20e année
Octobre 1998 — n° 86
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MJ MathJeunes

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 86 Vingtième année 1998

Math-Jeunes

Pair ou impair : c'est super !!! (6)

Jean-Manuel Mény, *Lycée de la Plaine de l'Ain, Ambérieu en Bugey*

Préambule

Faisant suite à la série d'articles *Pair ou impair : c'est super !!!* traitant de la parité des nombres et publiés dans *Math-Jeunes* au cours de l'année scolaire 1997–1998, nous avons reçu un texte de Monsieur Jean-Manuel MÉNY, enseignant au Lycée de la Plaine de l'Ain à Ambérieu en Bugey (France).

Cet article décrit une exploitation de la notion de parité. C'est avec grand plaisir que nous le publions parce qu'il est intéressant, qu'il propose une situation d'apparence banale mais débouchant sur une belle réflexion et enfin qu'il montre que cette notion toute simple possède des applications inattendues et très jolies.

Alors, vous qui nous lisez, ne soyez pas timide et n'hésitez pas à nous proposer, à votre tour, un texte sur le sujet.

La rédaction.

Poignées de mains

La classe de Mathieu est constituée de 19 garçons et 7 filles. Amandine, qui est jalouse de la bonne entente qui règne entre les garçons, cherche à semer la zizanie. Elle affirme pour cela, à qui veut l'entendre, que chaque matin, chacun des garçons serre la main à sept des garçons et boude les onze autres.
Aidez Mathieu à rétablir la vérité.

On pourrait bien sûr donner un nom à chacun des garçons et chercher à dresser la liste de toutes les poignées de mains possibles. Mais quel travail !

Cherchons une piste plus concise.

1. Quel est le nombre de mains serrées (selon Amandine) ?
   Chacun des garçons serre, d'après Amandine, 7 mains. Et ces garçons sont au nombre de 19. Le nombre total de mains serrées est donc $7+7+7+\cdots+7$ (somme constituée de 19 termes) soit $19 \times 7 = 133$ mains serrées.

2. Quel est le nombre de poignées de mains (toujours selon Amandine) ?
   Si Antoine serre la main à Barnabé, deux mains interviennent : une main d'Antoine et une main de Barnabé. Mais il n'y a qu'une seule poignée de mains. Il y a donc deux fois moins de poignées de mains que de mains serrées. Selon les affirmations d'Amandine, il y aurait donc $133/2 = 66,5$ poignées de mains chaque matin ! C'est évidemment absurde.

Un théorème évident : **Dans une classe, le nombre de mains serrées chaque matin est un nombre pair.**

En effet, si p est le nombre de poignées de mains alors le nombre de mains serrées est $2p$ c'est-à-dire un nombre pair.

Remarquons que le raisonnement ci-dessus est un cas particulier du résultat présenté dans *Math-Jeunes* n° 85 : **dans tout réseau, le nombre de sommets de caractéristique impaire est pair** (voir l'annexe en fin d'article).

Représentons chaque garçon (ou sa main) par un point (sommet d'un réseau). Relions ensuite deux points si les deux garçons se serrent la main. Chaque sommet du réseau représente donc une main tandis que chaque arête représente une poignée de mains. D'après Amandine, chaque garçon serre la main à sept autres. Autrement dit, chaque sommet du réseau a 7 pour caractéristique.

Dès lors, 19 (nombre impair) sommets devraient avoir une caractéristique impaire. C'est impossible.

Mais Amandine est tenace et jalouse. Et la voilà qui colporte d'autres ragots. Elle affirme maintenant que chaque matin aucun des garçons ne serre le même nombre de mains que l'un des autres garçons. Mathieu arrivera-t-il encore à démontrer qu'Amandine est une menteuse ?

Mathieu qui a découvert le théorème « le nombre de mains serrées est pair » se lance dans le calcul du nombre de mains serrées.

Il y a 19 garçons. Chaque garçon serre donc la main à 0 garçon ou 1 garçon ou 2 garçons ou ... ou 18 garçons.

Or les nombres naturels 0, 1, 2, ..., 18 sont au nombre de 19. Comme, d'après Amandine, chaque garçon serre un nombre de mains différent, à chacun des garçons on peut associer un et un seul des naturels 0, 1, 2, ..., 18 (égal au nombre de mains serrées par ce garçon). Le nombre total de mains serrées est donc égal à $0+1+2+\cdots+18$ soit à 171, ce qui est impossible car ce nombre n'est pas pair. Amandine a donc encore menti.

On aurait pu raisonner autrement qu'en calculant la somme des nombres naturels de 0 à 18. Il suffisait de remarquer que le fait qu'un garçon serre la main aux 18 autres (donc à tous les autres garçons) est incompatible avec le fait qu'un garçon ne serre la main à aucun autre. En termes de réseau, si un sommet du réseau est relié à tous les autres sommets du réseau alors aucun sommet ne sera isolé (c'est-à-dire relié à aucun autre).

Annexe

Dans tout réseau, le nombre de sommets de caractéristique impaire est pair

Voici la justification de ce théorème telle qu'elle est parue dans *Math-Jeunes* n° 85.

Le principe de la démonstration est simple.

Que se passe-t-il quand on ajoute une ligne entre deux sommets A et B d'un réseau quelconque ?

La réponse est immédiate : on augmente de 1 le nombre de lignes dont chacun de ces deux sommets est extrémité.

La caractéristique de ces deux sommets change donc de parité.

Si A est « pair », alors il devient « impair » et vice versa. Il en est de même pour le sommet B.

Dès lors le nombre de sommets de caractéristique impaire

- est augmenté de deux unités, lorsque (A, B) passe de (pair, pair) à (impair, impair),
- ne change pas, lorsque (A, B) passe de (pair, impair) à (impair, pair) ou de (impair, pair) à (pair, impair),
- ou est diminué de deux unités, lorsque (A, B) passe de (impair, impair) à (pair, pair).

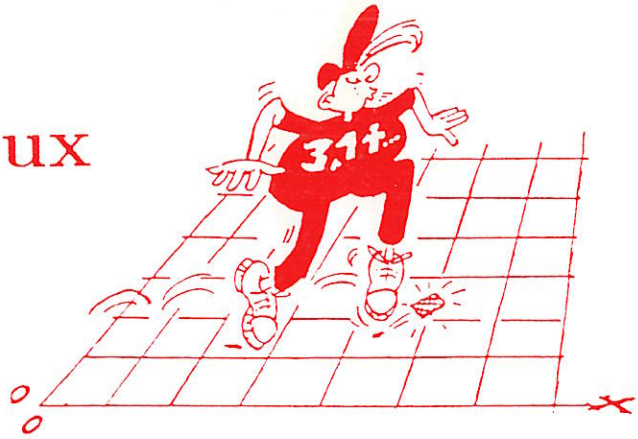
Dans aucun cas, le tracé d'une ligne entre deux sommets d'un réseau ne change la parité du nombre de sommets de caractéristique impaire.

Imaginons maintenant un réseau de n sommets dont les lignes ne sont pas encore tracées. Chaque sommet y est extrémité de zéro ligne. À ce moment, le réseau possède donc zéro sommet de caractéristique impaire et n sommets de caractéristique paire.

Au fur et à mesure que l'on va tracer les lignes du réseau, la quantité de sommets de caractéristique impaire ne changera pas de parité donc elle restera toujours paire comme l'est zéro.

Le nombre de sommets de caractéristique paire ne change pas non plus de parité. Mais comme ce nombre dépend de n, il peut être aussi bien pair qu'impair.

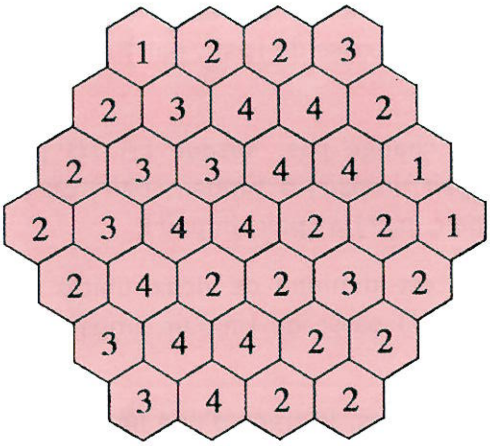
Jeux



Jeu de l'hexagone et de la marguerite

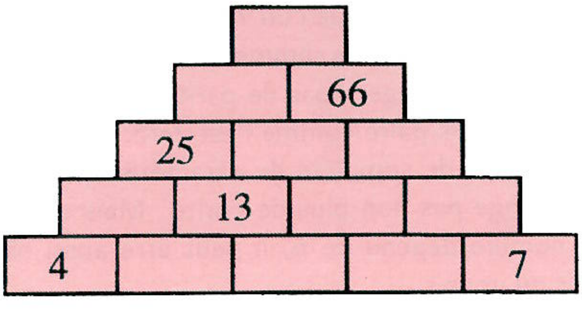
Rappelons la règle de ce jeu de décodage :

le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale de la grille précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, à partir de la grille codée, de retrouver la grille coloriée.



Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.



Le mot caché

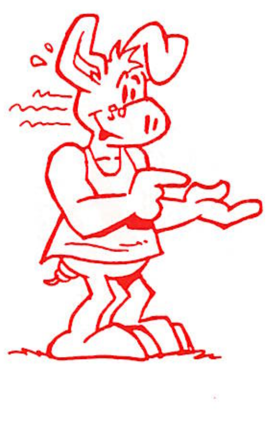
Le jeu consiste à retrouver dans la grille tous les mots du texte qui vous est proposé.

À cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois.

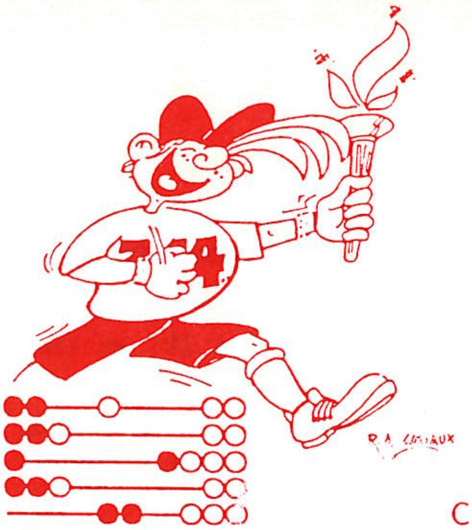
Les lettres restantes forment le nom d'un illustre mathématicien. Qui est-il ?

Fils cadet dans une famille de trois enfants, ... était doué pour les études.
Son habileté extraordinaire pour les mathématiques lui valut une solide amitié de Simson.

S	T	E	X	T	R	L	E	L	A	O	S
L	I	A	T	O	A	L	T	U	V	N	M
I	F	E	E	R	D	I	M	A	F	D	I
E	U	N	A	N	I	M	I	T	N	A	S
D	E	R	I	A	M	A	L	I	S	E	E
I	L	O	S	T	H	S	E	E	T	D	U
I	B	T	A	M	E	S	I	O	R	D	O
L	A	I	E	T	E	S	U	O	S	T	N
E	H	Q	U	U	D	P	R	P	N	F	A
T	E	T	E	S	U	O	R	U	E	A	M
E	D	E	L	S	R	N	I	A	L	C	L
C	A	S	N	O	D	E	E	N	U	I	U



OLYMPIADE
MATHEMATIQUE BELGE



Participons à l'OMB !

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-quatrième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis trois ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » est réservée aux élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » accueille les élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre-eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Le calendrier de la 24^{e} Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

Mercredi 13 janvier 1999 : éliminatoire
Mercredi 3 mars 1999 : demi-finale
Mercredi 21 avril 1999 : finale (à Namur)
Samedi 8 mai 1999 : proclamation (à Liège)

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

C. Van Hooste

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse préformulée. Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$, autrement dit **un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1 000.**

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois deux points. Là, tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Voici les questions promises. Essaie de les résoudre sans consulter les solutions proposées.

Si tu es élève du premier degré, tu devrais pouvoir résoudre les questions 1 à 10 ; en tant qu'élève du second degré, tu dois être capable de trouver la solution des questions 1 à 18. Enfin, si tu es déjà dans le troisième degré, toutes les questions sont évidemment à ta portée.

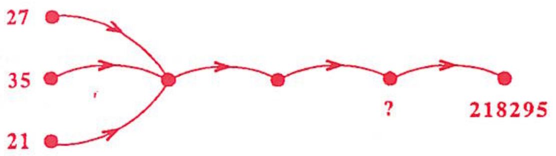
1.- Le capitaine Haddock [1984]

Dans les aventures de Tintin, le capitaine Haddock s'écrie souvent « Mille milliards de mille sabords ! » Combien cela fait-il de sabords ?

Ⓐ 10^{12} Ⓑ 10^{13} Ⓒ 10^{14} Ⓓ 10^{15} Ⓔ 10^{16}

2.- La relation « divise » [1983]

Dans le graphe ci-dessous, chaque flèche représente un couple de la relation « divise ».

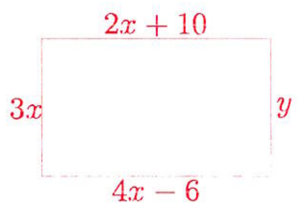


Quel pourrait être le nombre à mettre à l'emplacement du point d'interrogation ?

Ⓐ 3 465 Ⓑ 5 670 Ⓒ 19 845 Ⓓ 24 255 Ⓔ 28 350

3.- Dimension inconnue [1984]

La figure ci-contre est un rectangle. Quelle est la valeur de y ?



Ⓐ $\frac{8}{3}$ Ⓑ 6 Ⓒ 8 Ⓓ 21 Ⓔ 24

4.- Cube [1984]

Un cube dont les arêtes mesurent 5 cm est construit en assemblant 125 petits cubes dont les arêtes mesurent 1 cm.

Combien y a-t-il de petit cubes qui ont exactement 4 faces coïncidant avec des faces d'autres petits cubes ?

Ⓐ 25 Ⓑ 30 Ⓒ 36 Ⓓ 42 Ⓔ 48

5.- Parallélogone [1983]

Dans le plan, un parallélo**gone** est un polygone convexe dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

Ⓐ Il n'existe pas de parallélogone.

Ⓑ Il n'existe pas de parallélogone ayant plus de quatre côtés.

Ⓒ Tout parallélogone est un polygone régulier.

Ⓓ Tout parallélogone a un centre de symétrie.

Ⓔ Tout parallélogone a au moins un axe de symétrie.

6.- Partage du plan [1984]

Sans réponse préformulée

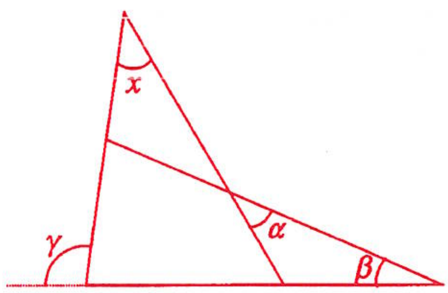
En combien de régions, au maximum, cinq droites peuvent-elles partager le plan ?

7.- Polygones réguliers [1986]

Soit P un point d'un cercle. Combien existe-t-il de polygones réguliers à seize côtés, convexes ou étoilés, inscrits dans ce cercle, qui admettent P comme sommet.

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 8 Ⓔ 16

8.- Angles et triangles [1983]



Avec les notations de la figure ci-avant, x vaut

Ⓐ $\gamma-\alpha-\beta$ Ⓑ $\alpha+\gamma-\beta$ Ⓒ $\alpha+\beta-\gamma$

Ⓓ $\beta+\gamma-\alpha$ Ⓔ $\gamma-\beta$

9.- Microbes [1984]

Sachant que tous les bacilles sont des microbes et que certains bacilles sont pathogènes, on peut en déduire que

Ⓐ tous les microbes sont pathogènes ;

Ⓑ aucun microbe n'est pathogène ;

Ⓒ certains bacilles pathogènes ne sont pas des microbes ;

Ⓓ certains microbes sont pathogènes ;

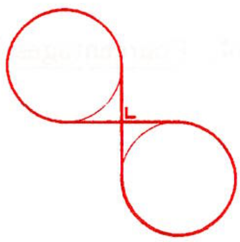
Ⓔ aucun microbe pathogène n'est un bacille.

10.- Clôture [1985]

Une clôture rectiligne est supportée par seize poteaux ; deux poteaux successifs étant distants de 2,40 m. Combien faudrait-il de poteaux pour soutenir la même clôture si la distance entre deux poteaux successifs était de 1,50 m ?

Ⓐ 24 Ⓑ 25 Ⓒ 26 Ⓓ 30 Ⓔ 32

11.- Courroie [1986]



Quelle est la longueur (exprimée en mm) d'une courroie qui passe sur deux roues de diamètre 32 mm et dont les portions rectilignes sont à angle droit ?

Ⓐ $32+24\pi$ Ⓑ $64+24\pi$ Ⓒ $64+48\pi$

Ⓓ $48+32\pi$ Ⓔ $64+32\pi$

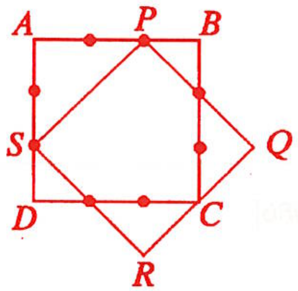
12.- Balle [1982]

Une balle sphérique de 10 cm de diamètre flotte sur l'eau. Son point le plus haut dépasse le niveau de l'eau de 2 cm. Quel est le diamètre du cercle (exprimé en cm) délimité par l'eau sur la surface de la balle ?

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 6 Ⓓ 8 Ⓔ 10

13.- Carrés [1986]

Que vaut le rapport des aires des carrés $ABCD$ et $PQRS$, sachant que P et S sont respectivement situés aux deux tiers de $[AB]$ et de $[AD]$ à partir de A ?



Ⓐ 1 Ⓑ $\frac{9}{8}$ Ⓒ $\frac{6}{5}$ Ⓓ $\frac{4}{3}$ Ⓔ $\frac{3}{2}$

14.- Hommes et femmes [1986]

Une population compte 45% d'hommes et 55% de femmes. Sachant que 4% des hommes et 6% des femmes ont plus de 80 ans, quel est le pourcentage de cette population dépassant 80 ans ?

Ⓐ 4,5% Ⓑ 4,8% Ⓒ 5% Ⓓ 5,1% Ⓔ 5,4%

15.- Nombres premiers [1983]

Trois nombres premiers p, q et r vérifient les conditions suivantes :

$$p+q=r \text{ et } 1<p<q.$$

Alors p vaut

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 7 Ⓔ 13

16.- Divisibilité [1986]

Soit p la proposition « Si la somme des chiffres d'un entier naturel est divisible par 6, alors ce naturel est lui-même divisible par 6. » Quel est le plus petit naturel qui montre que la proposition p est fausse ?

Ⓐ 0 Ⓑ 6 Ⓒ 9 Ⓓ 12 Ⓔ 15

17.- La rue de la Gare [1986]

Dans la rue de la Gare, du côté des numéros impairs, une maison porte le numéro 87. Si la numérotation commençait à l'autre extrémité de la rue, elle aurait le numéro 69. Combien y a-t-il de maisons du côté impair dans la rue de la Gare ?

Ⓐ78 Ⓑ79 Ⓒ154 Ⓓ156 Ⓔ158

18.- Alice [1986]

Un parc a la forme d'un hexagone régulier de 2 km de côté. Partant d'un sommet, Alice marche le long du périmètre de ce parc et parcourt 5 km. À combien de km est-elle de son point de départ à vol d'oiseau ?

Ⓐ$\sqrt{13}$ Ⓑ$\sqrt{14}$ Ⓒ$\sqrt{15}$ Ⓓ$\sqrt{16}$ Ⓔ$\sqrt{17}$

19.- Aire d'un carré [1986]

Quelle est l'aire (exprimée en cm^2) d'un carré dont la diagonale mesure 1 cm de plus que le côté ?

Ⓐ$2+\sqrt{2}$ Ⓑ$3+\sqrt{2}$ Ⓒ$1+3\sqrt{2}$

Ⓓ$3+2\sqrt{2}$ Ⓔ$2+3\sqrt{2}$

20.- Deux amis et un vélo [1985]

Deux amis, Jean-Pierre et Pierre-Jean, ne disposent que d'un seul vélo. De ce fait, Jean-Pierre part à vélo et parcourt x km à vitesse constante V, puis abandonne le vélo et continue à pied à vitesse constante v ($v < V$). Pierre-Jean part en même temps que son ami, mais à pied, à vitesse constante v, trouve le vélo, l'enfourche et roule à vitesse constante V jusqu'à ce qu'il rattrape Jean-Pierre. La vitesse moyenne u à laquelle se sont alors déplacés les deux amis est telle que

Ⓐ$V = u + v$ Ⓑ$2V = 2v + u$ Ⓒ$u = \frac{V+v}{2}$

Ⓓ$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{V}\right)$ Ⓔ$u^2 = V \cdot v$

21.- Fractions à termes entiers [1985]

Quels que soient les entiers naturels non nuls a, b, c,

Ⓐ$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$ Ⓑ$\frac{a}{b} \neq \frac{a+c}{b+c}$ Ⓒ$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

Ⓓ$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ Ⓔ$\frac{a+c}{b+c}$ se situe entre $\frac{a}{b}$ et 1.

22.- Partie entière [1982]

Si x est un nombre réel, $[x]$ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à x. Quels que soient les nombres réels x et y, $[x]+[y]$ est égal à

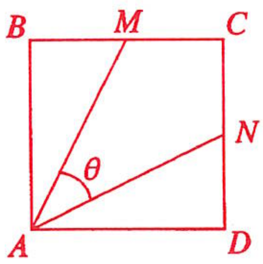
Ⓐ$[x+y]$Ⓑ$[x+y]-1$Ⓒ$[x+y]$ ou $[x+y]+1$

Ⓓ$[x+y]-1$ ou $[x+y]$

Ⓔ$[x+y]-1$ ou $[x+y]+1$.

23.- Sinus [1987]

Les points M et N sont respectivement les milieux des côtés $[BC]$ et $[CD]$ du carré $ABCD$. Que vaut alors le sinus de l'angle ϑ marqué sur la figure ci-contre ?



Ⓐ$\frac{1}{3}$ Ⓑ$\frac{1}{2}$ Ⓒ$\frac{3}{5}$ Ⓓ$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓔ$\frac{4}{5}$

24.- Pourcentages [1986]

Soient x et y deux quantités positives qui varient de manière inversement proportionnelle. Si x augmente de $p\%$, alors y diminue de

Ⓐ$p\%$ Ⓑ$\frac{p}{1+p}\%$ Ⓒ$\frac{100}{p}\%$

Ⓓ$\frac{p}{100+p}\%$ Ⓔ$\frac{100p}{100+p}\%$

* *
*

Les problèmes que tu viens de résoudre ont été choisis dans le tome 2 des questions OMB reprenant toutes les questions posées de 1982 à 1987. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente car il est épuisé. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique sur des questions plus récentes, tu peux acquérir les tomes 3 et 4 des questions des OMB. Je te donne ci-dessous tous les renseignements nécessaires pour cela.

Solutions

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R	D	C	E	C	D	16	C	A	D	B	C	D
Q	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R	B	D	B	E	A	A	D	D	E	D	C	E

Logiciels mathématiques en pratique

En math, j'avais atteint mes limites.
À tel point que le prof me prenait pour un gros zéro.
Avec DERIVE, je ne suis plus sur la tangente,
Plus d'erreur de calcul !
Maintenant, je pense, donc je suis.
Donnez-moi des cartes, SVP !

C. Van Hooste

Cher lecteur, voici un aspect du programme **DERIVE** que tu n'avais peut-être pas imaginé : en faire un outil de calcul pour résoudre des problèmes de géométrie analytique. Pour t'en donner une idée, voici une séquence qui permet d'obtenir l'orthocentre d'un triangle ABC dont les coordonnées des sommets sont données. Pour bien comprendre cette séquence, il est nécessaire de bien interpréter les lignes 10, 13 et 20.

#1: " Dans un repère orthonormé, on donne un triangle " Utl

#2: " par les coordonnées de ses sommets. " Utl

#3: " Le programme DERIVE va nous permettre d'en déterminer l'orthocentre. " Utl

#4: " Données " Utl

#5: a:=[1,2] Utl

#6: b:=[3,7] Utl

#7: c:=[6,-1] Utl

#8: " Equation de la hauteur issue de a " Utl

#9: p:=[x,y] Utl

#10:(p-a)*(b-c)=0 Utl

#11: -3*x+8*y-13=0 Dévpt(#10)

#12: " Equation de la hauteur issue de b " Utl

#13: (p-b)*(c-a)=0 Utl

#14: 5*x-3*y+6=0 Dévpt(#13)

#15: " Coordonnée de l'orthocentre " Utl

#16: [-3*x+8*y-13=0,5*x-3*y+6=0] Utl

#17: [x=-9/31,y=47/31] Résoudre(#16)

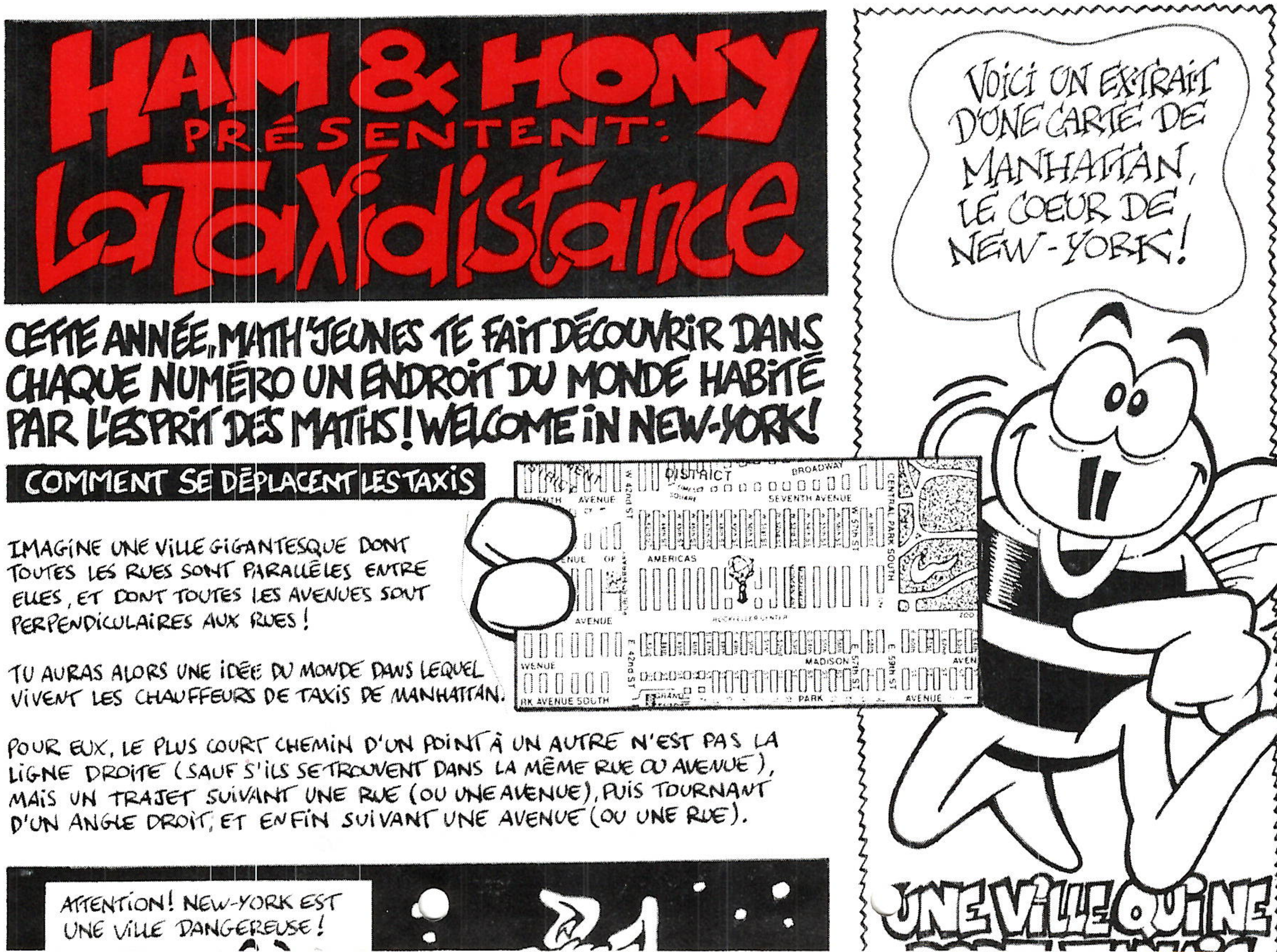
#18: " Vérification: le point obtenu appartient-il à la troisième hauteur ? " Utl

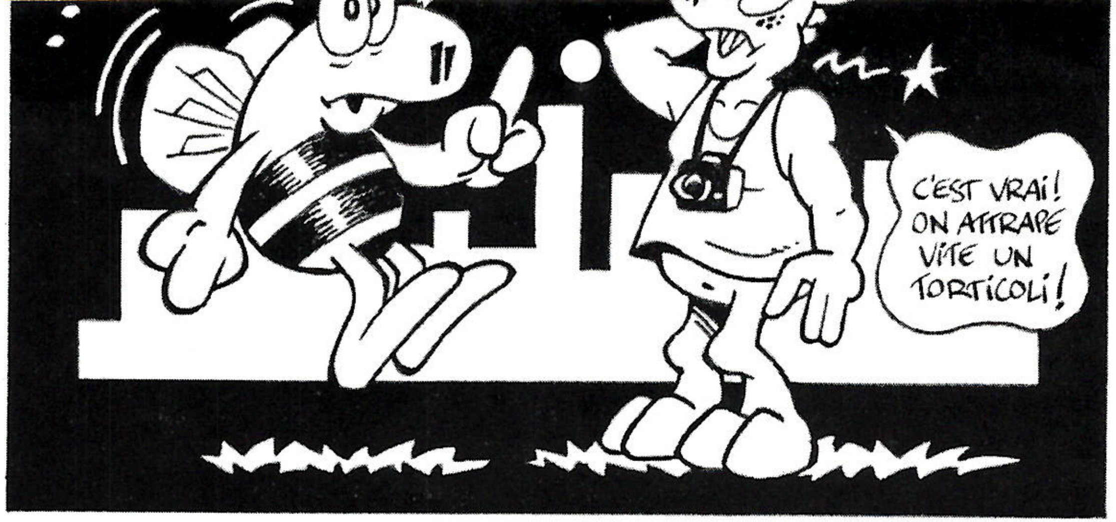
#19: h:=[-9/31,47/31] Utl

#20: (h-c)*(a-b) Utl

#21: 0 Simp(#20)

Math-Jeunes n°86, 10–13, 1998





DÉFINISSONS LA TAXIDISTANCE !

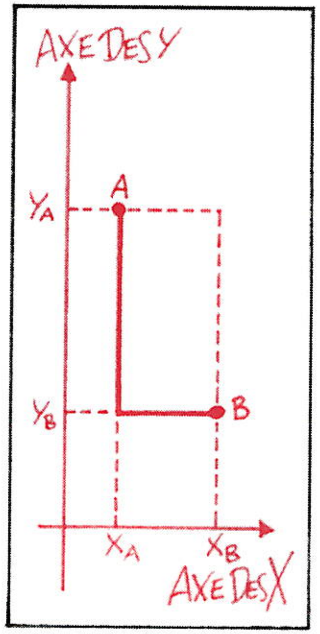
ESSAYONS DE MODÉLISER CETTE DISTANCE. DANS LE PLAN, COMME CELUI D'UNE CARTE, CHOISISSONS UN REPÈRE : UNE ORIGINE (LE ROCKFELLER CENTER, PAR EXEMPLE !) ET DEUX AXES (UNE RUE ET UNE AVENUE).

COMME TU PEUX LE VÉRIFIER SUR LE DESSIN CI-CONTRE, LA TAXIDISTANCE DE A À B EST :

$$d(A,B) = \underbrace{|Y_A - Y_B|}_{\text{DIFFÉRENCE D'ORDONNÉES}} + \underbrace{|X_B - X_A|}_{\text{DIFFÉRENCE D'ABSCISSES}}$$

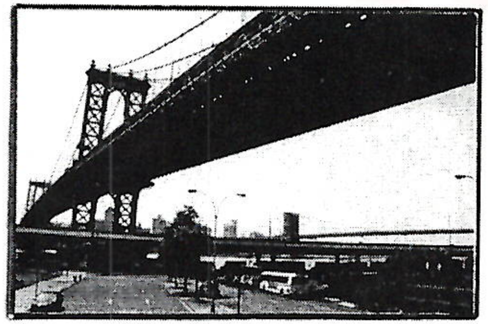
EN VALEURS ABSOLUES ! ($|Y_A - Y_B| = |Y_B - Y_A|$)

TU REMARQUERAS QUE L'ON PEUT AUSSI BIEN COMMENCER PAR L'AXE DES X (LA DISTANCE EST LA MÊME QUE L'ON ROULE D'ABORD SUR UNE RUE OU SUR UNE AVENUE !).



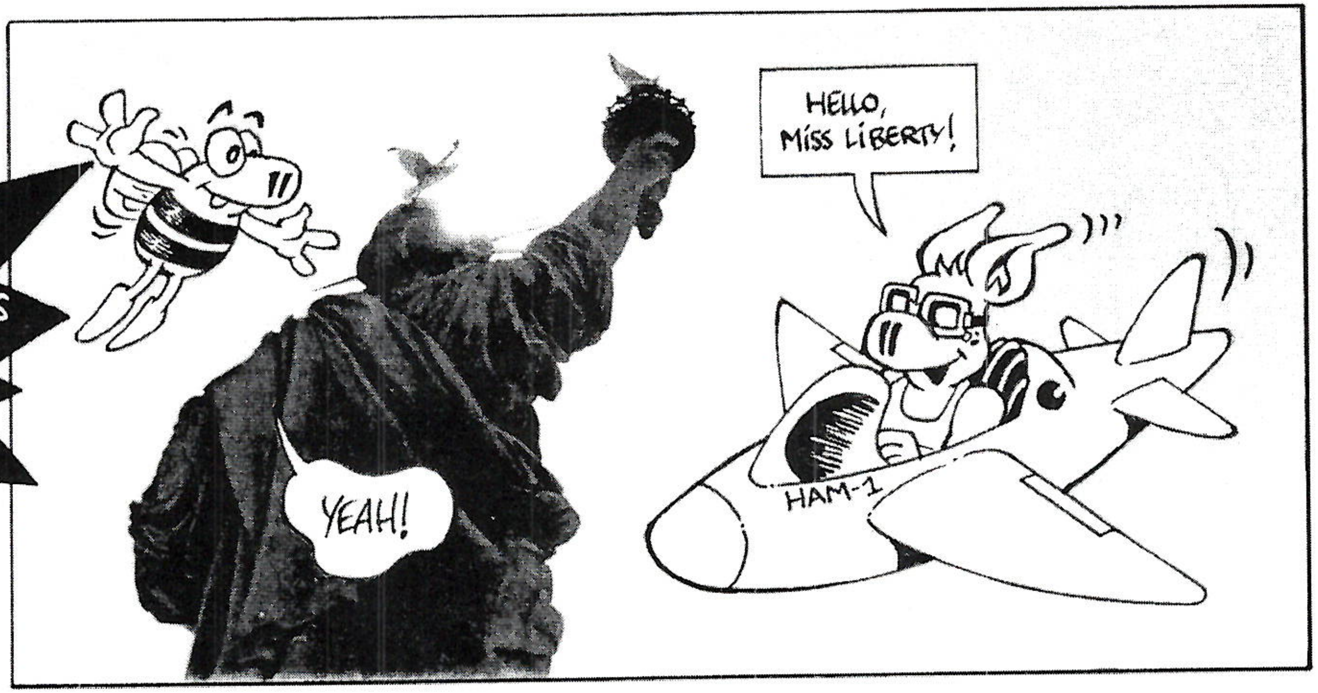
DORT JAMAIS

"New York est le monstre qui imagine, la ville qui engendre et détruit ses propres mythes..." La grosse pomme s'étend sur plusieurs îles : Manhattan, le Bronx, Staten Island et Long Island (qui contient les quartiers du Queens et de Brooklyn).



Il y a jour et nuit de l'animation dans ce géant urbain qui compte presque autant d'habitants que la Belgique (7 millions !)

"LA LIBERTÉ ÉCLAIRANT LE MONDE" EST LE NOM EXACT DE LA CÉLÈBRE STATUE DUE AU FRANÇAIS AUGUSTE BARTHOLDI (ET AUSSI À GUSTAVE EIFFEL !)... ELLE TRÔNE SUR LA PETITE ÎLE DE BEDLOE DU HAUT DE SES 93 M.



DISTANCE ? VOUS AVEZ DIT DISTANCE ?!

COMME TU L'AS VU, NOUS AVONS DÉFINI UNE DISTANCE QUI N'EST PAS CELLE À LAQUELLE TU ES HABITUÉ... ET IL Y EN A ENCORE BEAUCOUP D'AUTRES ! POUR ÊTRE UNE DISTANCE, IL FAUT VÉRIFIER CERTAINES CONDITIONS.

UNE RELATION d QUI ASSOCIE UN NOMBRE POSITIF $d(A,B)$ (ET UN SEUL !) À UN COUPLE DE POINTS A ET B (PAR EXEMPLE, DEUX ENDROITS SUR UNE CARTE) EST UNE DISTANCE LORSQUE :

· L'ORDRE DES DEUX POINTS N'A PAS D'IMPORTANCE

SOIENT DEUX POINTS A ET B, ON A $d(A,B) = d(B,A)$, C'EST L'AXIOME DE SYMÉTRIE

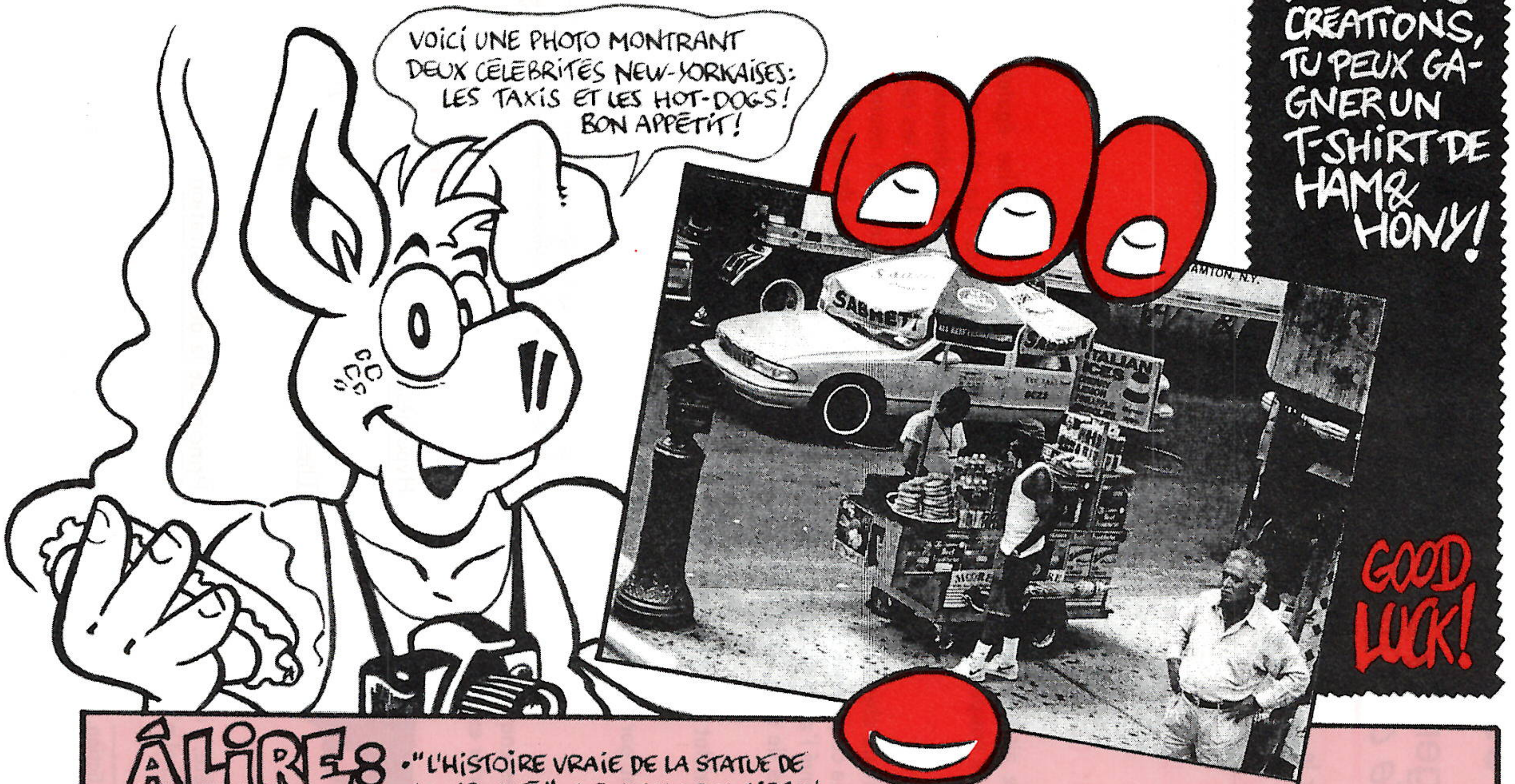
À TOI DE JOUER

INVENTE UNE DISTANCE ORIGINALE,

$d(A,B)=0$ SI ET SEULEMENT SI $A=B$, C'EST L'AXIOME DE SÉPARATION

• SI ON PASSE PAR UN POINT INTERMÉDIAIRE, C'EST PLUS LONG

SOIT UN AUTRE POINT C, ON A $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$, C'EST L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE



À LIRE 8

• "L'HISTOIRE VRAIE DE LA STATUE DE LA LIBERTÉ", A.P. ALCALA & H. GIBSON, ÉDITIONS DUPUIS 1986 • "DU VENTRE DE LA BÊTE", J. CHARYN & F. BOUCQ, ÉDITIONS DS 1994

• "DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES", A. BOUVIER, M. GEORGE ET F. LE LIONNAIS, PUF 1996

Math-Jeunes n° 86, 14–15, 1998

Le crime n'était pas parfait

Sabine Mentgen-Haine, *Écoles privées Sainte-Sophie de Luxembourg*

Cet article vise à illustrer le

Principe de la démonstration par éliminations successives de tous les cas possibles sauf un

1. Introduction

Imaginons que Marianne ait été assassinée. Il faut bien sûr démasquer le coupable. ([1])

Premier cas de figure

Des témoins ont vu sortir de chez elle, à l'heure du crime, un individu de la corpulence de Manuel. Chez Manuel, on a retrouvé l'arme du crime ainsi que des vêtements tâchés de sang, celui de Marianne.

Par déduction, on en conclut que Manuel a assassiné Marianne.

Démarche : raisonnement par déduction.

Deuxième cas de figure

Pour certaines raisons, les enquêteurs ont acquis la certitude que le meurtrier est Marc, Michel ou Manuel.

Poursuivant leur enquête, ils parviennent à établir que ni Marc ni Michel n'ont pu commettre le meurtre.

([1]) Cette histoire est pure fiction. Toute ressemblance avec des personnages existants ou ayant existé serait totalement fortuite.

Ayant innocenté tous les suspects sauf un, ils concluent que c'est ce dernier, Manuel, qui a assassiné Marianne.

Démarche : éliminations successives de tous les cas possibles sauf un.

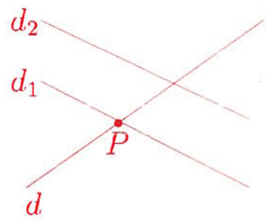
2. Applications

En mathématiques, on utilise également ces genres de raisonnement. La démonstration par déduction est très courante, la démonstration par éliminations successives de tous les cas possibles sauf un l'est moins. En voici néanmoins deux illustrations simples, l'une de géométrie, l'autre d'algèbre.

* *
*

Démontrons que ...

> Si deux droites sont strictement parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre.



Hypothèse

$d_1 // d_2$

$d \cap d_1 = \{P\}$

Thèse

d et d_2 sont sécantes

Principe de la démonstration

Les droites d et d_2 peuvent être

- strictement parallèles,
- confondues ou

- sécantes.

Nous éliminerons facilement les deux premières possibilités en démontrant qu'elles contredisent l'hypothèse.

Nous en conclurons que les droites ne peuvent être que sécantes (dernière possibilité).

Démonstration

1. Les droites d et d_2 ne peuvent être strictement parallèles. En effet, si on le suppose, on a :

$$\left.\begin{array}{l} d//d_2 \\ d_1//d_2 \text{ (par hypothèse)} \end{array}\right\} \Rightarrow d//d_1$$

(car si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre).

Ceci contredit l'hypothèse ($d \cap d_1 = \{P\}$).

2. Les droites d et d_2 ne peuvent être confondues. En effet, si on le suppose, on a :

$$\left.\begin{array}{l} d = d_2 \\ d \cap d_1 = \{P\} \text{ (par hypothèse)} \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \cap d_2 = \{P\}$$

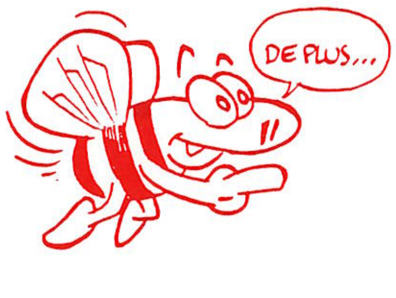
Ceci contredit également l'hypothèse ($d_1//d_2$).

Comme annoncé, il reste une seule possibilité :

d et d_2 sont sécantes.

cqfd

* *
*



Démontrons maintenant que ...

Si un nombre ne divise qu'un des deux termes d'une somme, il ne divise pas la somme. [2]

Hypothèse

x, a et b sont trois nombres entiers
x divise a
x ne divise pas b

Thèse

x ne divise pas $a + b$

Principe de la démonstration

Deux cas sont possibles :

- soit x divise $a + b$,
- soit x ne divise pas $a + b$.

Nous démontrerons facilement qu'il est absurde de supposer que x divise $a + b$. Il faut donc que x ne divise pas $a + b$.

Démonstration

Si x divisait $a + b$, on pourrait trouver un entier k tel que

$$a + b = kx.$$

De plus, comme x divise a, on peut trouver un entier k' tel que

$$a = k'x.$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, on obtient

$$b = (k - k')x.$$

Ce qui indique que x divise b et donc contredit l'hypothèse.

La conclusion s'impose :

x ne divise pas $a + b$.

cqfd

[2] Un merci spécial à André XHONNEUX de l'Athénée Royal Charles Rogier

Math-Jeunes n°*86*, *16–17*, *1998*

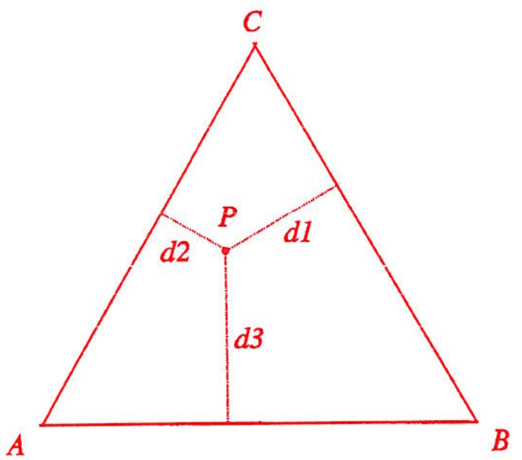
Cabri-Géomètre

B. Honclaire

Pour fêter ses vingt ans, *Math-Jeunes* vous offre une nouvelle rubrique.

Bienvenue donc à tous dans ce nouvel univers où nous sommes heureux de vous accueillir. Le but est de vous confronter à des situations-problèmes mathématiques parfois troublantes mais pas nécessairement très difficiles.

La rubrique tire son nom du fait que, le plus souvent, vous serez amenés d'abord à investiguer avec le logiciel Cabri. Ensuite, vous aurez sans doute envie de formuler une *conjecture* (une conjecture est un énoncé qui semble vrai mais qui n'a pas encore été démontré). Enfin, vous tenterez de donner la démonstration de cette conjecture, qui deviendra ainsi un théorème. Surtout, n'hésitez pas à parler de tout ceci à votre prof. de math., ... Sans tarder, voici donc un premier problème, qui n'est pas très difficile.



- Faire construire par Cabri-Géomètre un triangle équilatéral ABC.
- Faire mettre un point P à l'intérieur du triangle.
- Faire tracer les trois segments passant par P et perpendiculaires à chacun des côtés du triangle ABC.
- Faire mesurer les distances $d1$, $d2$ et $d3$ du point P à chacun des côtés du triangle ABC.
- Faire additionner ces trois nombres et noter la somme obtenue ou faire tabuler le tout par Cabri.
- Faire bouger le point P à l'intérieur du triangle ABC et, dans chaque cas, noter la valeur de la somme $d1 + d2 + d3$. Le bord fait-il partie de l'intérieur ?
- Observer.
- Réfléchir.
- Formuler une conjecture.
- Démontrer cette conjecture qui devient ainsi un théorème.

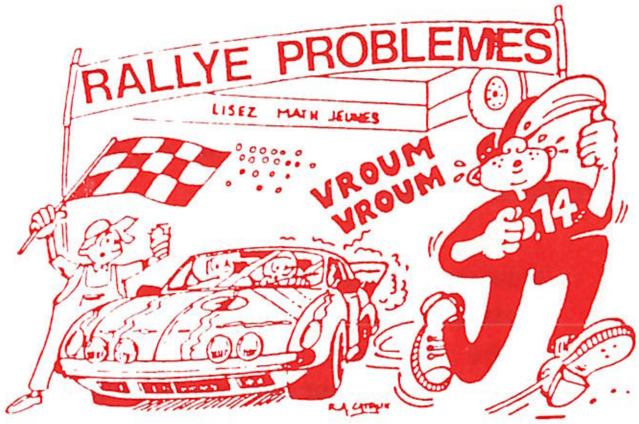
Si tu as réussi à démontrer le théorème, tu peux avoir envie d'aller plus loin, de te poser la question suivante : qu'arrive-t-il lorsque le point P sort du triangle ABC ? Nous te conseillons d'explorer cela avec Cabri. Bien sûr, tu ne dois plus voir le triangle comme un ensemble de trois segments, mais plutôt comme un ensemble de trois droites. Observe ... Note les différentes valeurs de $d1$, $d2$ et $d3$. Combine-les au moyen d'opérations simples, ...

Amuse-toi bien ! Nous nous retrouverons bientôt pour de nouvelles aventures dans Cabri.

Un petit problème

Prends n'importe quel naturel n_0, par exemple $n_0 = 928$. Forme un nouveau nombre n_1 en faisant la somme des chiffres de n_0. Dans notre exemple, $n_1 = 9+2+8 = 19$. **Itère** le processus, ce qui signifie : refais ce que tu viens de faire avec n_1. Ainsi, fais la somme des chiffres de n_1 pour obtenir n_2. Pour nous, $n_2 = 1+9 = 10$. Itère le processus ; toujours avec le même exemple, nous obtenons $n_3 = 1+0 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$ ... Donc, en fait, dans le cas qui nous intéresse, tout se termine effectivement averc n_3. Ceci suggère deux questions :

- Est-il vrai que pour n'importe quel naturel n_0, le processus décrit ci-dessus se termine toujours en un nombre fini d'étapes avec un nombre d'un seul chiffre ?
- Si la réponse à cette première question est «oui», quelle est la relation entre le nombre de départ et celui (d'un seul chiffre) auquel on arrive ?



C. Festraets

Le rallye-problèmes 1998-1999 comportera trois étapes publiées dans les numéros 86, 87 et 88 de *Math-Jeunes.* À chaque étape, six problèmes seront proposés à votre sagacité ; la plupart des problèmes proposés ne nécessitent que des connaissances mathématiques élémentaires, en outre, il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement. Évidemment, ce n'est pas toujours facile ! Tout élève, quel que soit son âge, peut essayer de les résoudre et envoyer une solution, même partielle (par exemple, si vous n'avez résolu que la première partie d'un problème et si vous estimez que la suite est trop difficile pour votre âge ou encore, si vous aboutissez à une équation dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe, n'hésitez pas, envoyez tout de même votre solution incomplète).

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seront, hélas, pas pris en considération.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.

Les solutions des problèmes de ce numéro doivent être envoyées au plus tard pour le 11 décembre 1998 à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles.

1. Quatre suspects d'un crime font les déclarations suivantes à la police
André : Charles a commis le crime ;
Bernard : Ce n'est pas moi le coupable ;
Charles : Daniel est coupable ;
Daniel : Charles ment lorsqu'il dit que je suis coupable.

   (a) En supposant qu'une seule des déclarations est vraie, qui est coupable ?

   (b) En supposant qu'une seule des déclarations est fausse, qui est coupable ?

2. « Mais quel âge ont donc vos enfants ? » demande Marie à Anne et Béatrice.
« Nous avons chacune deux enfants » répond Anne. « Chez l'une de nous, ils ont ensemble 11 ans, tandis que chez l'autre, ils totalisent 16 ans. Mais le plus curieux est que dans nos deux familles, le produit des âges des enfants est le même. »

   « J'ajouterai, dit Béatrice, que le fils de Anne a 5 ans de plus que ma fille et que tous les enfants ont au moins un an. »
   Pouvez-vous aider Marie à retrouver les âges des quatre enfants ?

3. Un joueur joue à pile ou face avec un ami. À chaque partie, il parie la moitié de l'argent qu'il a à ce moment dans sa poche. Il gagne si la pièce montre sa face, il perd si c'est pile (on suppose que la pièce ne tombe jamais sur sa tranche). Après avoir joué un certain nombre de parties, il constate que le nombre de fois où il a gagné est exactement le même que le nombre de fois où il a perdu.

   (a) Supposons qu'il ait eu 10 000 BEF dans sa poche au départ et qu'il ait joué 4 fois. Pouvez-vous dire quelle est la somme qu'il possède à la fin du jeu ?

   (b) S'il a joué $2n$ parties, a-t-il gagné ou perdu en fin de compte ?

4. Dans l'égalité qui suit, chaque lettre représente un chiffre de 0 à 9.
Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents.

$$\mathrm{TOC} \times \mathrm{TOC} = \mathrm{ENTRE}$$

   TOC est un nombre de 3 chiffres et ENTRE est un nombre de 5 chiffres. Peux-tu trouver ces deux nombres ?

5. Observe les égalités :

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 2+3+4 &= 3^2 \\ 3+4+5+6+7 &= 5^2 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 7^2 \end{aligned}$$

   (a) Quelle est l'égalité suivante ?

   (b) Peux-tu écrire une égalité générale où le second membre de l'égalité est le carré d'un nombre impair quelconque (un nombre naturel pair se désigne par $2n$ où n est un naturel, un nombre naturel impair se désigne par ... ?)

   (c) Démontre cette égalité.

6. Le mathématicien **Chin Chiu Shao**, qui écrivit en 1247 « Les neuf sections », proposait le problème suivant :
Il existe une ville entourée d'un mur circulaire et ayant 4 portes situées au nord, au sud, à l'est et à l'ouest. En allant de la porte Nord vers le nord sur une distance de 300 mètres, on rencontre un arbre qui commence à être visible à un autre promeneur qui se serait déplacé vers un point situé à 900 mètres à l'est de la porte Sud. Quel est le diamètre du mur qui entoure la ville ? (Pour notre facilité, les anciennes mesures de longueur chinoises ont été converties en mètres).

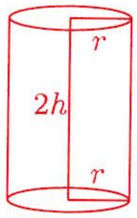
N. Hervé aidé de F. Pourbaix, *Université de Mons*

De retour d'un stage œnologique itinérant de la Bourgogne aux meilleurs coins du Portugal, le célèbre fouineur N. Hervé nous envoie ces quelques notes prises sur le vif. Dans les effluves fruitées d'une cave renfermant le nectar des cépages, notre ami a rencontré l'une des plus sombres énigmes de notre temps ...

1. Les tonneliers sont dissipés

Il faut le reconnaître, la vision de ces centaines de tonneaux de bois répartis sur toute l'étendue des sous-sols laisse une sensation troublante à chaque visiteur d'exploitation vinicole. Mais une fois le premier choc évanoui, une seule question brûle l'esprit du mathématicien : comment les anciens tonneliers faisaient-ils pour évaluer la capacité de leurs tonneaux ?

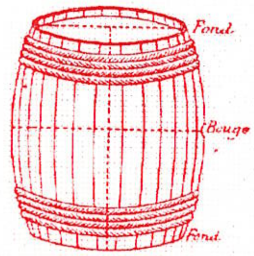
Si l'on cherche bien, on peut trouver de vieux livres scolaires (voir références) qui relatent les formules en usage au siècle dernier.



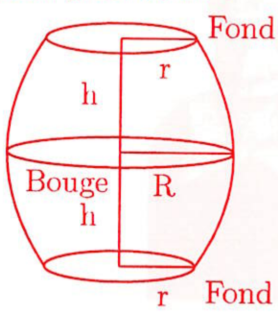
D'après ces ouvrages, il semblerait que la méthode la plus courante soit le remplacement du volume du tonneau par celui d'un cylindre. Rappelons que le volume d'un cylindre est donné par $2\pi hr^2$ où r est le rayon de la base du cylindre et $2h$ est sa hauteur.

Mais par quel cylindre va-t-on remplacer notre tonneau ? Deux rayons interviennent dans ce dernier : celui des fonds (parfois appelés *jabes*) et celui de la *bouge* (le grand cercle au milieu du tonneau).

Un dessin ancien :



Un dessin plus récent :



D'après certains livres (voir références), il faut prendre comme rayon du cylindre de remplacement la moyenne pondérée (deux tiers–un tiers) entre les rayons de la bouge et du fond, c'est-à-dire $(\frac{2R}{3}+\frac{r}{3})$. On a alors la **FORMULE DES OCTROIS** :

$$\boxed{\text{Volume} = 2\pi h\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2}$$

Mais cette formule est frustrante ! De quelle formule exacte est-elle l'approximation ?

Ne nous soucions pas encore de tout ça, et testons cette formule sur mon ami le grand tonneau *Tony* ... Ses dimensions sont telles que $h = 0,378\ m$, $r = 0,305\ m$ et $R = 0,345\ m$. La formule nous donne un volume de $0,261261\ m^3$. On nous cite — toujours sans justification ! — également les formules suivantes :

- **FORMULE DES OCTROIS DE PARIS** :

$$\boxed{\text{Volume} = 2\pi h\left(\frac{1,68R+1,32r}{3}\right)^2}$$

qui ressemble fort à la formule des octrois, mais la présence des coefficients choisis ici n'est pas évidente à comprendre.
$\longrightarrow$ le volume de Tony est de $0,254583\ m^3$.

- **FORMULE DES 2 TRONCS DE CÔNE** :

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{2\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)}$$

où l'on considère le volume du tonneau comme celui de deux cônes tronqués identiques collés par leurs grandes bases.
$\longrightarrow$ le volume de Tony est de $0,251180\ m^3$.

- **FORMULE D'OUGHTRED** :

$$\boxed{\text{Volume} = \frac{2\pi h}{3}(2R^2+r^2)}$$

où l'on reprend la formule précédente en se disant que r et R sont presque égaux. C'est aussi la formule la plus malhonnête, puisqu'elle donne la plus grande estimation du volume parmi les formules présentées ici !
$\longrightarrow$ le volume de Tony est de $0,262106\ m^3$.

William OUGHTRED

W. OUGHTRED *naît le 5 mars 1574 à Eton en Angleterre et meurt dans ce même pays à Albury le 30 juin 1660. On lui doit notamment l'invention des symboles $\times$ pour la multiplication et :: (qui deviendra :) pour la division.*

- **LA FORMULE DE GUILMAIN :**

$$\boxed{\text{Volume} = 6,56\ R.r.h}$$

devait être peu utilisée, elle n'apparaît en effet que dans la référence [5].
⟶ le volume de Tony est de $0,260925\ m^3$.

- **LA FORMULE « ADÉQUATE » :**

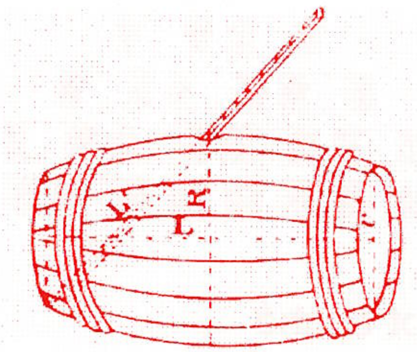
$$\boxed{\text{Volume} = \tfrac{2\pi h}{9}(5R^2 + 4r^2)}$$

citée comme la formule la plus appropriée à la forme ordinaire des tonneaux (sic).
⟶ le volume de Tony est de $0,255244\ m^3$.

- **LA FORMULE DE LA DOUANE :**

$$\boxed{\text{Volume} = 0,605D^3}$$

où D représente *la distance oblique de la bonde* [1] *à la partie inférieure du fond.* Une formule utilisée à l'époque par les douaniers, on en reste bouche bée !



Ici, le livre [1] précise qu'*en calculant d'avance les diverses valeurs du volume d'après les dimensions ordinaires des tonneaux les plus en usage, et en marquant ces valeurs sur une tige de fer, on peut déterminer directement la capacité du tonneau en y plongeant obliquement cette tige.*

De plus, il est clair que $D = \sqrt{(R+r)^2 + h^2}$ en vertu du théorème de notre grand ami Pythagore.
⟶ le volume de Tony est donc ici de $0,257200\ m^3$.

Si nous comparons les divers résultats obtenus pour le volume de Tony par ces formules, nous observons un écart maximum de $0,010926\ m^3$ entre les volumes donnés par les formules respectives d'Oughtred et des deux troncs de cônes, soit une différence de près de 11 litres ! C'est loin d'être négligeable ! La réputation d'un vendeur de vin devait à l'époque se fonder plutôt sur la formule qu'il employait pour calculer ses volumes de tonneaux que sur la qualité de son vin. Je vous laisse décider qui — des tonneliers ou des douaniers — trichait le plus ...

Les renseignements ci-dessus sont sidérants pour encore une autre raison : en effet, aucun de ces ouvrages, et presque aucune de ces formules ne semble se soucier de la *courbure du tonneau.*

... et sans ce renseignement, il n'y a pas moyen de connaître le volume exact de Tony !

---

(1) *La bonde est le trou du robinet, que l'on place généralement sur la bouge (au milieu du tonneau)*

Références

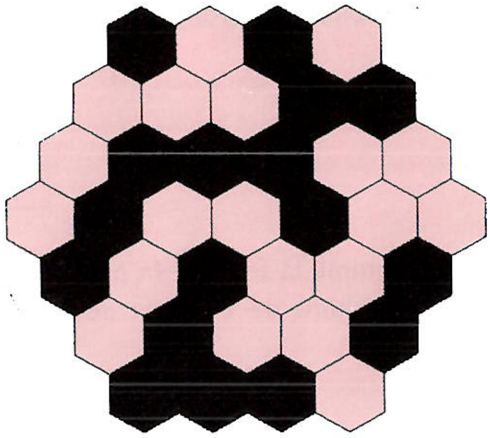
Voici une liste bibliographique présentée dans l'ordre chronologique, et elle est très loin d'être exhaustive !

1. *Éléments de géométrie pratique à l'usage des ouvriers et des élèves d'écoles industrielles*, G. De Vylder, Gand 1877.
2. *L'École n°9-10*, revue pédagogique, littéraire et scientifique, éd. Wesmael-Charlier, Namur 1899.
3. *Géométrie élémentaire des arts et métiers*, C. Vankerkove, éd. Wesmael, Namur 1913.
4. *Cours d'Arithmétique-Algèbre théorique et pratique*, E. Braconnier, Bruxelles 1922.
5. *Les Mathématiques de l'Ouvrier Moderne*, L. Vézo, éd. Dunod, Paris, 1933.
6. *Géométrie Industrielle*, A. Nachtergal, Librairie polytechnique C. Béranger, Paris, date exacte non précisée.
7. *Encyclopædia Britannica*, University of Chicago, USA 1992.
8. *Jeux 4 : De l'intérêt des problèmes de rallyes*, APMEP, Paris 1997.

Remarquons que les actuels ouvrages destinés aux écoles industrielles semblent avoir abandonné les jaugeages de tonneaux, sans doute agacés eux aussi ...

Solution des jeux

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

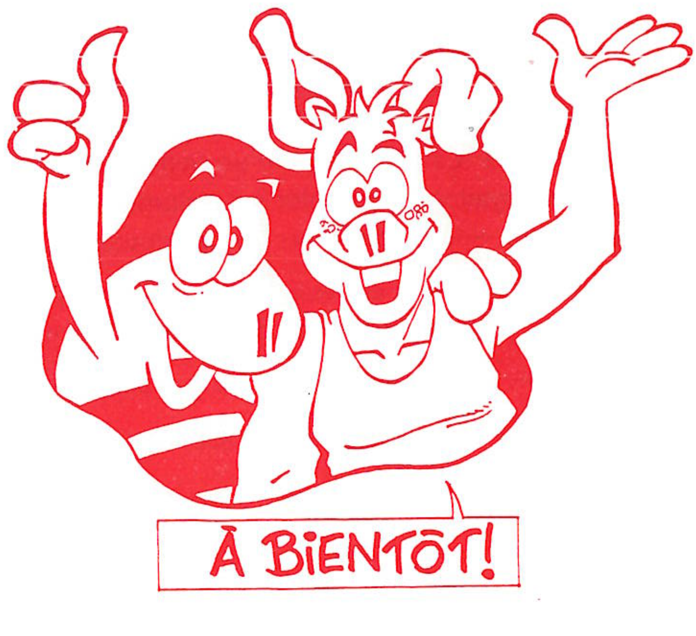


Le mur des nombres

				121				
			55		66			
		25		30		36		
	12		13		17		19	
4		8		5		12		7

Le mot caché

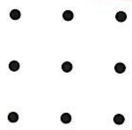
Le nom recherché est : **MAC LAURIN** (Colin, 1698–1746)



13^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques
1 / 4 de finale individuels

Début catégorie CM

1 - LES LONGUEURS (coefficient 1)
Combien de longueurs différentes existe-t-il entre les points du réseau ci-contre ?



2 - LE CODE DES TTP (coefficient 2)
Les enveloppes des lettres destinées à la ville dont le code postal est **0 2 1 0 0** portent la bande représentée ci-dessus.

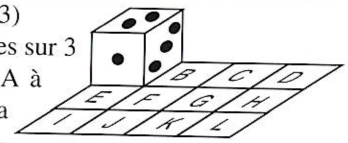
..IIII..IIII.I.III.II.II..IIII

Quel est le code postal de la ville pour laquelle la bande est la suivante :

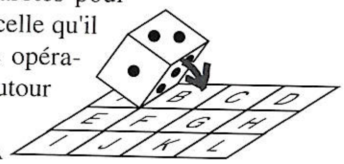
..IIII..IIII.II.II..IIII.I.III

Début catégorie C1

3 - LE DÉ VOYAGEUR (coef. 3)



Les 12 cases d'un damier de 4 cases sur 3 sont désignées par les lettres de A à L. On pose un dé "normal" sur la case A. On doit ensuite faire basculer le dé autour d'une de ses arêtes pour mener sur une case voisine de celle qu'il occupait, et on peut répéter cette opération en changeant ou non l'arête autour de laquelle le dé pivote.



On veut amener le dé de la case A à la case L en cinq mouvements. On choisit la position de départ du dé (elle peut être différente de celle représentée sur le dessin) et on additionne les nombres de points portés par les cases en contact avec le damier, de la première case (la case A) à la sixième case (la case L).
Quel est le plus grand total que l'on puisse obtenir ?
On rappelle que sur un dé "normal", deux cases opposées portent des nombres dont la somme vaut 7.

4 - LA CLASSE DE MATHILDE (coefficient 4)
Dans la classe de Mathilde, il y a deux groupes : les fans des "Moutarde Girls" et ceux des "3 C'est 4". Tout le monde appartient à l'un des deux groupes et personne n'appartient aux deux à la fois. Chacun des deux groupes compte un nombre impair membres (entre 10 et 20), et l'un des deux surpasse l'autre de quatre unités. Par ailleurs, dans la classe de Mathilde, il y a deux fois plus de filles que de garçons.
Combien y a-t-il de filles, Mathilde comprise, dans cette classe ?

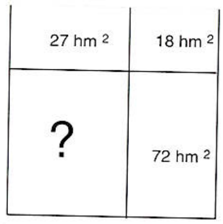
Début catégories C2 L1 L2 GP HC

5 - LES BILLES DE MATHIAS (coefficient 5)
Mathias a dans son sac 30 billes de trois couleurs. Il sait que s'il retire de son sac 25 billes choisies au hasard, il y aura parmi elles au moins 3 billes blanches, au moins 5 bleues et au moins 7 vertes.
Combien le sac de Mathias contient-il de billes bleues ?

6 - PETIT DÉJEUNER (coefficient 6)
Ce matin, pour le petit déjeuner, il y avait deux cruches identiques, l'une remplie de café et l'autre remplie de lait. Chaque membre de la famille s'est servi et a bu 125 millilitres de café au lait, après avoir fait le mélange selon les proportions qui lui conviennent.
Mathias s'est servi le premier. Il a bu le quart de la cruche de lait et le sixième de la cruche de café. Après que le dernier membre de la famille se soit servi, il restait moins de 125 ml dans le deux cruches réunies. **Combien de personnes, Mathias compris, compte cette famille ?**

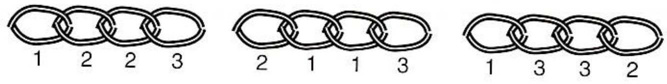
Fin catégorie CM

7 - LE TERRAIN DU PÈRE SIFFLEUR (coefficient 7)
Le Père Siffleur possède un terrain carré représenté ci-contre, dont le côté mesure un nombre entier d'hectomètres. Il décide de partager son terrain en quatre parcelles rectangulaires. Les trois premières parcelles ont des aires respectives de $18\ hm^2$, $27\ hm^2$ et $72\ hm^2$.



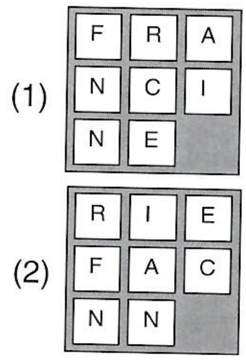
Quelle est l'aire de la quatrième parcelle ?

8 - LA CHAÎNE TRICOLORE (coefficient 8)



Francis a trouvé trois fragments de chaîne. Les chaînons sont de trois couleurs : bleus (notés 1), blancs (notés 2) et rouges (notés 3). Francis aimerait bien constituer une chaîne unique dans laquelle les chaînons seraient bleu, blanc, rouge, bleu, blanc, rouge, et ainsi de suite jusqu'au dernier chaînon rouge. Pour cela, il doit obligatoirement ouvrir et refermer quelques chaînons !
Sachant qu'il met 30 secondes pour ouvrir un chaînon et 30 secondes pour le refermer, quel est la durée minimale nécessaire pour constituer une chaîne tricolore de 12 chaînons ?

9 - LE POUSSE-POUSSE DE FRANCINE (coefficient 9)
Francine s'est fabriqué un petit pousse-pousse dans lequel elle a inscrit son nom (dessin n° 1). Une amie malicieuse s'est amusée à mélanger l'ordre des lettres en les faisant glisser un peu au hasard, mais sans les sortir de la boîte (dessin n° 2).



Francine demande en combien de coups au minimum il est possible de rétablir son nom.
Attention, un "coup" peut être le déplacement d'une ou de deux lettres dans une même direction, avec le pouce ! Ainsi, si on "descend" les lettres E et C, cela ne compte que pour un coup.

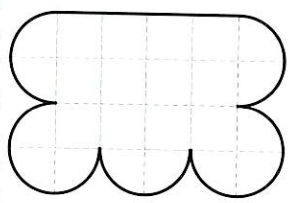
Fin catégorie C1

10 - CRYPTARITHME (coefficient 10)
Comme dans tout cryptarithme, deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents, et deux chiffres différents sont toujours représentés par deux lettres différentes. De plus, aucun nombre ne commence par un zéro.

$$\begin{array}{rcccc} & & J & E & U \\ + & & U & M & E \\ \hline = & F & F & J & M \end{array}$$

Trouvez le nombre de solutions et donnez-en deux.

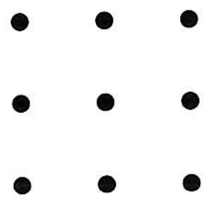
11 - LE CHAMP DES SIX REINES (coefficient 11)
Le vieil Ulysse possède un champ ayant la forme du dessin ci-contre. Il veut le partager entre ses 6 filles, qu'il se plaît à appeler ses petites reines. Chaque part doit avoir la même surface et la même forme à un retournement près.



Faites le partage du champ des six reines.

Fin catégorie C2

12 - LES QUADRILATÈRES (coefficient 12)
Combien de quadrilatères différents, non superposables, même avec retournement, peut-on tracer en utilisant quatre points du réseau ci-contre ?
note : Tous les types de quadrilatères, croisés ou non, sont envisagés à l'exception des quadrilatères aplatis.

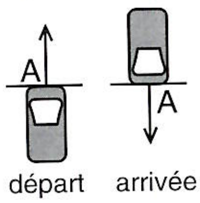


13 - LES DOMINOS (coefficient 13)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Deux joueurs, Bernard et Gilles, s'affrontent sur le tableau représenté ci-dessus. Le jeu consiste à déposer à tour de rôle un domino qui doit recouvrir exactement deux cases contiguës libres. Le premier joueur ne pouvant plus jouer est perdant.
Bernard commence, mais Gilles a, en contrepartie, le privilège de pouvoir limiter le nombre de cases du tableau, qui comptera un nombre de cases compris, au sens large, entre 2 et 11. **Quel nombre de cases doit choisir Gilles pour être sûr de gagner, quel que soit le jeu de son adversaire ?** Répondez 0 si vous pensez qu'il n'existe aucun choix gagnant pour Gilles.

14 - LE JOUET DE FRANCIS (coefficient 14)
Francis vient de recevoir pour son anniversaire un modèle réduit de voiture radiocommandé. Celui-ci ne peut se déplacer qu'en marche avant, soit en ligne droite, soit sur des arcs de cercle de rayon 63 cm. Francis essaie son nouveau jouet au milieu d'un immense parking désert. Sa voiture se trouve en A, orientée vers le Nord.

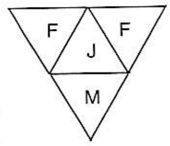


Quelle distance minimale Francis doit-il faire parcourir à son jouet pour qu'il se retrouve en A, orienté vers le Sud ?

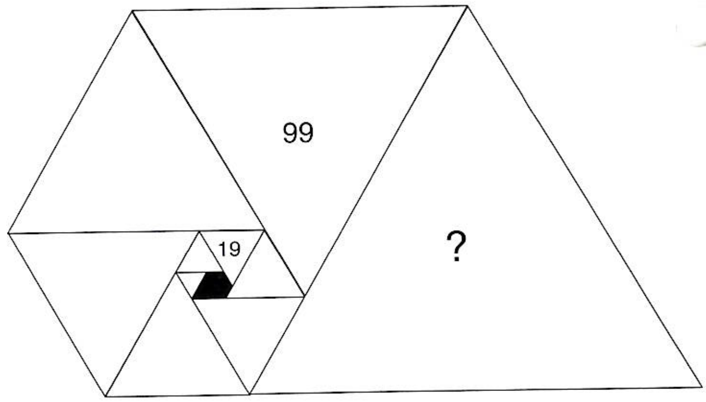
Fin catégories L1 GP

On prendra 22 / 7 pour π.

15 - LES DÉS DE LA FFJM (coefficient 15)
Quatre dés tétraédriques, parfaitement équilibrés, portent sur leurs faces les lettres F, F, J, M (un patron d'un des dés est représenté ci-contre). On lance quatre fois ces quatre dés.
Déterminez la probabilité pour que les quatre faces cachées indiquent au moins une fois F, F, J, M. On donnera la réponse sous forme d'une fraction irréductible.



16 - LE FOSSILE DE L'ANNÉE (coefficient 16)
Le fossile de l'année est composé de dix triangles équilatéraux disposés comme sur le dessin. Le côté de chaque triangle mesure un nombre entier de millimètres. Deux de ces triangles, signalés sur le dessin, ont des côtés mesurant respectivement 19 mm et 99 mm. **Donnez la mesure, exprimée en mm, du côté du plus grand triangle du fossile de l'année.**



Fin catégories L2 HC

Les **catégories** sont les suivantes :

- **CM**: Elèves de 4^e et 5^e année primaire
- **C1**: Elèves de 6^e primaire et de 1re secondaire
- **C2**: Elèves de 2^e et 3^e secondaire
- **L1**: Elèves de 4^e, 5^e et 6^e secondaire
- **L2**: Etudiants d'écoles supérieures et candidatures universitaires (2 premières années)
- **GP**: Grand Public (adultes)
- **HC**: Haute compétition (adultes)

Les différentes étapes :
Phase 1 :
les quarts de finale - octobre à fin janvier 1999

Epreuves individuelles
Elles sont diffusées par la presse associée au championnat : **MATH-JEUNES, LE SOIR, TANGENTE, LA CLASSE, HYPERCUBE, LA RECHERCHE.**
A ce stade de l'épreuve la participation est entièrement gratuite, et il n'est pas nécessaire de répondre correctement à toutes les questions pour espérer se qualifier.

Epreuves collectives dans les établissements scolaires
L'instituteur, le professeur de mathématique peut organiser une épreuve collective en classe. Il lui suffit de demander un dossier de participation comportant les explications, le questionnaire, les solutions.

BULLETIN REPONSE

à retourner **au plus tard le 31/1/99**
à FFJM – B.P. 157 – 7700 Mouscron
MATH-JEUNE

Report du total |_|_|_|_|

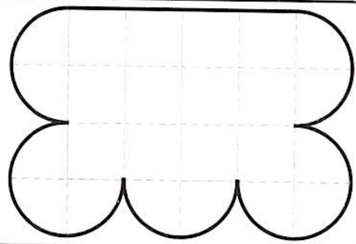
Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
.... Tel : ....

CATEGORIE (impératif) **CM** ☐ **C1** ☐ **C2** ☐ **L1** ☐ **GP** ☐ **L2** ☐ **HC** ☐
☐ Adhérent FFJM en 1998 : n° FFJM ....
☐ J'adhérent pour 1999 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C3), 450 F (L1), 500 F (L2), 650 F (GP et HC) au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP 157 – 7700 MOUSCRON

N° du Pb	Votre solution	Points (1-0)	Coef. (0 à 6)
	catégorie : CM		
1	nombre de longueurs différentes : |_|		
2	code postal : |_|_|_|_|_|		
	catégories : CM C1		
3	plus grand total : |_|_| points		
4	nombre de filles, y compris Mathilde : |_|_|		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	nombre de billes bleues : |_|_|		
6	nombre de personnes, y compris Mathias : |_|		
	TOTAL		

BULLETIN REPONSE

(toutes catégories sauf CM - **Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !**)

N° du Pb	Nbre de solutions	Votre ou vos solutions		Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
	catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC				
7	**1 solution**	aire de la 4 e parcelle : |_|_|_| hm²			
8	**1 solution**	durée minimale : |_|_|_| min			
9	**1 solution**	n^{bre} minimum de coups : |_|_|_|			
10	**.... solution(s)**	1) _ _ _ + _ _ _ = _ _ _ _	2) _ _ _ + _ _ _ = _ _ _ _		
11	**1 solution demandée**	repassez au feutre épais le contour des six parcelles 			
12	**1 solution**				
13	**.... solution(s)**	1) .... cases	2) .... cases		
14	**1 solution**	distance mini : .... cm			
	catégories : L2 HC				
15	**1 solution**				
16	**.... solution(s)**	1) .... mm	2) .... mm		
			TOTAL		