20e année
Mars 1999 — n° 88
Bureau de dépôt: 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Comité de Rédaction : M.Ballieu, J.-P.Cazzaro, C.Festraets, B. Honclaire, R.Midavaine, G.Noël, A.Parent, F.Pourbaix, J.-M.Slowik, S.Trompler, C.Van Hooste, C.Villers

Illustrations : R.A.Cattaux et F.Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 88 Vingtième année CREM asbl B-1400 NIVELLES 1999

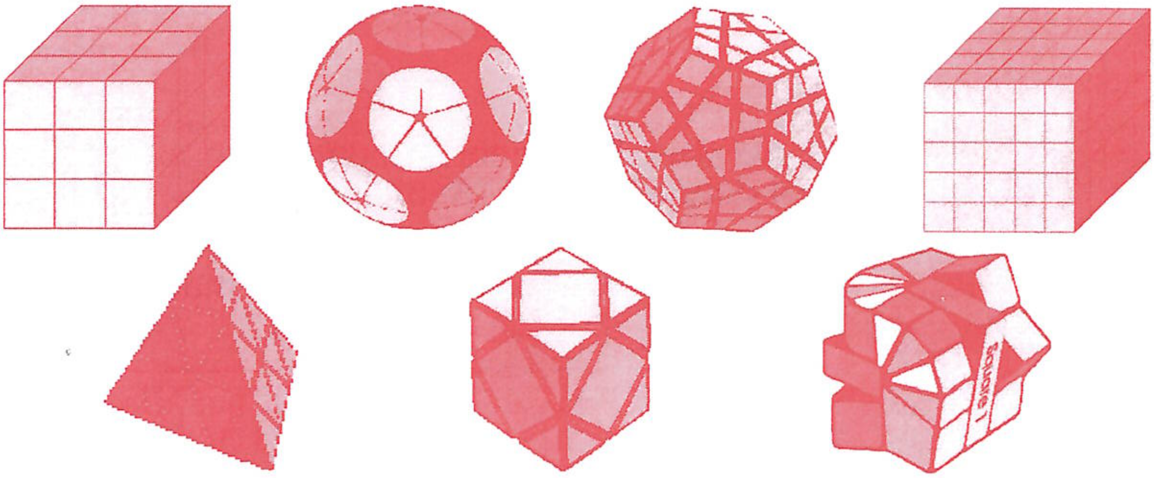
Math-Jeunes

 Math-Jeunes n° 88, 58–62, 1999

Comment résoudre n'importe quel puzzle de type "Rubik" (Première partie)

Arnaud Maes, *Université de Mons-Hainaut*

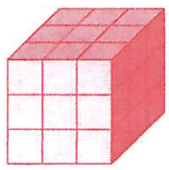
email:maesa@usa.net
http://saturn.umh.ac.be/~maesa/index.htm



Cet article présente une procédure de résolution [1] du Cube de Rubik $3 \times 3 \times 3$, alias le Cube, ce célèbre casse-tête apparu vers la fin des années 70.

La méthode que nous décrivons ici est également applicable à la plupart des variations du Cube (Impossiball, Megaminx, Cube $5 \times 5 \times 5$, Pyraminx, Skewb et Square One, illustrés ci-dessus).

Nous allons montrer qu'il est humainement possible de transformer

ceci  en ceci 

tout en *comprenant* la procédure à suivre ...

Les prérequis nécessaires à l'application de cette méthode sont minimaux : il suffit en effet d'être capable de résoudre **une** face du cube.

Cet article est divisé en deux parties.

La première, dans ce numéro, se limite à exposer la méthode de résolution. Elle se développera principalement autour d'un exemple.

---

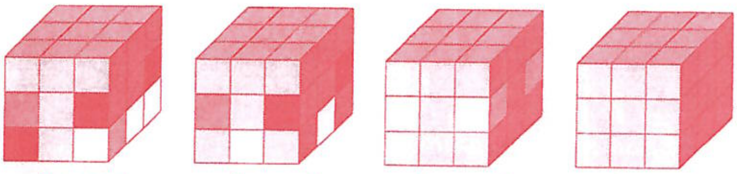
[1] Inspirée de http://www.mindspring.com/~alanh/rubikpuzzles.html

La seconde partie, dans le prochain numéro, visera à « démontrer » l'efficacité de la méthode. Son contenu sera plus mathématique, mais n'utilisera que des notions intuitives de théorie des groupes.

Il me faut néanmoins insister sur le point suivant : c'est bien une *méthode* qui sera exposée ici, et non un algorithme. En d'autre termes, il y aura encore une recherche à effectuer pour mener à bien la résolution. Nous transformons simplement un casse-tête quasi insoluble en un puzzle presque à la portée de tous.

En général, les gens qui connaissent une méthode pour résoudre le Cube de Rubik connaissent un long algorithme en plusieurs étapes. Par exemple, il peut leur être demandé de successivement :

1. réaliser une face du Cube (disons la face du dessus),
2. placer et orienter les 4 coins opposés,
3. placer les bords de la face inférieure,
4. terminer le cube.



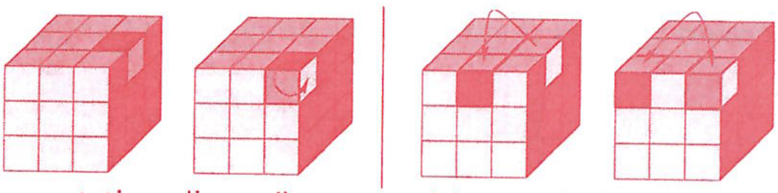
étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

D'habitude, chacune de ces étapes requiert la connaissance de deux ou trois « formules » (c'est-à-dire des séquences de mouvements) à appliquer dans le but de placer correctement certaines pièces *sans détruire ce qui a déjà été mis en place*. Au total, cela fait beaucoup de formules à retenir ! De plus, la provenance de ces formules n'est en général pas très claire. De ce fait, elles ne peuvent pas être facilement réutilisées pour d'autres puzzles de type Rubik.

Afin de reconstruire le Cube progressivement, posons-nous la question suivante : quelles sont les opérations les plus simples possibles (visuellement parlant) que nous pourrions désirer faire subir au Cube ? Elles sont au nombre de deux, à savoir :

- tourner 1 pièce, et
- échanger 2 pièces,

tout en laissant le reste du cube inchangé.



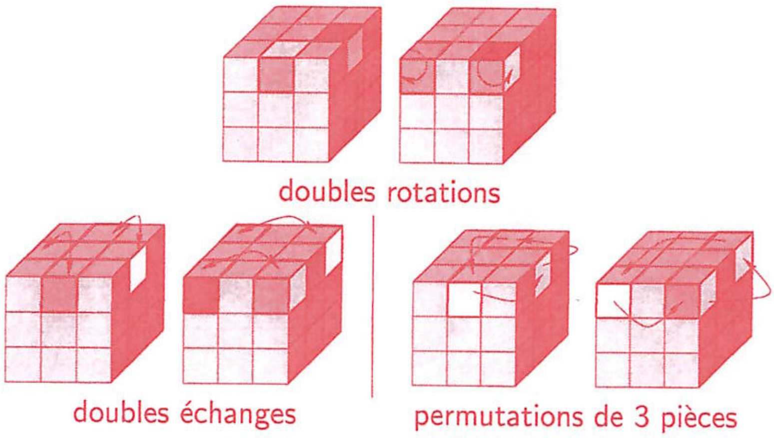
rotations d'une pièce échanges de deux pièces

Malheureusement, ces opérations ne sont pas réalisables avec un cube $3 \times 3 \times 3$. En effet, chaque fois qu'une pièce est tournée (un bord ou un coin), au moins une autre pièce du même type est également tournée. De même, si deux pièces sont échangées, un autre échange doit être effectué ailleurs.

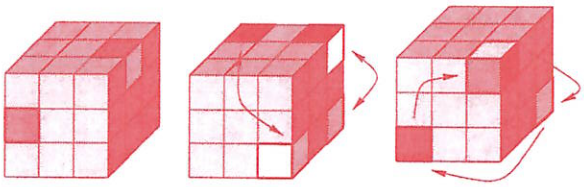
En conséquence, les mouvements les plus simples que nous pouvons espérer faire subir à un Cube $3 \times 3 \times 3$ sont :

- deux rotations, chacune d'une pièce,
- deux échanges, de deux pièces chacun.

De plus, dans le dernier cas, si une même pièce est impliquée dans les deux échanges, alors on obtient une permutation de 3 pièces.



Bien sûr, il se pourrait que les différentes pièces que nous voulions tourner ou échanger ne se trouvent pas sur une seule et même face, comme dans les trois exemples ci-dessous . . .



Nous allons montrer que toutes ces opérations sont réalisables, et que l'on peut « facilement » trouver des séquences de mouvements qui les réalisent. Il est ensuite facile de montrer que le cube entier peut être résolu à l'aide de telles opérations (il suffit de soigneusement choisir les pièces à tourner ou échanger).

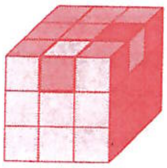
Le problème consiste donc simplement à trouver comment ne tourner que deux pièces, comment n'échanger que deux paires de pièces et comment n'en permuter que trois, sans modifier le reste du Cube.

Et tout le secret réside dans la formule

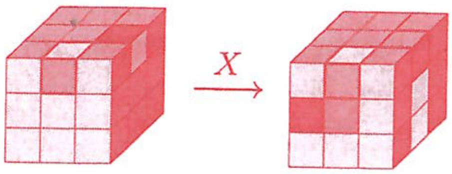
$$\boxed{PXsX^{-1}s^{-1}P^{-1}}$$

que nous allons maintenant expliquer sur un exemple ...

Supposons que nous voulions tourner deux pièces de bord de la tranche supérieure.



Nous commençons par chercher une suite de mouvements X qui **renverse** la pièce supérieure droite, qui **conserve le reste de la tranche supérieure** mais qui peut détruire une partie voire l'entièreté du reste du cube.

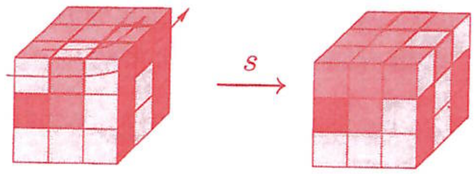


Une telle séquence X est relativement facile à trouver : quiconque est capable de résoudre une face du cube est en mesure d'effectuer cet échange.

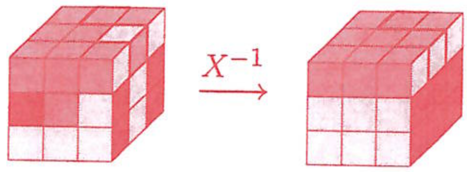
Le Cube de Rubik est un casse-tête réversible : si nous appliquions maintenant la séquence inverse de X (les mouvements inverses dans l'ordre inverse), ce que nous notons X^{-1}, le cube reviendrait à sa position initiale.

Nous aurons à appliquer cette séquence inverse X^{-1}, mais pas immédiatement. Il sera donc **nécessaire de se souvenir de cette séquence** X afin de l'inverser.

Mais avant d'appliquer la séquence X^{-1}, tournons la tranche supérieure de manière à ce que la seconde pièce que nous voulons retourner se mette à son tour sur le bord supérieur droit (c'est-à-dire à la place de la pièce que nous venons de retourner). Désignons cette rotation par s. Il est crucial de ne pas tourner le Cube lui-même, mais seulement la tranche supérieure : les centres des différentes faces doivent rester inchangés.

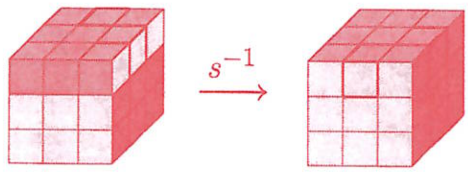


Maintenant seulement, appliquons X^{-1}, la séquence inverse de X.



Remarquons que non seulement la seconde pièce a à son tour été retournée, mais **le reste du cube a aussi été rétabli !**

Enfin, il n'y a plus qu'à ramener la tranche supérieure en appliquant s^{-1}.



Nous avons bien retourné deux arêtes sans détruire le reste du cube.

La série de mouvements que nous avons effectués est

$$\boxed{XsX^{-1}s^{-1}}$$

Ce exemple illustre la propriété suivante :

> - Si X est une suite de mouvements qui **retourne un** bord de la tranche supérieure et **conserve** le reste de cette tranche mais **mélange** tout le reste du cube,
> - et si s est une rotation de la tranche supérieure,
>
> alors la suite de mouvements $XsX^{-1}s^{-1}$ **retourne deux** bords de la tranche supérieure et **conserve** le reste du cube.

Cette propriété sera démontrée la prochaine fois.

Notre raisonnement montrera en fait que la même méthode peut être appliquée pour tourner les coins ou réaliser des échanges de pièces : si l'on peut trouver une suite de mouvements X qui **tourne un** coin ou **échange deux** bords ou coins de la **tranche supérieure, sans la modifier d'avantage,** mais en détruisant peut-être le reste du cube (et de telles suites de mouvements ne sont pas difficiles à trouver), alors en appliquant la suite $XsX^{-1}s^{-1}$, il est possible de **tourner deux** coins ou d'**échanger 3 (ou 4)** bords ou coins de la tranche supérieure **sans détruire le reste** du cube.

Bien sûr, nous sommes libres de choisir n'importe quelle tranche comme tranche supérieure, pour autant que nous ne changions pas ce choix durant l'application de la séquence $XsX^{-1}s^{-1}$.

Mais que faut-il faire si les pièces que l'on veut tourner ou échanger sont sur des tranches différentes, comme dans les exemples de la page 60?

C'est simple : il suffit de les y amener par une suite de mouvements P, puis d'appliquer la formule précédente pour un certain X, et enfin d'effectuer P^{-1} pour restaurer le cube dans sa configuration initiale, mais avec les pièces tournées ou échangées.

Et c'est cela le secret de la formule

$$\boxed{PXsX^{-1}s^{-1}P^{-1}}$$

(à suivre ...)

La mathématique au quotidien ...

Claude Villers

Un an trop tôt ...

Il ne se passe pas un seul jour sans qu'on ne puisse lire dans des journaux et revues, ou encore entendre sur diverses radios et chaînes de télévision quand ce n'est pas dans des conversations autour de nous, l'annonce d'un « grand » événement tout proche : la naissance prochaine simultanée d'un nouveau siècle (le 21e) et d'un nouveau millénaire (le 3e). Comme le montrent les deux exemples d'annonces ou d'informations ci-dessous, l'idée que 1999 est la dernière année du 20e siècle et du 2e millénaire est très répandue.

Arrêter de fumer la dernière année du siècle...

Le lundi 11 janvier prochain, le Centre d'Aide aux Fumeurs de l'Université de

ATH

Le dernier budget du siècle

Il devait être soumis au vote ce lundi soir lors de l'ultime conseil communal 1998.
Hier matin, le bourgmestre

nus nets imposables des ménages et des isolés.
Le sac payant resterait au prix imposé cette année.

Malgré cela, comme le déclarait le bourgmestre: *«Les responsables communaux doivent rester très attentifs»*.

Certains annoncent même pour la fin 1999, l'organisation de réveillons ou de festivités exceptionnelles destinées à marquer cet « événement » de manière particulière. Il est même question pour des groupes de personnes particulièrement motivées, de fréter des avions de manière à pouvoir vivre plusieurs fois le passage du 31 décembre 1999 au 1er janvier 2000 en des endroits différents, en profitant de décalages horaires. Tout cela coûtera très cher, bien entendu, et fait d'ores et déjà l'objet de campagnes commerciales très agressives.

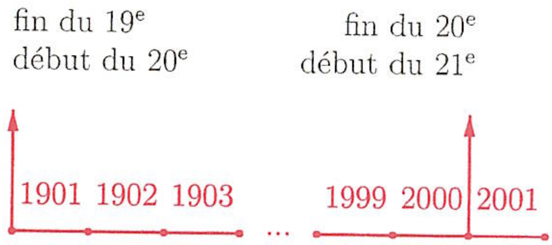
Et pourtant ... Si le premier janvier 2000 verra bien la naissance d'un nouveau millésime ce ne sera pas pour autant celle d'un nouveau millénaire ni d'un nouveau siècle non plus ! Quelle ne sera donc pas la surprise des participants (certainement) à ces réjouissances et de leurs organisateurs (peut-être) lorsqu'ils s'apercevront qu'ils ont une année d'avance !!!

Un siècle est une période de 100 années, cela chacun le sait. Il faut aussi savoir que le calendrier que nous utilisons actuellement ne comporte pas d'année 0. Tout commence avec l'an 1. Chaque siècle se termine donc avec la fin de son année 100. Sur la ligne du temps, les années ne sont pas des moments mais bien des intervalles.

Il est donc préférable de les représenter comme suit

plutôt que comme suit

Dès lors on a



Le prochain siècle et le prochain millénaire commenceront donc pendant la nuit du 31 décembre 2000 au 01 janvier 2001.

Alors réservez dès maintenant (et à bon compte peut-être) le réveillon de ce moment !

À propos de calendriers !

Le calendrier tel que nous l'utilisons actuellement est de type solaire. Cela signifie qu'il tend à faire coïncider une année avec la durée de la révolution complète de la terre autour du soleil.

Mais cette révolution dure 365,2422 jours (le jour est la durée de la rotation complète de la terre sur elle-même). L'année solaire dure donc 365 jours et $\frac{2\,422}{10\,000}$ de jour.

Voilà un beau calcul à effectuer, qui donne du sens à la manipulation des fractions.

Vous avez dû trouver 365 jours 5 heures 48 minutes 46 secondes.

Pour disposer d'une année qui compte un nombre entier de jours, on utilise une combinaison d'années de 365 jours (années ordinaires) et d'années de 366 jours (années bissextiles) qui permettent de rattraper les 5 h 48 min 46 sec oubliées dans les années ordinaires. Cela vous devez certainement fort bien le savoir. C'est Jules César qui a établi ce système en 46 avant J.C. dans un calendrier qui porte son nom : le calendrier julien. Mais 1 jour cela correspond à 4 fois 6 h et non à 4 fois 5 h 48 min 46 sec. Dès lors, au cours du temps, un décalage de 11 min 14 sec (ou $11\frac{14}{60}$ min ou 11,23 ... min) est apparu pour chaque année écoulée.

Ce décalage était donc de un jour complet au bout de $\frac{24 \times 60}{11,23}$ années soit au bout de 128 années (environ). C'est ainsi qu'est apparu un important décalage des dates de début des saisons.

En 1582 après J.C., le pape Grégoire XIII a fait établir le calendrier grégorien en faisant suivre le 4 octobre 1582 directement par le 15 octobre 1582. Nous utilisons toujours ce calendrier grégorien.

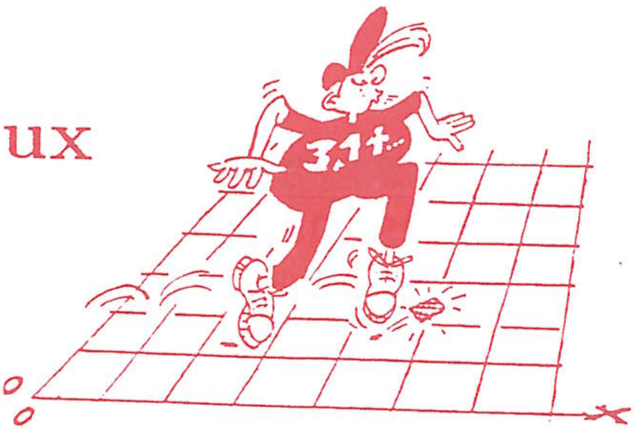
Pour pallier l'inconvénient du calendrier de son prédécesseur — où les années bissextiles étaient tous les millésimes divisibles par 4 — Grégoire a maintenu comme années bissextiles les millésimes divisibles par 4 mais pas par 100 et ceux divisibles par 400. Ainsi, 2000 sera bissextile alors que 1900 ne l'était pas. Grâce à ce système, tu peux calculer que nous sommes tranquilles pour un bon bout de temps avec les problèmes de décalage !

Il y aurait encore beaucoup à dire sur ce sujet des calendriers. Mais il existe de nombreuses sources d'informations. À toi maintenant de mener tes recherches personnelles si tu veux en savoir plus. Bonne chance !

Octobre 1582			
Lundi	1	18	25
Mardi	2	19	26
Mercredi	3	20	27
Jeudi	4	21	28
Vendredi	15	22	29
Samedi	16	23	30
Dimanche	17	24	31

Math-Jeunes n°88, 65-65, 1999

Jeux



Le mot caché (par CéVé)

Le jeu consiste à retrouver dans la grille tous les mots du texte qui vous est proposé.

À cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois.

Les lettres restantes vous donneront alors le mot caché. Sachez que c'est le nom d'un illustre mathématicien. Qui est-il ?

Comparé aux plus grands mathématiciens de tous les temps, ... s'impose par son génie universel et la qualité de ses contributions scientifiques. Grâce à son prestige et à sa renommée il a inflencé plusieurs mathématiciens de son époque.

u	s	a	r	g	e	u	r	m	e	t	q	u	a	m	o	c	u
l	p	n	u	s	i	e	s	p	s	u	a	i	l	p	a	r	n
e	g	d	l	q	o	p	m	s	s	x	e	t	e	m	i	e	i
n	i	s	p	u	e	i	a	t	u	a	d	s	o	p	r	e	v
t	e	t	e	l	f	n	c	h	a	g	a	e	t	n	s	r	p
o	u	s	e	u	s	n	o	e	u	q	i	f	i	e	e	e	a
e	n	a	n	c	e	t	a	m	e	s	r	s	c	i	l	s	l
i	s	t	u	b	i	r	t	i	c	i	e	n	e	g	i	t	l
c	i	i	o	n	s	a	m	s	n	e	m	o	e	d	r	a	i
t	t	a	m	e	h	t	c	e	n	o	m	e	e	e	s	p	a
e	n	o	s	n	o	s	a	r	g	s	s	e	s	d	e	l	s

Les auto-références

Le jeu-problème suivant est extrait des demi-finales du 1e Championnat de France des Jeux Mathématiques et Logiques. Intitulé « autoréférence », il consiste à compléter le cadre ci-dessous afin de rendre vraies les propositions.

Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 4.

Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement

1. Puissance de 5 diminuée de 4.
2. Nombre miroir.
3. Multiple de 9.
4. 2 retranché de la 3^e puissance d'un premier.
5. Puissance de 3.

Verticalement

1. Palindrome.
2. Puissance de 3.
3. 16^e puissance.
4. Juxtaposition de 3 chiffres et du produit de la somme des deux premiers par le troisième.
5. Produit de trois nombres premiers consécutifs.

 Math-Jeunes n° 88, 66–69, 1999

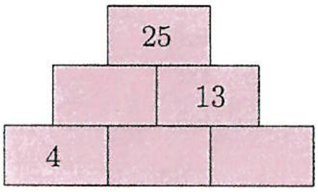
Le mur des nombres

Guy Noël, *Université de Mons*

Les lecteurs de *Math-Jeunes* connaissent bien le jeu « *Le mur des nombres* » :

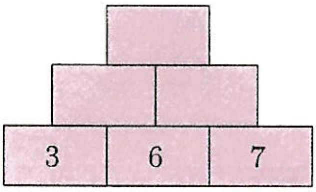
> *Chaque brique contient un nombre qui est la somme des nombres inscrits sur les briques qui la soutiennent. Complétez le mur.*

Limitons-nous à un mur dont le premier étage ne contient que trois briques :



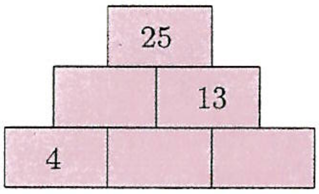
Avez-vous pu reconstituer le mur ? Bien sûr, c'est facile ! Le mur est formé de six briques. Les valeurs de trois d'entre elles sont connues. On trouve sans problème les valeurs des trois autres.

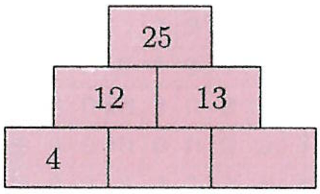
Essayons un autre exemple :

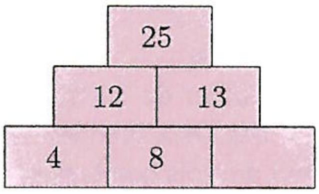


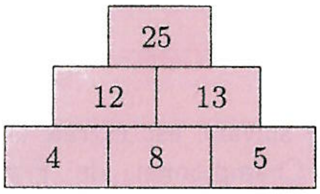
C'est encore plus facile ! Pourquoi ? Dans cet exemple, il suffit d'effectuer des additions : $3+6=9$, puis $6+7=13$ et enfin $9+13=22$.

Dans l'exemple précédent, c'était un peu plus intéressant : il fallait *savoir organiser ses calculs*.

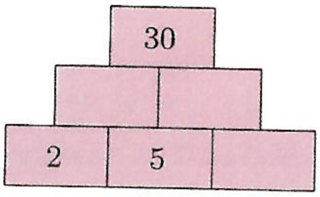




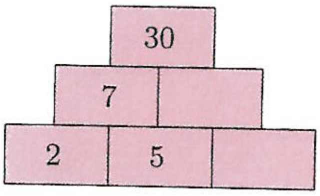


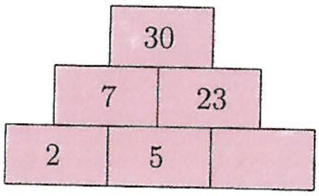


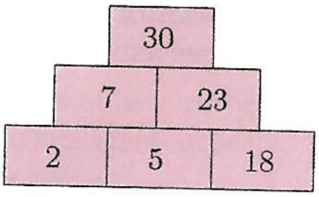
Essayons encore autre chose :



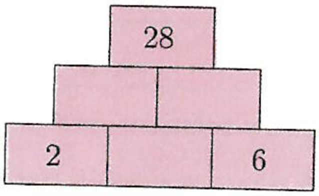
Pouvez-vous décrire les opérations à effectuer ? La première chose à faire est évidemment d'additionner 2 et 5.







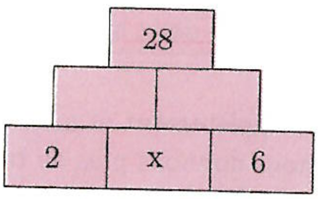
Parfois, c'est quand même un peu plus compliqué. Essayez de résoudre le problème suivant avant de lire la réponse :



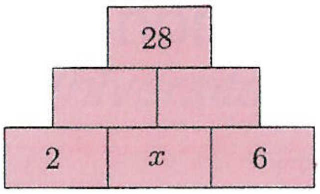
Pourquoi est-ce plus difficile ? Au départ, on ne sait effectuer aucune opération, ni addition, ni soustraction.

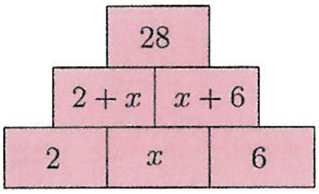
Tout serait tellement plus simple si on connaissait le nombre inscrit sur la brique du milieu de la rangée du bas.

Faisons comme si nous le connaissions en lui donnant un nom. Si vous avez déjà fait un peu d'algèbre, vous savez qu'un *nombre inconnu* se note souvent x. Inscrivons x sur la brique du milieu de la première rangée :

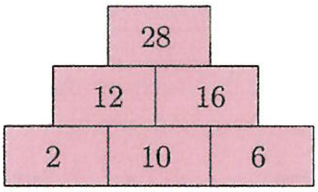


Cela devient facile :



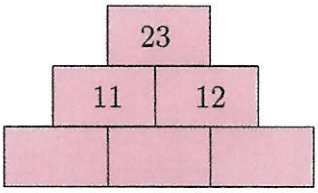


Alors $28 = 2 + x + x + 6$, donc $20 = x + x$ et $x = 10$.

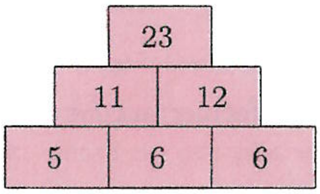


Ainsi, quand nous nous donnons les nombres inscrits sur trois des briques, nous pouvons trouver les trois autres. Mais pouvons-nous vraiment placer les trois nombres sur n'importe quelles briques ?

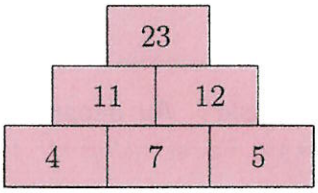
Essayez l'exemple suivant :



Vous voyez tout de suite qu'il y a plusieurs solutions, par exemple



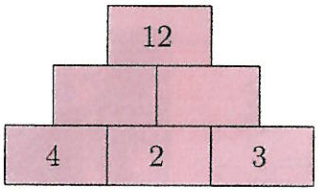
et



sont deux solutions différentes. Comment est-ce possible ? Le 23 situé dans la brique du sommet ne sert à rien, nous pouvons le retrouver en additionnant 11 et 12. Nous croyions avoir trois renseignements, et nous n'en avions que deux ! Nous dirons que la brique du sommet *dépend* des deux briques qui la soutiennent.

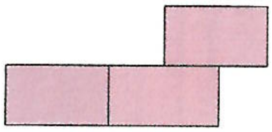
Toute brique dépend des deux briques qui la soutiennent.

Pour avoir une chance de déterminer complètement et sans ambiguïté le mur, nous devons donner trois renseignements INDÉPENDANTS. Si nous donnons plus de trois renseignements, il se pourrait aussi qu'ils soient contradictoires. Dans ce cas il n'y aurait pas de solution.

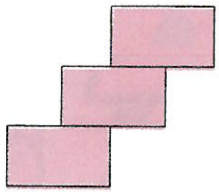
Par exemple : 

est un mur « boîteux », il risque de s'écrouler !

Pouvez-vous trouver toutes les configurations de trois briques qui fournissent des renseignements indépendants ? Par exemple



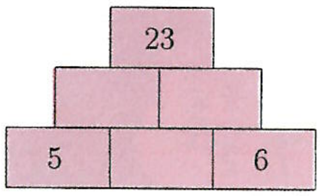
ou



Soyez persévérant, il y a 17 configurations de ce type.

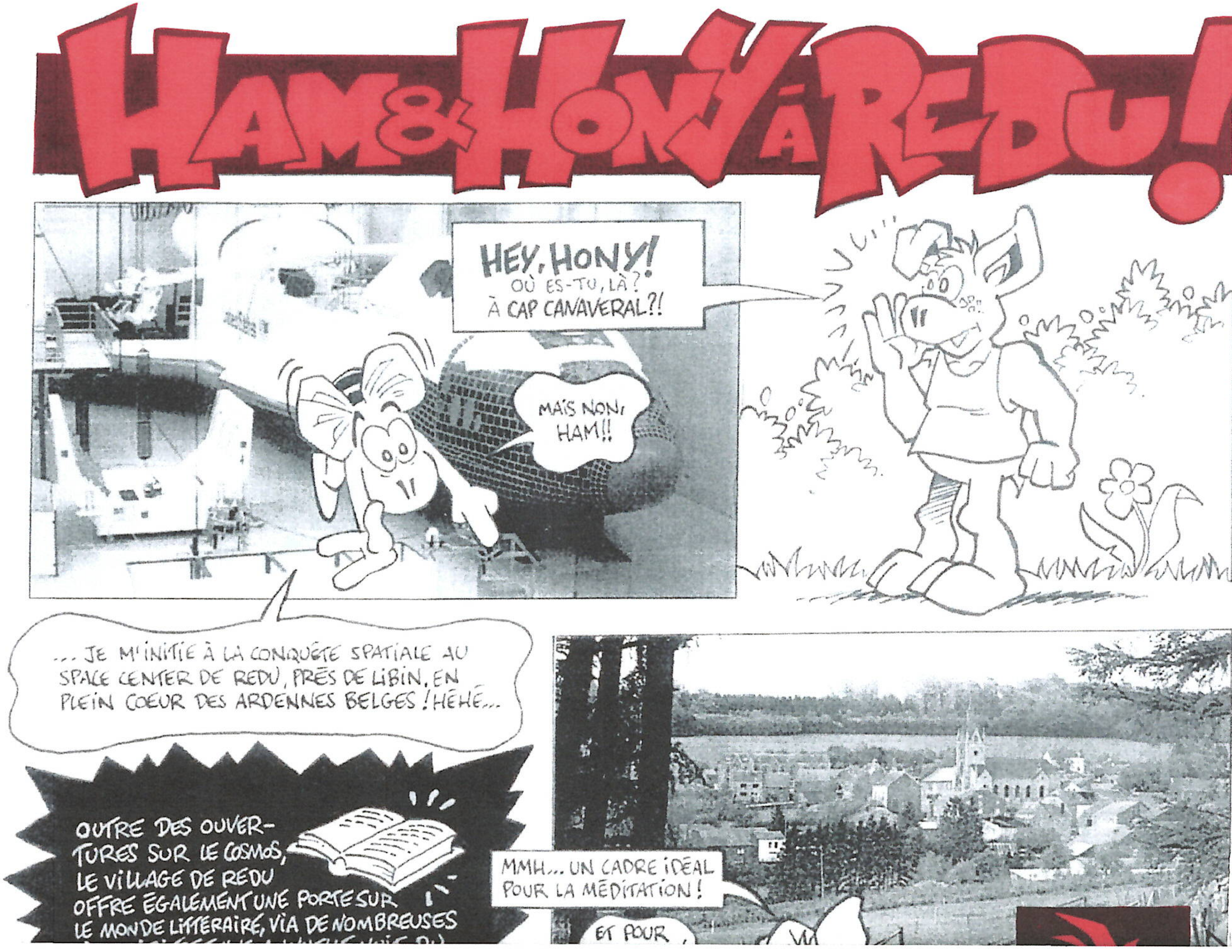
Pour terminer, pensons à ceux d'entre vous qui ont déjà rencontré en algèbre des systèmes d'équations linéaires. Ils peuvent exprimer les choses dans ce langage :

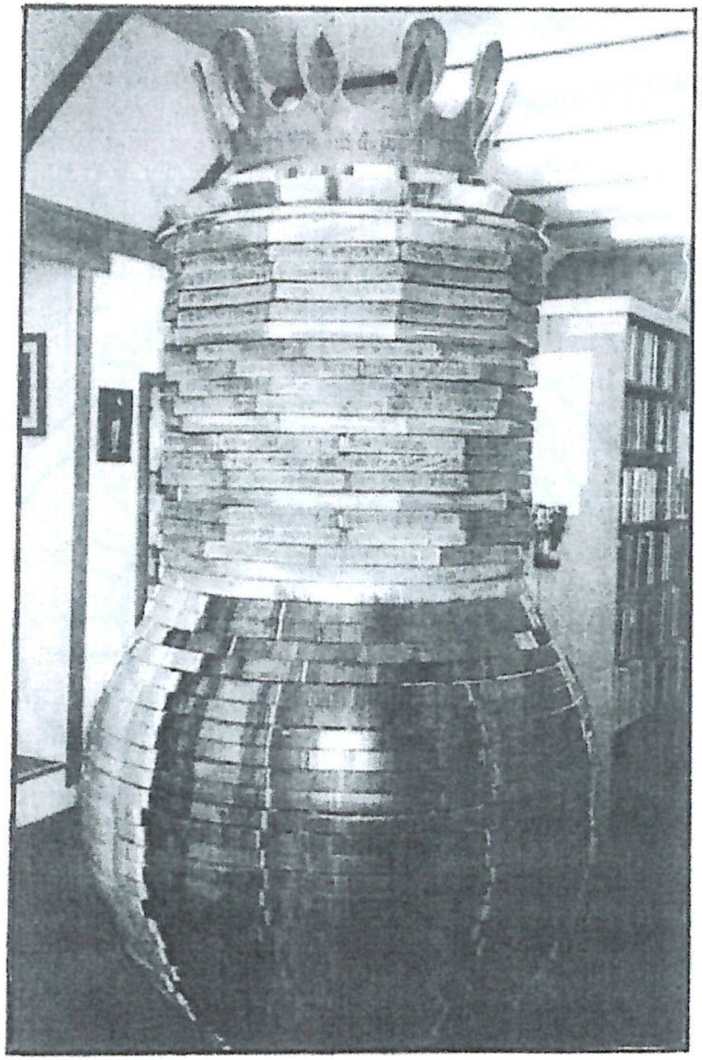
Pour compléter un mur, nous ne pouvons utiliser que les égalités fournies par les trois briques des deux rangées supérieures. Certains nombres étant inconnus, ces égalités sont des équations. Ecrivez le système d'équations associé au mur suivant :



Nous avons au maximum trois équations. Pour que toutes les inconnues puissent être déterminées sans ambiguïté, il ne faut donc pas qu'il y en ait plus de 3. C'est donc qu'il faut fournir au moins trois données indépendantes. Nous dirons que le problème du mur de trois rangées est de dimension 3.

Et maintenant, pouvez-vous trouver la dimension du problème d'un mur de 4 ou de 5 rangées ?


HAM & HONY À REDU!
HEY, HONY! OÙ ES-TU, LÀ? À CAP CANAVERAL?!
MAIS NON, HAM!!
... JE M'INITIE À LA CONQUÊTE SPATIALE AU SPACE CENTER DE REDU, PRÈS DE LIBIN, EN PLEIN COEUR DES ARDENNES BELGES! HÉHÉ...
OUTRE DES OUVERTURES SUR LE COSMOS, LE VILLAGE DE REDU OFFRE ÉGALEMENT UNE PORTE SUR LE MONDE LITTÉRAIRE, VIA DE NOMBREUSES
MMH... UN CADRE IDÉAL POUR LA MÉDITATION!
ET POUR

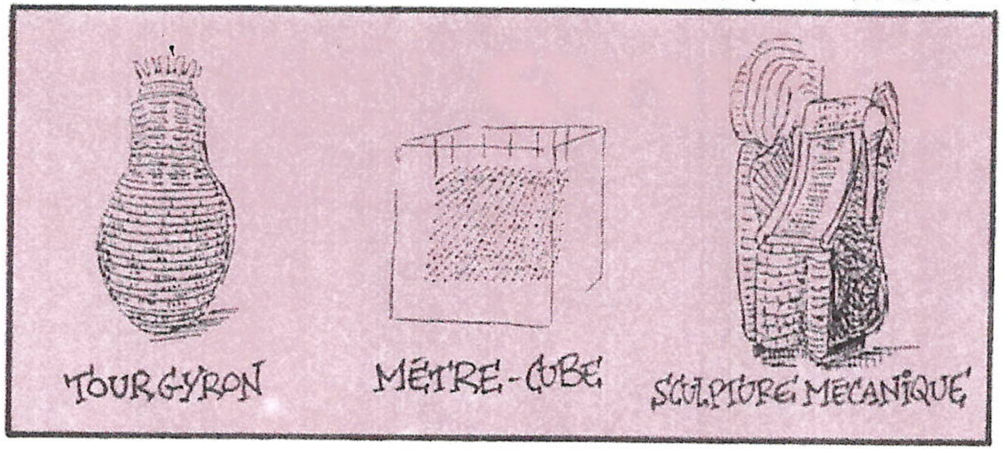


LES IDÉOPLASTES DE ROBERT KAYSER

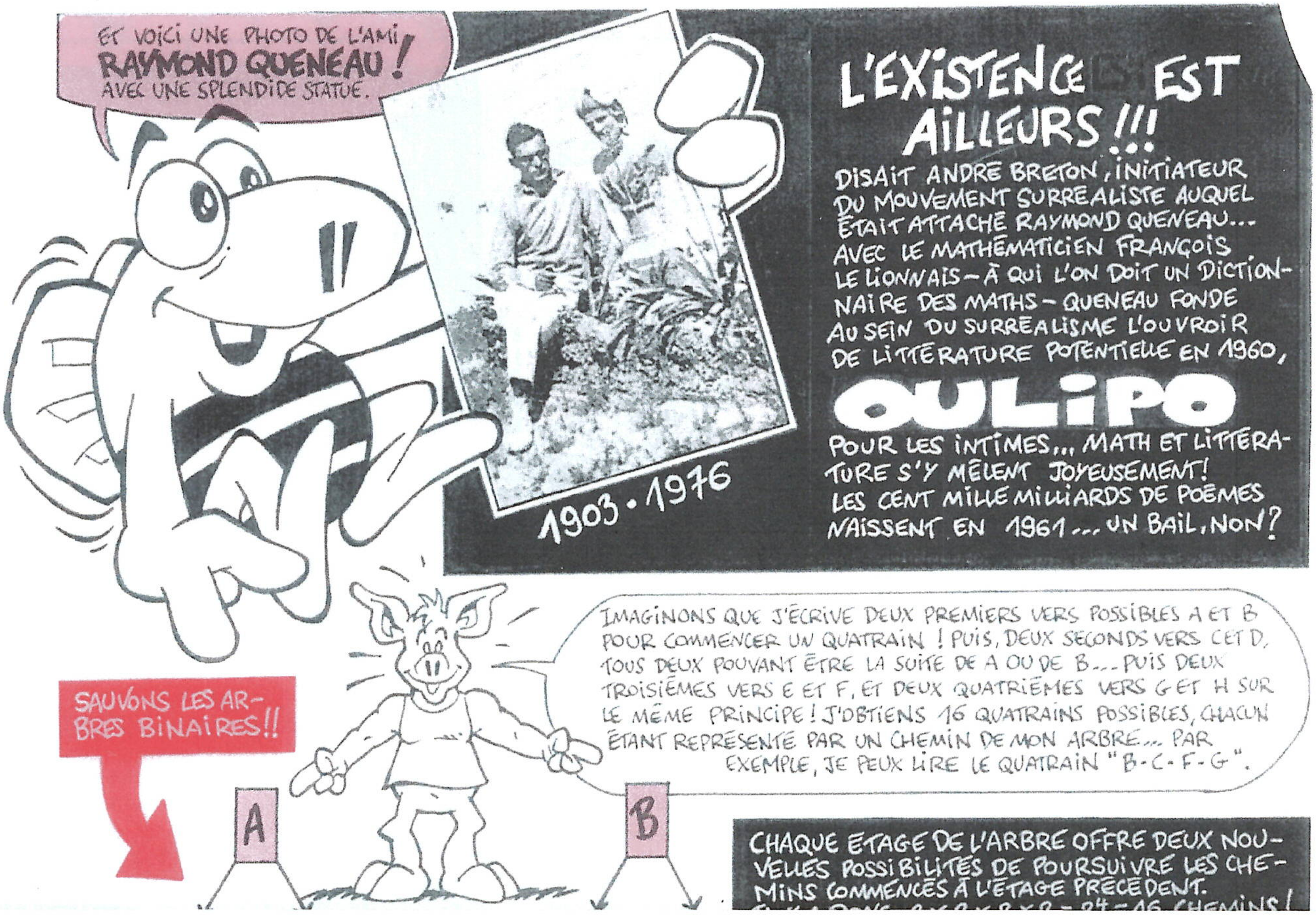
UNE FOIS ENCORE, MATH'JEUNES PLONGE DANS LE DOMAINE DE L'ART! LE SCULPTEUR ROBERT KAYSER S'INTÉRESSE À LA LANGUE, QU'IL ESSAIE D'EXPLOITER AU TRAVERS DE SES OEUVRES.

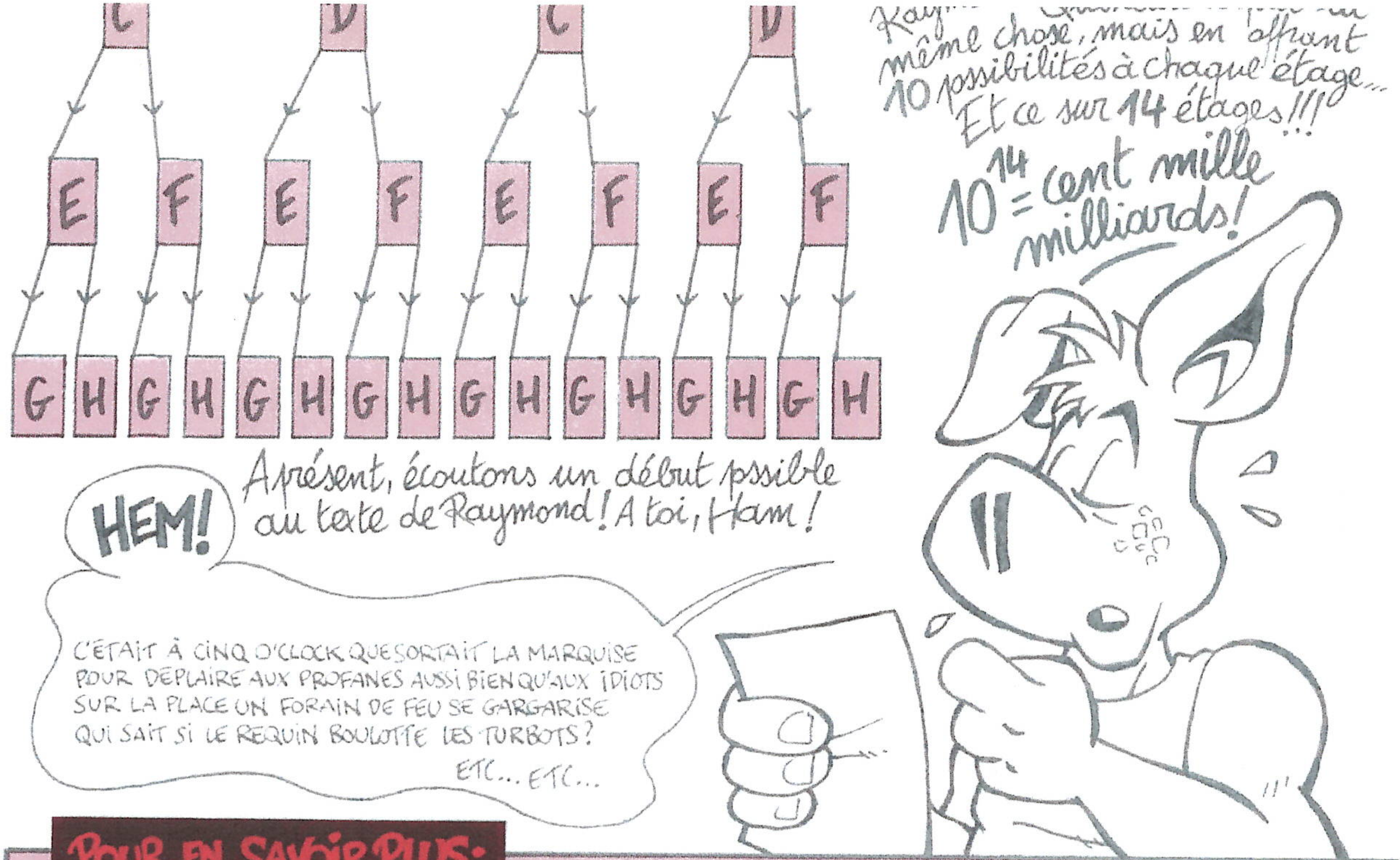
EN AOÛT DERNIER, AU HASARD DES LIBRAIRIES DE REDU, NOUS SOMMES TOMBÉS SUR "LA TOUR GYRON", L'UNE DES TROIS SCULPTURES QUI TENTENT DE TRANSPOSER LES "CENT MILLE MILLIARDS DE POÈMES" DE L'ÉCRIVAIN RAYMOND QUENEAU...

CHAQUE FACE DE CHACUNE DES PLAQUES DE LA TOUR CONTIENT UN VERS DE QUENEAU. EN FAISANT TOURNER LES PLAQUES ET EN LES ALIGNANT, ON CRÉE L'UN DES POÈMES POSSIBLES (VOIR APRÈS)!



Robert Kayser sculpteur et communicateur


ET VOICI UNE PHOTO DE L'AMI RAYMOND QUENEAU ! AVEC UNE SPLENDIDE STATUE.
1903 · 1976
L'EXISTENCE EST AILLEURS !!!
DISAIT ANDRÉ BRETON, INITIATEUR DU MOUVEMENT SURRÉALISTE AUQUEL ÉTAIT ATTACHÉ RAYMOND QUENEAU... AVEC LE MATHÉMATICIEN FRANÇOIS LE LIONNAIS – À QUI L'ON DOIT UN DICTIONNAIRE DES MATHS – QUENEAU FONDE AU SEIN DU SURRÉALISME L'OUVROIR DE LITTÉRATURE POTENTIELLE EN 1960,
OULIPO
POUR LES INTIMES... MATH ET LITTÉRATURE S'Y MÊLENT JOYEUSEMENT ! LES CENT MILLE MILLIARDS DE POÈMES NAISSENT EN 1961 ... UN BAIL, NON ?
IMAGINONS QUE J'ÉCRIVE DEUX PREMIERS VERS POSSIBLES A ET B POUR COMMENCER UN QUATRAIN ! PUIS, DEUX SECONDS VERS C ET D, TOUS DEUX POUVANT ÊTRE LA SUITE DE A OU DE B... PUIS DEUX TROISIÈMES VERS E ET F, ET DEUX QUATRIÈMES VERS G ET H SUR LE MÊME PRINCIPE ! J'OBTIENS 16 QUATRAINS POSSIBLES, CHACUN ÉTANT REPRÉSENTÉ PAR UN CHEMIN DE MON ARBRE... PAR EXEMPLE, JE PEUX LIRE LE QUATRAIN "B-C-F-G".
SAUVONS LES ARBRES BINAIRES !!
A
B
CHAQUE ÉTAGE DE L'ARBRE OFFRE DEUX NOUVELLES POSSIBILITÉS DE POURSUIVRE LES CHEMINS COMMENCÉS À L'ÉTAGE PRÉCÉDENT.



POUR EN SAVOIR PLUS:

- "LES MATHS ET LA PLUME", PAR DELEDICQ ET CASIRO, CHEZ ACL EDITIONS, PARIS - PUBLIÉ EN 1996
- "NOUVEAUX EXERCICES DE STYLE", PAR P. KAESER, CHEZ DIDEROT ÉDITEUR, PARIS - PUBLIÉ EN 1997
- "LE SURRÉALISME", PAR GAËTAN PICON, CHEZ SKIRA-FLAMMARION, GENÈVE - PUBLIÉ EN 1983

Math-Jeunes n°88, 74–79, 1999

Taxi-choses et taxi-trucs (2)

Claude Villers

Comme c'est curieux, s'exclama Mathieu après avoir observé le triangle de Pascal. *Voilà de très jolies dispositions de nombres.*
Avant de vous en communiquer quelques unes, je vous invite à bien observer aussi ce fameux triangle de nombres naturels. Et si vous découvrez autre chose, communiquez le moi !

Voici quelques découvertes intéressantes de Mathieu.

Rappelons d'abord la structure de ce (taxi-)triangle de Pascal, que nous avons abondamment rencontré dans le premier texte de cette série.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc|l}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \leftarrow \text{niveau } 0\\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \leftarrow \text{niveau } 1\\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \leftarrow \text{niveau } 2\\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \leftarrow \text{niveau } 3\\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \leftarrow \text{niveau } 4\\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \leftarrow \text{niveau } 5\\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \leftarrow \text{niveau } 6\\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \leftarrow \text{niveau } 7\\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \leftarrow \text{niveau } 8\\
 & & & & & & & & & \text{etc.} & & & & & & & &
\end{array}$$

Tout d'abord, couche horizontale par couche horizontale, nous pouvons constater que le triangle de Pascal nous fournit les coefficients des termes des développements des produits remarquables $(a+b)^n$. En voici une autre disposition.

Niveau de la ligne							permet d'écrire ...
0	1						$(a+b)^0$
1	1	1					$(a+b)^1$
2	1	2	1				$(a+b)^2$
3	1	3	3	1			$(a+b)^3$
4	1	4	6	4	1		$(a+b)^4$
5	1	5	10	10	5	1	$(a+b)^5$

Vous retrouvez ainsi très facilement :

$$\begin{array}{lll}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & 1 \cdot a + 1 \cdot b \\
(a+b)^2 & = & 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
(a+b)^3 & = & 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
(a+b)^4 & = & 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\
(a+b)^5 & = & 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5
\end{array}$$

etc. qui vous sont ou seront très utiles.

Reprenez maintenant le triangle de Pascal et additionnez les nombres qui figurent dans chaque ligne.

Vous obtenez successivement, au niveau :

- $0 : 1$
- $1 : 1+1=2$
- $2 : 1+2+1=4$
- $3 : 1+3+3+1=8$
- $4 : 1+4+6+4+1=16$
- $5 : 1+5+10+10+5+1=32$

etc.

(calculez encore quelques sommes)

Vous avez probablement déjà remarqué que vous obtenez les puissances successives de 2 soit 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ... Vous pouvez alors conjecturer que ...

La somme des nombres figurant au niveau n du triangle de Pascal est 2^n.

Mais il n'est pas certain que cette conjecture soit vraie pour tout naturel n. Essayez donc de démontrer (avant de lire la suite) qu'il en est bien ainsi.

Voici une démonstration !

La ligne de niveau n nous permet d'écrire

$$(a+b)^n = 1 \cdot a^n + \diamondsuit a^{n-1}b + \diamondsuit a^{n-2}b^2 + \cdots + \diamondsuit a^2b^{n-2} + \diamondsuit ab^{n-1} + 1 \cdot b^n$$

Les $\diamondsuit$ remplacent les nombres de la ligne de niveau n qui ne sont rien d'autre que les C_n^i. Ce qui nous donne

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-2} a^2b^{n-2} + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

Dans le précédent article, nous avons vu que C_n^i est le nombre de combinaisons de n objets pris i à i, si vous préférez, le nombre de manières de prélever i objets parmi n objets.
Nous savons également comment calculer ces nombres.
C_n^i est égal au quotient du produit de i facteurs naturels consécutifs décroissant à partir de n par le produit de i facteurs naturels consécutifs croissant à partir de 1.

Vous avez peut-être déjà rencontré en classe la formule équivalente : $C_n^i = \dfrac{n!}{(n-i)!i!}$

Il suffit alors de remplacer a et b chacun par 1, pour obtenir les formules suivantes (en n'oubliant pas que toute puissance de 1 est égale à 1)

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$$

ou

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$$

Comme le deuxième membre est bien la somme des nombres figurant dans la n^{e} ligne du triangle de Pascal, la conjecture est correcte. Si vous en avez trouvé une autre justification, proposez-la à Mathieu.

*

Et si on additionnait tous les nombres du triangle de Pascal, depuis le niveau 0 jusqu'au niveau n ? Qu'obtiendrait-on ? Il faut essayer.

Niveau 0 seul	$S = 2^0 = 1$
Niveaux 0 et 1	$S = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$
Niveaux 0 à 2	$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
Niveaux 0 à 3	$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 7 + 8 = 15$
Niveaux 0 à 4	$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 15 + 16 = 31$
Niveaux 0 à 5	$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 31 + 32 = 63$
etc.	

Vous constatez que les résultats obtenus sont $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$, $2^5 - 1$, ...
Vous pouvez à nouveau établir une conjecture.

La somme des nombres figurant dans le triangle de Pascal du niveau 0 au niveau n est $S = 2^{n+1} - 1$.

À nouveau, il faut démontrer que cette formule est vraie pour tout naturel n. Alors ... au travail !
Avez-vous trouvé ? Voici une façon de procéder.
La somme des nombres figurant dans les lignes des niveaux 0 à n du triangle de Pascal vaut

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S & = & 2^0 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & \cdots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n & & \\
2S & = & & & 2^1 & + & 2^2 & + & \cdots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + & 2^{n+1}
\end{array}$$

En soustrayant membre à membre la première égalité de la deuxième, on trouve, après simplification

$$2S - S = 2^{n+1} - 2^0 \text{ et donc } S = 2^{n+1} - 1$$

Voici une autre manière de justifier la conjecture.

$$\begin{array}{rl}
S & = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^n \\
\text{donc } S+1 & = 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^n \\
& = 4 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^n \\
& = 8 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^n \\
& = 16 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^n \\
& \vdots \\
& = 2^n + 2^n \\
& = 2 \times 2^n \\
& = 2^{n+1}
\end{array}$$

et on a bien $S = 2^{n+1} - 1$

Voici enfin, une autre justification, basée sur le principe de la numération binaire.

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 2^0 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & \cdots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\ S & = & 2^n & + & 2^{n-1} & + & 2^{n-2} & + & \cdots & + & 2^2 & + & 2^1 & + & 2^0 \end{array}$$

C'est le développement du nombre binaire $111\cdots111$ comportant $n+1$ chiffres. Si vous ajoutez 1 à ce nombre, tous les 1 deviennent des zéros et un chiffre 1 vient s'ajouter en première place pour donner le nombre $1000\cdots000$ de $n+2$ chiffres (comme quand on ajoute 1 à 99 999, on trouve 100 000).

Par conséquent, $S + 1 = 2^{n+1}$ et on retrouve $S = 2^{n+1} - 1$.

Exemple : la somme des nombres des 10 premières lignes du triangle de Pascal (du niveau 0 au niveau 9) vaut $2^{10} - 1 = 1023$, vérifiez-le !

*

Solutions des problèmes posés dans *Math-Jeunes* n° 87

P1

Le nombre demandé est le nombre de taxi-chemins allant de h à b. On le trouve dans le triangle de Pascal, il vaut 20. Vous pouvez aussi noter les nombres de taxi-chemins en chaque nœud.

P2

Ici aussi, il suffit d'indiquer, sur la figure, le nombre de taxi-chemins joignant un sommet au sommet opposé. Vous obtenez ainsi 3 003. C'est aussi le nombre de façons de choisir 6 segments verticaux sur les 14 segments à utiliser pour joindre ces deux sommets. C'est donc

$$C_{14}^{6} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

P3

Le nombre de façons de choisir 3 chevaux parmi 15 est le même que le nombre de façons de choisir 3 segments horizontaux pour un taxi-chemin reliant deux nœuds (ou deux cases) d'un quadrillage « taxi-distants » de 15.

Construisons la partie concernée du triangle de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 230 462 462 230 165 55 11 1
1 12 66 220 395 * * * * * * * *
1 13 78 286 615 * * * * * * * * *
1 14 91 364 * * * * * * * * * * *
1 15 105 **455** * * * * * * * * * * * *

La taxi-distance des positions des deux nombres en gras est bien 15 et pour la parcourir, il faut utiliser 12 déplacements dans une direction et 3 dans l'autre.

Le nombre de tiercés assurant d'avoir les 3 premiers chevaux au minimum dans le désordre est donc 455. Par calcul, on a bien :

$$C_{15}^{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455$$

Il en coûtera donc 455×100 BEF soit $45\,500$ BEF

V1 Venant de A :

- il y a une façon d'arriver en A (c'est d'y rester !).
- il y a une façon d'arriver en B (c'est de suivre $[AB]$).

On arrive en C en venant de A ou de B, il y a donc deux (1+1) manières d'arriver en C venant de A.

On arrive en D en venant de B ou de C, il ya donc trois façons (1+2) d'arriver en D venant de A.

Il suffit alors de continuer ainsi, de proche en proche. Cela donne

Sommet	A	B	C	D	E	F					
Nbre de façons d'y arriver	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Et on voit apparaître la suite de nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... que vous avez peut-être déjà rencontrée.

Elle est très connue sous le nom de **suite de Fibonacci**

V2

Il y a 1 façon d'arriver au niveau 0, c'est d'y rester !

Il y a 1 façon d'arriver au niveau 1, c'est d'y venir directement du niveau 0.

Il y a $1+1$ façons d'arriver au niveau 2, c'est d'y venir du niveau 0 ou du niveau 1.

Il y a $1+1+2$ façons d'arriver au niveau 3, c'est d'y venir du niveau 0 ou du niveau 1 ou du niveau 2.

Il y a $1+1+2+4$ façons d'arriver au niveau 4, c'est d'y venir des niveaux 0, 1, 2 ou 3.

On voit ainsi apparaître la suite 1, 1, 2, 4, 8, ...

Peut-être penserez-vous qu'il s'agit de puissances successives de 2.

C'est bien d'établir une conjecture mais il faut s'assurer qu'elle est correcte !

Voyons ce qui se passe pour le niveau 5. On ne peut y arriver qu'en provenance des niveaux 4, 3, 2 ou 1 ce qui donne $8+4+2+1$ soit 15 façons d'y arriver (et c'est l'embardée) ! Le tableau suivant résume la situation.

Niveau atteint	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nbre de façons	1	1	2	4	8	15	29	66	116	...

Si le cœur vous en dit, voilà une belle suite de nombres à étudier !!!

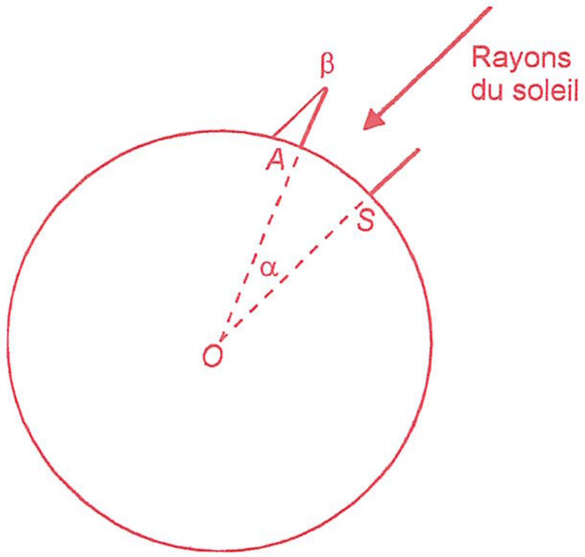
Math-Jeunes n° 88, 80–82, 1999

La circonférence de la terre

Michel Ballieu, *CREM (Nivelles)*

Troisième siècle avant notre ère. – Un mathématicien grec du nom d'**Ératosthène** a l'idée d'utiliser les ombres au soleil afin d'évaluer la longueur de la circonférence de la terre.

Il naquit environ onze ans après **Archimède**, c'est-à-dire vers 276 (av. J.-C.). Il avait remarqué qu'à midi, au solstice d'été, le soleil ne produisait pas d'ombre à Syène (S) – on y voyait le fond des puits – alors qu'à Alexandrie (A), à la même heure, un gnomon de cadran solaire – la «tige» du cadran – laissait une ombre telle que l'angle β de la figure ci-dessous valait 7 degrés et 12 minutes (un cinquantième de tour complet). Remarquons qu'on obtient le même résultat avec un pieu enfoncé verticalement dans le sol.



Comment obtenir l'angle à partir de la hauteur du gnomon ou du pieu et de la longueur de son ombre ?

Ératosthène pensait qu'Alexandrie était sur le même méridien que Syène (première source d'erreur. – Pourquoi ?)

Il savait que la distance séparant Syène d'Alexandrie était de 5 000 stades (deuxième source d'erreur. – Pourquoi ?)

Il supposait que les rayons du soleil étaient parallèles, ce qui est raisonnable, mais cependant faux dans l'absolu. – Pourquoi ?

Le stade était une unité de longueur utilisée en Grèce à l'époque. Sa valeur exacte n'est pas connue mais on peut accepter qu'il représentait environ 183 mètres.

Le raisonnement d'Ératosthène est alors le suivant :

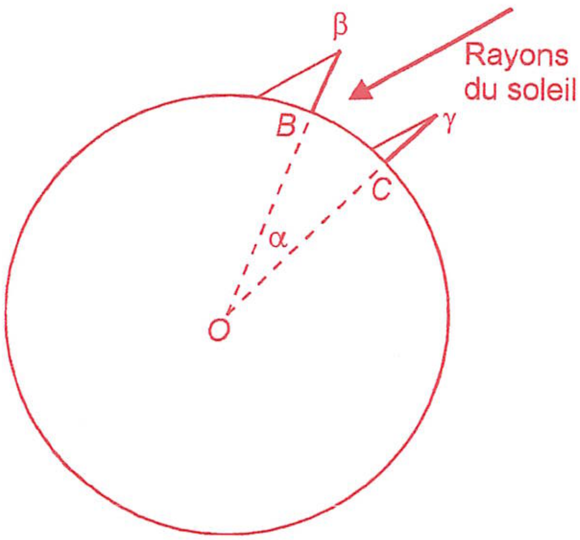
- L'angle α de la figure ci-dessus vaut 7 degrés et 12 minutes. – Pourquoi ?

- À $\alpha = 7°12' = \frac{1}{50} \times 360°$ correspond une distance de 5 000 stades et donc, pour la circonférence complète de $360°$, cela donne une longueur de $50 \times 5\,000$ stades, soit 250 000 stades ($\sim 45\,750$ km). – Pourquoi ? ... Il faut reconnaître que ce résultat n'est pas mal pour l'époque !

Le raisonnement ci-dessus s'appelle une *règle de trois.*

Toi aussi, tu peux mesurer le méridien terrestre. C'est un projet que tu peux présenter à ton professeur de mathématiques, en collaboration avec ton professeur de géographie. Il te faut également des copains qui fréquentent une école située quelques kilomètres plus au nord ou plus au sud que la tienne et qui acceptent de présenter aussi le projet à leurs professeurs.

Comment s'y prendre ? C'est simple. Regarde la figure ci-dessous.



Les deux écoles sont B et C, l'une située plus au nord que l'autre. Il faut mesurer le plus exactement possible la distance entre les deux écoles (voir le professeur de géographie). Il faut planter un bâton vertical en chacun des deux lieux et mesurer l'ombre des deux bâtons à un même moment de la journée aux deux endroits. On peut alors calculer les angles β et γ. Pour une meilleure précision, il est conseillé d'effectuer plusieurs mesures à différents moments et de prendre des valeurs moyennes de β et γ (voir le professeur de mathématique).

Pourquoi a-t-on

$$\alpha = \beta - \gamma \, ?$$

Si nous appelons d la distance entre les deux écoles et ℓ la longueur du méridien terrestre, il vient

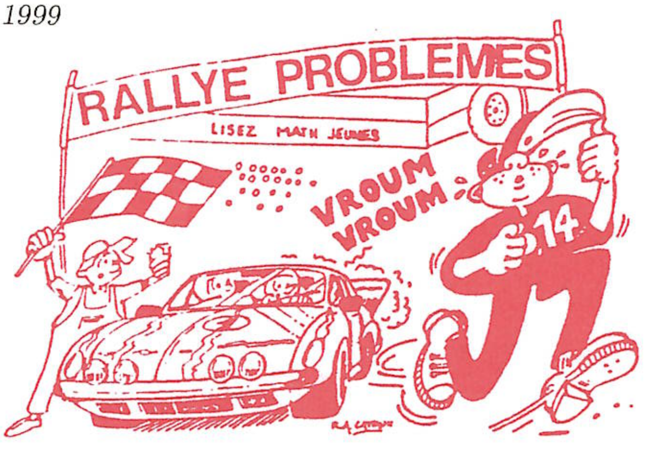
$$\frac{\alpha}{d} = \frac{360}{\ell} \text{ ou } \ell = \frac{360 \times d}{\alpha}$$

Justifie cette dernière affirmation !

Si tu te lances dans ce projet et que tu obtiens de «bons» résultats, écris-nous. Nous pouvons envisager de publier dans *Math-Jeunes* la relation en détail de l'expérience. Où se situent les deux écoles ? Comment la distance entre elles a-t-elle pu être estimée avec un maximum de précision ? Comment les mesures ont-elles été effectuées, à quel moment de la journée ? Quelles étaient les hauteurs des bâtons et les longueurs des ombres ? Quelles ont été les difficultés rencontrées ? Qui a participé au projet ? ... En fait, nous te donnons l'occasion de publier un véritable reportage dans *Math-Jeunes* ! Le défi est lancé.

Référence.

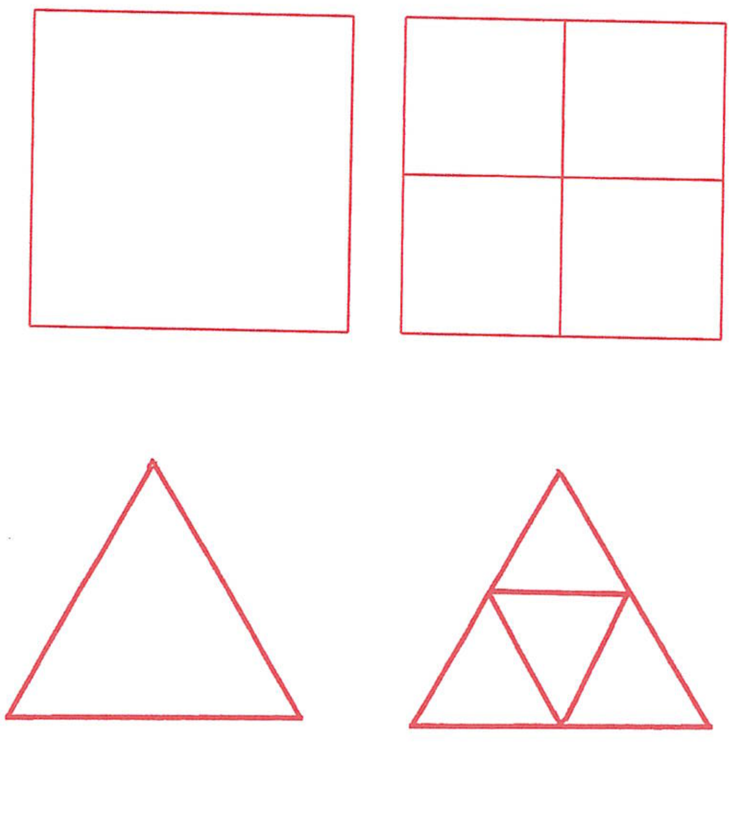
Learn from the Masters, ed. by F. SWETZ, J. FAUVEL, O. BEKKEN, B. JOHANSSON, V. KATZ, The Math. Ass. of America, 1995.



C. Festraets

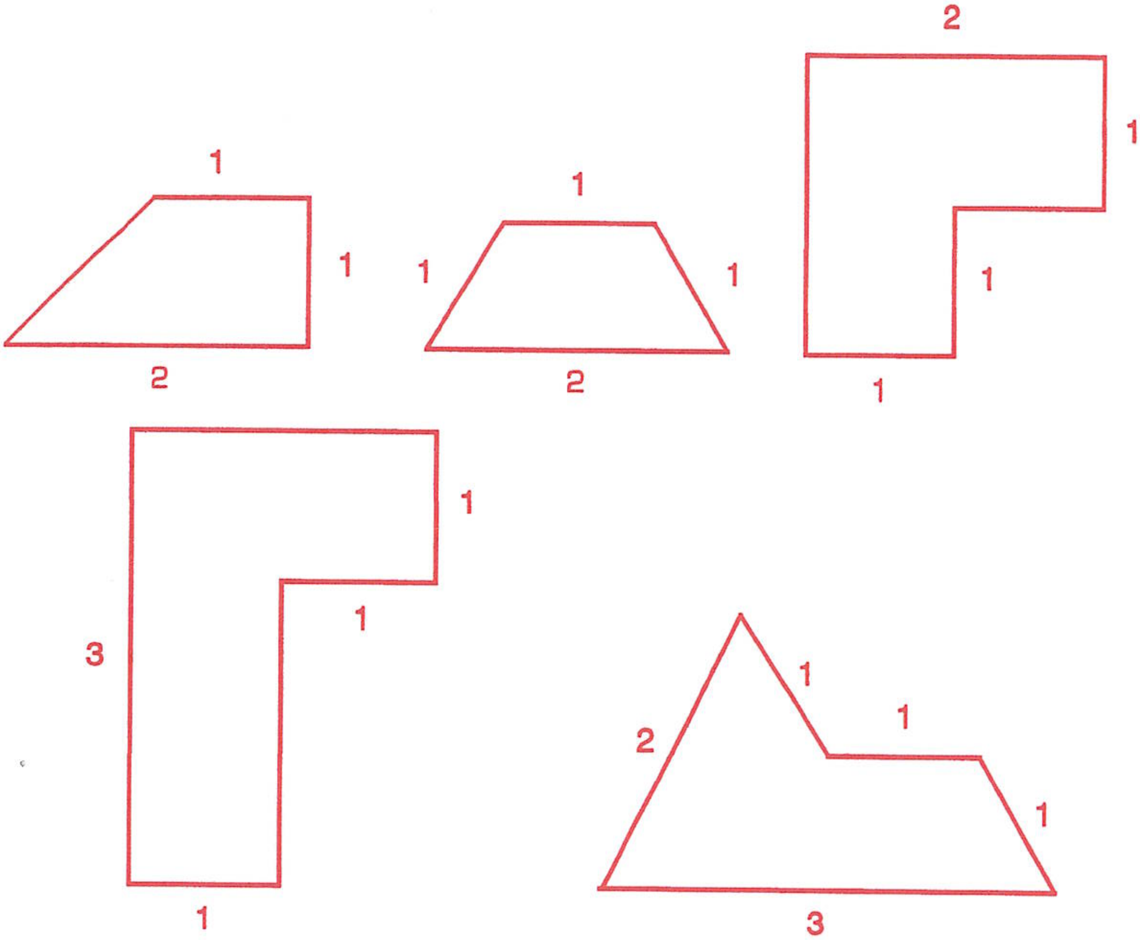
Voici les derniers problèmes du rallye 1998-1999. Les problèmes précédents ont suscité beaucoup de réponses, excellentes pour la plupart. Cependant n'oubliez pas de respecter toutes les instructions et en particulier de rédiger les solutions de chacun des problèmes sur des feuilles séparées ; sur chaque feuille doivent figurer vos nom et prénom, votre adresse, votre classe et l'adresse de votre école. Surtout, veillez à affranchir suffisamment votre lettre ! Les solutions sont à envoyer C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles pour le 24 avril 1999 au plus tard.

13. Partager un polygone en 4 parties de même aire semblables au polygone donné ; c'est facile pour un carré ou pour un triangle équilatéral :

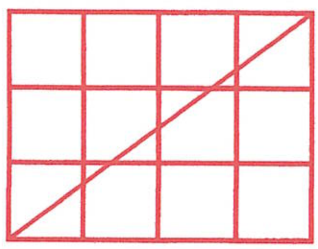


Pouvez-vous faire de même pour les figures suivantes ?

Pouvez-vous faire de même pour les figures suivantes ?



14. Dans un rectangle 4×3 partagé en 12 carrés 1×1, une diagonale traverse 6 petits carrés :



Combien une diagonale traverse-t-elle de carrés 1×1 dans un rectangle

(a) 6×9 ;

(b) 100×200 ;

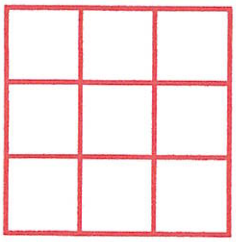
(c) $m \times n$ (m et n étant deux nombres naturels non nuls).

15. Tous les points du plan sont coloriés en rouge ou en bleu.

(a) Existe-t-il un rectangle dont les 4 sommets sont de la même couleur ?

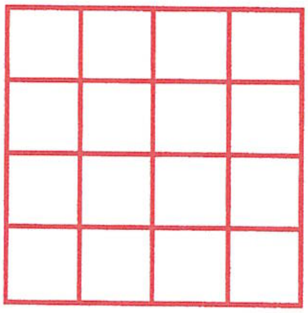
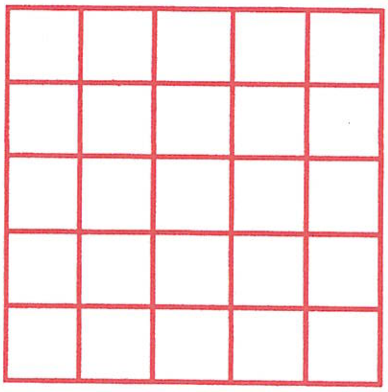
(b) Existe-t-il un triangle équilatéral dont les 3 sommets sont de la même couleur ?

16. (a) Dans la figure ci-dessous, combien comptez-vous de carrés (dont les côtés sont dessinés) ?



9 ? ... Non, il y en a davantage.

(b) Et dans celles-ci ?

(c) Et dans un carré de côté n divisé en carrés de côté 1 ?

17. Deux garçons ont volé des pommes, mais qui ? Ils sont six.

Henri dit «Charles et Georges» ; Jean dit «David et Thomas» ; David dit «Thomas et Charles» ; Georges dit «Henri et Charles» ; Charles dit «David et Jean».

Thomas est rentré chez lui. Un des garçons a totalement menti. Les quatre autres ont fourni un nom correct et un nom incorrect. Qui a volé les pommes ?

18. On définit l'opération $*$ comme suit :

$$\text{Quels que soient les réels positifs } x,\ y\ :\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

(a) Calculer $2 * 4$, $(2 * 4) * 6$, $((2 * 4) * 6) * 8$, $(((2 * 4) * 6) * 8) * 10$.

À votre avis, que vaut $(\ldots(((2 * 4) * 6) * 8) * \ldots * 1\,996) * 1\,998$?

Pourriez-vous le démontrer ?

(b) Calculer $(\ldots(((3 * 5) * 7) * 9) * \ldots * 1\,997) * 1\,999$.

(c) Calculer $(\ldots(((2 * 3) * 4) * 5) * \ldots * 1\,998) * 1\,999$.

Solution du problème 7

(a) Au pis aller, si la 1^e clé ne marche pas dans la 1^e serrure ni dans la 2^e, alors elle convient à la 3^e serrure.

Si la 2^e clé ne marche pas dans la 1^e serrure, alors elle convient à la 2^e. Reste la 3^e clé qui convient à la 1^e serrure. On a effectué au maximum $2+1=3$ essais.

(b) S'il y a 4 clés et 4 serrures, de la même façon, on essaie la 1^e clé dans trois serrures ; si elle ne marche pas, elle convient à la 4^e serrure. Puis on essaie la 2^e clé dans les deux premières serrures ; si elle ne marche pas, elle convient à la 3^e. Enfin, on essaie la 3^e clé dans la 1^e serrure ; si elle ne marche pas, elle convient à la 2^e serrure et dans ce cas, la 4^e clé convient à la 1^e serrure. Le nombre maximum d'essais est $3+2+1=6$.

(c) Avec n clés et n serrures, par le même procédé, on effectue au maximum

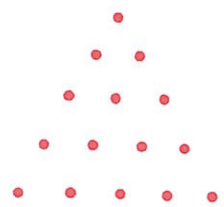
$$(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \text{ essais}$$

c'est-à-dire (voir solution du problème 5)

$$\frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1)=\frac{1}{2}n(n-1) \text{ essais}$$

Solution du problème 8

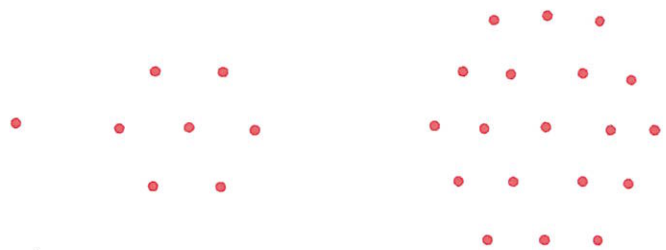
(a) Le 5ème nombre triangulaire est



Il vaut $1+2+3+4+5=15$ Le 100^e nombre triangulaire est égal à

$$1+2+3+\cdots+99+100=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)=5\,050.$$

(b) On remarque que les trois premiers nombres hexagonaux sont égaux à



1   1 + 6 = 7   1 + 6 + 12 = 19

Le suivant sera

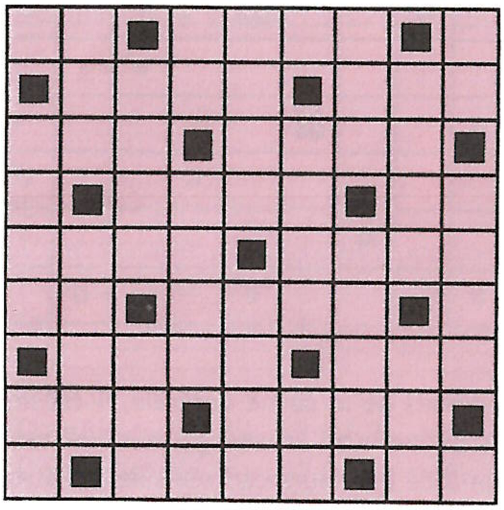
$$1+6+2\times 6+3\times 6=1+6+12+18=37.$$

Le 100^e sera

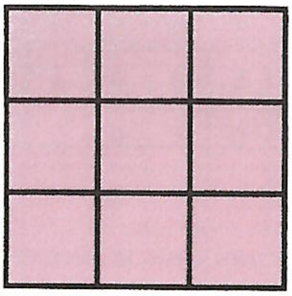
$$\begin{aligned}1+6+2\times 6+\cdots+99\times 6 &= 1+6(1+2+\cdots+99)\\ &= 1+6\times\frac{1}{2}\times 99\times(99+1)\\ &= 1+3\times 99\times 100=29\,701\end{aligned}$$

Solution du problème 9

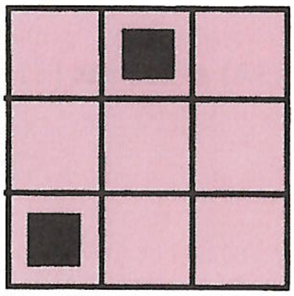
(a) On peut placer 17 jetons aux centres des cases ombrées dans la figure ci-dessous (le côté de chaque case mesure 1 cm, mais le dessin est fait à une échelle réduite).



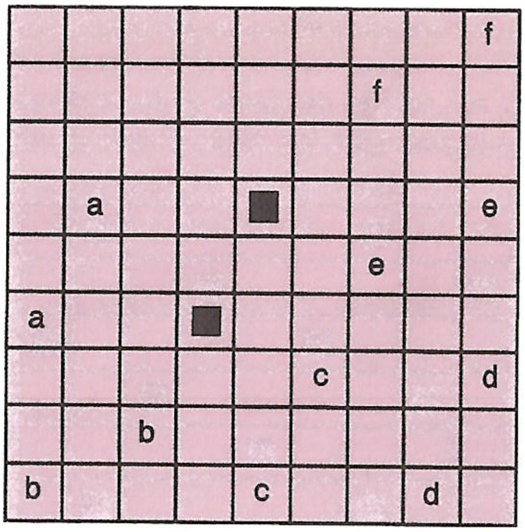
(b) Si on partage l'échiquier en 9 parties 3×3 comme indiqué ci-dessous, pour qu'il y ait au moins 18 jetons, il faut que chaque partie en contienne au moins 2.



Commençons par la partie centrale. Remarquons qu'il est impossible d'y placer trois jetons (dont les centres sont deux à deux distants d'au moins 2 cm). Mettons-y deux jetons. On ne peut pas placer de jeton au centre, sinon il est impossible de placer le second jeton à bonne distance. Il y a donc forcément un jeton dans une case de coin et l'autre dans une case centrale le long d'un bord :



Examinons les parties adjacentes à cette partie centrale, les seules cases possibles pour y placer deux jetons sont celles marquées successivement a, b, c, d, e et f.



Dans la partie 3×3 située au-dessus de la partie centrale, il est impossible de placer deux jetons. La partie centrale ne peut donc contenir qu'un seul jeton et 17 est le nombre maximum de jetons qui peuvent être placés de façon à ce que leurs centres soient distants d'au moins 2 cm.

Erratum

Nous nous devons de signaler deux erreurs dans le dernier numéro de *Math-Jeunes*. Nous prions nos lecteurs de bien vouloir nous en excuser.

La rédaction.

Page 26, *Ça m'agace*, G. Noël et F. Pourbaix.
La première ligne après le titre du paragraphe 2 n'a absolument pas sa raison d'être.

Page 56, Rubrique *Olympiade*
La réponse correcte à la question 8 est (A) et non pas (C).

Solutions des jeux

Le mot caché (par CéVé)

Le nom du mathématicien à découvrir était Gauss (Carl-Friederich, 1777-1855)

Les auto-réferences

Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4.

Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4.

Nombres croisés

	1	2	3	4	5
1	1	5	6	2	1
2	2	9	5	9	2
3	8	0	5	8	6
4	2	4	3	8	7
5	1	9	6	8	3

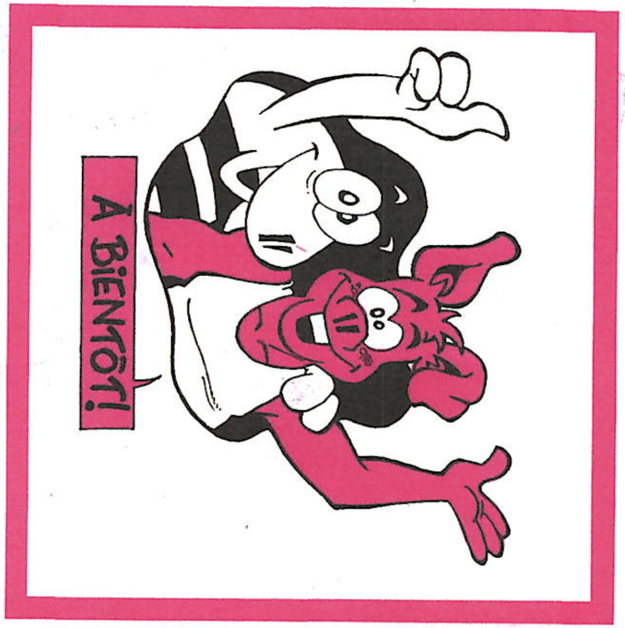
Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Rue A. Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124



Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée