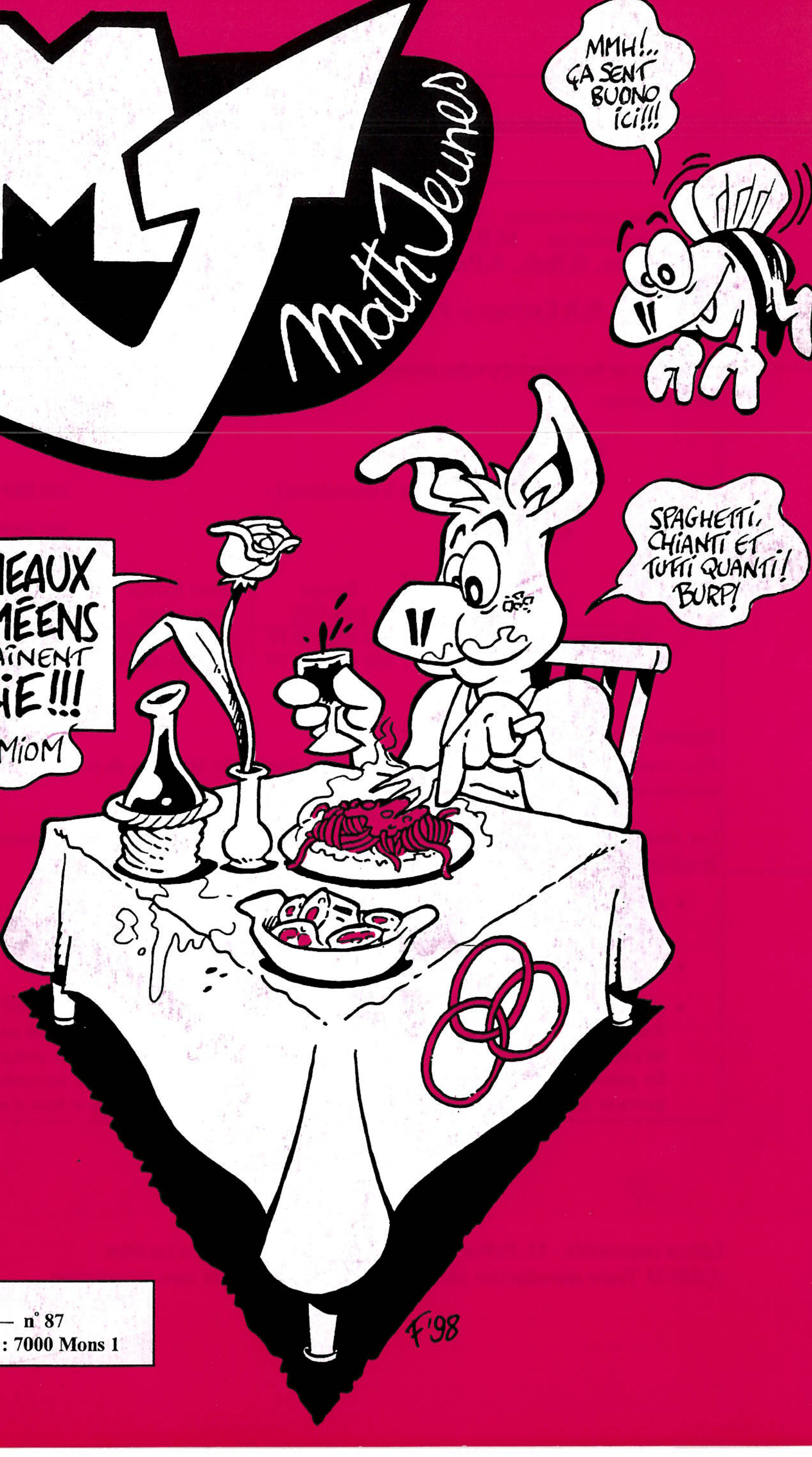
MathJeunes

MIAM

# LES ANNEAUX BORROMÉENS NOUS ENTRAÎNENT EN ITALIE !!!

MIOM




20e année
Décembre 1998 — n° 87
Bureau de dépôt : 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

*Rédaction, administration :* Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.
*Comité de Rédaction :* M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, B. Honclaire, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, F.Pourbaix, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers
*Illustrations :* R.A.Cattaux et F.Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

*Abonnements :*

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

| | CEE | Europe hors CEE | Hors Europe non priorit. | Hors Europe prioritaire |
|---|---|---|---|---|
| • Groupés | 200 BEF/34 FF | 240 BEF/40 FF | 260 BEF/44 FF | 450 BEF/75 FF |
| • Isolés | 370 BEF/62 FF | 450 BEF/75 FF | 500 BEF/84 FF | 950 BEF/160 FF |

*Anciens numéros :*

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

°87 Vingtième année 1999

# Math-Jeunes

*Math-Jeunes n° 87, 26–29, 1999*


N. Hervé aidé de G. Noël et F. Pourbaix,
*Université de Mons*

*Nous avons oublié de le préciser dans le numéro 86 de* Math-Jeunes, *mais ce deuxième article sur les tonneaux fait suite au premier.*
*Et il sera suivi d'un troisième ...*

*La Rédaction.*

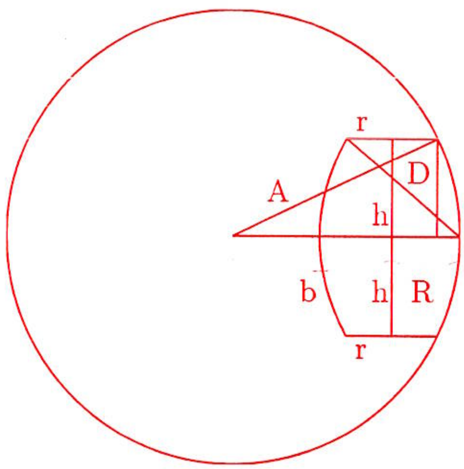
# 2. Le vin nous rend complètement ronds

tonneau a une courbure sphérique, dire qu'en approximant, retombe pas sur les formules ci-dessus

Bien entendu, on peut *tenter* de trouver une formule exacte du volume. Pour ce faire, il nous faut *deviner* la courbure du tonneau, puisque nul tonnelier et nul antique bouquin ne veut nous la donner. L'ouvrage [6] de A. **Nachtergal** est le seul à avoir l'honnêteté d'avouer clairement cette lacune :

> *On pourrait considérer le tonneau comme deux troncs de cônes accolés par la grande base. Le volume ainsi trouvé ne tient pas compte du bombement des douves.*

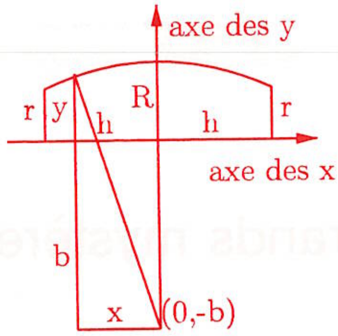
Supposons que la courbure soit celle d'un cercle (très légitime, comme idée, non ?). On suppose également — c'est ce qui semble le plus réaliste — que le rayon du cercle est plus grand que $R$ (le rayon de la bouge). Dessinons une vue latérale d'une moitié de tonneau.



On peut alors se lancer dans des calculs. Le théorème de ce bon vieux Pythagore (encore lui !) nous dit :

$$(r+b)^2+h^2=(R+b)^2 \text{ donc } b=\frac{r^2+h^2-R^2}{2(R-r)}$$

Pour nous simplifier la vie, on peut poser $A = R + b$, où $A$ est le rayon de notre cercle. Aucun sommelier n'y verra d'inconvénient.
Ainsi, $A$ vaut $\frac{R^2+r^2+h^2-2rR}{2(R-r)}$
Plaçons à présent des axes de la manière suivante :




Toujours grâce à Pythagore (décidément, il s'accroche !), on écrit l'équation du cercle :

$$x^2+(y+b)^2=A^2 \text{ donc } y=\sqrt{A^2-x^2}-b$$

Et on peut maintenant s'amuser à calculer le volume d'un tonneau. Haaaa ! Que ceux qui n'ont jamais utilisé d'intégrale me pardonnent ... et passent directement au résultat.

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= 2\int_0^h \pi y^2 dx \\
&= 2\pi\int_0^h (A^2-x^2-2b\sqrt{A^2-x^2}+b^2)dx \\
&= 2\pi\left[A^2x-\frac{x^3}{3}+b^2x\right]_{x=0}^{x=h} - 4\pi b\int_0^h \sqrt{A^2-x^2}dx \\
&= 2\pi((A^2+b^2)h-\frac{h^3}{3}) - 4\pi b(\frac{1}{2}h\sqrt{A^2-h^2}+\frac{1}{2}A^2\arcsin\frac{h}{A}) \\
&= 2\pi((A^2+b^2)h-\frac{h^3}{3}-bh\sqrt{A^2-h^2}-bA^2\arcsin\frac{h}{A})
\end{aligned}$$

Pfiouuu ! Pauvre Tony, quelle formule épouvantable ! Elle nous donne un volume « exact » de $0,261692$ qui est loin de celui donné par la formule « adéquate » (on est donc en droit de penser que la courbure du tonneau ordinaire n'est pas celle d'un cercle !).

Remarquons que la formule ci-dessus a quand même un aspect rassurant ... Je choisis tout d'abord les données de telle façon que mon tonneau soit une sphère, c'est-à-dire que je prends $r = 0$ et

$b = 0$. J'ai alors $R = A = h$, et si j'applique mon horrible formule, je trouve :

$$\text{Volume de la sphère} = 2\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Et là, je retombe sur ce que j'ai appris à l'école primaire ! Ouf !

Mais bon sang de bon soir, je ne trouve pas le moyen d'approximer cette formule (développement en série ...) de façon à retrouver les formules utilisées par les tonneliers ! C'est très agaçant !

Je laisse à votre appréciation l'extrait suivant de la référence [3] :

> *S'il faut mesurer approximativement la quantité de liquide restant dans un tonneau, on évalue le plus petit des deux volumes, le vide ou le plein. Il est équivalent au produit de la longueur intérieure par la surface d'un cercle qui aurait pour rayon les $\frac{3}{4}$ de la hauteur $H$ prise sur le diamètre, à la bonde.*

$$\boxed{V_{p.\ ouv.} = 2h\pi(\tfrac{3}{4}H)^2}$$

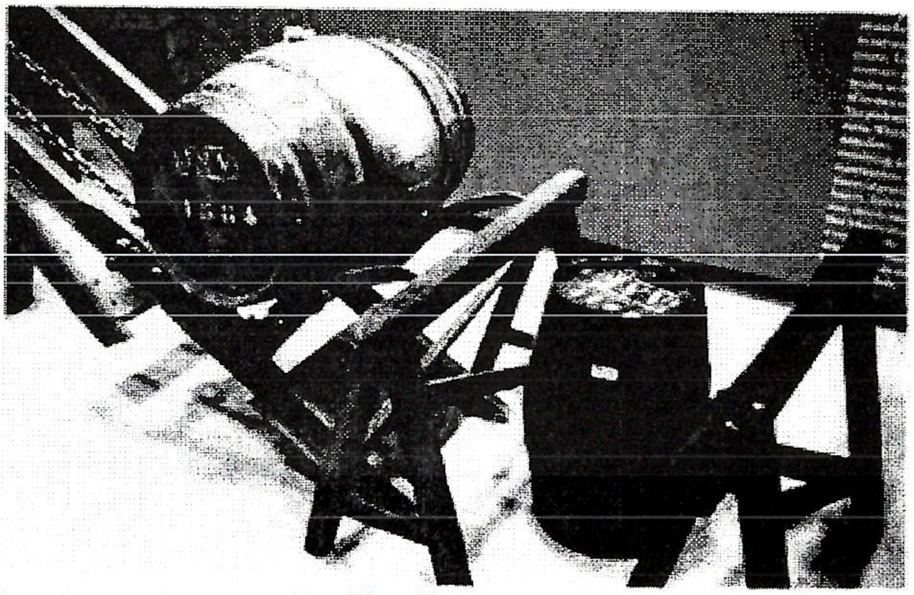
Ne me demandez pas ce que peut bien être cette hauteur $H$ ! D'après l'ouvrage de référence, $H$ semble différent de $2R$ ...

# 3. L'un des plus grands mystères de l'Univers

La courbure des tonneaux a donc peu de chance d'être donnée par celle d'un cercle. But wait a minute, on pourrait penser que l'*Encyclopædia Britannica* ([7]) puisse nous aider, qu'elle nous fasse enfin connaître la véritable courbure du tonneau, et nous permette de calculer son volume ! Mais c'est là que le désespoir nous étreint le plus ...

En effet, on apprend dans l'article *ad hoc* de l'encyclopédie que c'est probablement la forme traditionnelle des tonneaux qui est à l'origine de la définition d'une unité de mesure de la quantité de vin : le *wine barrel* (correspondant à 126 *quarts*, 31.5 *gallons* ou encore 119.24 litres) communément utilisé jusqu'au début du 20e siècle.

Une émission de la radio FRANCE CULTURE captée par hasard m'a permis d'apprendre que c'est sans trop de doutes le peuple Celte qui — il y a plus de deux mille ans — a fabriqué les premiers récipients en forme de tonneau.



*Une photo prise au pavillon* VINI PORTUGAL *lors de l'Expo'98 (exposition universelle de Lisbonne).*

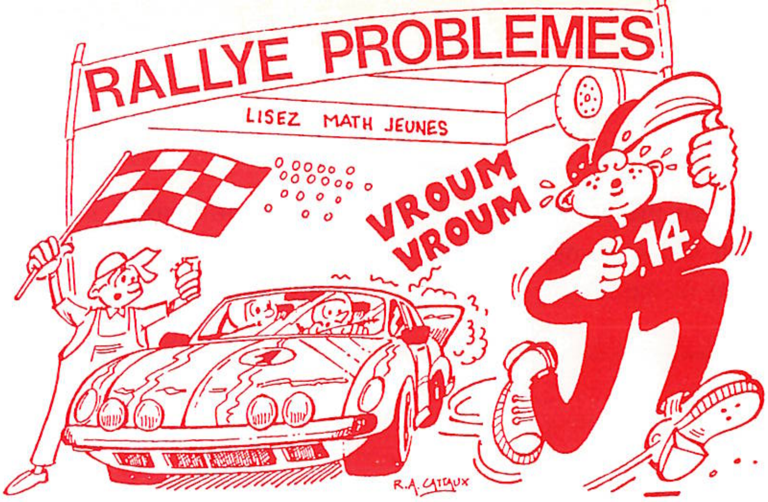
On tourne donc en rond dans un mystère insondable comme une mer de vin rouge ... Alors, la courbure du tonneau est-elle celle d'un morceau de parabole ? D'une branche d'hyperbole ? Ou encore autre chose ? Je sens le regard ironique des tonneliers d'antan se poser sur ma profonde ignorance ... Et ça m'agace !!!

# Références

Voici une liste bibliographique présentée dans l'ordre chronologique, et elle est très loin d'être exhaustive !


1. *Éléments de géométrie pratique à l'usage des ouvriers et des élèves d'écoles industrielles*, G. De Vylder, Gand 1877.
2. *L'École n°9-10*, revue pédagogique, littéraire et scientifique, éd. Wesmael-Charlier, Namur 1899.
3. *Géométrie élémentaire des arts et métiers*, C. Vankerkove, éd. Wesmael, Namur 1913.
4. *Cours d'Arithmétique-Algèbre théorique et pratique*, E. Braconnier, Bruxelles 1922.
5. *Les Mathématiques de l'Ouvrier Moderne*, L. Vézo, éd. Dunod, Paris, 1933.
6. *Géométrie Industrielle*, A. Nachtergal, Librairie polytechnique C. Béranger, Paris, date exacte non précisée.
7. *Encyclopædia Britannica*, University of Chicago, USA 1992.
8. *Jeux 4 : De l'intérêt des problèmes de rallyes*, APMEP, Paris 1997.


*Remarquons que les actuels ouvrages destinés aux écoles industrielles semblent avoir abandonné les jaugeages de tonneaux, sans doute agacés eux aussi ...*




*Math-Jeunes n°87, 30–35, 1999*

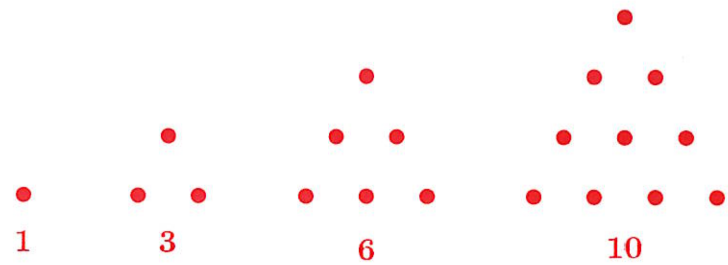
C. Festraets

Voici les six problèmes suivants de ce rallye 1998-1999 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de *Math-Jeunes* et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 26 février 1999.

7. (a) On a mélangé les trois clés des serrures de trois attachés-cases. Quel est le nombre maximum d'essais qu'il faut effectuer pour retrouver quelle clé correspond à quelle serrure ?
(b) Et s'il y avait quatre clés et quatre serrures ? Expliquez comment vous avez procédé.
(c) Et s'il y avait $n$ clés et $n$ serrures ? Pouvez-vous donner une formule générale ?

8. Les quatre premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10 :




(a) Quel est le nombre triangulaire suivant ? Quel est le centième nombre triangulaire ?
(b) Les trois premiers nombres hexagonaux sont 1, 7, 19 . Quel est le suivant ? Quel est le centième nombre hexagonal ?

9. On considère un échiquier 9 cm $\times$ 9 cm partagé en 81 cases. On place des jetons aux centres des cases en respectant une seule règle : les centres de deux jetons différents doivent être distants de plus de 2 cm.
(a) Combien de jetons parvenez-vous à placer ? 15, 16, 17 ? Faire un dessin montrant le résultat auquel vous êtes parvenu.
(b) Démontrer qu'il est impossible de placer plus de 17 jetons sur l'échiquier.

10. (a) 5 enfants se partagent 9 bâtons de chocolat. Le partage doit être équitable : chaque enfant doit avoir la même quantité de chocolat. Mais le partage doit obéir à la règle suivante : chacun des bâtons peut être cassé au maximum une fois. Comment est-ce possible ? On suppose que

l'on peut mesurer avec précision de bâton et casser celui-ci à l'endroit voulu !
(b) Quels sont les nombres possibles d'enfants pour que le partage des 9 bâtons puisse se faire équitablement ?
(c) S'il y a $n$ enfants et $m$ bâtons de chocolat, à quelles conditions $n$ doit-il satisfaire pour que le partage soit possible ?

**11.** (a) Calculer

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}} = \quad ?$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}}} = \quad ?$$

(b) À votre avis, que vaut

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\ddots+\frac{1}{1999}}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\ddots+\frac{1}{1999}}}}}} \quad ?$$

**12.** (a) Combien y a-t-il de nombres entiers entre 1 et $10^{30}$ qui ne sont pas des carrés parfaits ?
(b) Combien y a-t-il de nombres entiers entre 1 et $10^{30}$ qui ne sont pas des cubes parfaits ?
(c) Combien y a-t-il de nombres entiers entre 1 et $10^{30}$ qui ne sont ni des carrés, ni des cubes parfaits ?

## Solution du problème 1

Remarquons que les deux dernières déclarations sont contradictoires : si l'une est vraie, alors l'autre est fausse ; si Daniel est coupable, alors Charles ne ment pas et si Daniel n'est pas coupable, alors Charles ment.
(a) Si une seule des déclarations est vraie, les trois autres sont fausses. Si la déclaration de Charles est vraie, on a :

Charles n'a pas commis le crime ;
Bernard est coupable ;
Daniel est coupable ;
Charles ne ment pas lorsqu'il dit que Daniel est coupable.

Ce qui est impossible, on aurait deux coupables.
Si la déclaration de Daniel est vraie, on a :

Charles n'a pas commis le crime ;
Bernard est coupable ;

Daniel n'est pas coupable ;
Charles ment lorsqu'il dit que Daniel est coupable.

Le coupable est donc Bernard.

(b) Si une seule des déclarations est fausse, les trois autres sont vraies. La déclaration d'André doit donc être vraie et c'est Charles qui a commis le crime. On le vérifie lorsque la seule déclaration fausse est celle de Charles :

Charles a commis le crime ;
Bernard n'est pas coupable ;
Daniel n'est pas coupable ;
Charles ment lorsqu'il dit que Daniel est coupable.

## Solution du problème 2

Anne et Béatrice ont deux enfants chacune. Désignons par $a$, $b$ les âges des enfants de l'une d'elles et par $x$, $y$ les âges des enfants de l'autre. Nous avons trois relations :

$$\begin{aligned} a+b &= 11 \qquad (1) \\ x+y &= 16 \qquad (2) \\ ab &= xy \qquad (3) \end{aligned}$$

Si $x$ désigne l'âge du fils d'Anne et $a$ celui de la fille de Béatrice, alors $x-a=5$ et en soustrayant membre à membre les égalités (2) et (1), il vient

$$\begin{aligned} x-a+y-b &= 16-11 \\ 5+y-b &= 5 \\ y &= b \end{aligned}$$

Or on sait que $xy=ab$, d'où $x=a$, ce qui n'est pas possible puisque $x-a=5$. Choisissons alors $a$ pour l'âge du fils d'Anne et $x$ pour celui de la fille de Béatrice, et en soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient

$$\begin{aligned} a-x+b-y &= -5 \\ 5+b-y &= -5 \\ y-b &= 10 \end{aligned}$$

Multiplions les égalités $x=a-5$ et $y=b+10$ :

$$xy = ab+10a-5b-50$$

Or on sait que $xy=ab$, d'où et en simplifiant, on obtient

$$2a-b-10=0$$

Le système

$$\begin{aligned} a+b &= 11 \\ 2a-b &= 10 \end{aligned}$$

admet une solution, d'où les enfants d'Anne ont 4 et 7 ans et ceux de Béatrice 2 et 14 ans.

## Solution du problème 3

Si le joueur gagne, il reçoit la moitié de ce qu'il avait dans sa poche, son avoir initial est donc multiplié par $\frac{3}{2}$, tandis que s'il perd, il donne à son ami la moitié de ce qu'il a dans sa poche, et son avoir initial est multiplié par $\frac{1}{2}$.

(a) Avec 10 000 BEF au départ, en gagnant deux fois et en perdant deux fois, il lui reste

$$\begin{aligned} 10\,000 \text{ BEF } \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} &= \frac{90\,000 \text{ BEF}}{16} \\ &= 5\,625 \text{ BEF} \end{aligned}$$

(b) Avec $s$ BEF au départ, en gagnant $n$ fois et en perdant $n$ fois, il lui reste

$$s \text{ BEF } \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = s \text{ BEF } \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Après deux parties, il n'a plus que les $\frac{3}{4}$ de son avoir initial, après 4 parties, les $\frac{9}{16}$, après 6 parties, les $\frac{27}{64}$, ... et il est clair qu'il est toujours perdant à ce jeu.

## Solution du problème 4

ENTRE est le carré de TOC. Le carré d'un nombre entier a comme chiffre des unités 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 car

$$\begin{array}{rclcrcl} 0^2 &=& 0 & \qquad & 1^2 &=& 1 \\ 2^2 &=& 4 && 3^2 &=& 9 \\ 4^2 &=& 16 && 5^2 &=& 25 \\ 6^2 &=& 36 && 7^2 &=& 49 \\ 8^2 &=& 64 && 9^2 &=& 81 \end{array}$$

C = 0 est à éliminer, sinon E = 0 et ENTRE n'est pas un nombre de 5 chiffres. Les seules possibilités pour ENTRE sont

1NTR1, 4NTR4, 5NTR5, 6NTR6, 9NTR9

Si E = 1, alors ENTRE est compris entre 12 341 et 19 871 et TOC (racine carrée de ENTRE) est compris entre 112 et 140. Le T ne peut valoir que 1, ce qui n'est pas possible car T et E ne peuvent avoir la même valeur.

Si E = 4, alors ENTRE est compris entre 41 234 et 49 874 et TOC est compris entre 204 et 223. T vaut donc 2 et la seule valeur possible pour C est 8 (les carrés de 2 et de 8 sont les seuls qui se terminent par 4, mais C $\neq$ T). TOC peut donc être égal à 208 ou à 218 et ENTRE est de la forme 4N2R4.

$$\begin{aligned} 208 \times 208 &= 43\,264 \\ 218 \times 218 &= 47\,524 \end{aligned}$$

La première égalité convient, la deuxième ne convient pas.

Si E = 5, alors ENTRE est compris entre 51 235 et 59 875 et TOC est compris entre 227 et 244. T vaut 2, C vaut 5 et TOC est égal à 235, mais $235 \times 235 = 55\,225$, ce qui ne convient pas.

Si E = 6, alors ENTRE est compris entre 61 236 et 69 876 et TOC est compris entre 248 et 264. T vaut 2, C vaut 4. Comme O ne peut être égal à 6 (E = 6), la seule valeur possible pour TOC est 254, mais $254 \times 254 = 64\,516$ ne convient pas, car T doit valoir 2 et pas 5.

Si E = 9, alors ENTRE est compris entre 91 239 et 98 769 et TOC est compris entre 303 et 314. T vaut 3 et C vaut 7 (C ne peut valoir 3 car T = 3). La seule valeur possible pour TOC est 307 mais $307 \times 307 = 94\,249$, ce qui ne convient pas.

Le problème n'admet qu'une seule solution : TOC = 208 et ENTRE = 43 264.

## Solution du problème 5

(a) L'égalité suivante est $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 9^2$.
Observons que la somme comporte 9 termes, que celui du milieu est 9, que le premier terme 5 est égal à $1 \times 4 + 1$, que le terme central 9 est égal à $2 \times 4 + 1$ et que le dernier terme 13 est égal à $3 \times 4 + 1$.

(b) Un nombre naturel impair s'écrit $2n + 1$. La somme va comporter $2n + 1$ termes, le premier sera $n + 1$, celui du milieu $2n + 1$ et le dernier $3n + 1$. L'égalité générale est donc

$$(n+1) + (n+2) + \cdots + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + (3n+1) = (2n+1)^2$$

(c) Il y a plusieurs façons de démontrer cette égalité. Si on connaît la formule donnant la somme de $x$ nombres entiers consécutifs

$$(a+1) + (a+2) + (a+3) + \cdots + (a+x) = \frac{1}{2}x[(a+1) + (a+x)]$$

On peut l'appliquer ici et on obtient

$$\begin{aligned}(n+1) + (n+2) + \cdots + (3n+1) &= \frac{1}{2}(2n+1)[(n+1) + (3n+1)] \\ &= \frac{1}{2}(2n+1)(4n+2) \\ &= (2n+1)^2\end{aligned}$$

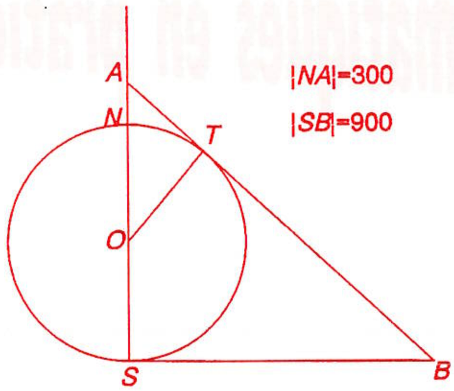
Sinon, écrivons la somme $S$ de gauche à droite, puis de droite à gauche et additionnons les deux égalités

$$\begin{array}{rcccccccccc} S &=& (n+1) &+& (n+2) &+& \cdots &+& 3n &+& (3n+1) \\ S &=& (3n+1) &+& 3n &+& \cdots &+& (n+2) &+& (n+1) \\ 2S &=& (4n+2) &+& (4n+2) &+& \cdots &+& (4n+2) &+& (4n+2) \end{array}$$

Dans la somme $2S$, il y a $2n + 1$ termes tous égaux à $4n + 2$, d'où $2S = (2n+1)(4n+2)$ et

$$S = \frac{1}{2}(2n+1)(4n+2) = (2n+1)^2$$

## Solution du problème 6




De $B$, situé à 900 m à l'est de la porte $S$, on commence à apercevoir l'arbre situé en $A$, donc $BA$ est tangente en $T$ à la muraille circulaire.

$$|BT| = |BS| = 900$$

Posons $|AT| = x$ et $|ON| = |OS| = |OT| = R$.
Dans le triangle rectangle $ASB$ :

$$(300 + 2R)^2 + 900^2 = (900 + x)^2 \qquad (1)$$

La puissance du point $A$ par rapport au cercle est

$$|AT|^2 = |AN| \cdot |AS|$$

d'où

$$x^2 = 300 \cdot (300 + 2R) \qquad (2)$$

Éliminons $300 + 2R$ entre les égalités (1) et (2) :

$$\begin{aligned} 300 + 2R &= \frac{x^2}{300} \\ \left(\frac{x^2}{300}\right)^2 + 900^2 &= (900 + x)^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons une équation qui ne contient plus que la seule inconnue $x$ ; résolvons-la.

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{300^2} + 900^2 &= 900^2 + 1\,800x + x^2 \\ \frac{x^4}{300^2} &= 1\,800x + x^2 \\ \frac{x^3}{300^2} - x &= 1\,800 \\ x\left(\frac{x^2}{300^2} - 1\right) &= 1\,800 \\ x\left(\frac{x}{300} + 1\right)\left(\frac{x}{300} - 1\right) &= 1\,800 \\ \frac{x}{100}\left(\frac{x}{100} + 3\right)\left(\frac{x}{100} - 3\right) &= 162 = 6 \times 9 \times 3 \end{aligned}$$

De là, $\dfrac{x}{100} = 6$, $x = 600$ et $2R = \dfrac{600^2}{300} - 300 = 900$.
Le diamètre de la muraille est donc de 900 mètres.

 *Math-Jeunes n° 87, 36–37, 1999*

# Logiciels mathématiques en pratique

**En math, j'avais atteint mes limites.**
**À tel point que le prof me prenait pour un gros zéro.**
**Avec DERIVE, je ne suis plus sur la tangente,**
**Plus d'erreur de calcul !**
**Maintenant, je pense, donc je suis.**
**Donnez-moi des cartes, SVP !**

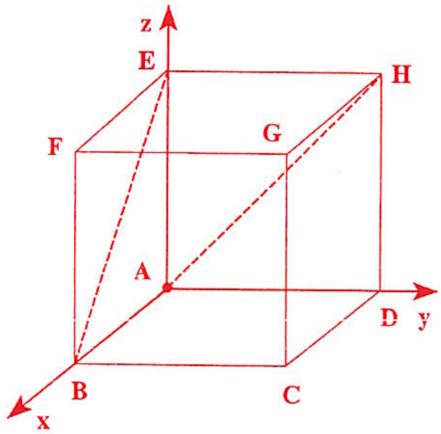
C. Van Hooste

Cher lecteur, à l'aide du programme DERIVE comme outil de calcul, nous allons résoudre le problème de géométrie de l'espace que voici :

> Dans un cube, déterminer la distance entre deux diagonales non coplanaires de deux faces adjacentes.

Ainsi que tu le sais, le logiciel permet d'introduire des commentaires dans une séquence de calculs (il suffit pour cela de commencer et de terminer la ligne contenant du texte pour des guillemets). Mais cette fois-ci, par paresse, je ne les ai pas tous écrits ; à toi de les y ajouter de manière judicieuse.

Avant de démarrer, nous devons choisir un repère orthonormé en relation avec le cube. Par exemple, poser l'origine sur un des sommets du cube et les axes de coordonnées sur les trois arêtes qui partent de ce sommet (voir la figure ci-contre).




La distance à déterminer peut être calculée entre les diagonales non coplanaires $AH$ et $BE$.

Voici donc la suite des expressions à introduire dans DERIVE.

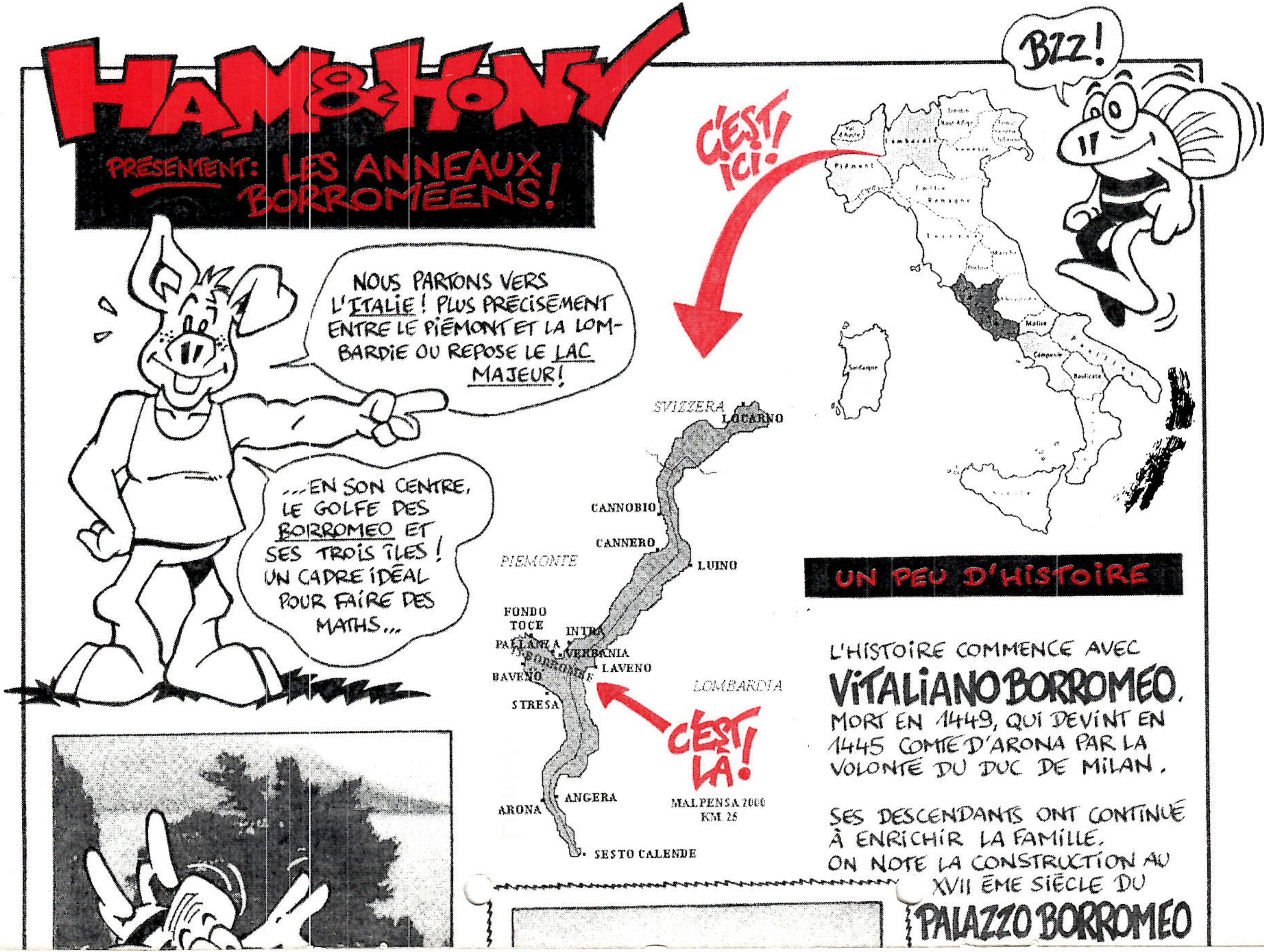
| | | |
|---|---|---|
| #1 | "Distance entre 2 diagonales non coplanaires de faces adjacentes d'un cube" | Utilisateur |
| #2 | "Coordonnées des sommets impliqués" | Utilisateur |
| #3 | $A := [0,0,0]$ | Utilisateur |
| #4 | $B := [1,0,0]$ | Utilisateur |
| #5 | $E := [0,0,1]$ | Utilisateur |
| #6 | $H := [0,1,1]$ | Utilisateur |
| #7 | "..." | Utilisateur |
| #8 | $P := A + k(H - A)$ | Utilisateur |
| #9 | "..." | Utilisateur |
| #10 | $Q := E + \ell(B - E)$ | Utilisateur |
| #11 | "..." | Utilisateur |
| #12 | $[(P-Q)(A-H) = 0, (P-Q)(B-E) = 0]$ | Utilisateur |
| #13 | "..." | Utilisateur |
| #14 | $[k = \frac{1}{3}, \ell = \frac{1}{3}]$ | Résout(#12) |
| #15 | $k := \frac{1}{3}$ | Utilisateur |
| #16 | $\ell := \frac{1}{3}$ | Utilisateur |
| #17 | "..." | Utilisateur |
| #18 | $\sqrt{((P-Q)^2)}$ | Utilisateur |
| #19 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | Simp(#18) |

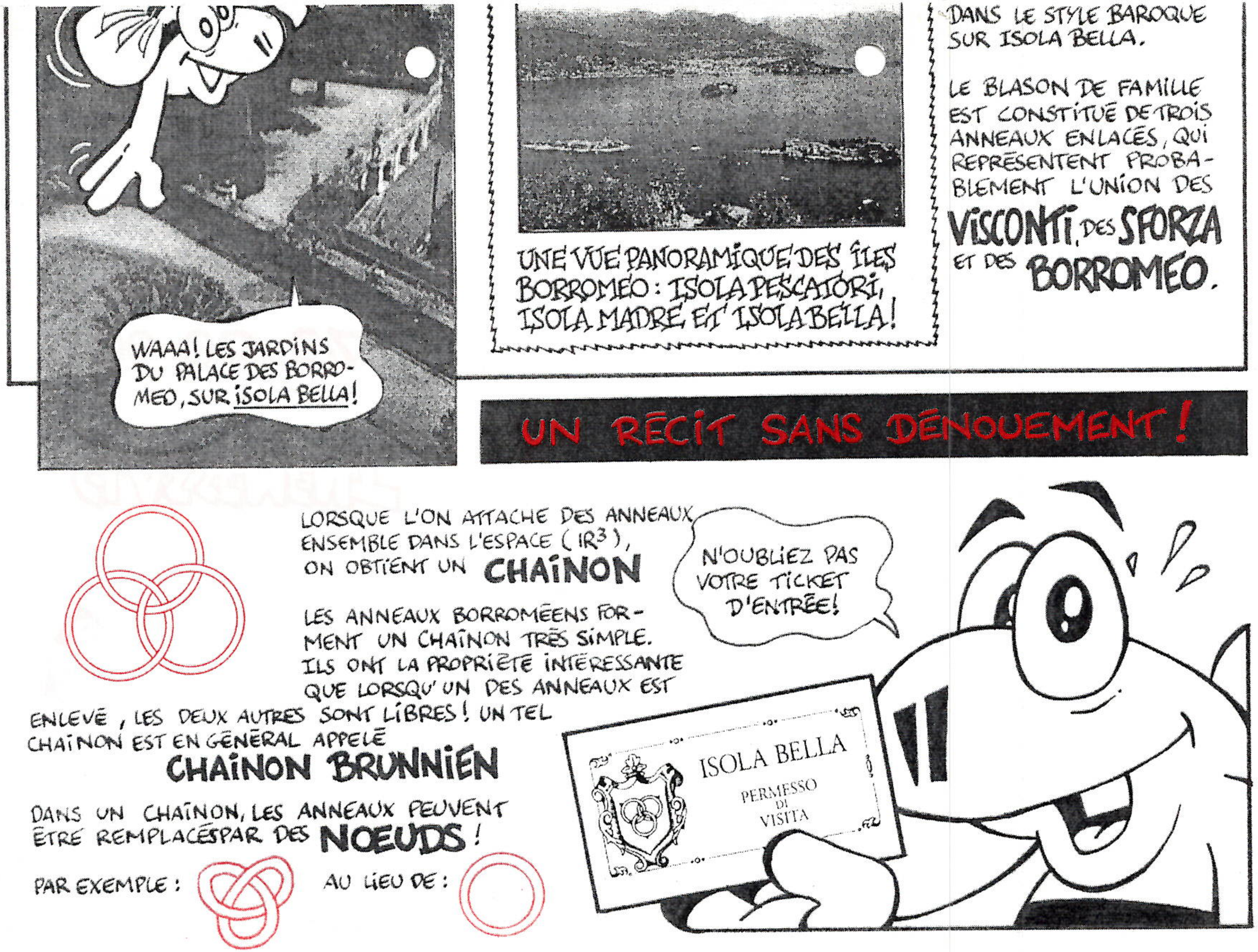
La distance demandée est donc égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans un cube d'arête 1 ; bien sûr, il y a lieu de multiplier ce nombre par la longueur de l'arête du cube si celle-ci n'est pas égale à 1.

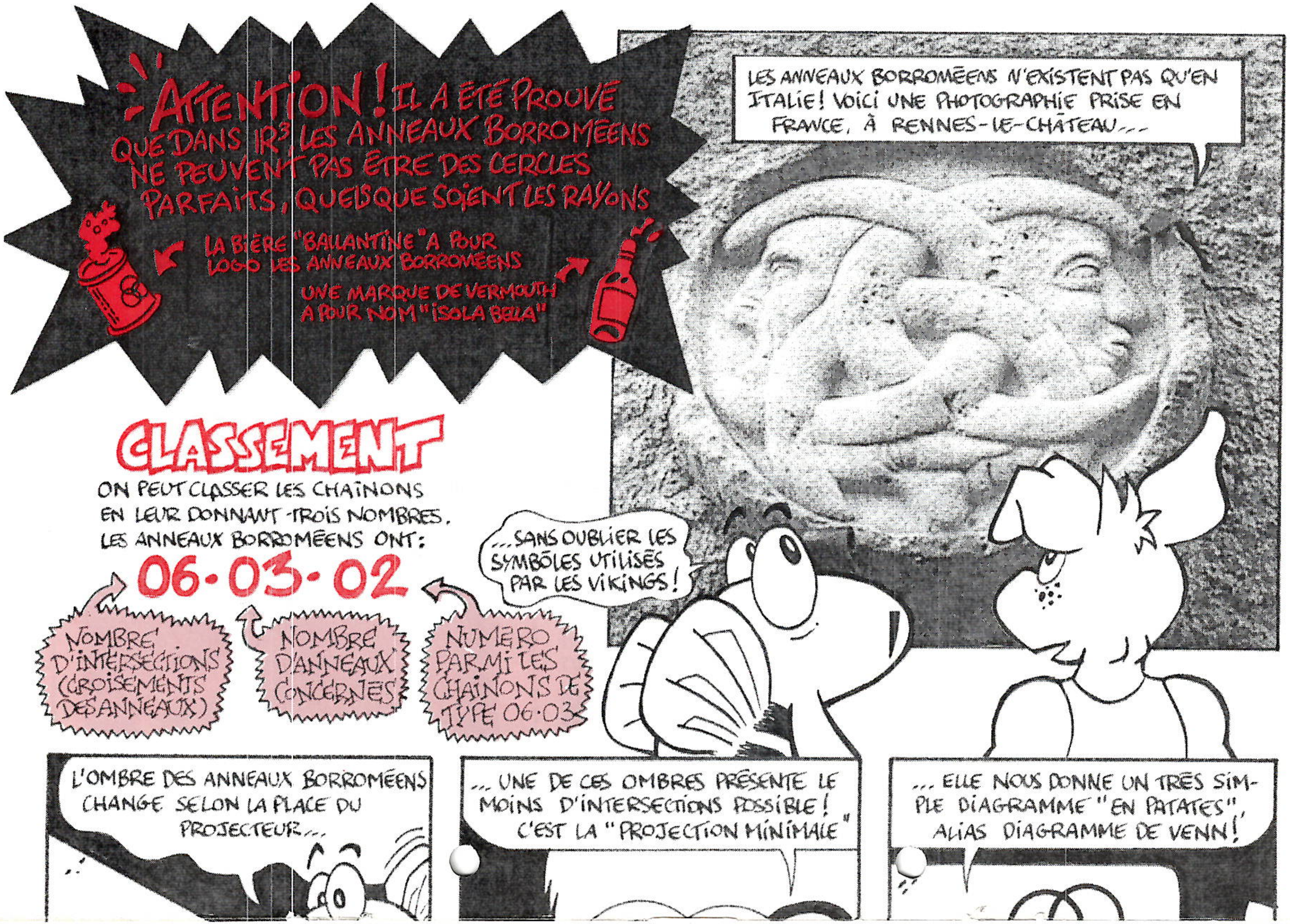
## Liste des commentaires à ajouter

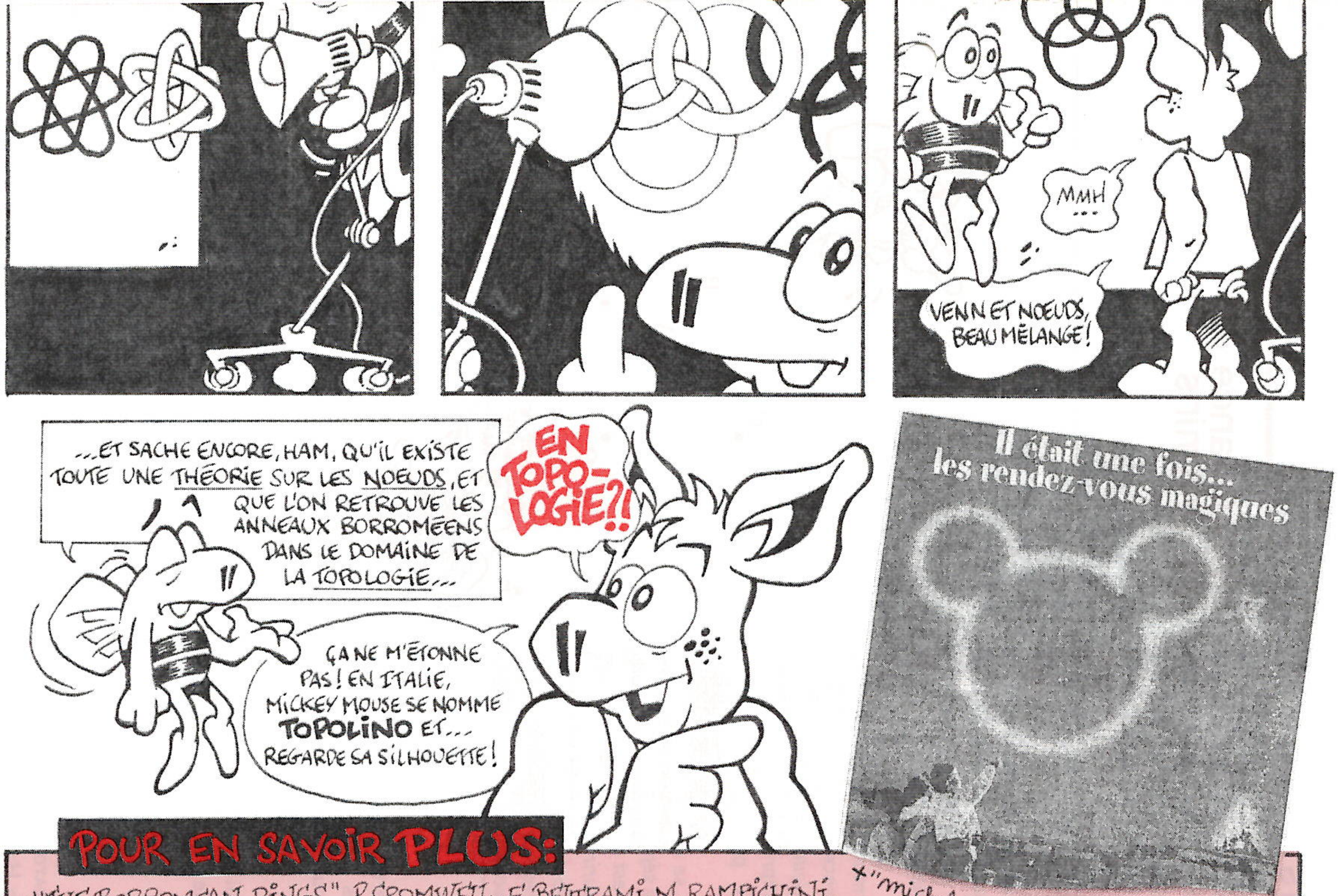
#7 "Équation vectorielle de la droite $AH$"
#9 "Équation vectorielle de la droite $BE$"
#11 "Système d'inconnues $k$ et $\ell$ exprimant que $PQ$ doit être orthogonale à $AH$ et à $BE$"
#13 "Solution du système"
#17 "Calcul de la distance $|PQ|$"

Math-Jeunes n°87, 38–41, 1999




WAAA! LES JARDINS DU PALACE DES BORROMEO, SUR ISOLA BELLA!
UNE VUE PANORAMIQUE DES ÎLES BORROMEO : ISOLA PESCATORI, ISOLA MADRE ET ISOLA BELLA!
DANS LE STYLE BAROQUE SUR ISOLA BELLA.
LE BLASON DE FAMILLE EST CONSTITUÉ DE TROIS ANNEAUX ENLACÉS, QUI REPRÉSENTENT PROBABLEMENT L'UNION DES VISCONTI, DES SFORZA ET DES BORROMEO.
UN RÉCIT SANS DÉNOUEMENT !
LORSQUE L'ON ATTACHE DES ANNEAUX ENSEMBLE DANS L'ESPACE (IR3), ON OBTIENT UN CHAINON
N'OUBLIEZ PAS VOTRE TICKET D'ENTRÉE!
LES ANNEAUX BORROMÉENS FORMENT UN CHAÎNON TRÈS SIMPLE. ILS ONT LA PROPRIÉTÉ INTÉRESSANTE QUE LORSQU'UN DES ANNEAUX EST ENLEVÉ, LES DEUX AUTRES SONT LIBRES ! UN TEL CHAINON EST EN GÉNÉRAL APPELÉ
CHAINON BRUNNIEN
ISOLA BELLA
PERMESSO DI VISITA
DANS UN CHAÎNON, LES ANNEAUX PEUVENT ÊTRE REMPLACÉS PAR DES NOEUDS !
PAR EXEMPLE :
AU LIEU DE :


ATTENTION ! IL A ÉTÉ PROUVÉ QUE DANS IR³, LES ANNEAUX BORROMÉENS NE PEUVENT PAS ÊTRE DES CERCLES PARFAITS, QUELSQUE SOIENT LES RAYONS
LA BIÈRE "BALLANTINE" A POUR LOGO LES ANNEAUX BORROMÉENS
UNE MARQUE DE VERMOUTH A POUR NOM "ISOLA BELLA"
LES ANNEAUX BORROMÉENS N'EXISTENT PAS QU'EN ITALIE! VOICI UNE PHOTOGRAPHIE PRISE EN FRANCE, À RENNES-LE-CHÂTEAU...
CLASSEMENT
ON PEUT CLASSER LES CHAINONS EN LEUR DONNANT TROIS NOMBRES. LES ANNEAUX BORROMÉENS ONT:
06-03-02
NOMBRE D'INTERSECTIONS (CROISEMENTS DES ANNEAUX)
NOMBRE D'ANNEAUX CONCERNÉS
NUMERO PARMI LES CHAINONS DE TYPE 06-03
...SANS OUBLIER LES SYMBÔLES UTILISÉS PAR LES VIKINGS!
L'OMBRE DES ANNEAUX BORROMÉENS CHANGE SELON LA PLACE DU PROJECTEUR...
...UNE DE CES OMBRES PRÉSENTE LE MOINS D'INTERSECTIONS POSSIBLE! C'EST LA "PROJECTION MINIMALE"
...ELLE NOUS DONNE UN TRÈS SIMPLE DIAGRAMME "EN PATATES", ALIAS DIAGRAMME DE VENN!




## POUR EN SAVOIR PLUS:


- "THE BORROMEAN RINGS", P. CROMWELL, E. BELTRAMI, M. RAMPICHINI, MATHEMATICAL INTELLIGENCER, VOL 20 - N°1 1998
- "DICTIONARY OF CURIOUS AND INTERESTING GEOMETRY", D. WELLS, PENGUIN BOOKS
- HTTP://SUE.CSC.UVIC.CA/~COS/VENN/BORROMEAN.HTML

+ "michel-ange et l'ange mickey" conférence itinérante!

*Math-Jeunes n° 87, 42–49, 1999*

# Taxi-choses et taxi-trucs (1)

Claude Villers

Mathieu s'engouffra dans le taxi new-yorkais qui devait le conduire, comme c'était le cas depuis quelques jours, du carrefour de son hôtel au carrefour de l'institution où il faisait un stage.

– *Vous ne suivez pas le trajet habituel*, dit-il au chauffeur.

– *J'y suis obligé par suite de travaux de voirie. Mais ne vous tracassez pas, le trajet emprunté nous fera parcourir la même distance que les jours précédents*, lui répondit celui-ci.

Mathieu venait de terminer la lecture de l'article sur la taxi-distance paru dans sa revue préférée (*Math-Jeunes* bien entendu). Il avait fort bien compris ce qu'était cette taxi-distance de deux points (nœuds d'un quadrillage).

– *Mais c'est bien sûr*, se dit-il, *s'il y a une et une seule taxi-distance séparant $A$ de $B$* (ndlr : on écrira $\mathrm{td}(A, B)$), *il est évident qu'il y a parfois moyen de la parcourir de plusieurs façons. Chacune d'elles est alors un taxi-chemin. Je vais étudier cela de près !*

Pourquoi ne le feriez-vous pas aussi ?

Voici quelques découvertes que Mathieu aurait pu faire. Peut-être les avez-vous faites aussi, peut-être même avez-vous découvert autre chose encore.

Pourquoi alors ne pas lui en faire part ? Écrivez-lui ! Ne soyez pas timide !

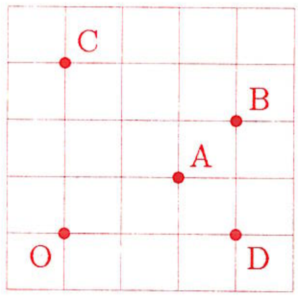
Son adresse :

Mathieu Troiquatorz, SBPMef,
rue de la Halle 15
B-7000 Mons.

## Taxi-distance et taxi-chemins

Privilégions un nœud $O$ d'un quadrillage, chaque nœud du quadrillage possède une seule taxi-distance à $O$.

Ainsi la taxi-distance de $O$ à $O$ lui-même est nulle, on écrira $\mathrm{td}(O, O) = 0$.





Ci-dessus, on a aussi $\mathrm{td}(O, A) = 3$, $\mathrm{td}(O, D) = 3$, $\mathrm{td}(O, B) = 5$, $\mathrm{td}(A, C) = 4$, etc.

La taxi-distance entre deux nœuds du quadrillage est calculée, de façon pratique, à partir du tracé (réel ou mental) d'un taxi-chemin (noté $\mathrm{tc}$) reliant ces deux nœuds.

Un tel taxi-chemin est composé du plus petit nombre de segments du quadrillage qu'il faut « parcourir », pour relier les deux points considérés.

Mais, comme le dit Mathieu, s'il n'y a qu'une seule taxi-distance entre deux nœuds, il n'y a pas nécessairement qu'un seul taxi-chemin les reliant.

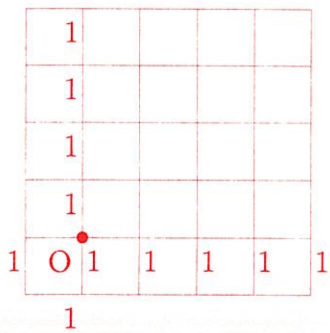
Ainsi, dans la figure ci-avant :

- $\mathrm{td}(O, D) = 3$ et il n'y a qu'un seul tc reliant $O$ à $D$,
- $\mathrm{td}(O, A) = 3$ et il y a trois tc reliant $O$ à $A$ (tracez-les sur la figure),
- $\mathrm{td}(D, B) = 2$ et il n'y a qu'un tc reliant $D$ à $B$,
- $\mathrm{td}(B, C) = 4$ et il y a aussi quatre tc reliant $B$ à $C$ (ils sont encore aisés à tracer),
- $\mathrm{td}(C, D) = 6$ et il y a vingt chemins reliant $C$ à $D$ (mais oui ! Tracez-les si vous arrivez à encore y voir clair).

Il serait donc intéressant de pouvoir déterminer facilement, le nombre de tc reliant deux nœuds du quadrillage.

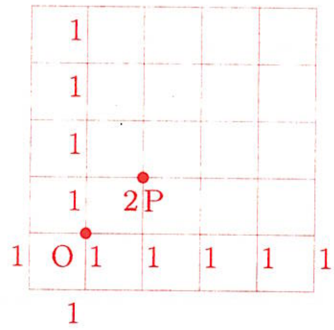
Voici une façon d'y arriver. On privilégie un nœud qui sera le point origine des tc (par exemple, $O$ sur la figure).

Il est clair qu'il n'y a qu'une seule façon (à la mode tc) de relier $O$ à chacun des nœuds des droites comprenant $O$. C'est celle qui consiste à y aller « tout droit ». Tout autre chemin ne serait pas le plus court. Tous les nœuds des droites comprenant $O$ portent donc la mention 1 indiquant qu'il n'y a qu'un seul tc les reliant à $O$.




Et tout devient facile si on complète les indications « de proche en proche ».

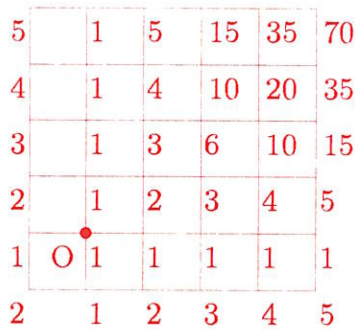
En effet, avant d'arriver à un nœud, en provenance de $O$, il faut passer obligatoirement par l'un des deux nœuds qui le précèdent (dans l'esprit des tc).




C'est ainsi qu'on ne peut construire que deux tc reliant $O$ à $P$. L'un en utilisant le segment « horizontal » d'abord puis le « vertical » ensuite et l'autre, en faisant le contraire. Il suffit de calculer $1 + 1$ (c'est difficile !!).

Il vous reste à compléter la figure ci-dessus en y indiquant, pour chaque nœud illustré, le nombre de tc qui le relie à $O$.

Voici ce que vous avez dû obtenir :




En appliquant ce procédé au cas posé par les nœuds de la première figure, on obtient la figure suivante qui confirme qu'il existe bien vingt taxi-chemins reliant $C$ à $D$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| C 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 3 | 6 | 10 |
| 1 | 4 | 10 D | 20 |

Remarquez que $\mathrm{td}(C, D) = 6$ et que pour relier $C$ à $D$, il faut obligatoirement parcourir trois segments horizontaux et donc trois segments verticaux. Le nombre de taxi-chemins reliant $C$ à $D$ est donc aussi le nombre de façons de parcourir six segments du quadrillage de telle manière que trois segments horizontaux et donc trois segments verticaux soient utilisés.

Ce qui précède nous montre que ce nombre est égal à 20.

En mathématique, on dit que le **nombre de combinaisons de 6 segments, pris 3 à 3,** est 20. Cela s'écrit $C_6^3 = 20$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 A | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| B 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 1 |

De même, $\mathrm{td}(A, B) = 7$ et le nombre de taxi-chemins reliant $A$ à $B$ est le nombre de façons de choisir deux segments verticaux parmi les sept segments à parcourir.

Il s'agit de $C_7^2$ qui vaut donc 21.

Remarquez qu'ici, utiliser deux segments verticaux revient à utiliser cinq segments horizontaux.

On a donc : $C_7^2 = C_7^5 = 21$

En utilisant la notion de coordonnée d'un point, on peut attribuer $(0, 0)$ comme coordonnée à $A$ et donc $(5, 2)$ à $B$. Dans ce cas $\mathrm{td}(A, B) = 5 + 2$ et le nombre de taxi-chemins reliant $A$ à $B$ est $C_{5+2}^5 = C_{5+2}^2$.

D'une manière générale, si $P$ a pour coordonnée $(x, y)$ alors $\mathrm{td}(O, P) = |x| + |y|$ et le nombre de tc reliant $O$ à $P$ est

$$C_{|x|+|y|}^{|x|} = C_{|x|+|y|}^{|y|}.$$

Vous trouvez (ou retrouvez) la formule générale :

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

$C_m^n$ s'obtient par calcul en divisant le produit de $n$ facteurs naturels consécutifs décroissant à partir de $m$ par $n$ facteurs naturels consécutifs croissant à partir de 1.

$$\text{Ainsi, } C_7^2 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Il est possible d'écrire les nombres de tc dans un tableau, comme ci-dessous par exemple, où on a écrit des 1 dans une ligne et une ligne colonne.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | 45 | 9 | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | | |
| | 36 | 8 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | | |
| | 28 | 7 | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | | |
| | 21 | 6 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | | |
| | 15 | 5 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | | |
| | 10 | 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | | |
| | 6 | 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| | 6 | 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| | | | | | | | | | | |

Complétez les cases vides ... si le cœur vous en dit !

Vous pouvez constater que ce tableau présente pas mal de symétries. Lesquelles ?

Les deux rangées de 1, par exemple, sont des axes de symétries du tableau.

Il est donc entièrement représenté par la partie suivante que l'on en a extraite et un peu étendue.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 210 | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 705 | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 1992 | |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 1254 | 2046 | 3333 | 5325 | |
| 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 2046 | 4092 | 7425 | 12750 | |
| 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3333 | 7425 | 12750 | 25500 | |
| | | | | | | | | | | |

Vous pouvez constater que ce tableau présente encore une symétrie par rapport à sa diagonale comprenant la cellule colorée.

Il peut encore être disposé autrement, en plaçant cette cellule colorée comme sommet d'un ≪ triangle ≫ s'étendant aussi loin que nous le souhaitons.

En voici quelques représentations simplifiées qui peuvent être rapidement refaites en cas de besoin. Ce tableau peut être présenté comme un ≪ mur de briques ≫.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |


ou encore, tout simplement

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

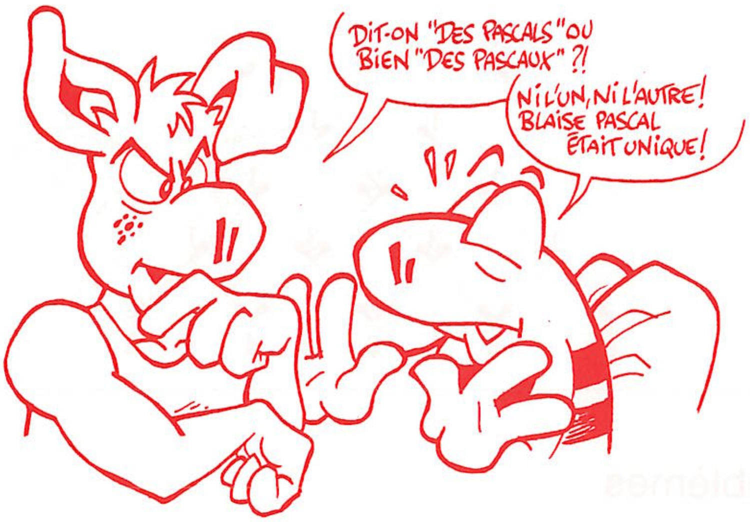
1 8 28 56 70 56 28 8 1

etc.

Dans cette présentation, on a écrit des 1 aux extrémités de chaque ligne, chaque élément intérieur est égal à la somme des deux éléments qui le surplombent, à sa gauche et à sa droite (comme dans une activité de la rubrique *Jeux*).

Ce triangle de nombres est fort utile dans de nombreux domaines des mathématiques. Il porte le nom de ***triangle de Pascal*** bien qu'il ait été connu longtemps avant PASCAL ([1]).

([1]) **Blaise Pascal** (1635 – 1662)
PASCAL fut à l'origine de la théorie moderne des probabilités dont il base l'étude sur le « triangle arithmétique » qui porte son nom. Cependant, ce triangle de nombres était connu bien avant PASCAL et notamment par les chinois. Bien que mort très jeune, ce génie se distingua également en géométrie projective avec son ami DESARGUES ainsi qu'en analyse.




Apprenez à le reconstituer rapidement et observez-le bien, vous verrez qu'il possède de nombreuses particularités, notamment sur le plan numérique. Faites-nous part de vos trouvailles, remarques et réflexions, nous ne manquerons pas de les relater dans un prochain numéro. Sachez déjà que le triangle de Pascal est notamment utilisé en calcul des probabilités.

Ainsi, par exemple, proposons-nous de calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois « pile » lorsque l'on joue quatre fois à « pile ou face » (avec une pièce équilibrée). Pour ce faire, il suffit de calculer :

- le nombre de façons possibles d'obtenir trois fois « pile » en lançant quatre fois une pièce,
- le nombre de résultats possibles de cette expérience,

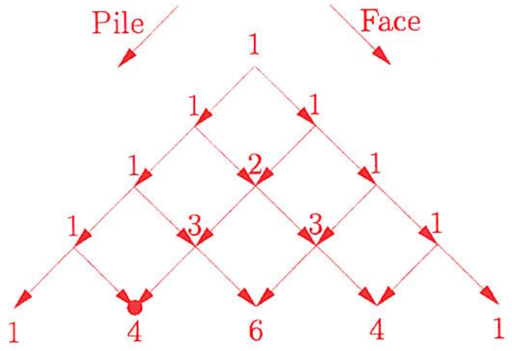
puis de déterminer le quotient du premier nombre par le deuxième.

Vous pouvez déterminer ces deux nombres en construisant un triangle de Pascal à quatre « étages » dans lequel vous représentez l'obtention d'un « pile » par une flèche descendant vers la gauche et l'obtention d'un « face » par une flèche descendant vers la droite (ou le contraire si vous préférez).

Ce faisant, vous construisez un arbre

- qui vous montre qu'il y a cinq possibilités de résultats non ordonnés des quatre lancers (0 « pile » et 4 « face », 1 « pile » et 3 « face », 2 « pile » et 2 « face », 3 « pile » et 1 « face », 4 « pile » et 0 « face »)
- et qui, surtout, vous indique pour chacune de ces possibilités, le nombre de résultats ordonnés qui lui correspond.

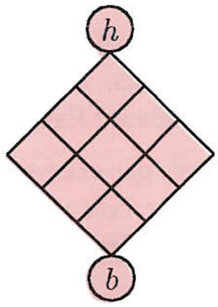
Voici un tel arbre. Sa dernière ligne montre qu'il y a 16 $(= 1+4+6+4+1)$ résultats possibles pour les 4 lancers et que 4 d'entre eux comportent chacun 3 résultats « pile » et un résultat « face » (quatre résultats ordonnés sont comptabilisés au point dessiné en gras, il s'agit de PPPF, PPFP, PFPP, FPPP). Ceci montre que la probabilité d'obtenir 3 piles sur quatre lancers est de $\frac{4}{16}$ ou 0,25.




## Quelques problèmes

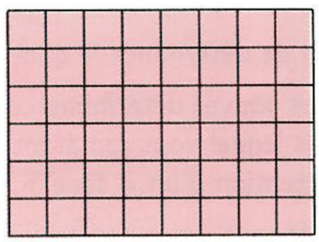
### P1 (OMB 1992, Eli Maxi Q 13)

Dans la figure, un chemin descendant du point le plus haut $h$ au point le plus bas $b$ consiste en une succession de six arêtes descendantes. Quel est le nombre de chemins descendant de $h$ à $b$ ?




### P2 (OMB 1982 Maxi Q 24)

Dans le réseau dessiné ci-contre, combien y a-t-il de plus courts chemins allant d'un sommet au sommet opposé ?



### P3

Mathieu, amateur du tiercé, doit choisir 3 chevaux parmi les 15 qui sont au départ de la course. Il mise 100 BEF par choix et souhaite être certain d'avoir le tiercé au moins dans le désordre. Combien cela va-t-il lui coûter ?

Voici enfin des ...

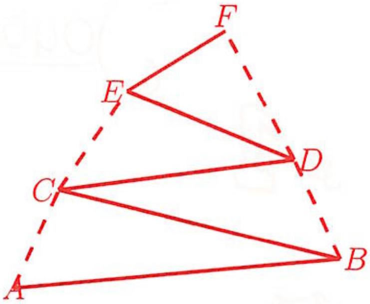
## Variations sur les manières d'organiser des déplacements

... que vous ne serez pas en peine de résoudre.

Elles débouchent sur de belles suites de nombres que vous reconnaîtrez peut-être au passage.

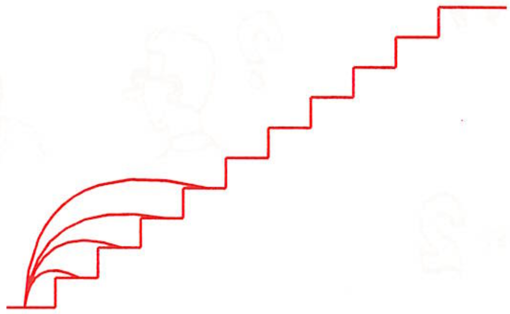
## V1

Mathieu, qui est devenu adepte de la randonnée pédestre, souhaite grimper du pied $A$ jusqu'au sommet $F$ de la montagne. Pour ce faire, il peut suivre un chemin en lacets (traits pleins) et/ou utiliser des escaliers de fortune (traits pointillés) comme l'indique le croquis ci dessous. De combien de manières Mathieu peut-il se rendre de $A$ à $F$ ?




## V2

Mathieu se vante de pouvoir monter les escaliers « quatre à quatre ». En réalité cela veut dire que Mathieu monte l'escalier 1 marche à la fois (quand il est fatigué, p.ex.) ou 2 marches à la fois, ou 3 marches à la fois, ou 4 marches à la fois. De combien de manières Mathieu peut-il arriver en haut d'un escalier de 10 marches ? de 20 marches ?



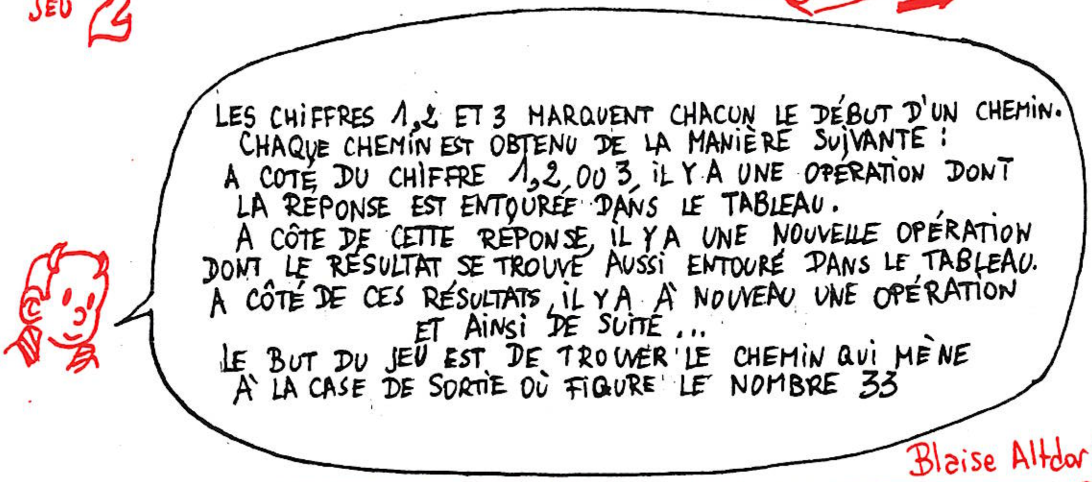

Solutions dans le prochain numéro !

Math-Jeunes n° 87, 50–50, 1999

# Jouons avec Julien

## JEU 1

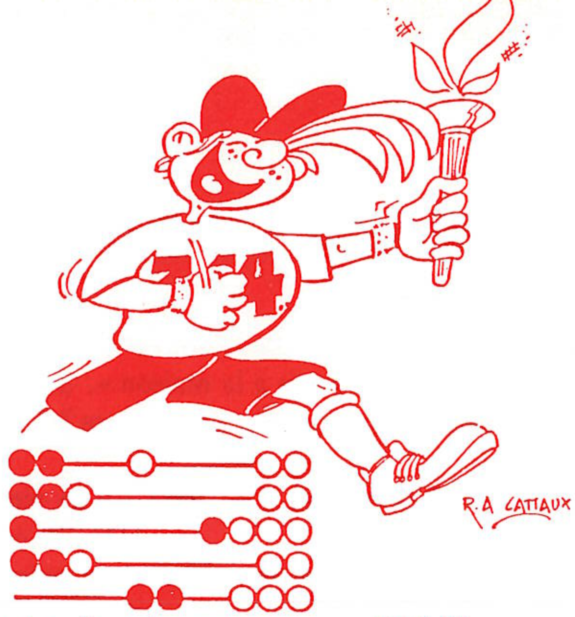

## JEU 2




Blaise Altdorfer, AR Mons

| | | |
|---|---|---|
| → 1 × 7 | 19 + 37 | 72 + 84 |
| → 2 + 14 | 84 : 6 | 16 × 5 |
| → 3 × 8 | 132 : 11 | 52 + 47 |
| 54 − 3 | 13 × 4 | 14 − 5 |
| 14 + 62 | 7 + 15 | 51 : 3 |
| 12 × 6 | 56 : 14 | 99 : 3 |
| 24 + 39 | 9 × 6 | 22 × 3 |
| 76 : 4 | 156 : 12 | 63 + 69 |
| 66 + 18 | 80 − 4 | 33 → |

**OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE**




C. Van Hooste

# 1. Les représentants belges aux OMI

En 1998, la 39e édition des Olympiades Mathématiques Internationales (OMI) s'est déroulée à Taïpei (Taïwan) les 15 et 16 juillet. Comme la plupart des pays participants, la Belgique était représentée par six étudiants issus de l'enseignement secondaire. Voici leurs résultats (notés sur 42) :

| | | |
|---|---|---|
| Filip Desmet (NL) | 29 | médaille d'argent |
| Lenny Taelman (NL) | 22 | médaille de bronze |
| Zhe Han (F) | 9 | |
| Jérôme Levie (F) | 5 | |
| David Lesthaeghe (NL) | 3 | |
| Antoine Vigier (F) | 3 | |

Pour bien comprendre ces scores, il faut savoir que l'épreuve se déroule sur deux journées ; chaque jour, trois problèmes (notés sur 7) sont proposés aux candidats.

Un seul concurrent, un Iranien, a obtenu le score parfait (42/42). Pour recevoir une médaille de bronze, d'argent ou d'or, il fallait atteindre respectivement 14/42, 24/42 et 31/42. L'équipe belge, composée de trois néerlandophones et de trois francophones, a récolté 71 sur 252 et se classe en 39e position. En l'absence de la Chine, qui a refusé de participer pour des raisons politiques, c'est l'Iran qui a globalisé le plus de points (211/252).

En 1999, les OMI auront lieu à Bucarest (Roumanie) du 10 au 22 juillet. Peut-être seras-tu du voyage ?...

En attendant, cher ami lecteur, voici encore 24 problèmes (extraits du Tome II des Olympiades 1982-1987) destinés à peaufiner ta préparation pour la 24e OMB toute proche.

# 2. Préparation à l'OMB

Si tu es élève du premier degré (1e et 2e années), tu peux poursuivre ton entraînement jusqu'à la question 16 ; mais si tu as déjà dépassé le premier degré, alors toutes les questions sont à ta portée.

**1. L'insecte** [1983] (Sans réponse préformulée)

Les arêtes d'un cube sont des barres métalliques de 20 cm de long. Quel est le plus long chemin qu'un insecte, partant d'un sommet, peut parcourir le long des barres en ne passant jamais deux fois sur la même arête, ni par le même sommet (le point de départ et le point d'arrivée pouvant coïncider) ?

### 2. La pluie [1986]

Soit l'affirmation « s'il pleut, alors je reste à la maison ». Si l'une des quatre propositions suivantes est en contradiction avec cette affirmation, laquelle est-ce ? Dans le cas contraire, choisir la réponse **(E)**.

**(A)** « Il pleut et je reste à la maison. » **(B)** « Il ne pleut pas et je reste à la maison. »
**(C)** « Il pleut et je sors. » **(D)** « Il ne pleut pas et je sors. »
**(E)** Aucune des propositions précédentes.

### 3. Les Bellini et les Cellini [1983]

En Italie, au 16e siècle, il n'y avait que deux familles de fabricants de coffrets : Bellini et ses fils d'une part, Cellini et ses fils d'autre part. Chaque fois que Bellini ou un de ses fils avaient terminé un coffret, ils y gravaient une inscription vraie. Cellini et ses fils, eux, gravaient une inscription fausse. Un coffret porte l'inscription : « Ce coffret n'a pas été fait par un des fils de Bellini. » Qui a fabriqué ce coffret ?

**(A)** Bellini **(B)** Cellini **(C)** Un fils de Bellini **(D)** Un fils de Cellini
**(E)** Les données ne sont pas suffisantes pour répondre à la question.

### 4. En noir et blanc [1986]

On veut peindre trois faces d'un cube en blanc et les trois autres en noir. Si deux cubes sont considérés comme différents lorsque la position relative des faces blanches et des faces noires n'est pas la même, combien peut-on obtenir de cubes différents ?

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 20

### 5. En rouge [1982]

Les faces d'un cube sont peintes en rouge. On coupe ce cube en tranches en faisant deux coupures parallèles à chaque paire de faces opposées. On obtient ainsi 27 petits cubes. Les faces fraîchement coupées ne sont pas peintes. Que vaut le rapport de la surface totale non peinte à la surface peinte ?

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** 3

### 6. Pi [1987]

Le nombre $\pi$ est égal à

**(A)** 3,14 **(B)** 3,1416 **(C)** $\frac{22}{7}$ **(D)** $\sqrt{10}$ **(E)** Aucune des réponses précédentes.

### 7. Le livre [1984]

Un livre a moins de 1 000 pages. Pour numéroter ses pages (en partant de la première page avec le numéro 1), on a utilisé un nombre de chiffres double du nombre de pages. Combien ce livre a-t-il de pages ?

**(A)** 104 **(B)** 108 **(C)** 128 **(D)** 198 **(E)** 999

**8. Les souris** [1985]

Un biologiste étudie deux groupes de souris. Les 100 souris du groupe $A$ ont une masse moyenne de 24,5 grammes alors que les 200 souris du groupe $B$ ont une masse moyenne de 22,7 grammes. Les deux groupes de souris ont réunies en un seul groupe $C$. La masse moyenne des souris du groupe $C$ est alors

**(A)** 23,3 g **(B)** 23,5 g **(C)** 23,6 g **(D)** 23,7 g **(E)** 23,9 g

**9. La puce** [1985]

Une puce se déplace sur une ligne droite à partir d'un point $O$ en effectuant des sauts de 5 cm, soit vers la droite, soit vers la gauche. On constate qu'après 20 sauts, elle se trouve à 60 cm à droite de $O$. Combien de sauts vers la droite la puce a-t-elle exécuté ?

**(A)** 12 **(B)** 14 **(C)** 16 **(D)** 18 **(E)** 20

**10. Cargaison** [1982]

Un navire transporte une cargaison de $x$ moteurs électriques. Ces moteurs sont placés dans un certain nombres de conteneurs. Dans chaque conteneur, il y a $z$ caisses ; dans chaque caisse, $u$ cartons et, dans chaque carton, $t$ moteurs. Le nombre de conteneurs est nécessairement égal à

**(A)** $xzut$ **(B)** $\frac{x}{zut}$ **(C)** $\frac{zut}{x}$ **(D)** $\frac{z}{xut}$ **(E)** $\frac{xut}{z}$

**11. L'île** [1985]

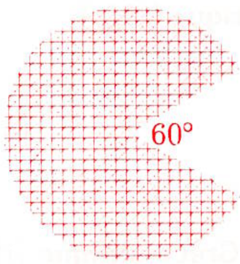
Dans une île de forme triangulaire, le point le plus éloigné de la mer est

**(A)** l'orthocentre ; **(B)** le centre de gravité ; **(C)** le centre du cercle circonscrit ; **(D)** le centre du cercle inscrit ; **(E)** un point différent des quatre précédents.

**12. Le monstre** [1985]

Dans un jeu vidéo, le « monstre » a la forme du secteur ombré représenté sur la figure ci-contre, secteur issu d'un disque de rayon 1 cm. La partie manquante (la « gueule ») a un angle au centre de 60°. Quel est, en cm, le périmètre du monstre ?

**(A)** $\frac{5\pi}{6}+2$ **(B)** $\pi+2$ **(C)** $\frac{5\pi}{3}$ **(D)** $2\pi$ **(E)** $\frac{5\pi}{3}+2$



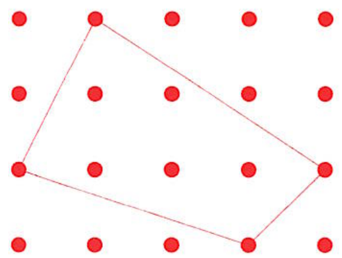

**13. Densité** [1982]

Un territoire carré $T$ de 10 km de côté comprend 1 000 000 habitants. Une place carrée $P$ de 100 m de côté est occupée par 100 personnes. La densité de population de $T$ est alors

**(A)** inférieure à celle de $P$ ; **(B)** égale à celle de $P$ ;
**(C)** 10 fois celle de $P$ ; **(D)** 100 fois celle de $P$ ; **(E)** 1 000 fois celle de $P$.

### 14. La planche à clous [1985]

Dans une planche, on plante des clous distants d'un centimètre, à la fois dans la direction horizontale et dans la direction verticale. Un élastique est tendu sur quatre de ces clous, comme le montre la figure ci-contre, et détermine un quadrilatère. L'aire de celui-ci, exprimée en cm$^2$, est



**(A)** 4 **(B)** 4,5 **(C)** 5 **(D)** 5,5 **(E)** 6

### 15. Le nombre mystérieux [1987] (Sans réponse préformulée)

Soit un nombre naturel $m$ de trois chiffres. En écrivant deux copies de $m$ côte à côte, on forme un nombre $n$ de six chiffres. On divise $n$ par 7, le résultat obtenu par 11 et le quotient de cette seconde division par 13. On trouve alors 132. Que vaut $m$ ?

### 16. Dans le tunnel [1985]

Un train a une longueur de 500 m. A 8 h 59 min et 30 sec, la locomotive s'engage dans un tunnel long de 1,5 km. À 9 h et 01 min, la dernière voiture sort du tunnel. La vitesse du train en km/h est

**(A)** 36 **(B)** 48 **(C)** 60 **(D)** 80 **(E)** 90

### 17. Le nombre effacé [1982]

Sur le tableau noir, on écrit un ensemble de nombres entiers positifs consécutifs qui commence par 1. Puis, on efface un de ces nombres. La moyenne arithmétique des nombres restants est $35 + \frac{7}{17}$. Quel est le nombre effacé ?

**(A)** 6 **(B)** 7 **(C)** 17 **(D)** 35 **(E)** Il ne peut être déterminé.

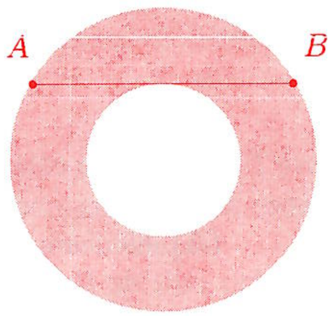
### 18. En Grèce antique [1986]

La somme des aires des faces d'un parallélipipède rectangle est 22 cm$^2$ et la somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm. La longueur, exprimée en cm, d'une quelconque de ses diagonales intérieures est alors

**(A)** $\sqrt{10}$ **(B)** $\sqrt{11}$ **(C)** $\sqrt{12}$ **(D)** $\sqrt{13}$ **(E)** $\sqrt{14}$

### 19. Toujours en Grèce antique [1986]

Une tour cylindrique est entourée d'un chemin bordé par une clôture circulaire concentrique. Pour déterminer l'aire du chemin, un arpenteur tend une corde $[AB]$ tangente à la base de la tour. Sachant que la corde mesure 14 m, quelle est l'aire du chemin (exprimée en m$^2$) ?

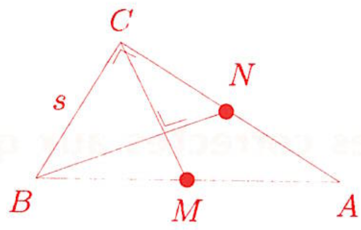



**(A)** $49\pi$ **(B)** $35\pi$ **(C)** $28\pi$ **(D)** $14\pi$

**(E)** Les données sont insuffisantes pour répondre à la question.

## 20. Restons en Grèce antique [1982]

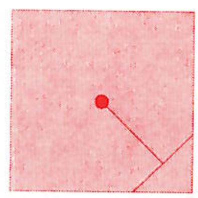
Dans la figure ci-contre, le triangle $CAB$ est rectangle en $C$. Les médianes $BN$ et $CM$ sont perpendiculaires et la longueur du côté $[BC]$ est $s$. La longueur de $[BN]$ est alors




**(A)** $\frac{s\sqrt{5}}{2}$ **(B)** $\frac{s\sqrt{6}}{2}$ **(C)** $s\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{3s\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $2s\sqrt{2}$.

## 21. Le bassin carré [1983]

Voici une manière de disposer deux planches étroites de même longueur pour accéder à un petit rocher situé au centre d'un bassin carré de 20 m de côté. Quelle est, en mètres, la longueur de chacune de ces planches ?



**(A)** $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $10\sqrt{2}$ **(C)** $5\sqrt{3}$ **(D)** $4\sqrt{5}$ **(E)** $10$

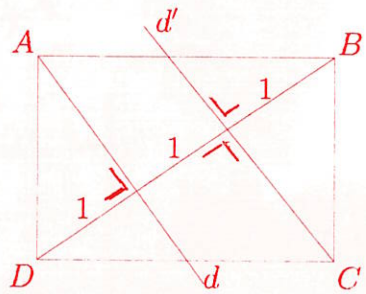
## 22. Le bassin circulaire [1987]

Un nageur part du point $A$ de bord d'un bassin circulaire. Il nage 12 m en ligne droite avant de rencontrer le bord du bassin en un point $B$. Il change alors de direction, nage encore 5 m en ligne droite et arrive de nouveau au bord du bassin en un point $C$ diamétralement opposé à son point de départ $A$. En nageant en ligne droite de $A$ à $C$, quelle distance aurait parcourue le nageur ?

**(A)** 12 m **(B)** 12,5 m **(C)** 12,75 m **(D)** 13 m **(E)** 15 m

## 23. Dans un rectangle [1985]

La diagonale $[BD]$ d'un rectangle $ABCD$ est divisée en trois segments de longueur 1 par des droites $d$ et $d'$ menées perpendiculairement à $BD$, respectivement par les sommets $A$ et $C$. L'aire de $ABCD$ est




**(A)** $4$ **(B)** $3\sqrt{2}$ **(C)** $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **(D)** $2\sqrt{5}$ **(E)** $\frac{9}{2}$

## 24. Cinq sphères [1986]

Quatre sphères de 10 cm de rayon sont posées sur une table horizontale ; leurs centres sont les sommets d'un carré de 20 cm de côté. Une cinquième sphère de 10 cm de rayon est posée sur les quatre premières. À quelle hauteur (exprimée en cm) au-dessus de la table se trouve le centre de la cinquième sphère ?

**(A)** 20 **(B)** $10(1+\sqrt{2})$ **(C)** $10(4-\sqrt{2})$ **(D)** $20\sqrt{2}$ **(E)** 30

## Réponses correctes aux questions de préparation à l'OMB

| **Q** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **R** | 160 | C | A | B | D | E | B | C | C | B | D | E |
| **Q** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
| **R** | B | E | 132 | D | B | D | A | B | A | D | B | B |

◇ ◇
◇

24$^e$ OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

DEMI-FINALE : 3 MARS 1999 FINALE : 21 AVRIL 1999

PROCLAMATION : 8 MAI 1999


Adresse Internet : http://ramses.umh.ac.be/noel/sbpm.htm

Thank you Mr Christmas
M. et J.-P.
Merci Monsieur Guy


À BIENTÔT!