À ce propos, il est intéressant de remarquer que **toute pondération est équivalente à une autre dont la somme des poids vaut 1**, que nous appellerons **pondération standardisée**.

De fait, posons $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Nous avons alors

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \sim \left(\frac{\alpha_1}{S}, \frac{\alpha_2}{S}, \ldots \frac{\alpha_n}{S}\right)$$

avec

$$\frac{\alpha_1}{S} + \frac{\alpha_2}{S} + \cdots + \frac{\alpha_n}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

Ainsi, la première pondération créée par Toto $(50, 25, 25)$ est équivalente à $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

L'importance de chaque poids apparaît nettement mieux dans cette dernière pondération ; on voit immédiatement que le cours de français y compte pour la moitié des points.

En statistique

En statistique, il arrive que souvent que l'on doive calculer la moyenne d'un ensemble de nombres parmi lesquels certaines valeurs se répètent. Plus une valeur se répète, plus elle prend de l'importance vis-à-vis des autres, plus son poids augmente. On appelle d'ailleurs **répétition** (ou **effectif**) d'une valeur, le nombre de fois que celle-ci apparaît dans l'ensemble statistique. En désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les différentes valeurs et par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ leurs répétitions respectives, la moyenne (arithmétique) de l'ensemble statistique est alors

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} r_k} = \frac{r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}$$

Celle-ci apparaît donc comme une **moyenne pondérée des différentes valeurs** de l'ensemble, issue de la pondération dans laquelle chacune valeur reçoit un poids égal à sa répétition.

Dans la pondération standardisée équivalente, le poids attribué à chaque valeur x_k est

$$f_k = \frac{r_k}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}.$$

En statistique, ce nombre s'appelle la **fréquence** de la valeur xk ; elle est donc égale au rapport entre sa répétition et l'effectif total de l'ensemble (somme de toutes les répétitions).

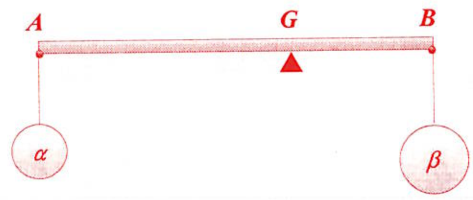
$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} f_k x_k = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n$$

En utilisant cette notion, la moyenne de l'ensemble statistique s'écrit

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} f_k x_k = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n$$

En statique

Aux deux extrémités d'une barre (de poids négligeable), le prof de physique accroche deux masses de poids α et β et demande où se trouve le point d'équilibre du système (cf. fig.).



Il recommence l'expérience plusieurs fois, mesure, note les résultats et parvient à la loi (mathématique) suivante :

Le point d'équilibre est le point G tel que

$$\alpha|GA| = \beta|GB|.$$

Cette loi peut être reformulée en termes de vecteurs : $\alpha\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{GB}$

où le signe $-$ se justifie par le fait qu'il faut tenir compte du sens des vecteurs. Elle s'écrit encore $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Sur la droite AB, fixons un point O et transformons la relation ci-dessus :

$$\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{0} \text{ ou}$$
$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OG}$$

Munissons à présent la droite AB d'un axe dont O est l'origine et désignons par $x_1, x_2, \bar{x}$ les abscisses respectives des points A, B et G. De la relation vectorielle ci-dessus, nous tirons alors l'égalité algébrique : $\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta)\bar{x}$ d'où il vient

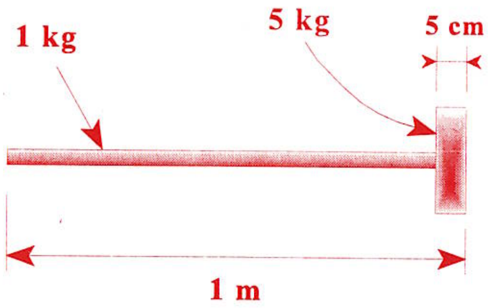
$$\bar{x} = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta}$$

Ainsi, **l'abscisse du point d'équilibre est la moyenne pondérée des abscisses des points A et B, pourvues respectivement des poids α et β.**

Il est bon de noter que la position fixée pour l'origine de l'axe, ainsi que pour la graduation de celui-ci, peuvent être choisies de manière tout à fait arbitraire.

Notons encore que remplacer les poids par les masses ne change en rien la position d'équilibre puisque les masses et les poids sont proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant égal à g (à peu près égal à $9,81$ en nos régions). Masses et poids conduisent à des pondérations équivalentes.

Des vérifications expérimentales de cette loi sont facilement réalisables chez soi. En voici un exemple. Pour enfoncer un pieu, on utilise un gros marteau (on appelle cela une ≪masse ≫dans le métier). En supposant que ce marteau est constitué comme le montre la figure ci-dessous, cherchons-en le point d'équilibre.



Plaçons l'origine 0 de l'axe sur l'extrémité libre du manche, choisissons comme unité de longueur le centimètre et désignons par x_1, x_2 les abscisses du centre de masse du manche, du centre de masse de la partie métallique. On doit avoir

$$\bar{x} = \frac{1 \times 50 + 5 \times 97,5}{6} = 89,6$$

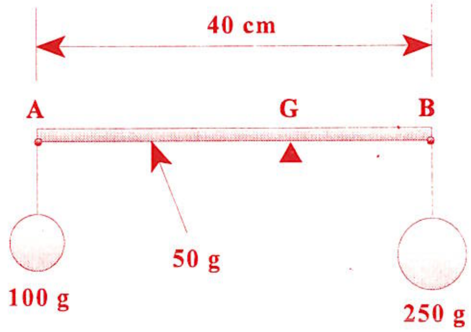
Il suffit donc de soutenir le marteau par le manche en son point situé à $89,6$ cm de l'extrémité libre pour le maintenir en équilibre.

Sortez votre mètre, votre balance et essayez !

L'avantage d'envisager ce problème de statique sous l'angle des moyennes pondérées réside dans la perspective d'une généralisation à n points matériels alignés pourvus de masses $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$ sont les abscisses de ces points, l'abscisse du point d'équilibre est la moyenne pondérée de $x_1, x_2, \ \ldots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Ainsi, revenant à l'expérience faite au cours de physique, il est maintenant possible de tenir compte du poids de la barre reliant les points A et B. Pour cela, on considère que le poids de la barre agit en son centre et le problème revient alors à chercher le point d'équilibre pour un système de trois points.



Avec les données du schéma ci-dessus, la position de G par rapport à A est donnée par son abscisse

$$\bar{x} = \frac{100 \times 0 + 50 \times 20 + 250 \times 40}{100 + 50 + 250} = 27,5$$

En guise de conclusion

Établir un classement — nous l'avons vu grâce aux brillants calculs de notre ami Toto — des élèves d'une classe d'après la moyenne pondérée de leurs notes est subjectif et, par conséquent, n'a pas de valeur véritable. Donner le même poids à chaque branche, c'est choisir une pondération particulière ; elle n'a pas plus de valeur que les autres.

Si la moyenne pondérée a un caractère subjectif quand elle sert d'instrument d'appréciation, elle retrouve toute son objectivité mathématique dès qu'il s'agit de l'appliquer dans le domaine scientifique ; par exemple, pour situer le point d'équilibre d'un système de points matériels.

Ce qui lui donne un aspect subjectif dans le premier cas tient essentiellement à ce qu'on y peut choisir la pondération, puisque celle-ci n'existe pas initialement. Par contre, dans le second cas, la pondération est imposée par le contexte physique.

Lors de l'Expo-Sciences des Jeunesses Scientifiques, qui s'est tenue en 1997 à Namur, *Math-Jeunes* avait organisé un concours «bulles ». Il fallait simplement remplir les bulles ci-dessous avec un texte humoristico-mathématique. Bravo au lauréat, Sébastien TEMBUYSER, élève au Collège Jean XXIII de Jemelle qui a reçu un puzzle fractal ainsi qu'un abonnement à *Math-Jeunes* pour l'année 1997-1998.