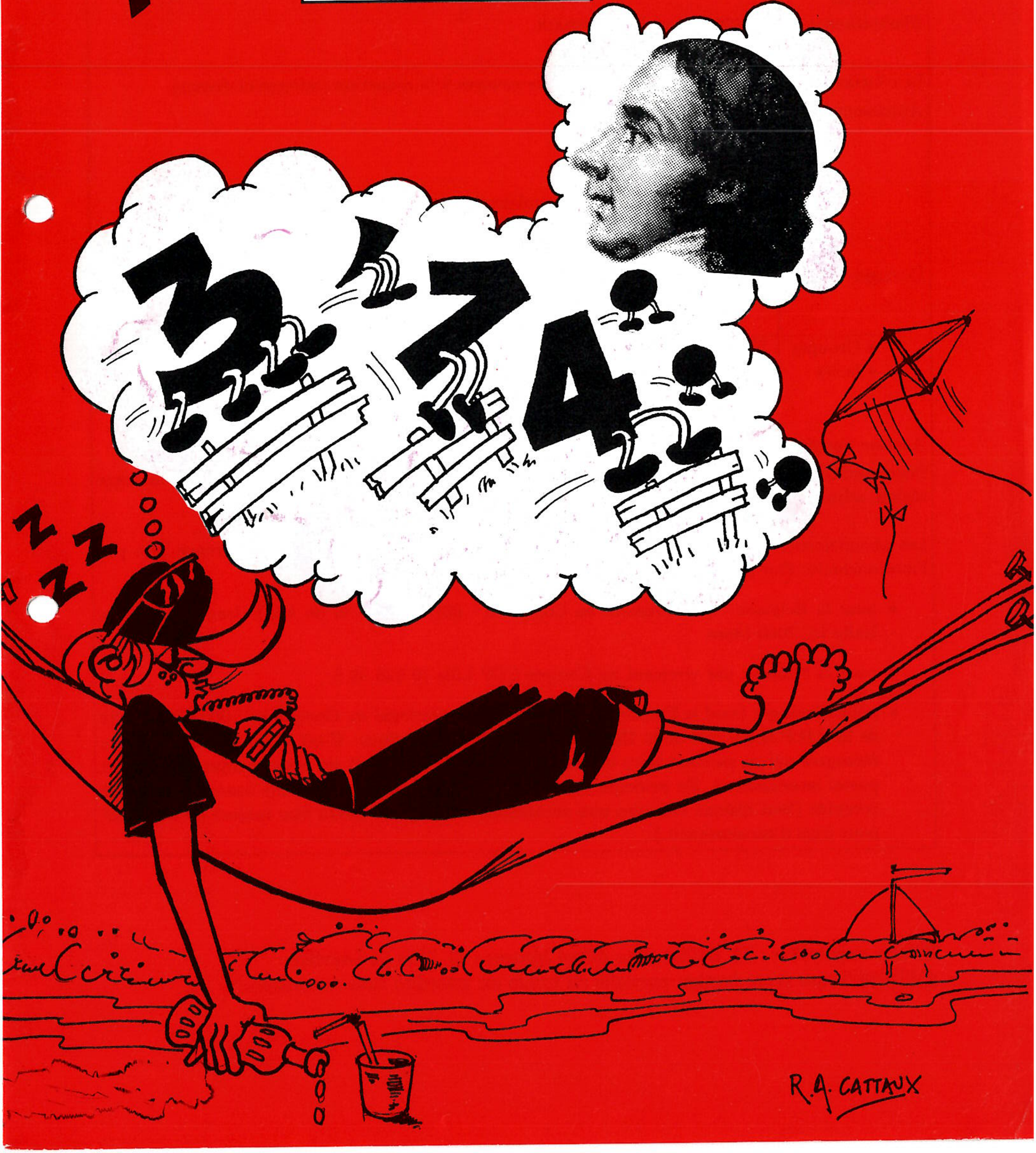
Math-Jeunes

19e année
Mai 1998 — n° 85
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1



MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
Comité de Rédaction : M.BALLIEU, J.-P.CAZZARO, C.FESTRAETS, R.MIDAVAINE, G.NOËL, A.PARENT, F.POURBAIX, G.ROBERT, J.-M.SLOWIK, S.TROMPLER, C.VAN HOOSTE, C.VILLERS
Illustrations : R.A.CATTAUX et F.POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).
Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :
Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 85 Dix-neuvième année 1998

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 85, 98–98, 1998

Lorenzo Mascheroni

Michel Ballieu, *Athénée Royal de Binche*

En ces temps qui précèdent deux mois de repos bien mérité (?), tournons-nous vers le soleil d'Italie et disons quelques mots de Lorenzo MASCHERONI que nous avons déjà cité dans *Math-Jeunes* n° 82, à propos du théorème dit de Napoléon.

Lorenzo MASCHERONI est né le 13 mai 1750 à Bergame, dans le nord de l'Italie. Il mourra le 14 juillet 1800 à Paris. Géomètre, il prouve en 1797 que toutes les constructions euclidiennes réalisables à l'aide de la règle et du compas sont possibles avec le compas seulement, sans utilisation de la règle. Ordonné prêtre à l'âge de dix-sept ans, il enseigne d'abord la rhétorique.

À partir de 1778, il donne des cours de physique et de mathématiques au séminaire de Bergame. En 1786, il devient professeur d'algèbre et de géométrie à l'Université de Pavie, dont il sera plus tard recteur.

MASCHERONI est connu aussi comme poète. Il a dédié l'une de ses œuvres, la *Geometria del compasso* (1797), rédigée en vers, à Napoléon. C'est dans ce livre qu'il prouve le résultat que nous avons évoqué plus haut. En fait, il ignorait qu'un mathématicien danois peu connu, Georg MOHR était déjà arrivé à cette conclusion en 1672.

Dans les *Adnotationes ad calculum integrale Euleri* (1790), Lorenzo MASCHERONI calcule la **constante d'Euler** avec 32 décimales. En fait, seules les dix-neuf premières décimales sont correctes. L'erreur sera corrigée en 1809 par Johann VON SOLDNER. La constante d' EULER-MASCHERONI notée γ est définie par

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0.5772156649\ldots$$

C'est une constante à peu près aussi célèbre que π et e. EULER (Bâle, 1707 – Saint-Petersbourg, 1783) a pu en calculer 15 décimales ; Donald E. KNUTH a obtenu 1 271 décimales en 1962. En 1993, Jonathan BORWEIN en avait 172 000. Simon PLOUFFE qui s'est aussi occupé de π donne une très bonne approximation de γ dans ses pages web **Inverse Symbolic Calculator**. Thomas PAPANIKOLAOU en a calculé un million de décimales. Remarquons que l'on ignore toujours, à l'heure actuelle, si γ est ou non irrationnel ! On sait grâce à la contribution de PAPANIKOLAOU que si γ est rationnel, alors son dénominateur doit être supérieur à $10^{244\,663}$!!!

Joyeuses vacances ensoleillées à toutes et à tous et . . . rendez-vous d'ici quelques mois pour fêter ensemble le vingtième anniversaire de Math-Jeunes.

Bibliographie

[1] *The MacTutor History of Mathematics Archive*, adresse internet http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

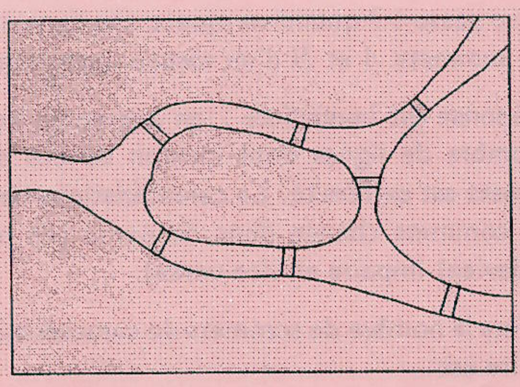
Pair ou impair : c'est super !!! (5)

Claude Villers

Et si on faisait le pont ?

– J'ai de nouveau un problème de trajet à vous proposer, s'écria Mathieu en entrant dans la classe.
Quelqu'un m'a dit que le problème de l'Olympiade, traité dernièrement, était de la même veine qu'un vieux problème connu sous le nom de « Problème des ponts de Kœnigsberg ».
Voici de quoi il s'agit.

A Kœnigsberg (1), un fleuve enserre une ile puis se divise en deux bras.
Sept ponts permettent de traverser le fleuve.
Peut-on trouver un parcours qui nous fasse emprunter une et une seule fois chaque pont ?



Cherchez un peu avant de consulter la suite.

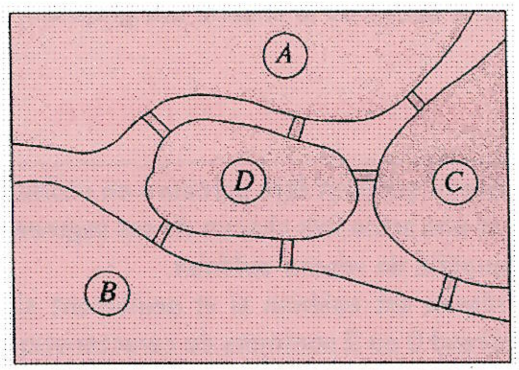
On pourrait, bien entendu, dresser la liste de tous les parcours possibles, ce serait long !

Nous allons plutôt essayer de traduire cette situation en termes de réseaux composés de points reliés par des segments (voir *Math-Jeunes* précédent).

Ici, des ponts permettent de passer d'une zone à une autre.

Dans un réseau, ce sont des segments qui permettent de passer d'un sommet à un autre.

L'idée est de représenter les ponts par des segments et les zones par des points.

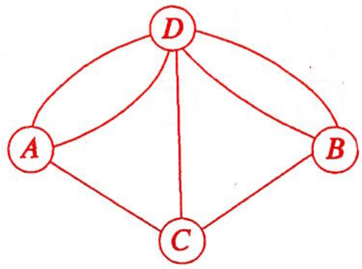


Désignons les zones par A, B, C et D (cf. figure ci-dessus).

L'emploi des segments pour représenter les ponts n'est pas souhaitable car deux zones étant parfois reliées par deux ponts, on serait amené à représenter ceux-ci par des segments superposés.

Représentons donc les zones par des points et les ponts qui les relient par des lignes (rectilignes ou non selon les circonstances).

Nous obtenons le réseau suivant.



Le problème des ponts de Kœnigsberg peut donc être traité comme le problème des réseaux de l'Olympiade (*Math-Jeunes* n° 84).

(1) Kœnigsberg est une ville de l'ancienne Poméranie (Prusse orientale) située à l'extrémité septentrionale du golfe de la Vistule. Actuellement cette ville fait partie de la Russie et s'appelle Kaliningrad.

Le réseau ci-dessus comporte quatre sommets de caractéristique impaire.

Par conséquent, il ne peut être totalement parcouru d'un seul trait si on décide de ne pas passer plus d'une fois sur chacune de ses lignes.

Un peu d'histoire

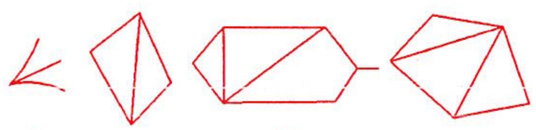
Le problème des ponts de Kœnigsberg est connu de longue date. On en trouve l'origine dans un mémoire d'**EULER** (1) intitulé *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis* paru dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1759. La résolution de ce problème par **EULER** a marqué le début de la théorie des graphes.

Une définition et un critère

> Un réseau qui peut être parcouru en utilisant une et une seule fois chacun de ses segments est qualifié de *réseau eulérien*.
> Un réseau est eulérien si et seulement si il comprend 0 ou 2 sommets de caractéristique impaire.

Pour ne pas en rester là

Voici quelques réseaux. Déterminez s'ils sont eulériens ou non. Un constat intéressant peut être fait sur le nombre de sommets de caractéristique impaire. Essayez de découvrir cette particularité.



(A) (B) (C) (D)

Vous avez certainement calculé facilement le nombre de sommets de caractéristique impaire dans chaque réseau et vous avez trouvé :

(1) Leonhard **EULER** (Bâle 1707 – Saint-Petersbourg 1783) est un mathématicien suisse dont l'oeuvre, très importante, couvre de larges domaines des mathématiques.

Réseau	Nombre de sommets	Nombre de sommets de caractéristique impaire	Nombre de sommets de caractéristique paire
A	4	4	$4-4=0$
B	4	2	$4-2=2$
C	7	4	$7-4=3$
D	5	2	$5-2=3$

Il semble que **le nombre de sommets de caractéristique impaire soit toujours pair** tandis que le nombre de sommets de caractéristique paire puisse être pair ou impair.

Si la première impression est correcte, il en sera naturellement de même de la deuxième puisque le nombre de sommets de caractéristique paire dépend du nombre total de sommets.

Nous allons **démontrer** (car un constat est insuffisant) qu'il est bien vrai que ...

> Dans tout réseau, le nombre de sommets de caractéristique impaire est pair.

Le principe de la démonstration est simple.

Que se passe-t-il quand on ajoute une ligne entre deux sommets A et B d'un réseau quelconque ?

La réponse est immédiate : on augmente de un le nombre de lignes dont chacun de ces deux sommets est extrémité. La caractéristique de ces deux sommets change donc de parité (de paire elle devient impaire et vice versa).

Dès lors le nombre de sommets de caractéristique impaire est

- augmenté de deux unités (quand (A, B) passe de (pair, pair) à (impair, impair)),
- ne change pas (quand (A, B) passe de (pair, impair) à (impair, pair) ou de (impair, pair) à (pair, impair)),
- ou est diminué de deux unités (quand (A, B) passe de (impair, impair) à (pair, pair)).

Dans tous les cas, le tracé d'une ligne entre deux sommets d'un réseau ne change pas la parité du nombre de sommets de caractéristique impaire.

Imaginons maintenant un réseau composé de n sommets sans lignes. Chaque sommet y est extrémité de zéro ligne.

À ce moment le réseau posséde donc zéro sommet de caractéristique impaire et n sommets de caractéristique paire.

Au fur et à mesure que l'on va tracer des lignes du réseau, la quantité de sommets de caractéristique impaire conservera sa parité donc restera toujours paire comme l'est zéro.

Remarquons que le nombre de sommets de caractéristique paire ne change pas non plus de parité. Mais comme ce nombre dépend de n, il peut être aussi bien pair qu'impair.

À vous de jouer maintenant !

Voici une fin que nous espérons provisoire pour ces illustrations du rôle que peut jouer une notion aussi simple que celle de la parité.

Il est certainement possible de donner d'autres applications de cette notion.

La rédaction de *Math-Jeunes* vous invite à lui communiquer vos idées, vos découvertes et vos articles sur ce sujet.

Bibliographie

[1] *Encyclopaedia Universalis*

[2] Édouard **Lucas**, *Récréations Mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9 rue de Médicis, Paris, 1992.

[3] Internet

Palmarès du Rallye-Problèmes

Catégorie MINI

Cédric **Troessaert**, première année, Institut Centre Ardenne de Libramont.

Catégorie MIDI

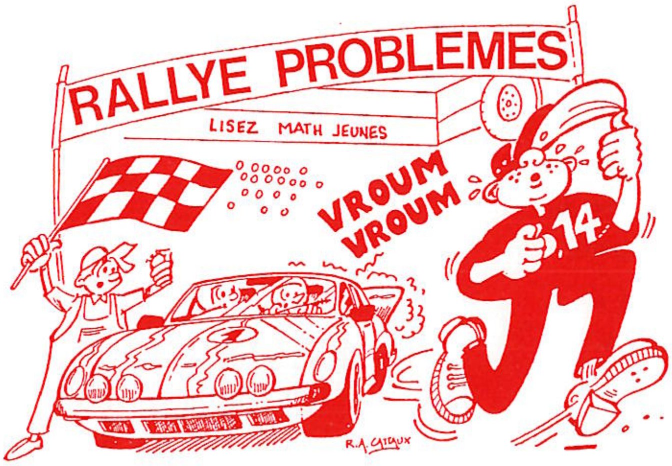
Adrien **Decoster**, quatrième année, Collège St Stanislas, Mons.
Johan **Lepers**, quatrième année, École des Ursulines, Tournai.
Florence **Sohet**, troisième année, Collège St Joseph, Chimay

Catégorie MAXI

Antoine **Vigier**, TS5, Lycée Français Jean Monnet, Bruxelles
Benjamin **Fuks**, cinquième année, Athénée Maïmonide, Bruxelles

Un prix spécial est attribué à Antoine **Vigier** qui a parfaitement résolu les dix-huit problèmes.

Félicitations à tous !



Math-Jeunes n°85, 102–104, 1998

C. Festraets

Solution des problèmes du numéro 83

mini 5

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$
$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5\,040$
...
La factorielle de tout nombre supérieur ou égal à 5 comporte toujours les facteurs 2 et 5, donc est un multiple de 10 et son chiffre des unités est 0.
Pour connaître le chiffre des unités de $S = 1!+2!+3!+\cdots+99!+100!$, il suffit de déterminer le chiffre des unités de

$$1!+2!+3!+4! = 1+2+6+24 = 33$$

La réponse est 3.

mini 6 Additionnons les nombres écrits dans une ligne, une colonne ou une diagonale de l'échiquier. La plus grande somme possible est

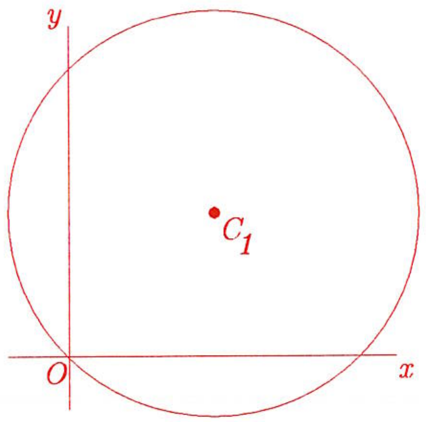
$$1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

et la plus petite est

$$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -8.$$

Il y a ainsi 17 sommes possibles qui sont -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Mais il y a 8 lignes, 8 colonnes et 2 diagonales, donc en tout 18 sommes à calculer. Elles ne peuvent donc être toutes différentes.

midi 5 Considérons le premier cercle ; son centre est dans le premier quadrant et il passe par O, donc aucun point intérieur à ce cercle n'est situé dans le troisième quadrant.



De même, aucun point intérieur au deuxième cercle n'est situé dans le quatrième quadrant et aucun point intérieur au troisième siècle n'est situé dans le premier quadrant.
Dès lors, s'il existe un point intérieur aux trois cercles, il ne peut se trouver que dans le deuxième quadrant.

midi 6 La première horloge indiquera à nouveau l'heure exacte dans

$$12 \times 60 \times 60 \text{ h} = 43\,200 \text{ h} = 1\,800 \text{ jours}$$

et la deuxième horloge dans

$$12 \times 60 \times 60 \times \frac{3}{2} \text{ h} = 28\,800 \text{ h} = 1\,200 \text{ jours.}$$

Les deux horloges indiquent donc l'heure exacte respectivement tous les 1 800 jours et tous les 1 200 jours. Le plus petit commun multiple de 1 800 et 1 200 est 3 600 ; les deux horloges seront ainsi simultanément à l'heure dans 3 600 jours.

maxi 5 Désignons par T le tableau

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \cdots & 1\,995 & & 1\,996 & & 1\,997 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \cdots & & 3\,991 & & 3\,993 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & & \cdots & & & 7\,984 & & \\
& & & & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

et par T' le tableau obtenu en écrivant les mêmes nombres dans l'ordre inverse

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1\,997 & & 1\,996 & & 1\,995 & \cdots & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \\
& 3\,993 & & 3\,991 & & \cdots & & 7 & & 5 & & 3 & & 1 & \\
& & 7\,984 & & & \cdots & & & 12 & & 8 & & 4 & & \\
& & & & & \vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Le dernier nombre écrit dans T est le même que le dernier nombre écrit dans T'.
« Additionnons » T et T' ; dans le nouveau tableau obtenu, tous les nombres de la première ligne sont égaux à 1997, tous ceux de la deuxième ligne à $2 \times 1\,997$, tous ceux de la troisième ligne à $4 \times 1\,997$, …, tous ceux de la énième ligne à $2^{n-1} \times 1\,997$. Le dernier nombre de ce nouveau tableau est un multiple pair de 1 997 ; or il est le double du dernier nombre de T (et de T') ; donc le dernier nombre de T est un multiple de 1 997.

maxi 6 La proposition est vraie pour le nombre premier 3 : $3 \times 37 = 111$.
Soit p un nombre premier distinct de 2, de 3 et de 5.
Considérons la suite

$$10, 20, 30, \cdots, (p-1) \times 10$$

Aucun terme de cette suite n'est divisible par p (car p est différent de 2 et de 5) ; si on divise par p les termes de cette suite, on obtient $(p-1)$ restes par défaut compris entre 1 et $(p-1)$. Ces restes sont tous différents. En effet, si on avait

$$10k = p \times q_k + r$$

et

$$10t = p \times q_t + r$$

avec $1 \leqslant k < t \leqslant p-1$,
alors, en soustrayant membre à membre ces deux inégalités, on aurait

$$10(t-k) = p \times (q_t - q_k)$$

ce qui est impossible car $10(t-k)$ n'est pas un multiple de p. Ces restes étant différents, ils valent, abstraction faite de l'ordre, 1, 2, 3, ..., $(p-1)$.
Multiplions tous les nombres de la suite ; on obtient

$$10 \times 20 \times 30 \times \cdots \times (p-1) \times 10 = (p-1)! \times 10^{p-1}.$$

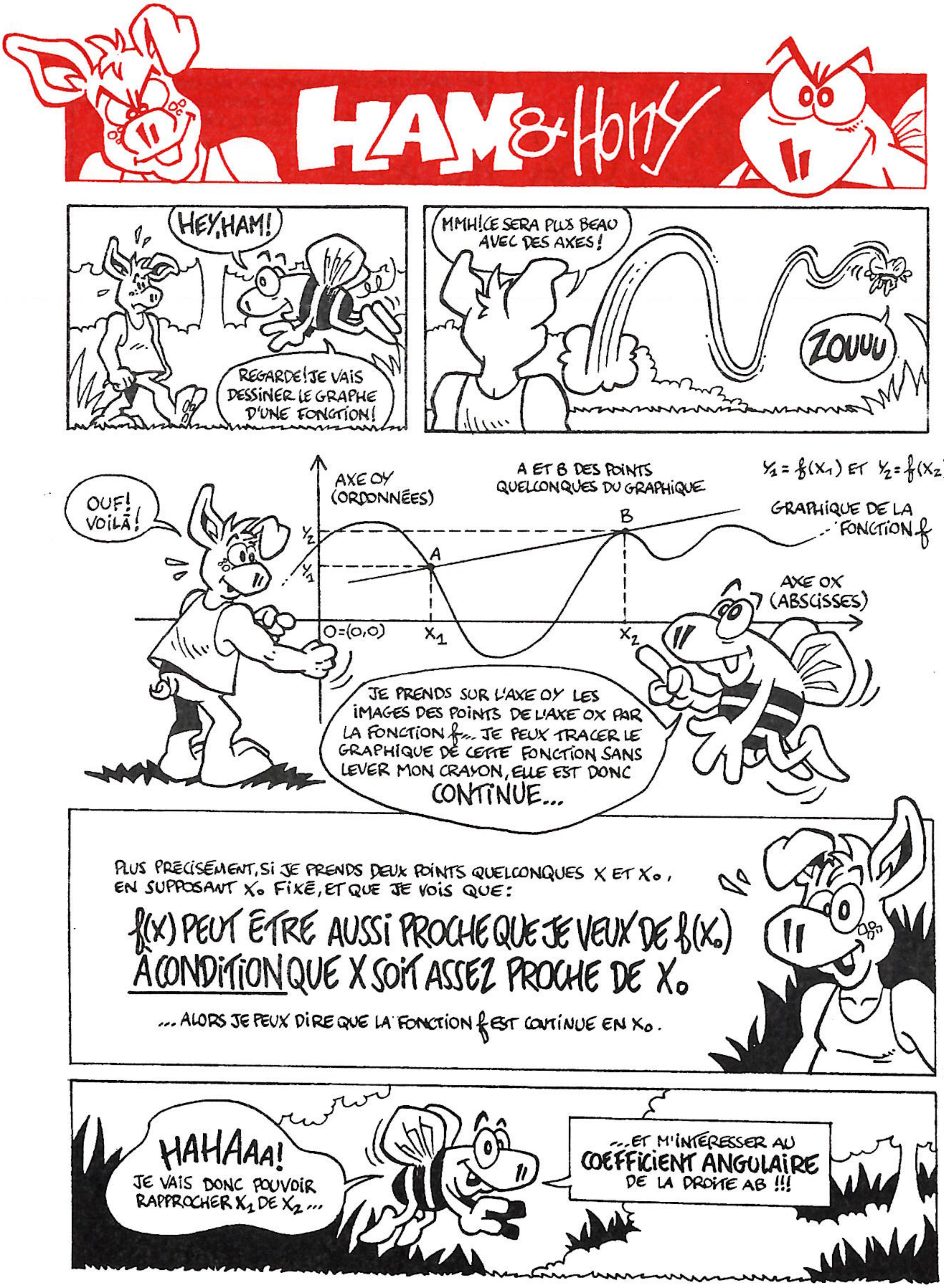
Multiplions tous les restes des divisions par p des termes de la suite, on obtient $(p-1)!$
On peut donc écrire

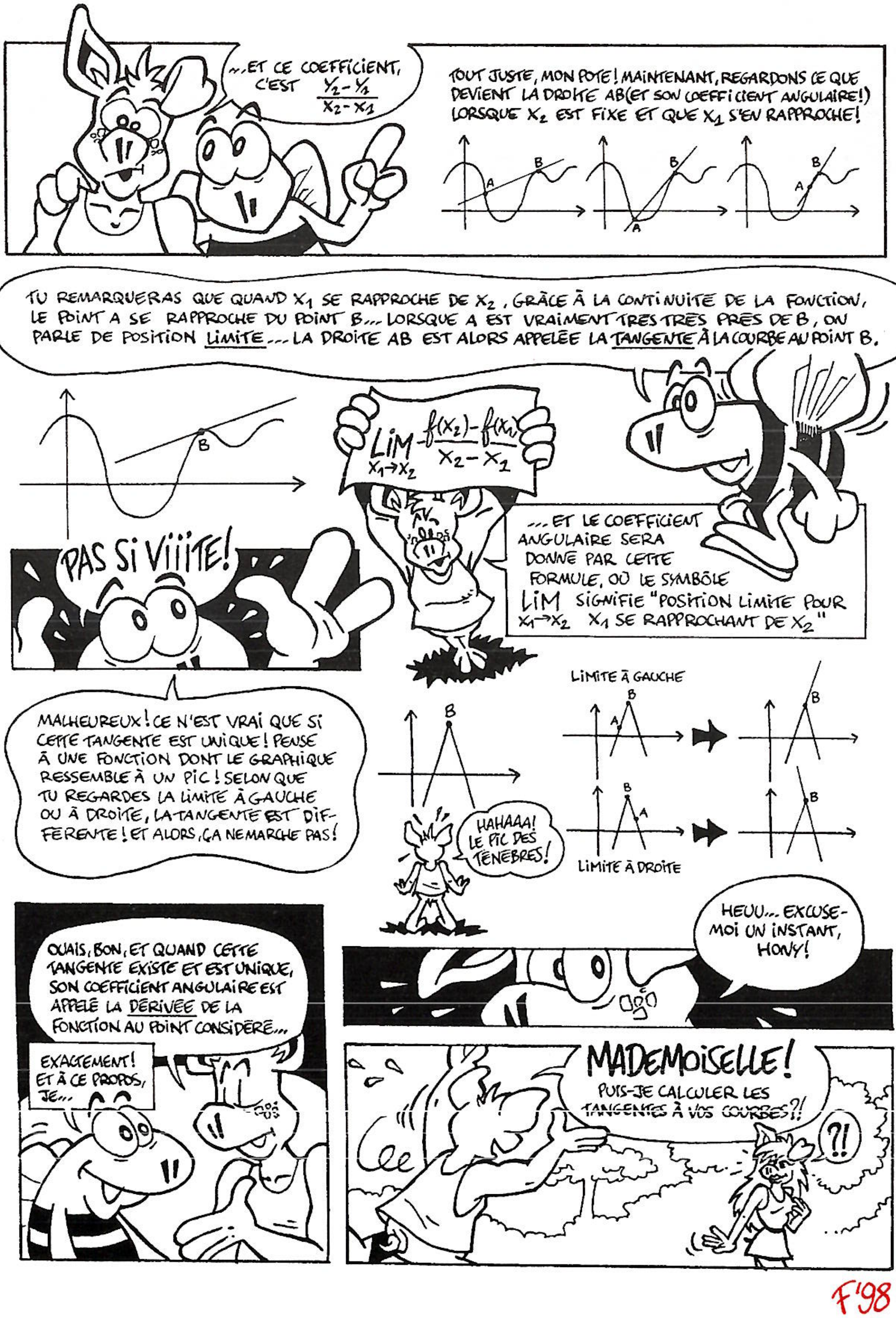
$$(p-1)!10^{p-1} = p \times Q + (p-1)!$$

ou encore

$$(p-1)!(10^{p-1} - 1) = p \times Q$$

p ne divise pas $(p-1)!$, donc p divise $10^{p-1} - 1 = \underbrace{999\cdots9}_{(p-1)\text{ chiffres}}$; or p est différent de 3, donc p divise $\underbrace{111\cdots1}_{(p-1)\text{ chiffres}}$.


HAM & Hony
HEY, HAM!
REGARDE! JE VAIS DESSINER LE GRAPHE D'UNE FONCTION!
MMH! CE SERA PLUS BEAU AVEC DES AXES!
ZOUUU
OUF! VOILÀ!
AXE OY (ORDONNÉES)
A ET B DES POINTS QUELCONQUES DU GRAPHIQUE
$y_1 = f(x_1)$ ET $y_2 = f(x_2)$
GRAPHIQUE DE LA FONCTION f
y_2
y_1
A
B
AXE OX (ABSCISSES)
O=(0,0)
x_1
x_2
JE PRENDS SUR L'AXE OY LES IMAGES DES POINTS DE L'AXE OX PAR LA FONCTION f... JE PEUX TRACER LE GRAPHIQUE DE CETTE FONCTION SANS LEVER MON CRAYON, ELLE EST DONC CONTINUE...
PLUS PRÉCISÉMENT, SI JE PRENDS DEUX POINTS QUELCONQUES X ET X_0, EN SUPPOSANT X_0 FIXÉ, ET QUE JE VOIS QUE:
$f(X)$ PEUT ÊTRE AUSSI PROCHE QUE JE VEUX DE $f(X_0)$ À CONDITION QUE X SOIT ASSEZ PROCHE DE X_0
... ALORS JE PEUX DIRE QUE LA FONCTION f EST CONTINUE EN X_0.
HAHAAA! JE VAIS DONC POUVOIR RAPPROCHER X_1 DE X_2...
...ET M'INTÉRESSER AU COEFFICIENT ANGULAIRE DE LA DROITE AB !!!



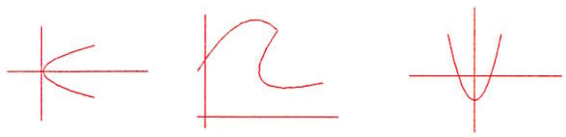
...ET CE COEFFICIENT, C'EST $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$
TOUT JUSTE, MON POTE ! MAINTENANT, REGARDONS CE QUE DEVIENT LA DROITE AB (ET SON COEFFICIENT ANGULAIRE !) LORSQUE X_2 EST FIXE ET QUE X_1 S'EN RAPPROCHE !
A
B
B
A
B
A
TU REMARQUERAS QUE QUAND X_1 SE RAPPROCHE DE X_2, GRÂCE À LA CONTINUITÉ DE LA FONCTION, LE POINT A SE RAPPROCHE DU POINT B... LORSQUE A EST VRAIMENT TRÈS TRÈS PRÈS DE B, ON PARLE DE POSITION LIMITE... LA DROITE AB EST ALORS APPELÉE LA TANGENTE À LA COURBE AU POINT B.
B
$\lim_{X_1 \to X_2} \frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1}$
...ET LE COEFFICIENT ANGULAIRE SERA DONNÉ PAR CETTE FORMULE, OÙ LE SYMBOLE $\lim_{X_1 \to X_2}$ SIGNIFIE "POSITION LIMITE POUR X_1 SE RAPPROCHANT DE X_2"
PAS SI VIIIITE !
MALHEUREUX ! CE N'EST VRAI QUE SI CETTE TANGENTE EST UNIQUE ! PENSE À UNE FONCTION DONT LE GRAPHIQUE RESSEMBLE À UN PIC ! SELON QUE TU REGARDES LA LIMITE À GAUCHE OU À DROITE, LA TANGENTE EST DIFFÉRENTE ! ET ALORS, ÇA NE MARCHE PAS !
B
HAHAAA ! LE PIC DES TÉNÈBRES !
LIMITE À GAUCHE
A
B
B
B
A
B
LIMITE À DROITE
OUAIS, BON, ET QUAND CETTE TANGENTE EXISTE ET EST UNIQUE, SON COEFFICIENT ANGULAIRE EST APPELÉ LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION AU POINT CONSIDÉRÉ...
EXACTEMENT ! ET À CE PROPOS, JE...
HEUU... EXCUSE-MOI UN INSTANT, HONY !
MADEMOISELLE ! PUIS-JE CALCULER LES TANGENTES À VOS COURBES ?!
?!
F'98

Les tangentes de Ham et Hony

Frédéric Pourbaix, *Université de Mons – Hainaut*

À propos du graphique d'une fonction

Dans les pages précédentes, nos grands amis Ham et Hony utilisent le graphique d'une fonction, car ils savent que vous savez ce que ça signifie ... Mais savez-vous vraiment ce qu'ils croient que vous savez ? Pour calmer la tempête qui pourrait naître dans les pauvres cœurs du cochon et de l'abeille, montrez-leur vos connaissances ! Dans les schémas ci-dessous, quels sont les graphiques de fonctions, lesquels ne le sont pas, et pourquoi ?



À propos de continuité

Dans la première page de la bande dessinée, le cochon Ham nous parle de la *continuité* de la fonction en un point. Pour compléter sa science infuse, nous dirons que la fonction est continue sur tout son domaine si la phrase de Ham est vraie pour *tous* les points du domaine. Et pour vous faire un peu peur, nous reprenons les paroles de Ham sous forme de formule :

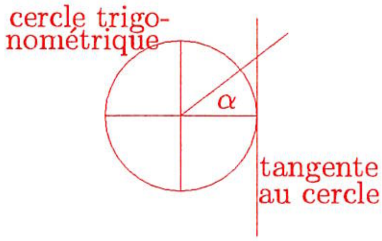
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Dans cette formule, d représente la *distance* (1) entre les points mis entre parenthèses.

(1) On ne considère ici que des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on se place donc bien dans un espace métrique, et la distance utilisée est la distance usuelle.

À propos de la trigonométrie

Le mot *tangente* vous rappelle sûrement la trigonométrie, à juste titre puisque la tangente d'un angle se mesure sur une droite tangente au cercle trigonométrique (les tangentes à un cercle étant des droites perpendiculaires aux rayons du cercle considéré, passant par un des points de ce cercle).



À propos des dérivées

Ha ! Le gros morceau est la notion de dérivée ! Prenons par exemple la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie x sur x^2 et appliquons la formule que Ham et Hony nous présentent à la deuxième page de leur histoire ...

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x_0^2 - x^2}{x_0 - x} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x_0 - x} = \lim_{x \to x_0} (x_0 + x) = 2x_0$$

Quel que soit le point x_0, la *dérivée* en x_0 de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie x sur x^2 est donc $2x_0$.

Il est clair que si cette dérivée est nulle en un point, cela signifie que la tangente au graphique de la fonction est parallèle à l'axe des abscisses. Dans ce cas, on a, en ce point, un minimum ou un maximum de la fonction, ou encore un point d'inflexion ...

Mais pour l'heure, Ham et Hony sont bien fatigués et il est temps de les laisser se reposer !

 Math-Jeunes n°85, 108–111, 1998

Triviale poursuite

Yves Hanssens, *Collège Technique St-Henri, Mouscron*

Voilà trois mois que Louis attendait cet entretien d'embauche ! Mais, flairant l'arnaque, l'emploi-bidon, l'exploitation malsaine, il se promit de faire contre mauvaise fortune bon leurre. Aussi se délecta-t-il à la lecture de l'énoncé de la première épreuve : « vous disposez de dix minutes pour compléter chacune des suites ci-dessous par le terme qui convient. Toute rature annule d'emblée votre réponse. Un résultat insuffisant à cette épreuve entraînerait d'office l'élimination de votre candidature au poste proposé. »

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\boxed{}$

(b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\boxed{}$

(c) 1, 2, 4, 8, 16, $\boxed{}$

(d) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, $\boxed{}$

♠ Accorde-toi un **petit** temps de réflexion avant de poursuivre ta lecture ♠

N'écoutant que son courage, Louis ne s'adjugea que **onze** secondes pour balancer ses solutions :

(a) 12 (b) 91 (c) 31 (d) 18

Et le résultat ne se fit pas attendre ...

Hué, conspué, viré le Louis ! Sanction du psy. : cas pas trop logique. Dossier classé sans **suite**. "Voilà qui met un **terme** à notre entretien !"

À son grand étonnement, Louis se vit alors remettre par le recruteur le message manuscrit dont j'ose à peine ici dévoiler le contenu :

"Par pure charité, afin de faire profiter la concurrence de votre brillante candidature, je vous communique les réponses que nous attendions (vous comprendrez, j'en suis sûr, le caractère confidentiel de ma démarche) :

(a) N'avez-vous jamais appris à compter jusqu'à **10** ?

(b) Dans la suite de Fibonacci dont les deux premiers termes sont 1 et 1, chaque terme suivant est la somme des deux qui le précèdent. Un abonnement à *Math-Jeunes* durant vos études n'aurait pas été un luxe et vous aurait permis de tutoyer FIBONACCI. Réponse : **89**.

(c) Les puissances de 2, ça ne vous dit rien ? $2^5 =$ **32**.

(d) Les nombres impairs ... élémentaire ! Réponse : **17**."

Louis commençait seulement à s'amuser. Rentré chez lui, il prit sa plus belle plume pour caresser les touches de son clavier.

Monsieur le recruteur,

Je vous fais une lettre que vous lirez peut-être, si vous avez le temps[1]. Vous me voyez désolé de n'avoir pas satisfait au test d'embauche, mais avouez que vous n'y êtes pas allé de main morte !

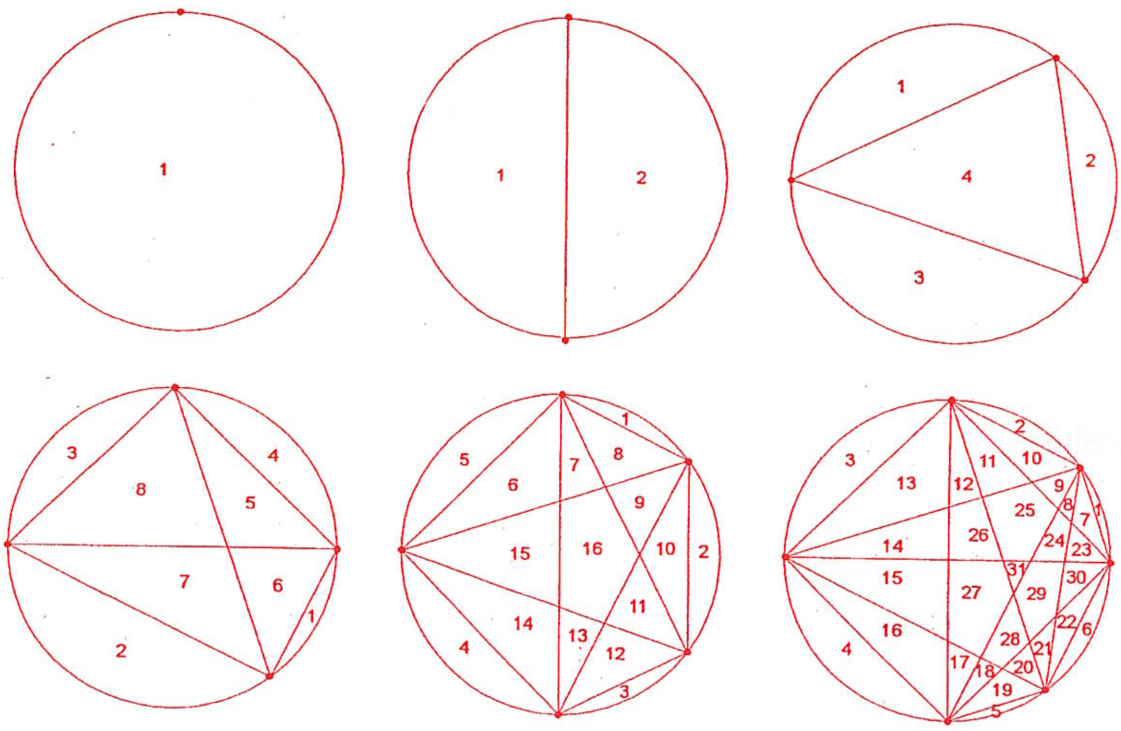
(a) Que le énième terme de la suite soit n vous semble NATUREL ? Il fallait y penser ! Je m'étais contenté de la règle suivante : LES NATURELS n POUR LESQUELS $n^2 + n + 11$ EST UN NOMBRE PREMIER.[4]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~	~~11~~	12	...
n^2+n+11	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101	~~121~~	~~143~~	167	...

(b) FIBONACCI ? Connais pas ! C'est comme si vous me parliez des fleurs de tournesol ou de la reproduction des lapins ! Reconnaissez qu'il était plus simple de penser : LE ÉNIÈME TERME DE LA SUITE EST LE PLUS PETIT ENTIER SUPÉRIEUR OU ÉGAL À $(\sqrt{e})^{n-2}$ (e étant la base des logarithmes népériens, c'est-à-dire environ 2.71828).[2]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$(\sqrt{e})^{n-2} \approx$	0.649	1	1.649	2.718	4.482	7.389	12.182	20.086	33.115	54.598	90.017	...
n^{e} terme	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	91	...

(c) Alors là, chapeau ! Les PUISSANCES DE 2, quelle classe ! J'en étais resté AU NOMBRE MAXIMUM DE RÉGIONS QUE L'ON DÉTERMINE DANS UN DISQUE EN RELIANT n POINTS DE SA CIRCONFÉRENCE.[3]



J'avais aussi pensé AUX DIVISEURS DE 992[4] mais le fait que la suite soit alors finie me chagrinait quelque peu. Ou encore à la valeur arrondie de 1.99^{n-1} mais cela ressemblait un peu trop à ma solution de l'exercice précédent.

(d) LES NOMBRES IMPAIRS ? Là, je reconnais que c'était facile ! Je me suis quelque peu égaré en imaginant que LE n^{e} TERME DE LA SUITE ÉTAIT LE CÔTÉ DU PLUS PETIT CARRÉ POUVANT CONTENIR LES CARRÉS DE CÔTÉS 1, 2, 3, ..., n.[4]

Décidément, vous êtes trop fort pour moi ! Permettez-moi toutefois ce petit conseil pour le choix de votre futur salarié : « Qu'on prenne qui pourra ! Salutations. »

Moralités

- De la valeur relative de ce genre de tests ...
- "Il n'y a pas assez de petits nombres pour satisfaire toutes les propriétés qu'on attend d'eux." (Richard **Guy**, Université de Calgary).[2]
- Tu peux compléter les premiers termes d'une suite par n'importe quel nombre (ton âge, ton chiffre porte-bonheur, ...) : un polynôme d'interpolation te permettra toujours de justifier ton choix !

La place me manque ici pour t'en dire plus, alors, selon la formule consacrée : adresse-toi à ton prof. de math. !

- Si le cas se présentait, la prudence devrait toutefois t'inciter à répondre 10, 89, 32 et 17 pour les exemples cités.

Bibliographie

[1] Boris **VIAN**, *Le déserteur*, 1954.

[2] Ian **STEWART**, *Les faux Fibonacci*, Pour la Science, n° 160, février 1991.

[3] The Fibonacci Quarterly, n° 3, p. 296, 1965.

[4] http://www.research.att.com/~njas/sequences/indexfr.html

La dernière référence bibliographique est l'Encyclopédie Électronique des Suites Entières, N.J.A. Sloane : ce site Internet est une mine d'or !

Merci à Francesco De Comité qui m'a judicieusement aiguillé et à Éric Laermans pour son aide graphique.

Si tu connais d'autres suites de ce type, peut-être cet article, lui aussi, en connaîtra-t-il une !

Solutions des jeux

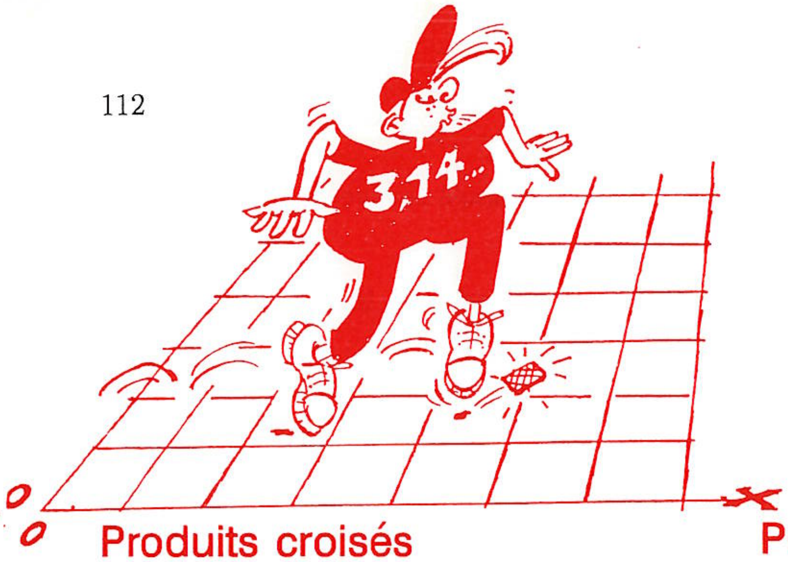
Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	N	A	N	D	O	U
2	A	M	O	U	R	S
3	N	O	M	M	A	I
4	D	U	M	E	N	T
5	O	R	A	N	G	E
6	U	S	I	T	E	E

Puzzle

La réponse est 8624 au septième indice.

Math-Jeunes n°85, 112–112, 1998



Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, …). Chacun des nombres – définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1		A				
2	A					
3						
4						
5						E
6					E	

Verticalement et horizontalement

1. 246 960
2. 1 400 490
3. 319 410
4. 1 528 800
5. 132 300
6. 1 795 500

A. Parent

Puzzle

Chaque énigme consiste à découvrir un nombre à l'aide d'informations numérotées.

Le jeu consiste bien entendu à trouver ce nombre mais en précisant à partir de quel indice on l'obtient avec certitude.

Ces puzzles proviennent du livre « Logic number problems » par Wade H. Sherard III chez Dale Seymour Publications.

1. C'est un nombre entier de 4 chiffres.
2. Chaque chiffre est pair.
3. Tous les chiffres sont différents.
4. La somme du chiffre des unités et du chiffre des centaines vaut 10.
5. La somme du chiffre des dizaines et du chiffre des milliers vaut 10.
6. Le nombre est supérieur à 7 000.
7. Il est divisible par 4.
8. Zéro n'est pas un de ses chiffres.
9. Il est divisible par 8.
10. Le chiffre des centaines est 6.

Publications de la S.B.P.M.e.f.

La S.B.P.M.e.f. est la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française ; elle édite notamment ta revue *Math-Jeunes* et organise l'*Olympiade Mathématique Belge*. Elle publie également des brochures que tu peux facilement te procurer en versant la somme indiquée sur le compte numéro :

000-0728014-29
S.B.P.M.e.f.
rue de la Halle 15
7000 MONS

Nous te proposons :

- le « troisième recueil des questions des Olympiades Mathématiques Belges » ; il comprend l'ensemble des questions posées entre 1988 et 1993. Il coûte 240 BEF (255 BEF pour la CEE, 270 BEF pour l'Europe hors CEE, 280 BEF hors Europe non prioritaire et 370 BEF hors Europe prioritaire).
- « Mathématiques et Sports » ; dans cet ouvrage, Jacques BAIR montre de nombreuses applications des mathématiques dans le monde des sports. Les étudiants et les membres de la S.B.P.M.e.f. peuvent l'acquérir aux mêmes prix.

La rédaction souhaite à tous ses lecteurs une pleine réussite sur le plan scolaire et d'excellentes vacances ensoleillées.