MJ Math Jeunes

20e année
Avril 1999 — n° 89
Bureau de dépôt: 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 89 Vingtième année 1999

Math-Jeunes

Le jeu de Nim

M. Ballieu, *CREM (Nivelles)*

Note historique

Charles BOUTON [3] a fait une analyse complète de ce jeu et lui a «collé» une théorie mathématique. Selon lui, il était joué au début de ce siècle, sous certaines formes, dans pas mal de collèges américains et lors de certaines fêtes de charité. Quoiqu'on ait souvent attribué à ce jeu une origine orientale, il semble vraisemblable que son nom vient de l'impératif singulier du verbe allemand *nehmen* qui signifie *prendre*. Dans cette conjugaison, il s'écrit *nimm*; BOUTON aurait simplement fait sauter le «*m*» final.

Règles du jeu

Ce jeu oppose deux adversaires que nous appellerons M et J (deux initiales célèbres!). Sur une table, sont disposés trois tas de jetons. Le nombre de jetons de chaque tas est arbitraire; mais il est préférable, comme nous allons le voir, qu'il n'y ait pas, au départ, deux tas égaux. Les règles sont simples : un joueur, M ou J – peu importe car le jeu est impartial – sélectionne **un** des tas de jetons et en ôte **au moins un, plusieurs ou la pile entière.** Les joueurs opèrent chacun à leur tour; celui qui prend le ou les derniers jetons a gagné.

Stratégie du jeu

BOUTON remarque qu'il existe un ensemble de combinaisons qu'il appelle «*sûres*»; par exemple, un tas de 1, un tas de 2 et un tas de 3, que nous noterons $(1,2,3)$ ou encore $(1,4,5)$, $(1,6,7)$, $(2,4,6)$, $(5,9,12)$, ... Il démontre que, si l'un des joueurs parvient à laisser sur table l'une de ces combinaisons sûres, son adversaire ne pourra en faire autant, mais, par contre, qu'au coup suivant, le premier joueur sera à nouveau capable de laisser sur table une nouvelle combinaison sûre.

Il faut remarquer que :

1. si le jeu démarre avec un seul tas non vide, celui qui commence doit gagner (il lui suffit de prendre tous les jetons)
2. si on commence avec deux tas égaux, le second joueur doit gagner (il lui suffit d'imiter, dans l'autre tas, les mouvements du premier et, dès lors, il est sûr de ramasser le ou les derniers jetons)
3. si au départ, il y a sur table deux tas inégaux, le premier joueur doit gagner (il lui suffit d'égaliser les deux tas et il se trouve alors second joueur dans la position précédente)
4. s'il y a trois tas de jetons, en vertu de ce qui précède, le joueur qui, le premier, égalise deux tas ou en annule un est perdant. Si tu n'es pas convaincu de la véracité de cette dernière assertion, discutes-en avec un copain : elle résulte des affirmations 2 et 3!

Somme-Nim

Définissons une nouvelle opération sur l'ensemble des nombres naturels : la *somme-Nim*. Soient n nombres naturels $d_1, d_2, \ldots, d_n$ et soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ leurs équivalents dans le système de numération binaire. Ecrivons ces n nombres (en notatation binaire) sur n lignes, de manière telle que les unités binaires soient alignées à droite et effectuons alors, dans chaque colonne, une *addition modulo 2*. L'addition modulo 2 consiste à faire une addition «normale» puis à prendre le reste de la division du résultat par 2. L'équivalent, en numération décimale, du binaire ainsi obtenu s'appelle la *somme-Nim* des n nombres $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Comme exercice, je te propose de calculer la somme-Nim de 3, 7 et 9; tu dois trouver 13. De même, la somme-Nim de 5, 9 et 12 vaut 0.

Combinaison sûre

Bouton affirme qu'une combinaison est sûre si la somme-Nim des effectifs de ses tas vaut 0. Il raisonne ainsi : si deux nombres quelconques sont donnés, le troisième qui forme avec ceux-ci une combinaison sûre (somme-Nim = 0) est univoquement déterminé : il suffit, en effet, dans leur écriture binaire, de placer des 0 ou des 1 dans les différentes colonnes, de manière à totaliser 0 modulo 2 dans chacune des colonnes. Il est tout aussi évident de voir que, si trois nombres (a, b, c) constituent une combinaison sûre, deux quelconques d'entre eux déterminent univoquement le troisième.

Théorème 1

Si M laisse sur table une combinaison sûre, J ne peut en faire autant lors du prochain mouvement.

Démonstration : Puisque J ne peut modifier qu'une seule pile, il lui est impossible de se placer dans une combinaison sûre, puisque M avait laissé sur table, dans un certain tas, l'**unique** nombre de jetons qui formait avec ceux des deux autres tas une combinaison sûre.

Théorème 2

Si M laisse sur table une combinaison sûre et si J diminue l'un des tas, M peut toujours, au coup suivant, décrémenter l'une des deux autres piles, de manière à se replacer dans une combinaison sûre.

Démonstration : Il faut remarquer d'abord, que si un nombre binaire diminue, cela se traduit par le fait, qu'en l'examinant de gauche à droite, la première différence que l'on rencontre est un « 1 » qui se transforme en « 0 ». En effet, si, parcourant le nombre de gauche à droite, la première différence rencontrée était un « 0 » qui passe à « 1 », le nombre ne pourrait qu'augmenter, car la situation serait la suivante :

$$xx\ldots xx0xx\ldots xx$$
$$xx\ldots xx1yy\ldots yy$$

Le nombre de $(n+1)$ chiffres $0xx\ldots xx$ vaut **au maximum** $2^n - 1$, alors que le nombre de $(n+1)$ chiffres $1yy\ldots yy$ vaut **au minimum** 2^n.

Supposons que M ait laissé sur table une combinaison sûre et que J ait ensuite diminué l'un des tas, soit α le numéro de la première colonne (en lisant de gauche à droite) où un « 1 » a été remplacé par un « 0 ». Puisque M s'était placé dans une combinaison sûre, il ne peut plus y avoir dans cette colonne α qu'un seul « 1 » et ainsi, J ne peut se trouver dans une combinaison sûre. Par contre, au coup suivant, M sélectionnera la ligne où il reste un « 1 » en colonne α, changera ce « 1 » en « 0 », ce qui, en vertu de ce que nous venons de voir, diminue le nombre total de jetons et ensuite, il adaptera les colonnes situées à droite de la colonne α (les colonnes à gauche de la colonne α resteront évidemment inchangées) de manière à ce que la somme modulo 2 dans chacune des colonnes soit égale à 0. Ainsi, M aura récupéré une position sûre. En poursuivant ainsi le jeu, l'une des piles sera finalement annulée. Si J l'annule, puisqu'il est incapable de se placer dans une combinaison sûre, les deux tas restants seront nécessairement inégaux et M sera le vainqueur (voir ci-dessus). Par contre, si c'est M qui l'annule, puisqu'il lui est toujours possible de se placer dans une combinaison sûre, les deux piles restantes seront nécessairement égales et il ne pourra que gagner (voir également ci-dessus). Par conséquent, le premier joueur qui parvient à laisser sur table une combinaison sûre est certain de remporter la partie. Bon amusement !

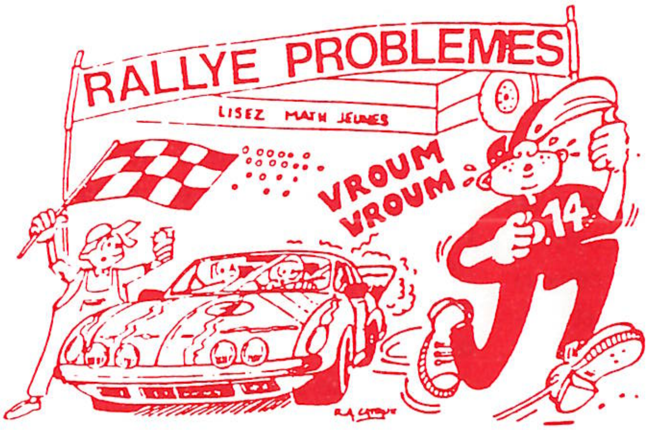
Bibliographie

[1] Ball W.W. Rouse — Coxeter H.S.M., *Mathematical Recreations and Essays*, 30th edition, Dover Publ. Inc., New York, 1987.

[2] Berlekamp E.R. — Conway J.H. — Guy R.K., *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press Inc., London, 1982 (2 vol.)

[3] Bouton Ch. L., *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Ann. of Math., Princeton 3(2), 1902, pp. 35-39.

Math-Jeunes n°89, 92–97, 1999



C. Festraets

Solution du problème 10

(a) Désignons les bâtons de chocolat par A, B, C, ..., H, I. La part de chaque enfant est $\frac{9}{5}$ de bâton, c'est-à-dire un bâton entier plus $\frac{4}{5}$ de bâton. Voici comment se fait le partage :

$$A + \frac{4}{5}B \qquad \frac{1}{5}B + C + \frac{3}{5}D \qquad \frac{2}{5}D + E + \frac{2}{5}F \qquad \frac{3}{5}F + G + \frac{1}{5}H \qquad \frac{4}{5}H + I$$

Les bâtons B, D, F, H n'ont été cassés qu'une seule fois.

(b) En utilisant le même procédé que ci-dessus, il est facile de voir que le partage est possible lorsque le nombre d'enfants est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18.

Par exemple, pour 12 enfants, chacun doit recevoir $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ de bâton ; voici les parts

$$\frac{3}{4}A \qquad \frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B \qquad \frac{2}{4}B + \frac{1}{4}C \qquad \frac{3}{4}C \qquad \frac{3}{4}D \qquad \frac{1}{4}D + \frac{2}{4}E$$

$$\frac{2}{4}E + \frac{1}{4}F \qquad \frac{3}{4}F \qquad \frac{3}{4}G \qquad \frac{1}{4}G + \frac{2}{4}H \qquad \frac{2}{4}H + \frac{1}{4}I \qquad \frac{3}{4}I$$

Pour 11 enfants, c'est impossible, chaque part doit être $\frac{9}{11}$ de bâton ; les six premières parts sont

$$\frac{9}{11}A \qquad \frac{2}{11}A + \frac{7}{11}B \qquad \frac{4}{11}B + \frac{5}{11}C \qquad \frac{6}{11}C + \frac{3}{11}D \qquad \frac{8}{11}D + \frac{1}{11}E \qquad \frac{9}{11}E$$

Il reste $\frac{1}{11}E$ et on constate que le bâton E a été cassé deux fois.

(c) Il y a n enfants et m bâtons de chocolat. Si $n \leq m$, le partage est toujours possible ; chaque enfant reçoit $\frac{m}{n}$ bâtons.

Posons $\frac{m}{n} = k + \frac{a}{n}$ avec k entier et $0 \leq a < n$.

La part du premier enfant est de k bâtons plus une fraction $\frac{a}{n}$ de bâton. Le deuxième prendra le morceau restant, c'est-à-dire $1 - \frac{a}{n}$, et complètera soit par k bâtons si $1 - \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$, soit par $(k-1)$ bâtons et un morceau de bâton égal à $\frac{2a}{n}$, et ainsi de suite. Les exemples donnés plus haut montrent comment se poursuit le partage.

Si $n > m$, alors $\dfrac{m}{n} < 1$ et chaque bâton est donc cassé une fois. Voici les parts :

$$\begin{array}{ccl}
\frac{m}{n} & \text{le reste vaut} & 1-\frac{m}{n}=\frac{n-m}{n} \\
\frac{n-m}{n}+\frac{2m-n}{n} & \text{le reste vaut} & 1-\frac{2m-n}{n}=\frac{2n-2m}{n} \\
\frac{2n-2m}{n}=\frac{3m-2n}{n} & \text{le reste vaut} & 1-\frac{3m-2n}{n}=\frac{3n-3m}{n} \\
\vdots & \vdots & \\
\frac{kn-km}{n} & \text{le reste vaut} & 0
\end{array}$$

en supposant qu'au $(k+1)^{\text{e}}$ enfant, le $(k+1)^{\text{e}}$ bâton ne doive pas être cassé pour compléter sa part.

On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\tfrac{kn-km}{n} &= \tfrac{m}{n} \\
kn-km &= m \\
n &= \tfrac{m(k+1)}{k}
\end{aligned}$$

k et $k+1$ sont premiers entre eux, donc k est un diviseur de m.

Par exemple, pour $m=9$, $k \in \{1,3,9\}$; si $k=1$, alors $n = \dfrac{9(1+1)}{1} = 18$; si $k=3$, alors $n = \dfrac{9(1+3)}{3} = 12$ et si $k=9$, alors $n = \dfrac{9(1+9)}{9} = 10$.

Solution du problème 11

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}} &= \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{4}}}} \\
&= \frac{1}{2+\frac{4}{13}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{13}}} \\
&= \frac{1}{\frac{30}{13}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{13}}} \\
&= \frac{13}{30}+\frac{1}{1+\frac{13}{17}} \\
&= \frac{13}{30}+\frac{1}{\frac{30}{17}} \\
&= \frac{13}{30}+\frac{17}{30} \\
&= 1
\end{aligned}$$

un calcul analogue montre que

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}=1$$

(b) On peut présumer que cette somme vaut aussi 1, démontrons-le. Posons

$$A=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{1999}}}}}}$$

La somme s'écrit alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+A}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+A}} &= \frac{1}{2+A}+\cfrac{1}{\cfrac{2+A}{1+A}}\\ &= \frac{1}{2+A}+\frac{1+A}{2+A}\\ &= \frac{2+A}{2+A}\\ &= 1\end{aligned}$$

Solution du problème 12

(a) Les carrés parfaits entre 1 et 10^{30} sont

$$1^2, 2^2, 3^2, \cdots, \left(10^{15}\right)^2$$

Il y en a 10^{15}. Donc $(10^{30}-10^{15})$ nombres ne sont pas des carrés parfaits.

(b) Les cubes parfaits entre 1 et 10^{30} sont

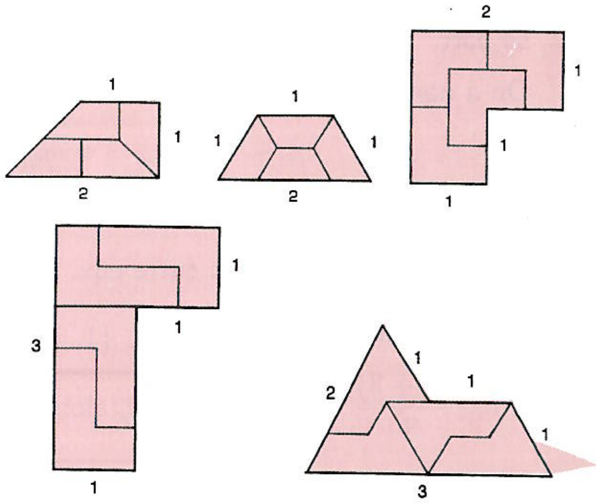
$$1^3, 2^3, 3^3, \cdots, \left(10^{10}\right)^3$$

Il y en a 10^{10}. Donc $(10^{30}-10^{10})$ nombres ne sont pas des cubes parfaits.

(c) Il y a 10^{15} carrés parfaits et 10^{10} cubes parfaits entre 1 et 10^{30} ; mais certains sont à la fois carrés et cubes parfaits, ce sont les sixièmes puissances : 1^6, 2^6, 3^6, $\ldots$, $(10^5)^6$. il y en a 10^5.

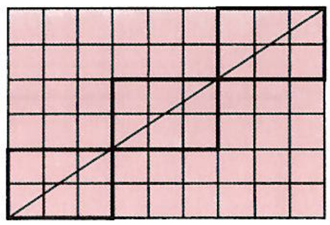
L'ensemble de nombres carrés ou cubes parfaits entre 1 et 10^{30} comprend donc $(10^{15}+10^{10}-10^5)$ éléments et il y a $10^{30}-(10^{15}+10^{10}-10^5)$ nombres qui ne sont ni carrés ni cubes parfaits.

Solution du problème 13

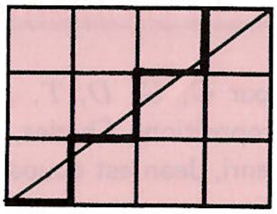


Solution du problème 14

(a)



Dans un rectangle 6×9, la diagonale traverse 12 carrés 1×1. Remarquons que cette diagonale passe par les sommets de trois rectangles 2×3 parce que les nombres 6 et 9 ne sont pas premiers entre eux ; leur pgcd vaut 3. Quand les dimensions du rectangle sont deux nombres premiers entre eux, par exemple 4 et 3, il suffit de compter le nombre de côtés horizontaux (3) et de côtés verticaux (3) traversés par la diagonale en partant du sommet inférieur gauche :



On obtient $6 = 4 + 3 - 1$ carrés 1×1 traversés par la diagonale (longueur + largeur − 1).

(b) Le pgcd de 100 et 200 est 100 ; la diagonale va passer par les sommets de 100 rectangles 1×2 ; dans chacun de ceux-ci, elle traverse $2 = 2+1-1$ carrés 1×1, donc au total elle traverse $2 \times 100 = 200$ carrés 1×1.

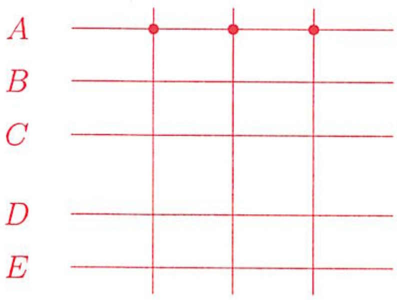
(c) Dans un rectangle $m \times n$, la diagonale traverse $(\frac{m}{d}+\frac{n}{d}-1) \times d = m+n-d$ carrés 1×1, en désignant par d le pgcd de m et n.

Solution du problème 15

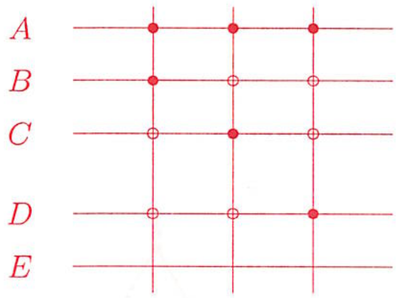
Toute droite comprend une infinité de points, donc une infinité de points bleus ou (ou non exclusif) une infinité de points rouges. Sur les figures, les points bleus seront de petits ronds noirs et les points rouges de petits ronds blancs.

Considérons, par exemple, une droite A qui contient une infinité de points bleus.

(a) Par trois points bleus de A, traçons les perpendiculaires à A. Menons les droites B, C, D, E parallèles à A.

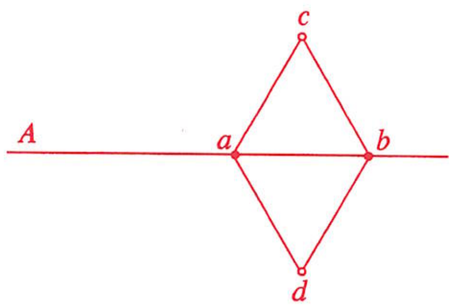


Les sommets de ce quadrillage sont des points rouges ou bleus. Si, sur l'une des droites B, C, D ou E, il y a deux points du quadrillage qui sont bleus, alors ils forment avec les points de A un rectangle dont les 4 sommets sont bleus. Sinon, il y a aux sommets du quadrillage sur B au plus un point bleu et donc les deux autres sont rouges. De même sur C et sur D. Plaçons ces points de manière qu'aucun rectangle n'ait ses 4 sommets rouges.

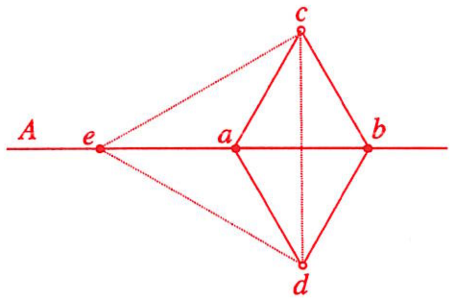


Et maintenant, quelle que soit la manière de colorier les points du quadrillage sur E, il y a toujours un rectangle dont les 4 sommets sont de la même couleur.

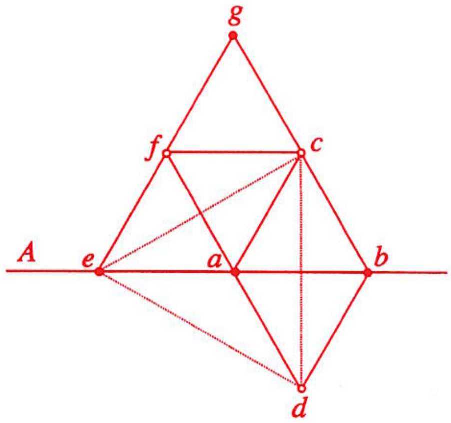
(b) À partir de deux points bleus a et b de A, construisons deux triangles équilatéraux abc et abd. Si c ou d est bleu, alors un triangle équilatéral a ses trois sommets bleus. Dessinons donc c et d en rouge.



Construisons le triangle équilatéral cde, en plaçant e à gauche de a. Le point e est sur la droite A tel que $|ea| = |ab|$ et e est bleu, sinon le triangle équilatéral cde a ses trois sommets rouges.



Construisons le triangle équilatéral aef. f est rouge, sinon le triangle aef a ses trois sommets bleus. Construisons le triangle équilatéral cfg. g est bleu, sinon le triangle cfg a ses trois sommets rouges. Mais alors le triangle beg est équilatéral et ses trois sommets sont bleus.



Solution du problème 16

(a) Dans le carré 3×3, on compte 14 carrés : 9 carrés 1×1, 4 carrés 2×2 et 1 carré 3×3.

(b) Dans le carré 4×4, on compte 30 carrés : 16 carrés 1×1, 9 carrés 2×2, 4 carrés 3×3 et 1 carré 4×4.

Dans le carré 5×5, on compte 55 carrés : 25 carrés 1×1, 16 carrés 2×2, 9 carrés 3×3, 4 carrés 4×4 et 1 carré 5×5.

(c) Dans un carré $n \times n$, il y a $n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$ carrés .

Solution du problème 17

Désignons par C, G, D, T, H, J respectivement les propositions Charles, Georges, David, Thomas, Henri, Jean est coupable.

Parmi les cinq propositions

$$C \text{ ou } G \qquad D \text{ ou } T \qquad C \text{ ou } T$$
$$C \text{ ou } H \qquad D \text{ ou } J$$

quatre sont vraies et une est fausse.

Les cinq propositions

$$C \text{ et } G \qquad D \text{ et } T \qquad C \text{ et } T$$
$$C \text{ et } H \qquad D \text{ et } J$$

sont toutes fausses.

Si Henri est le menteur complet, C et G sont fausses donc T, H sont vraies ; mais alors D et J sont fausses, donc Charles a aussi totalement menti, ce qui n'est pas possible.

Si Jean est le menteur complet, D et T sont fausses donc C, J sont vraies.

Si David est le menteur complet, C et T sont fausses donc G, D, H sont vraies, ce qui n'est pas possible car il n'y a que deux coupables.

Si Georges est le menteur complet, C et H sont fausses donc G, T sont vraies, mais alors D et J sont fausses, ce qui n'est pas possible.

Si Charles est le menteur complet, D et J sont fausses donc T est vraie, C est fausse, G et H sont vraies, ce qui donne 3 coupables.

On a donc une seule possibilité : les voleurs de pommes sont Charles et Jean.

Solution du problème 18

(a) $2 * 4 = \dfrac{2+4}{1+2\times 4} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

$(2*4)*6 = \dfrac{2}{3}*6 = \dfrac{\frac{2}{3}+6}{1+\frac{2}{3}\times 6} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$

$((2*4)*6)*8 = \dfrac{4}{3}*8 = \dfrac{\frac{4}{3}+8}{1+\frac{4}{3}\times 8} = \dfrac{28}{35} = \dfrac{4}{5}$

$(((2*4)*6)*8)*10 = \dfrac{4}{5}*10 = \dfrac{\frac{4}{5}+10}{1+\frac{4}{5}\times 10} = \dfrac{54}{45} = \dfrac{6}{5}$

$((((2*4)*6)*8*10)*12 = \dfrac{6}{5}*12 = \dfrac{\frac{6}{5}+12}{1+\frac{6}{5}\times 12} = \dfrac{66}{77} = \dfrac{6}{7}$

On constate que le résultat est une fraction de la forme $\dfrac{n}{n+1}$ ou $\dfrac{n+1}{n}$ selon que le nombre n de « facteurs » du « produit » est pair ou impair.

On peut présumer que

$$(\cdots(((2*4)*6)*8)*\cdots*1\,996)*1\,998 = \frac{1\,000}{999}$$

puisqu'il y a 999 « facteurs ». Démontrons le. Si $(\cdots((2*4)*6)*\cdots*2n) = \dfrac{n+1}{n}$, alors
$(\cdots((2*4)*6)*\cdots*2n)*(2n+2) = \dfrac{\frac{n}{n+1}+2n+2}{1+\frac{n}{n+1}\cdot(2n+2)} = \dfrac{2n^2+5n+2}{2n^2+3n+1} = \dfrac{(n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{n+2}{n+1}$

et si $(\cdots((2*4)*6)*\cdots*2n) = \dfrac{n}{n+1}$, alors
$(\cdots((2*4)*6)*\cdots*2n)*(2n+2) = \dfrac{\frac{n+1}{n}+2n+2}{1+\frac{n+1}{n}\cdot(2n+2)} = \dfrac{2n^2+3n+2}{2n^2+5n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+1)} = \dfrac{n+1}{n+2}$

(b) De même, on obtient

$$3*5 = \frac{2}{4} \quad (3*5)*7 = \frac{5}{3} \quad ((3*5)*7)*9 = \frac{4}{6}$$

$$(((3*5)*7)*9)*11 = \frac{7}{5} \quad ((((3*5)*7)*9)*11)*13 = \frac{6}{8}$$

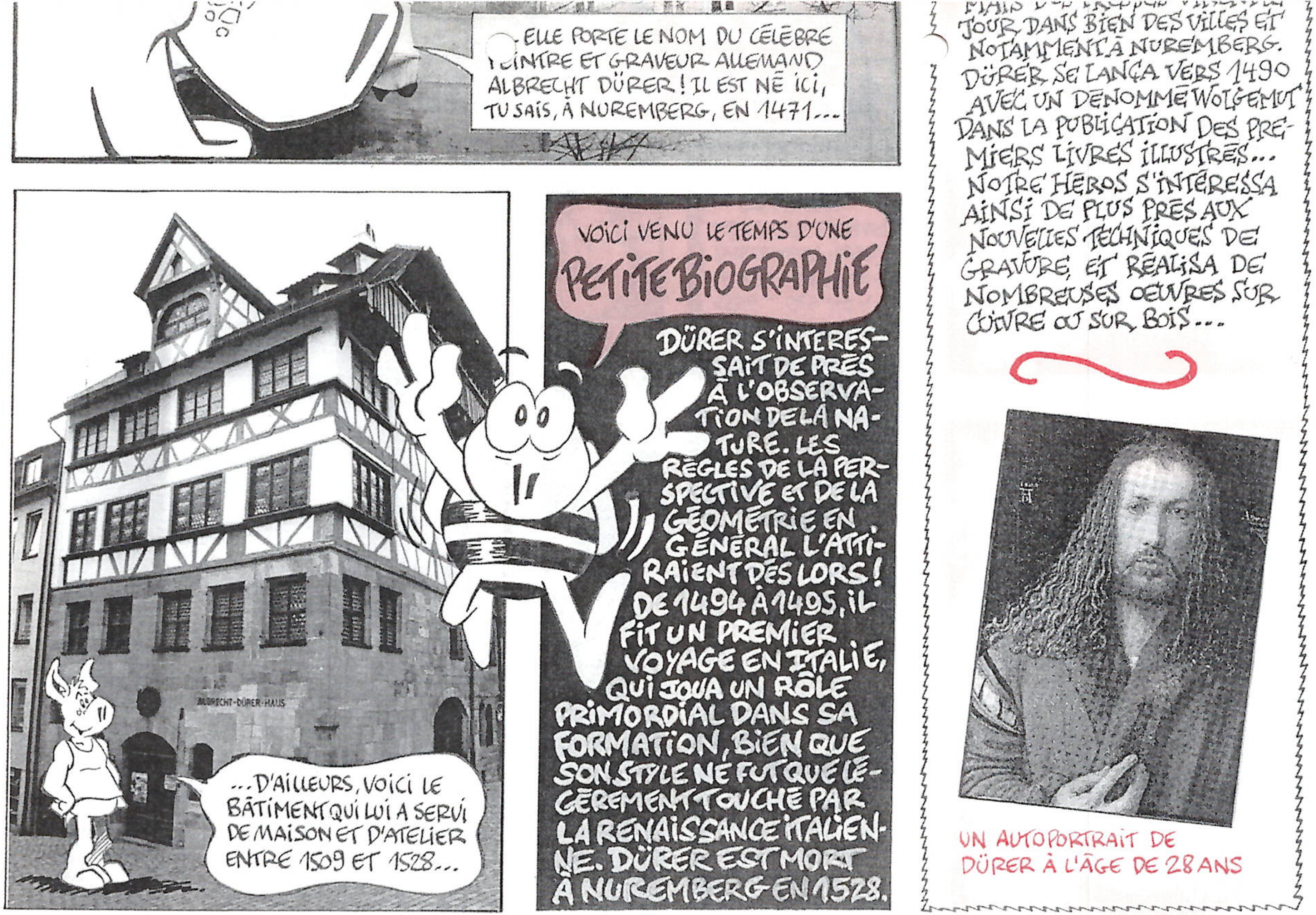
Le résultat est une fraction de la forme $\dfrac{n}{n+2}$ ou $\dfrac{n+2}{n}$ selon que le nombre n de « facteurs » du « produit » est pair ou impair. D'où

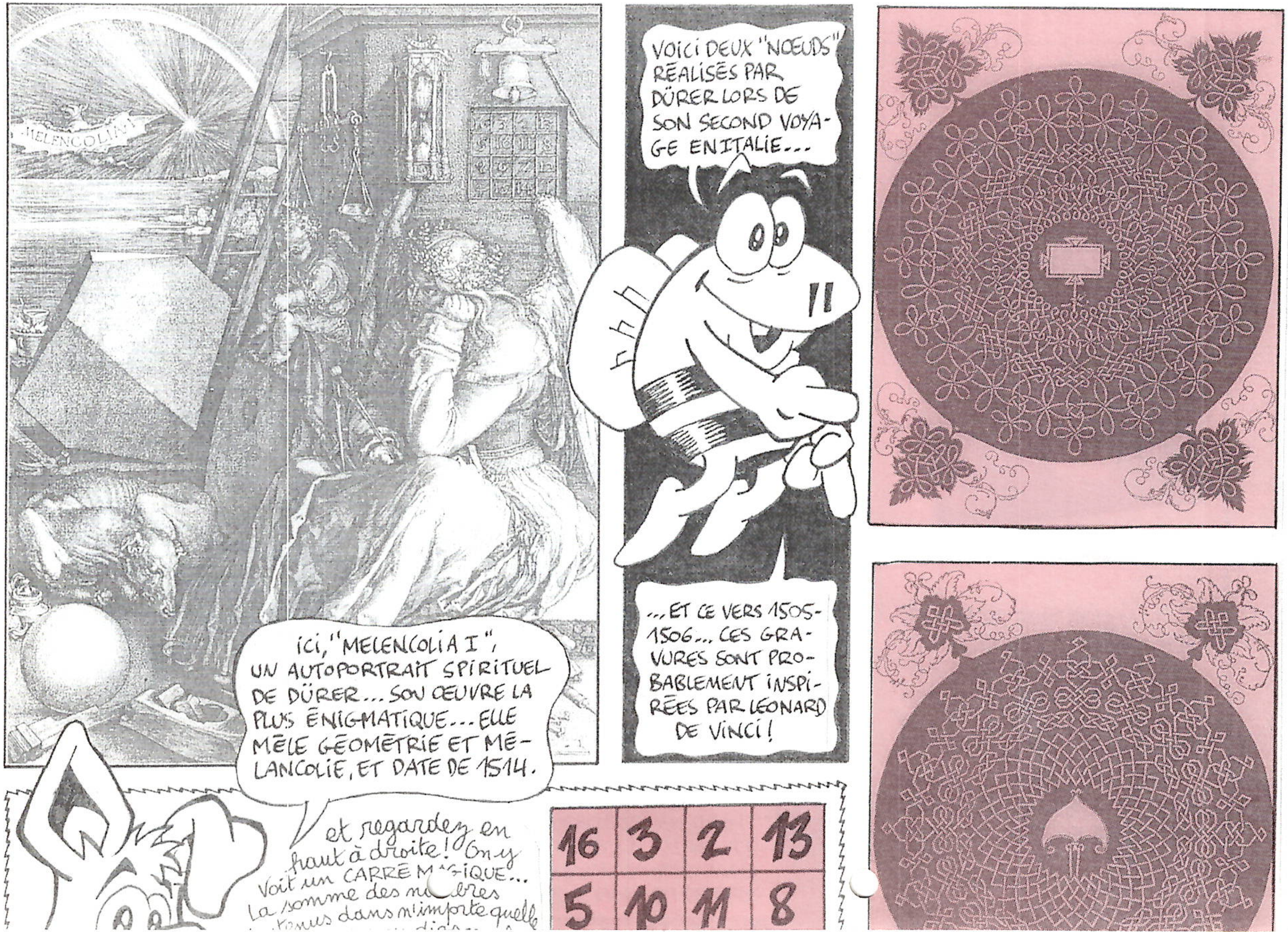
$$(\cdots(((3*5)*7)*9)*\cdots*1\,999 = \frac{1\,000}{998}$$

(c) Il est facile de voir que l'opération $*$ est commutative et associative.

$(\cdots((((2*3)*4)*5)*6)*\cdots*1\,998)*1\,999 = \dfrac{1\,000}{999}*\dfrac{1\,000}{998} = \dfrac{\frac{1\,000}{999}+\frac{1\,000}{998}}{1+\frac{1\,000}{998}\times\frac{1\,000}{999}} = \dfrac{998\,500}{997\,503}$

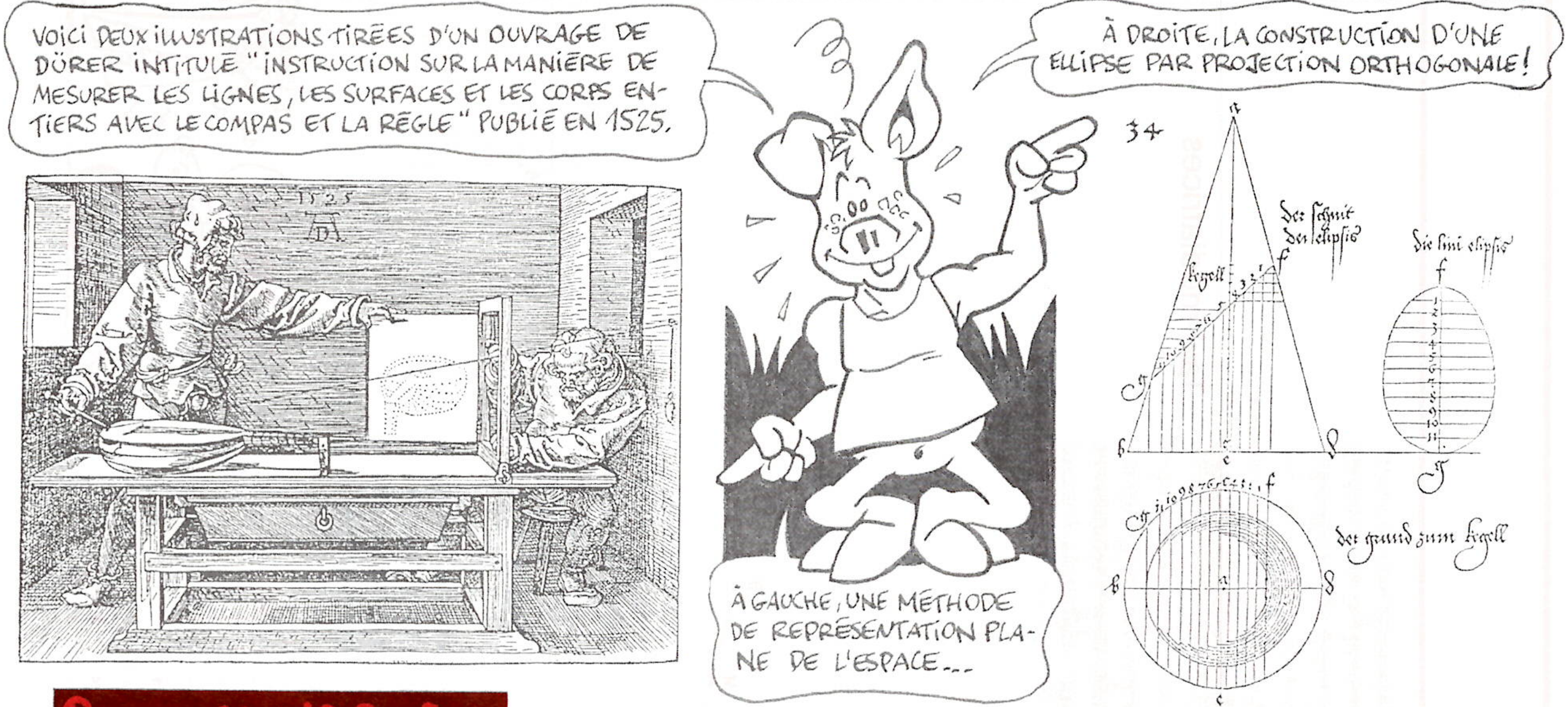
Math-Jeunes n°89, 98–101, 1999


…ELLE PORTE LE NOM DU CÉLÈBRE PEINTRE ET GRAVEUR ALLEMAND ALBRECHT DÜRER ! IL EST NÉ ICI, TU SAIS, À NUREMBERG, EN 1471…
VOICI VENU LE TEMPS D'UNE PETITE BIOGRAPHIE
DÜRER S'INTÉRESSAIT DE PRÈS À L'OBSERVATION DE LA NATURE. LES RÈGLES DE LA PERSPECTIVE ET DE LA GÉOMÉTRIE EN GÉNÉRAL L'ATTIRAIENT DÈS LORS ! DE 1494 À 1495, IL FIT UN PREMIER VOYAGE EN ITALIE, QUI JOUA UN RÔLE PRIMORDIAL DANS SA FORMATION, BIEN QUE SON STYLE NE FUT QUE LÉGÈREMENT TOUCHÉ PAR LA RENAISSANCE ITALIENNE. DÜRER EST MORT À NUREMBERG EN 1528.
ALBRECHT-DÜRER-HAUS
…D'AILLEURS, VOICI LE BÂTIMENT QUI LUI A SERVI DE MAISON ET D'ATELIER ENTRE 1509 ET 1528…
JOUR, DANS BIEN DES VILLES ET NOTAMMENT À NUREMBERG. DÜRER SE LANÇA VERS 1490 AVEC UN DÉNOMMÉ WOLGEMUT DANS LA PUBLICATION DES PREMIERS LIVRES ILLUSTRÉS… NOTRE HÉROS S'INTÉRESSA AINSI DE PLUS PRÈS AUX NOUVELLES TECHNIQUES DE GRAVURE, ET RÉALISA DE NOMBREUSES OEUVRES SUR CUIVRE OU SUR BOIS…
UN AUTOPORTRAIT DE DÜRER À L'ÂGE DE 28 ANS


MELENCOLIA
VOICI DEUX "NOEUDS" RÉALISÉS PAR DÜRER LORS DE SON SECOND VOYAGE EN ITALIE...
...ET CE VERS 1505-1506... CES GRAVURES SONT PROBABLEMENT INSPIRÉES PAR LÉONARD DE VINCI!
ICI, "MELENCOLIA I", UN AUTOPORTRAIT SPIRITUEL DE DÜRER... SON ŒUVRE LA PLUS ÉNIGMATIQUE... ELLE MÊLE GÉOMÉTRIE ET MÉLANCOLIE, ET DATE DE 1514.
et regardez en haut à droite! On y voit un CARRÉ MAGIQUE... La somme des
16 3 2 13
5 10 11 8

9	6	7	12
4	15	14	1

ALBRECHT DÜRER ET LE MONDE DE LA GÉOMÉTRIE ! OLÉ !..



POUR EN SAVOIR PLUS...

* MUSÉE DU PETIT PALAIS, "ALBRECHT DÜRER - OEUVRE GRAVÉ", CATALOGUE D'EXPOSITION, PARIS MUSÉES 1996
* SITE SUR LE WEB : HTTP://MEXPLAZA.UDG.MX/WM/PAINT/AUTH/DURER/DURER.FR.HTML PAR NICOLAS PIOCH
* JEANNE PEIFFER, "DÜRER GÉOMÈTRE", CONFÉRENCE AUTOUR DE SA TRADUCTION DU LIVRE DE DÜRER, 1995 - 1999

Dédié à Heidrun, Wally, Arved et Josef !

 Math-Jeunes n° 89, 102–106, 1999

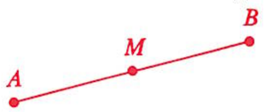
Taxi-choses et taxi-trucs (3)

Claude Villers

Mathieu continuait à se poser des questions en relation avcec cette histoire de taxi-distance.
Dans le plan habituel (plan Euclidien), des relations de distances créent des objets divers comme le milieu d'un segment, sa médiatrice, les cercles, etc.
Qu'est-ce que cela devient dans l'ensemble des nœuds d'un quadrillage si je me sers de la taxi-distance ? Des taxi-milieux, des taxi-médiatrices, des taxi-cercles ? Cela me semble bigrement intéressant. Alors au travail !

Taxi-milieux

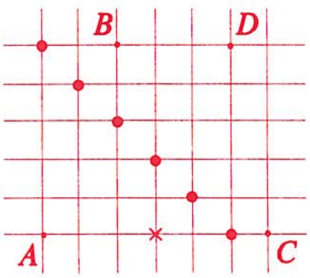
Dans le plan habituel (plan d'Euclide), la distance entre deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$ qui les relie. Tout segment $[AB]$ admet un (et un seul) milieu M lui appartenant et on a : $\mathrm{d}(AM) = \mathrm{d}(MB) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(AB)$



De la même façon, il est possible de définir comme taxi-milieu d'un couple (A, B) de nœuds A et B d'un quadrillage, un nœud M du quadrillage tel que $\mathrm{td}(A, M) = \mathrm{td}(M, B) = \frac{1}{2}\mathrm{td}(A, B)$ (où td est l'abréviation de « taxi-distance »).

Réalisez quelques dessins et vous remarquerez vite que deux nœuds d'un quadrillage peuvent très bien ne pas admettre de milieu, admettre un seul milieu ou admettre plusieurs milieux.

En voici quelques exemples.



- (A, B) ne possède pas de milieu (pourquoi ?).
- (A, C) possède un seul milieu (nœud étoilé).
- (A, D) possède 6 milieux (nœuds en gras).

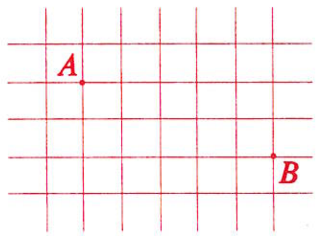
Taxi-médiatrices

A et B étant deux nœuds d'un quadrillage, la taxi-médiatrice de (A, B) est l'ensemble des nœuds situés à égales taxi-distances de A et de B. Cette définition n'est qu'une adaptation de la définition de la médiatrice d'un segment en géométrie plane classique.

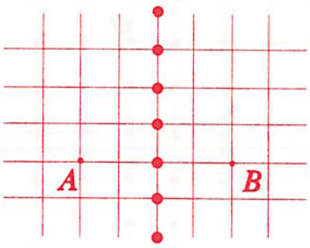
Réalisez quelques dessins d'investigation avant de lire la suite !

Vous avez certainement pu constater que :

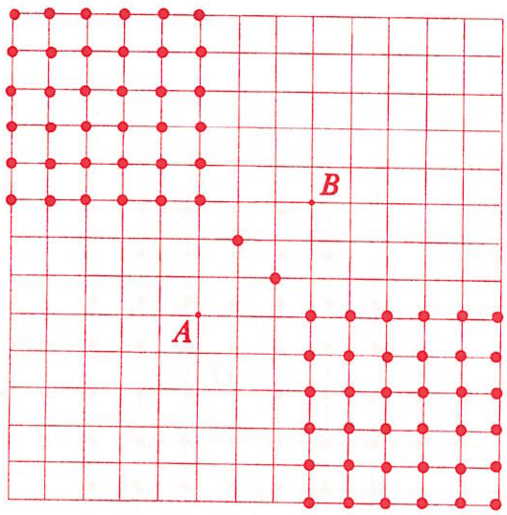
- Si $\mathrm{td}(A, B)$ est impaire alors (A, B) qui n'admet pas de milieu, n'admet pas non plus de taxi-médiatrice. Ci-dessous, $\mathrm{td}(A, B) = 7$, (A, B) n'admet pas de taxi-médiatrice.



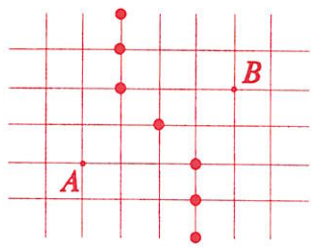
- Si $\mathrm{td}(A, B)$ est paire et si A et B appartiennent à la même droite du quadrillage alors la taxi-médiatrice de (A, B) est un alignement de nœuds (en gras ci-dessous).



- Si $\mathrm{td}(A, B)$ est paire et si A et B appartiennent à une droite d'une direction diagonale du quadrillage alors la taxi-médiatrice de (A, B) est la réunion d'un alignement de points et de deux parties du « plan ».



- Et enfin, voici « l'allure » de la taxi-médiatrice de (A, B) dans les autres cas.

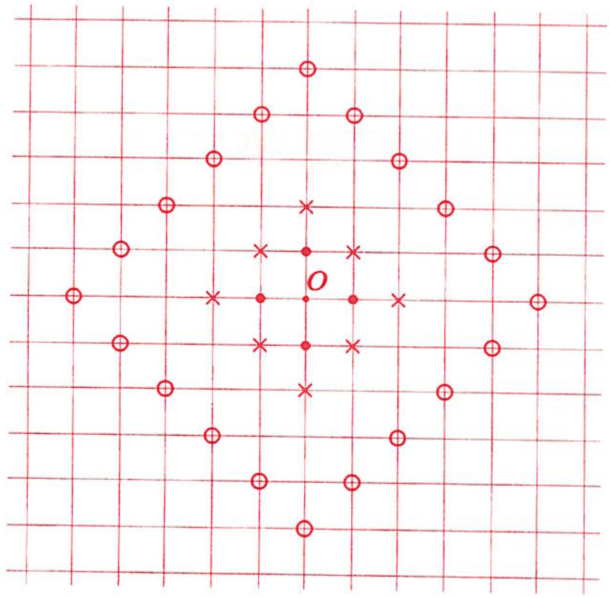


Taxi-cercles

O est un nœud d'un quadrillage et n est un nombre naturel. Le taxi-cercle de centre O et de rayon n est l'ensemble des nœuds C du quadrillage tels que $\mathrm{td}(O, C) = n$. Comme vous pouviez vous en douter, on n'a fait qu'adapter la définition euclidienne du cercle de centre O et de rayon r.

Ci-après, $\mathrm{tC}(O, n)$ désigne le taxi-cercle de centre O et dont le rayon est le naturel n.

Voici des illustrations de taxi-cercles. Vous pouvez en construire d'autres.



- $\mathrm{tC}(O, 0)$ comprend un seul point : O lui-même.

- $\mathrm{tC}(O, 1)$ comprend quatre points (en gras sur la figure).

- $\mathrm{tC}(O, 2)$ comprend huit points (étoilés sur la figure).

- $\mathrm{tC}(O, 5)$ comprend vingt points (cerclés sur la figure).

Ce qui précède doit inciter à découvrir une loi (formule) générale donnant le « **périmètre** » (c'est-à-dire le nombre de points) du $\mathrm{tC}(O, n)$ en fonction de n. Nous le noterons $\mathrm{P}(\mathrm{tC}(O, n))$.

Un tableau donne généralement des idées à ce sujet.

Rayon du tC	0	1	2	3	4	5	6	...	n
P du tC	1	4	8	12	16	20	24	...	?

Vous avez certainement trouvé ce qui doit être écrit à la place du ?. C'est évidemment $4n$.

C'est assez simple à comprendre et à justifier. $\mathrm{tC}(O, n)$ est formé de quatre alignements de n points, il comprend donc $4n$ points.

Attention ! Cette formule n'est valable que pour les naturels non nuls.

On peut donc dire que

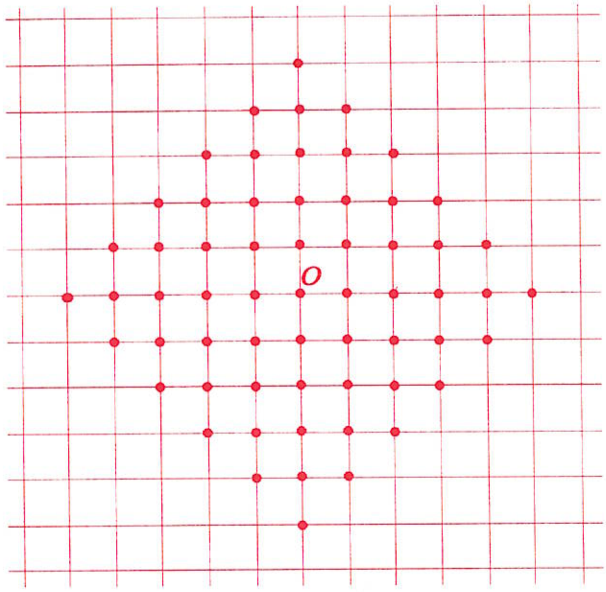
$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{tC}(O, n)) = 4n \quad (n \neq 0).}$$

Pourquoi ne pas parler de la « superficie » (ou « aire » si vous préférez) d'un taxi-cercle ? Tout naturellement, cette superficie (ou aire) peut être définie comme le nombre de points compris sur et dans le taxi-cercle. On peut aussi dire que c'est le nombre de points du taxi-disque, c'est à dire de l'ensemble des nœuds du quadrillage tels que $\mathrm{td}(O, C) \leq n$.

Il est assez simple de voir que $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 0)) = 1$, $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 1)) = 5$ et $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 2)) = 13$ (où $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, n))$ désigne la superficie (ou aire) du taxi-cercle de centre O et dont le rayon est le naturel n).

Observez et utilisez la figure suivante pour calculer $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 3))$, $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 4))$ et $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, 5))$.

Cherchez aussi une formule générale donnant $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O, n))$ en fonction de n. Bon travail !



À nouveau, un tableau va nous aider à voir clair.

Rayon du tC	0	1	2	3	4	5	...	n
S du tC	1	5	13	25	41	61	...	?

Avez-vous trouvé une formule ?

Si non, cherchez un peu avant de lire la suite.

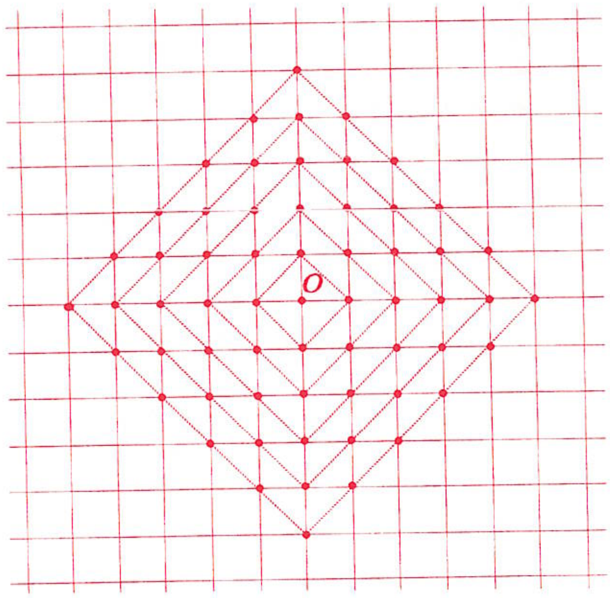
*

*

*

Voici une manière de l'établir.

La superficie du $\mathrm{tC}(O, n)$ est formée de « couches » composées elles-mêmes des points de différents tC.



Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,5)) &= \mathrm{P}(\mathrm{tC}(O,0)) + \mathrm{P}(\mathrm{tC}(O,1)) + \\ &\quad \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{tC}(O,5)) \\ &= 1+4+8+12+16+20 \\ &= 61 \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,n)) &= 1+4+8+12+\cdots+4n \\ &= 1+4(1+2+3+\cdots+n) \end{aligned}$$

Or, $1+2+3+4+5+..+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (1)
D'où : $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,n)) = 1+2n(n+1)$ ou encore

$$\boxed{\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,n)) = 2n^2+2n+1}$$

On a bien $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,5) = 2\times 5^2 + 2\times 5 + 1 = 61$.
De même $\mathrm{S}(\mathrm{tC}(O,100)) = 2\times 100^2 + 2\times 100 + 1 = 20201$

Le tableau suivant donne le nombre de points (à coordonnées entières) d'un taxi-cercle et d'un taxi-disque en fonction de son rayon n.

Rayon	Taxi-cercle	Taxi-disque
0	1	1
1	4	5
2	8	13
3	12	25
4	13	41
5	20	61
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$4n$ $(n \neq 0)$	$2n^2+2n+1$

Proposition (honnête)

Est-il pensable de parler de taxi-ellipses ? Voilà un beau sujet de réflexion et de propositions personnelles. Nous les attendons avec impatience.

(1) Cette formule classique donne la valeur de la somme des n premiers naturels non nuls (il suffit de multiplier le dernier naturel n par son suivant $n+1$ et de diviser le produit obtenu par 2).
Cette relation est très utile. Retenez-là car elle vous servira certainement un jour.

Pour aller un peu plus loin !

On sait que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

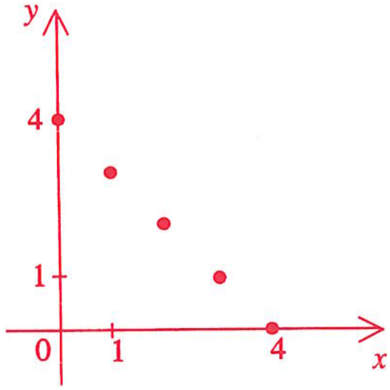
Dans le plan euclidien, $|x| + |y| = n$ donne 4 équations selon que vous travaillez dans tel ou tel quadrant.

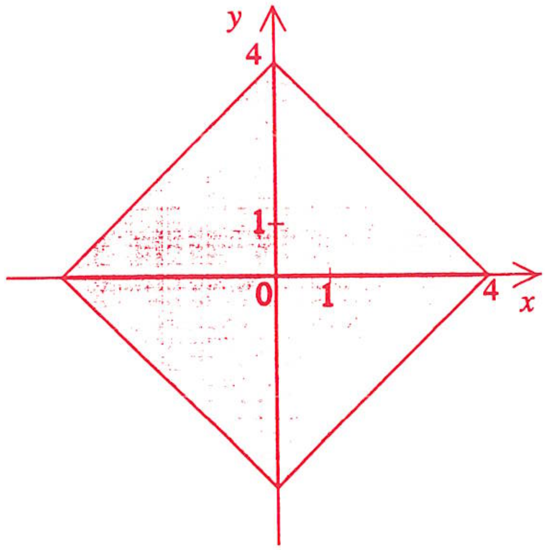
- Dans le 1$^{\text{e}}$quadrant, x et y sont positifs donc $|x|+|y| = n$ devient $x+y=n$.
- Dans le 2$^{\text{e}}$quadrant, x est négatif et y est positif donc $|x|+|y| = n$ devient $-x+y=n$.
- Dans le 3$^{\text{e}}$quadrant, x et y sont négatifs donc $|x|+|y| = n$ devient $-x-y=n$.
- Dans le 4$^{\text{e}}$quadrant, x est positif et y est négatif donc $|x|+|y| = n$ devient $x-y=n$.

Chacune de ces équations du premier degré à deux variables caractérise un « alignement de points ».

Travaillons d'abord dans l'ensemble des points à coordonnées entières.

Dans le premier quadrant, par exemple, $|x| + |y| = 4$ devient $x + y = 4$. C'est l'équation d'un alignement de points, elle n'est vérifiée que par (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) et (4,0).





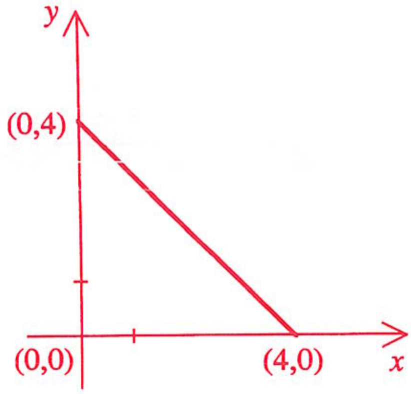
En procédant de même dans les autres quadrants, on constate que l'équation $|x| + |y| = 4$ est celle d'un « carré », il s'agit en fait de l'équation du taxi-cercle de centre O et de rayon 4.

Il en sera de même dans les trois autres quadrants et on retrouve le $\mathrm{tC}(O, 4)$. prend l'allure d'un « carré ».

Travaillons maintenant dans l'ensemble de tous les points du plan euclidien.

Dans le premier quadrant, $|x| + |y| = 4$ est l'équation d'un segment.

Il en est de même dans les autres quadrants.



$|x| + |y| = 4$ est l'équation du pourtour d'un carré et $|x| + |y| \leq 4$ est l'« équation » du carré (surface).

On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

Luc Lemaire, *Département de Mathématique, ULB*

La rédaction remercie la « Fondation Lucia de Brouckère pour la diffusion des sciences » qui lui a aimablement permis de reproduire dans ses colonnes cet article de Luc Lemaire.

Le tambour du voisin

Pour son anniversaire, le fils de votre voisin a reçu un tambour de fantaisie, dont la forme n'est pas nécessairement un cercle, mais peut-être un carré, un triangle ou même une forme plus compliquée. Vous l'entendez (du matin au soir et parfois la nuit) à travers le mur, taper sur le tambour. Pouvez-vous, en analysant le son déduire la forme du tambour ?

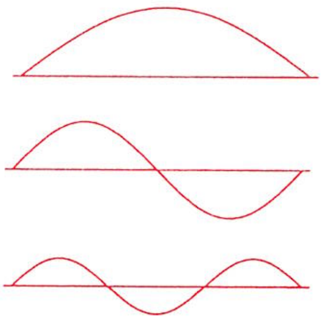
Cette question n'est pas très sérieuse, mais nous allons voir qu'elle a donné lieu à des théories mathématiques très intéressantes, qu'elle illustre des questions beaucoup plus profondes sur la façon dont nous connaissons l'univers, et qu'il a fallu attendre 1991 pour que la réponse soit donnée : non, on ne peut pas reconstituer la forme du tambour.

Une corde de guitare

Commençons par une situation plus simple — la corde de guitare — pour voir comment les mathématiques fournissent une description d'une situation physique.

Une corde de guitare est attachée à ses deux extrémités, et on la fait vibrer pour produire un son. Supposons que nous fixions une fois pour toutes le type de métal et la tension de la corde. La seule donnée restante est sa longueur L, c'est-à-dire la distance entre les deux points où elle est attachée.

On peut démontrer (grâce à une théorie créée au dix-neuvième siècle pour étudier la propagation de la chaleur — ce qui à première vue est un sujet tout à fait différent) que la vibration de la corde se décompose en une somme infinie de vibrations élémentaires, données par des fonctions sinus.



$$f_1(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$f_2(x) = a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

$$f_3(x) = a_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$$

et ainsi de suite.

L'observation à faire est que, x représentant la position d'un point sur la corde, toutes ces fonctions sont nulles quand $x = 0$ et quand $x = L$, ce qui indique que la corde ne bouge pas aux extrémités fixées.

Soyons plus précis. La corde vibre en fonction du temps et la théorie démontre que, si la forme prise par la corde est

$$f_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

alors, son mouvement en fonction du temps est donné par la même fonction sinus, c'est-à-dire par

$$\sin \frac{n\pi t}{L}$$

où t représente le temps. Le même nombre $\frac{n\pi}{L}$ apparaît donc dans la forme de la corde et dans sa vitesse de vibration.

Pour une vibration en fonction du temps donné par $\sin \omega t$, la **fréquence** de la vibration (nombre d'oscillations par seconde) est le nombre $\frac{\omega}{2\pi}$.

Dans les mouvements élémentaires de la corde, nous trouvons donc les différentes fréquences :

$$\frac{1}{2L}, \frac{2}{2L}, \frac{3}{2L}, \frac{4}{2L}, \ldots$$

Cette suite de fréquences est ce que l'oreille entend : la fréquence la plus petite $(\frac{1}{2L})$ est le son le plus grave, et les autres (appelées en musique les harmoniques) sont plus aiguës et s'y superposent, donnant la sonorité de l'instrument.

En résumé, en entendant le son de la corde qui vibre, on « entend » la suite des fréquences

$$\frac{1}{2L}, \frac{2}{2L}, \frac{3}{2L}, \ldots$$

et on peut donc en déduire le nombre L, c'est-à-dire la longueur de la corde.

On peut donc « entendre » la longueur d'une corde vibrante.

Mathématiquement, on peut faire l'observation suivante. Dérivons deux fois la fonction $f_n(x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= a_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ f_n'(x) &= \frac{n\pi}{L} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \\ f_n''(x) &= -(\frac{n\pi}{L})^2 a_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= -(\frac{n\pi}{L})^2 \cdot f_n(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, la dérivée seconde de f_n est un multiple de f_n, le facteur étant $-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. En notant $f' = \frac{df}{dx}$ et $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$, on a donc

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 f_n.$$

On dit que f_n est une **fonction propre** de l'opérateur dérivée seconde $\frac{d^2}{dx^2}$ et que $-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ est la **valeur propre** correspondante.

On appelle **spectre** de l'opérateur l'ensemble de ses valeurs propres. Plus généralement, pour un « opérateur » A agissant sur une fonction pour donner une autre fonction, une fonction propre est une fonction telle que $A \cdot f = \lambda f$, et le nombre λ est la valeur propre.

Si nous connaissons la longueur L de la corde, nous pouvons donc calculer le spectre

$$-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2, -\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2, \ldots$$

Réciproquement, si nous connaissons le spectre, nous pouvons retrouver L.

Enfin, la n^e fréquence est $\frac{n}{2L}$ et le n^e élément du spectre est $-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -(2\pi)^2\left(\frac{n}{2L}\right)^2$. Si on connaît l'un, on connaît l'autre et on peut dire que l'oreille « entend » le spectre de l'opérateur dérivée seconde.

Le tambour

Prenons maintenant un tambour, c'est-à-dire un cadre (éventuellement de forme compliquée) sur lequel est tendue une membrane vibrante. On montre comme dans le cas de la corde que les vibrations de la surface du tambour se décomposent en vibrations élémentaires, données par certaines fonctions f_n, qui sont maintenant des fonctions de deux variables, nulles au bord du tambour :

Un point de la membrane est représenté par ses coordonnées euclidiennes (x, y) dans le plan, et la fonction $f_n(x, y)$ représente la vibration dans la troisième direction de l'espace. Sur le bord du tambour, la membrane ne bouge pas (car elle est fixée) et donc, $f_n(x, y) = 0$ pour tout point (x, y) du bord.

Pour une fonction de deux variables x et y (par exemple : $f(x, y) = \sin 2x \cdot \sin 3y$), on définit la dérivée partielle de f par rapport à x en considérant que y est une constante, et en dérivant par rapport à x. De même, on peut prendre 2 fois la dérivée par rapport à x (on considère toujours y constant), ou au contraire dériver par rapport à y en gardant x constant. Par exemple, pour la fonction $f(x,y) = \sin 2x \cdot \sin 3y$, on observe :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \text{dérivée partielle par rapport à } x \\
&= 2\cos 2x \cdot \sin 3y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -4\sin 2x \cdot \sin 3y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3\sin 2x \cdot \cos 3y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -9\sin 2x \cdot \sin 3y
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous avons donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -13 \cdot f$$

La fonction f de l'exemple est donc une fonction propre de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ pour la valeur propre -13.

Observons qu'elle est nulle sur le bord d'un carré de côté π (c'est-à-dire que $f(0,y) = 0$, $f(\pi,y) = 0$, $f(x,0) = 0$, $f(x,\pi) = 0$). Elle décrit une des vibrations élémentaires d'un tambour carré de côté π.

En général, on montre (c'est difficile) que la vibration d'un tambour se décompose en une somme infinie de fonctions propres de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, nulles au bord du tambour. L'ensemble des valeurs propres, le spectre, est ce qu'on « entend » quand le tambour vibre.

Si on donne la forme du tambour, on peut théoriquement calculer son spectre (en fait, le calcul est tellement difficile qu'on ne peut le réaliser que pour des formes simples : cercles, carrés, rectangles, ...)

Dans l'autre sens, on peut se demander si la connaissance du spectre permet de retrouver la forme du tambour. C'est ce qu'on appelle un **problème inverse.**

Peut-on entendre la forme d'un tambour ?

Résumons ce que nous avons vu aux paragraphes 2 et 3.

- Un tambour est représenté par un domaine du plan, entouré par une courbe. Sur cette courbe, une membrane vibrante est attachée.
  Lorsqu'elle vibre, elle produit des sons qui se décomposent en une infinité de fréquences. En analysant le son, on peut déterminer ces fréquences.
  À un tambour de forme donnée est associée cette suite infinie de fréquences (mais le plus souvent leur calcul est difficile ou impossible).

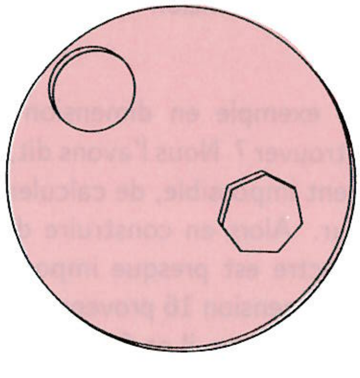
- Supposons maintenant que l'on connaisse les fréquences (parce qu'on entend le son). Peut-on retrouver la forme du tambour ?

Cette question est apparue lentement à partir du début du siècle, en particulier parce qu'en 1911, H. Weyl a démontré que **le son d'un tambour détermine son aire.**

Ceci est assez raisonnable, un grand tambour donne un son plus grave.

Quelques années plus tard, A. Pleijel démontrait que **le son d'un tambour détermine la longueur de son bord.**

Plus tard encore, I. Singer et H. McKean ajoutaient une information. On pourrait très bien considérer une forme de tambour plus compliquée, dans laquelle la membrane est fixée non seulement sur une courbe extérieure, mais aussi sur plusieurs courbes intérieures formant des trous dans le tambour. Par exemple, voici le dessin d'un tambour à deux trous.



Et bien, **le son d'un tambour détermine le nombre de trous.**

Ces quelques informations amenaient Marc Kac à écrire en 1966 un article sous le titre « *Can one hear the shape of a drum ?* », qui précisait clairement cette question.

Comme les mathématiciens ne connaissaient pas la réponse, il y avait alors deux possibilités.

- Soit la réponse était oui, et il fallait le démontrer, par exemple en utilisant les méthodes des résultats précédents.
- Soit la réponse était non, et il suffisait alors de construire deux tambours de formes différentes mais produisant le même son.

C'est cette deuxième possibilité qui s'est réalisée, mais il a fallu attendre 1991 et passer par un grand détour pour le voir.

Des cloches et des surfaces vibrantes

Comme souvent en mathématique, un problème concret admet des généralisations abstraites, qui donnent de nouvelles idées de méthodes.

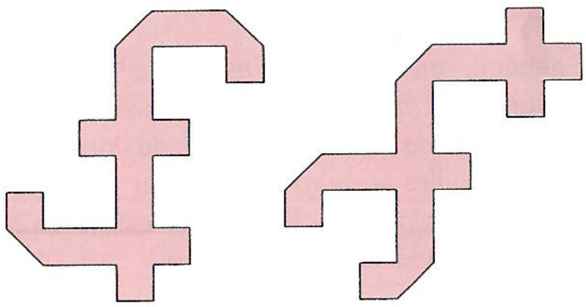
Ainsi, au lieu de considérer une membrane plane tendue sur un cadre, on pourrait faire vibrer une surface (comme une sphère, ou un tore) ou encore généraliser le problème à des objets de dimension plus grande.

Et le premier exemple de deux objets différents produisant le même son en vibrant est celui de deux espaces de dimension 16, exhibés en 1964 par J. Milnor.

Pourquoi un exemple en dimension 16 était-il plus facile à trouver ? Nous l'avons dit, il est difficile, et souvent impossible, de calculer le spectre d'un tambour. Alors en construire deux et calculer leur spectre est presque impossible. Pour ces objets de dimension 16 provenant d'une autre théorie mathématique, il se fait que les spectres se calculaient assez facilement, et l'idée principale était de découvrir que des calculs déjà connus fournissaient cet exemple. Ces deux objets sont parmi les plus simples qui soient (des parallélogrammes) — mais de dimension 16.

Dans la suite, divers mathématiciens ont découvert d'autres exemples de paires d'objets différents donnant le même spectre, mais ils apparaissaient toujours comme des « accidents » isolés.

En 1985, T. Sunada (un Japonais) donnait une première méthode systématique de construction d'exemples (toujours pour des espaces courbes de dimensions supérieures ou égales à 3). Progressivement, sa méthode était perfectionnée et mieux comprise (notamment par des travaux de P. Bérard en France et P. Buser en Suisse) et finalement, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert (USA) réussissaient à produire deux tambours fournissant le même son. **Une fois qu'ils sont trouvés, ils sont très simples à dessiner, et les voici.**



Ces deux tambours sont bien de formes différentes, et ils produisent le même spectre.

Pourquoi ces exemples sont-ils polygonaux ? Il est plus que probable que d'autres exemples existent, où les bords sont des courbes, et non des segments de droites, mais pour produire des exemples il faut pouvoir calculer complètement le spectre — ce qui n'est possible que pour des contours assez simples.

En fait, il a fallu beaucoup d'efforts, de 1966 à 1991, pour répondre à la question ; aujourd'hui on peut démontrer, en moins d'une page, que ces deux tambours ont même spectre (l'université où travaillent C. Gordon et D. Webb a d'ailleurs commercialisé des T-shirts donnant la démonstration ...)

Et le résultat le plus important de cette recherche n'est pas l'exemple des deux tambours, mais la mise au point d'une série de méthodes mathématiques qui peuvent s'appliquer à d'autres problèmes.

La recherche en mathématique

Ce problème de tambours peut nous mener à quelques réflexions sur la recherche en mathématique.

D'abord soulignons le volume de cette recherche : chaque année paraissent plus de 50 000 articles donnant de nouveaux résultats de mathématique. Ils paraissent dans des revues spécialisées éditées dans presque tous les pays du monde. Vous ne trouverez pas ces revues chez votre libraire habituel, mais les chercheurs les trouvent dans les bibliothèques des universités. Par exemple, le résultat de Gordon, Webb et Wolpert a paru dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*.

La recherche en mathématique a toujours suivi deux motivations.

- D'une part, la compréhension des sciences (physique, chimie, biologie, mais aussi économie) passe très souvent par des modèles mathématiques.

  Ainsi, nous avons vu que l'étude des vibrations d'une membrane se traduit par l'étude des solutions de l'équation

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lambda f,$$

  qu'on appelle une équation aux dérivées partielles.

  En fait, des équations de ce type apparaissent dans presque tous les modèles de la physique.

- D'autre part, les mathématiques se développent selon une dynamique interne, suivant naturellement la curiosité des chercheurs et leur goût de l'esthétique. Ainsi, plutôt que d'étudier au coup par coup les différentes équations venues de la physique, les mathématiciens ont développé de grandes théories générales pour ces équations, en se laissant guider par leur curiosité et leur sens de la beauté. Et ces théories, par la suite, se sont appliquées à différents problèmes.

Nous avons vu que la résolution du problème du tambour passait par des méthodes imaginées pour étudier des problèmes en dimensions plus grandes, ou sur des espaces courbes. Et ces mêmes méthodes s'appliquent ensuite à la résolution de problèmes nettement plus pratiques que celui du tambour. La structure des matériaux, la mécanique des fluides, les cristaux liquides des affichages digitaux utilisent tous ces méthodes.

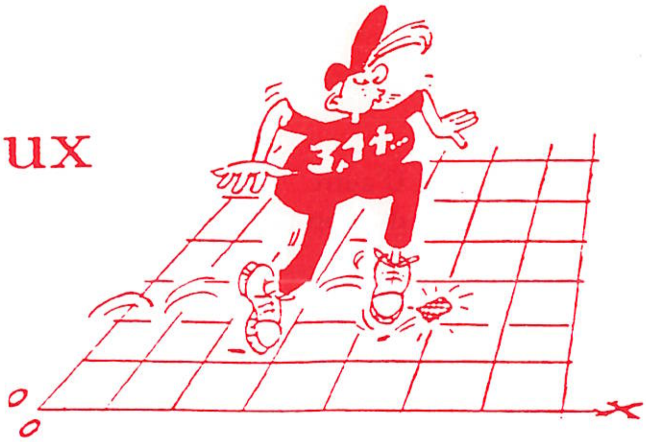
Du tambour aux étoiles

Le problème de reconstruire un tambour d'après son spectre n'est évidemment pas important en soi. Mais remarquons que notre connaissance de la nature vient souvent de reconstructions de ce type : notre connaissance de l'intérieur des étoiles découle de l'analyse spectrographique de leur lumière (spectrographique = spectre, comme pour le tambour !), celle du centre de la terre, de l'étude des ondes sismiques. En médecine également, le scanner, la résonance magnétique fournissent des images de l'intérieur du corps par une reconstruction mathématique.

Le problème du tambour n'est qu'un amusement, mais il s'insère dans une famille de problèmes scientifiques importants. Si deux étoiles émettent la même lumière, sommes-nous certains qu'elles ont la même composition ?

 Math-Jeunes n° 89, 112–112, 1999

Jeux



Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

236

54

14 · · 5 · · 16

La grille des moyennes

Dans la grille ci-dessous, toute case doit contenir le nombre moyenne arithmétique des quatre cases adjacentes. Recherche ces nombres.

	11	5	
13			7
8			5
	12	3	

Jeu de l'hexagone et de la marguerite

Le nombre figurant dans chaque cellule hexagonale précise, pour cette case et toutes ses voisines, le nombre de cases coloriées. Le jeu consiste, au départ de la grille codée, à retrouver la grille coloriée.

2 4 3 3
3 4 5 5 3
3 3 5 4 4 3
3 5 4 3 4 3 2
4 4 4 3 2 2
4 4 4 4 2
3 4 3 2

0 0 0 0
2 2 2 1 0
3 4 4 3 3 1
2 5 5 5 3 2 1
2 4 5 3 3 2
3 6 5 4 2
3 5 4 3

Solutions des jeux

Le mur des nombres

Il y a une infinité de solutions réelles au problème proposé, parmi celles-ci nous en proposons deux en nombres naturels, trouves-en d'autres.

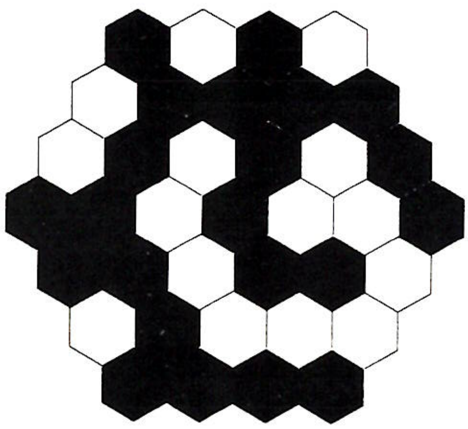
236				
121	115			
67	54	61		
38	29	25	36	
14	24	5	20	16

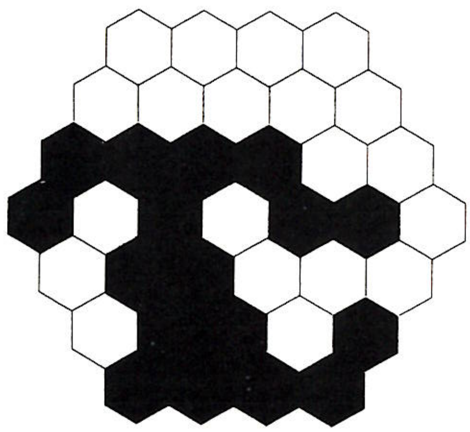
236				
141	95			
87	54	41		
48	39	15	26	
14	34	5	10	16

La grille des moyennes

	11	5	
13	10	7	7
8	9	6	5
	12	3	

Jeu de l'hexagone et de la marguerite





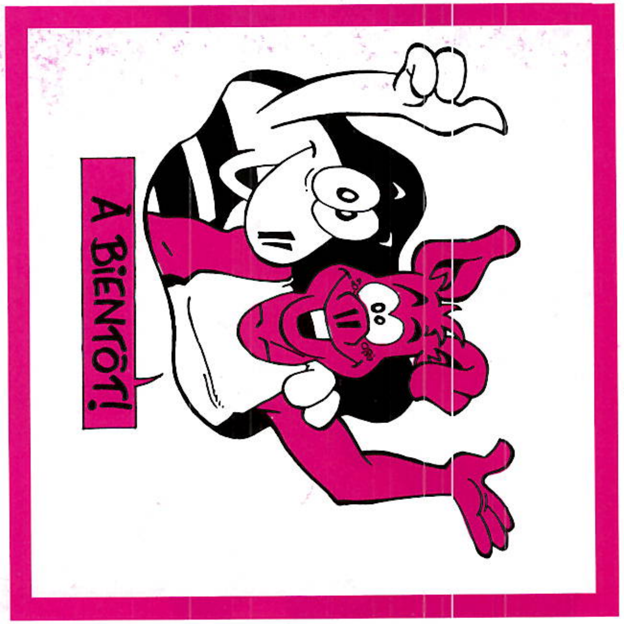
Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Rue A. Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124



Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée