Supplément à Mathématique et Pédagogie, n° 31

MATH-JEUNES

3e année — N° 9 — Mars-Avril 1981

En-tête de Marie-Christine QUINTART de l'Athénée Royal de Dour.

CHERS AMIS,

Voilà le printemps!

voici les derniers énoncés du concours-rallye. Celui-ci se terminera définitivement le 22 avril. Profitez des vacances de Pâques pour rejoindre le peloton des 78 personnes ou classes déjà classées ! Le n° 10 contiendra les meilleures solutions que nous aurons reçues. Voici un classement toujours provisoire tenant compte des résultats en notre possession le 2 mars 1981.

43 : BIANCHI Jean-Pierre, Collège Saint-Louis, Liège.
41 : MAQUESTIAU Jean-Luc, Athénée Royal, Ath.
40 : DESCHUYTENEER Eric, Athénée Royal, Ath.
36 : KAISIN Patrick, Collège Saint-Louis, Liège.
35 : BALLANT Denis, Communauté Educative Jean XXIII, Pesche .
34 : DECRUCQ Laurent, Lycée Royal M. Bervoets, Mons.
HAESEVOETS Marc, Athénée Robert Catteau, Bruxelles.
31 : BIERNAUX Laurent, Athénée Royal Mixte, Woluwé Saint Pierre.
30 : CLABOTS Johanna, Lycée Royal, Wavre.
28 : REYNAERTS Vincent, Athénée Royal Mixte,Woluwé Saint Pierre.
26 : VANDENBROECKE Filip , Collège Card. Mercier,Braine l'Alleud.
24 : DE SIMPEL Pierre, Collège Notre Dame, Tournai.
23 : THIRION Philippe, Séminaire de Floreffe.
VAN LOO Michel, Collège Jean XXIII, Bruxelles.
22 : WAGENAAR Pierre, Petit Séminaire de Floreffe.
classe de 4eme rénové, Institut Saint Joseph, Eghezée.
20 : VERGUYSE Michel, Athénée Léon Lepage, Bruxelles.
19 : MAILLEZ Marc, Lycée Jean d'Avesnes, Mons.
DE SUTTER Geneviève, Athénée R. Mixte, Woluwé Saint Pierre.
17 : BERNARD Michel, Institut Saint-Jean-Baptiste, Wavre.
DEPIREUX Didier, Collège Saint-Louis, Liège.
16 : HORMAN Stéphane, Lycée Royal M. Bervoets, Mons.
classe de 6LM-6ScA de la Communauté Ed.Jean XXIII,Pesche .
15 : FONTAINE Carine, Ecole Moyenne de l'Etat, Jurbise.
HYPERSIEL Thierry, Athénée Royal, Thuin.
KONEN Yves, Athénée Robert Catteau, Bruxelles.
LAMBILLOTTE Christian, Collège Saint-Michel, Gosselies.

DE JOLIES COURBES
ou dessiner avec la machine à calculer

Le programme suivant (HP25 ou HP33) te permettra de dessiner de jolies figures si tu as un peu de patience :

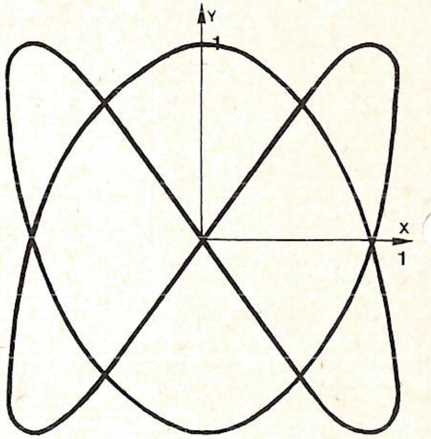
Pas	Code	Touche
01	23 00	STO 0
02	22	R↓
03	23 01	STO 1
04	01	1
05	00	0
06	23 61 00	STO x 0
07	23 61 01	STO x 1
08	24 02	RCL 2
09	14 04	f SIN
10	24 03	RCL 3
11	14 04	f SIN
12	74	R/S
13	24 00	RCL 0
14	23 51 02	STO + 2
15	24 01	RCL 1
16	23 51 03	STO + 3
17	13 08	GTO 08

Mode d'emploi :

1. Initialiser: f PRGM, f REG
2. Introduire deux nombres : n ENTER m
3. R/S 0 x⇄y 0
   dessiner (0,0)
4. R/S x_1 x⇄y y_1
   dessiner (x_1,y_1)
5. R/S x_2 x⇄y y_2
   dessiner (x_2,y_2)
6. ...

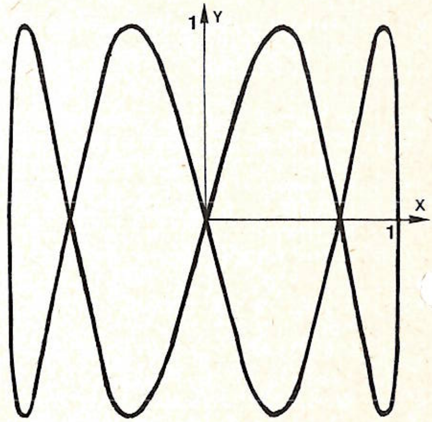
Exemple :

1. f PRGM, f REG
2. 2 ENTER 3
3. R/S 0 x⇄y 0
4. R/S 0,34 x⇄y 0,5
5. R/S 0,64 x⇄y 0,87
6. R/S 0,87 x⇄y 1
7. ...



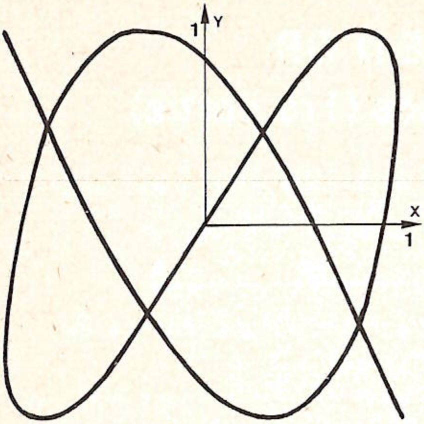
Voici un second exemple :

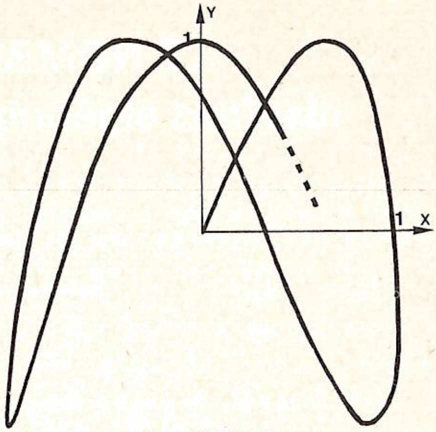
n = 1 et m = 4



Le troisième exemple représente le cas n=3 et m=5.

Mais pour n=1,2 et m = 2,7 la courbe se referme-t-elle ? Le dessin n° 4 montre le début de cette courbe...



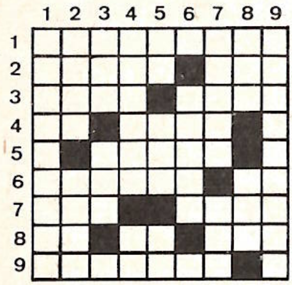


F. MICHEL

◎◎◎◎◎◎◎◎◎

ET SI ON CROISAIT ?

Grille n° 4



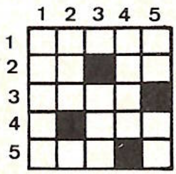
HORIZONTALEMENT :

1: ou le rêve insensé. 2: peut être transformé - démonstratif 3: venues au monde - décore. 4: tour - mesure. 5: contiennent des boules. 6: après le feu - double règle. 7: de composition - isolé. 8: article étranger - parcouru - a son dormeur. 9: en goniométrie.

VERTICALEMENT :

1: étoiles. 2: fleuve belge - règne sur les vents. 3: répété, elle endort - terne. 4: important au tirage - pas ici. 5: du verbe avoir - vieille RTB - neutre. 6: lisières. 7: argiles - première femme. 8: commun à trente et à renne - occis. 9: infinie.

Grille n° 5



HORIZONTALEMENT :

1: carré pair. 2: carré - le chiffre des dizaines est double du chiffre des unités. 3: impairs consécutifs. 4: le produit des 3 chiffres est 98, la somme est 16. 5: 3 chiffres identiques.

VERTICALEMENT :

1: cube. 2: premier, le produit du chiffre des centaines par celui des unités donne le chiffre des dizaines. 3: vingt-trois fois un carré. 4: multiple de 11. 5: carré moins un - la somme des chiffres est 10.

LE NOMBRE D'OR
résultats algébriques (1re partie)

Dans le n° 6 de M.J., l'étude du nombre d'or a été abordée. Rappelons que le nombre d'or est le rapport des longueurs des segments [am] et [mb] lorsque $m \in [ab]$ et

$$\frac{|ab|}{|am|} = \frac{|am|}{|mb|}$$

Posons $|ab| = 1$ et $|am| = x$, la relation précédente devient $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ ou $x^2 + x - 1 = 0$

Les racines de cette équation sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dont nous ne retenons que $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, le nombre x étant positif. Par suite, $\frac{|am|}{|mb|} = \frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,
qui est le nombre d'or et l'on dit que m divise le segment [ab] selon la section d'or.

Voici une propriété intéressante : la section d'or "se reproduit par soustraction" c'est-à-dire que si $|an_1| = |mb|$ et $n_1 \in [am]$, alors le point n_1 divise le segment [am] selon la section d'or.

En effet, x étant solution de $x^2 = 1 - x$, on aura

$$\frac{|an_1|}{|n_1m|} = \frac{1-x}{x-(1-x)} = \frac{x^2}{x-x^2} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} .$$

En construisant de la même manière n_2 sur $[an_1]$, n_3 sur $[an_2]$, ... nous construisons une suite infinie de points distincts n_i, avec :

$$i > 0,\ [an_{i+1}] \subset [an_i],\ |an_{i+1}| = |n_i n_{i-1}|,\ \frac{|an_i|}{|an_{i+1}|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} .$$

On peut assez facilement se convaincre que le nombre d'or est irrationnel. Montrons que supposer ce rapport rationnel conduit à une contradiction. En effet, si ce rapport est rationnel, les segments [am] et [mb] sont commensurables c'est-à-dire qu'il est possible de choisir un segment de longueur ℓ (éventuellement très petit, mais fixé) tel que

$$|am| = \alpha\ell \text{ et } |bm| = \beta\ell \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 .$$

Les longueurs des segments $[an_i]$ de la suite décrite ci-dessus s'obtenant par différences de multiples entiers de ℓ seront, elles aussi, des multiples entiers de ℓ.

$|an_1| = |mb| = \beta\ell$
$|an_2| = |n_1m| = |am| - |an_1| = \alpha\ell - \beta\ell = (\alpha-\beta)\ell$
$|an_3| = |n_2n_1| = |an_1| - |an_2| = \beta\ell - (\alpha-\beta)\ell = (2\beta-\alpha)\ell$

....

Chacun des $[a_n,_i]$ étant strictement contenu dans le précédent, la suite des entiers positifs

$$\beta, \quad \alpha-\beta \quad, 2\beta - \alpha, \ \ldots$$

est strictement décroissante. Donc, après un nombre fini de termes atteint zéro. Elle ne peut donc être mise en bijection avec la suite infinie de termes tous distincts et non nuls $|a_{n_i}|$. D'où la contradiction.

Cette contradiction assure que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est bien un irrationnel.

On aurait pu procéder autrement, et démontrer que l'on ne peut avoir $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha}{\beta}$ pour $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$. Ceci reviendrait à montrer que l'équation $\alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2 = 0$ n'admet pas de solution entière non triviale.

Comme par hypothèse α et β sont non nuls, entiers et satisfont $\alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2 = 0$, on a nécessairement que tout nombre qui divise β^2 et $\alpha\beta$ doit diviser aussi α^2. De façon plus précise, si p est un facteur premier de β, p divise aussi α^2, et donc α. *(Quand un nombre premier divise un produit, il divise un des facteurs.)* Soit donc (α_0,β_0) une solution non triviale où α_0 et β_0 sont naturels. On a

$$\alpha_0^2 - \alpha_0\beta_0 - \beta_0^2 = 0$$

Si p divise β_0 (ce qui implique $\beta_0 \geqslant 2$), p divise α_0:

$$\alpha_0 = p\,\alpha_1 \quad \text{avec} \quad \alpha_1 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{donc} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_0$$

$$\beta_0 = p\,\beta_1 \quad \text{avec} \quad \beta_1 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{donc} \quad 0 < \beta_1 < \beta_0$$

On a lors

$$p^2\alpha_1^2 - p\alpha_1 p\beta_1 - p^2\beta_1^2 = 0$$

et, comme $p \neq 0$,

$$\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2 = 0$$

D'où, si (α_0,β_0) est une solution avec $\beta_0 \geqslant 2$, il en existe nécessairement une autre (α_1,β_1) en termes strictement plus petits. Si $\beta_1 \geqslant 2$, on répète la procédure, jusqu'à ce que l'on arrive à une solution du type $(\alpha_i,1)$. Alors :

$$\alpha_i^2 - \alpha_i - 1 = 0$$

Par le même argument que ci-dessus, on a que α_i doit diviser 1 puisqu'il divise α_i^2 et α_i! Donc $\alpha_i=1$ est la seule solution possible, mais malheureusement, il n'est pas vrai que

$$1 - 1 - 1 = 0 \quad !!$$

La question de savoir si une équation à coefficients entiers admet des solutions entières n'est pas toujours aussi facile à traiter. Les mathématiciens appellent ces problèmes des " problèmes diophantiens ".

A côté des aspects géométriques et esthétiques du nombre d'or, évoqués dans M.J. n°6, nous voyons ici que ce nombre est lié très directement à des problèmes de théorie des

Diophante d'Alexandrie

On sait peu de choses sur sa vie : il vécut aux alentours de 250 p.J.C. Nous avons conservé de lui six livres d'Arithmétique (Αριθμός : le nombre) qu'il écrivit à la demande de Saint Denys, évêque d'Alexandrie en 247, qui l'aurait destiné à des étudiants chrétiens. L'habitude des anciens était de présenter les problèmes sous forme d'historiettes mythologiques. Diophante rompt avec cette tradition et pose ses problèmes numériques sous une forme abstraite, intentionnellement dépouillée de l'habituelle affabulation païenne.

Diophante écrivit pourtant son oeuvre dans la forme classique d'un discours continu et une simple ébauche d'une notation algébrique y est présente. Il était satisfait de la solution d'une équation lorsque celle-ci était un entier (un arithme), d'où le nom de problèmes diophantiens donné aux problèmes dont on désire une solution en termes entiers.

La première traduction en français de l'Arithmétique de Diophante fut réalisée en 1926 par un Belge, M. Paul Ver Eecke.

Léonard Fibonacci

Cet italien, né à Pise vers 1175 fut le plus grand mathématicien du Moyen Age. Fils de marchand, il voyagea avec son père en Algérie, où il apprit le calcul avec les méthodes arabes et " l'art des 9 figures indiennes ". Ces voyages le conduisirent en Egypte, en Syrie et en Grèce où il étudia d'autres systèmes numériques, mais il n'en trouva pas de plus satisfaisant que le système Indo-Arabe.

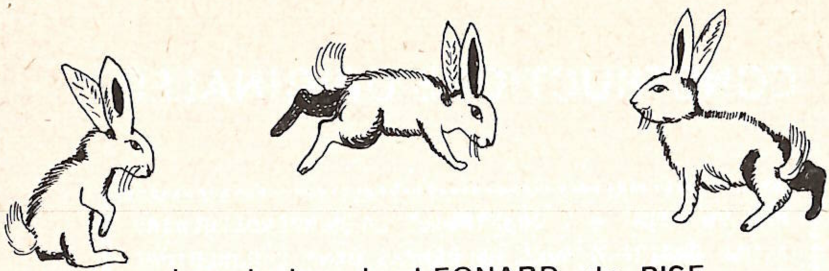
En 1202, il publie son Livre de l'Abaque , véritable mode d'emploi du nouveau système de numérotation. Avec cette notation, les problèmes de Diophante, si difficiles à lire deviennent transparents. Léonard va réécrire une bonne partie des considérations de Diophante sur le second degré et améliorera certains résultats. Le problème de la prolifération des lapins est certainement le résultat le plus connu de Léonard.

Sa plus grande oeuvre est certainement son livre des nombres carrés où Léonard apparait comme le trait d'union nécessaire entre Diophante et Fermat.

nombres. C'est ce qui apparaît encore dans la célèbre suite de FIBONACCI : 1,1,2,3,5,8,13,21,... dont chaque terme, à partir du troisième est la somme des deux précédents, et qui possède des propriétés très remarquables. Il se trouve que les termes u_n de cette suite peuvent être calculés directement, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ grâce à une formule où se retrouvent, comme générateurs, le nombre d'or et l'opposé de son inverse ! (Voir l'encadré du problème des lapins.)

A suivre...

(avec la collaboration de Michel MOREAU)



Les lapins de LEONARD de PISE

Les recherches mathématiques sur la prolifération des lapins étaient basées sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

- *Un premier couple de lapins (première génération), soit* C_1, *donne naissance (et uniquement) à un couple de lapins à la deuxième génération, soit* C_{12}, *puis à un couple à la troisième génération, soit* C_{13}.
- *De même, le couple* C_{12} *donne naissance à un couple de la troisième génération* (C_{123}) *et à un couple à la quatrième génération*(C_{124}).
- *Le processus se poursuit indéfiniment.*

Avec un peu d'attention, il est facile de voir que les nombres de couples composant les générations successives se calculent comme suit : (u_n = génération n)

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 1$$
$$u_3 = u_1 + u_2 = 2$$
$$u_4 = u_2 + u_3 = 3$$
$$u_5 = u_3 + u_4 = 5$$
$$u_6 = u_4 + u_5 = 8$$

$$\boxed{u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (n \geqslant 3)}$$

Si $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $u_n = \dfrac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi - (-\Phi)^{-1}}$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi$

En nous souvenant de ce que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ (Φ, nombre d'or est en effet une des racines (la positive) de cette équation) des considérations sur la somme et le produit des racines d'une équation du second degré conduisent au résultat

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

montrant que *<u>le nombre d'or est égal à son inverse augmenté d'une unité</u>*. Il en résulte que les expressions décimales de Φ et de $1/\Phi$ contiennent LES MÊMES DECIMALES.

Une dernière particularité de ce nombre : puisque $\Phi^2 = 1 + \Phi$, on calcule : $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$; $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}$; ... et donc

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

(Résultat à rapprocher du problème n° 17 -M.J.6).

CONSTRUCTIONS ORIGINALES

PAR UN POINT a , CONSTRUIRE LA PERPENDICULAIRE A UNE DROITE D AVEC UN COMPAS DONT L'OUVERTURE EST FIXEE.

Voici les solutions de Pierre BONNET de OUARZAZATE (Maroc).

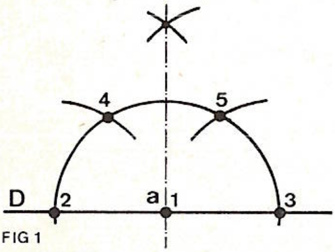


FIG 1

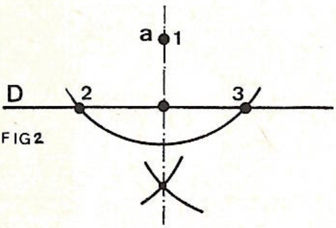


FIG 2

La figure 1 représente la construction lorsque le point a appartient à la droite D. Les chiffres indiquent les positions successives de la pointe sèche du compas.

La figure 2 représente la construction lorsque le point a n'est pas trop éloigné de la droite D : en fait lorsque la distance du point à la droite est inférieure à l'ouverture donnée du compas.

Les figures 3 et 4 représentent le début de la construction lorsque la distance entre le point et la droite est supérieure à l'ouverture donnée du compas. Dans les deux cas, le principe consiste à tracer une droite D' parallèle à D ; D' étant plus proche de a que ne l'était D. On peut être amené à répéter plusieurs fois cette manoeuvre.

FIG 3

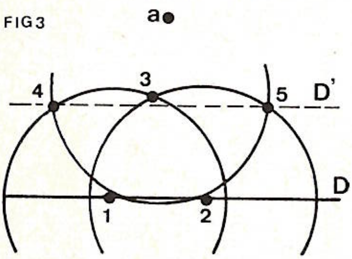
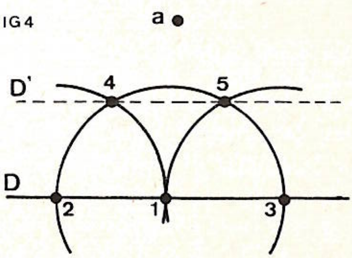
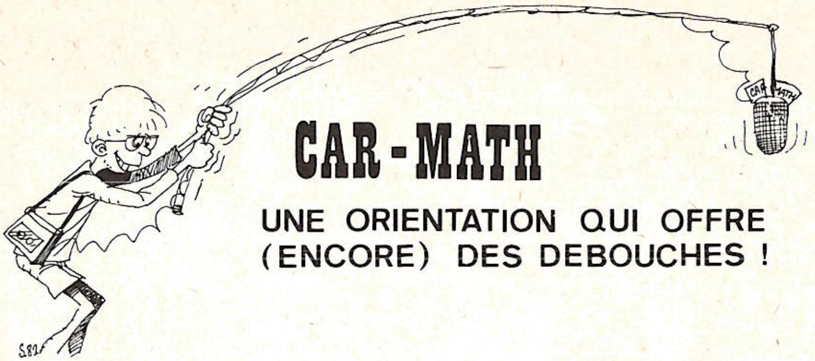


FIG 4




GÉRALD GÈBRE
JÉSUS DE NAZARETH EST ARRIVÉ
" PARTOUT DANS LE VILLAGE, ON ANNONÇAIT JÉSUS..."
SAINTE BIBLE
VIENS VITE JÉSUS DE NAZARETH EST LÀ !...
ET TOUT LE MONDE ACCOURAIT POUR L'ENTENDRE ...
EN VÉRITÉ JE VOUS LE DIS ...
EN VERITE NOUS DISAIT-IL
Y = ax²
Y=a
LE GREC À LA GALLE ? LE GREC AU GALA D' ICKX ... AU CARRÉ ?
JACKY ICKX J PRESUME?
??!
MAIS ILS NE COMPRIRENT PAS CAR C'ÉTAIT UNE ... PARABOLE !
B FIN
SOLVIER '81



CAR-MATH

UNE ORIENTATION QUI OFFRE (ENCORE) DES DEBOUCHES !

Patrick est étudiant de dernière année ingénieur civil en maths appliquées... Il a suivi les cours de la section Scientifique B et a parachevé sa formation mathématique au niveau secondaire par une année de Scientifique Spéciale.

Ce jeune homme, que je connais pour l'avoir eu en classe de 4e Sc B., possède un esprit mathématique très bien développé... mais cela ne l'empêche pas d'avoir une très grande ouverture sur le monde réel.

L'un de ses hobbies est la pratique du chant choral... Il n'est pas rare de rencontrer des "matheux" qui ont une certaine affinité avec la musique... Est-ce l'influence lointaine de Pythagore et de ses recherches en matière de gamme musicale ? ... Ou alors Pythagore subissait-il aussi cette espèce d'attirance vers l'art musical que l'on retrouve chez un grand nombre de mathématiciens de renom ... et d'autres... La question reste ouverte !

Mais je m'écarte du but premier de cet article : relater mon entretien avec Patrick.

Q: Patrick, tu es sur le point de terminer tes études d'ingénieur civil en mathématiques appliquées... veux-tu nous expliquer comment est née ta vocation ?

R: Cela s'est décidé lorsque j'avais 12 ans : j'ai connu une "ingénieur civil", j'ai été très impressionné par ce qu'elle faisait (en l'occurence elle s'était construit une T.V.)... et voilà ! Depuis lors, comme les maths, la physique et la chimie ne me déplaisaient pas, je n'ai pas changé d'avis et je ne le regrette pas.
En ce qui concerne mon orientation (mathématiques appliquées), j'ai choisi en seconde candi : j'étais venu à l'université avec l'idée de faire de l'électronique... et puis les cours de mathématiques appliquées m'ont plu... et je n'ai pas hésité !

Q: En quoi consiste la spécialité que tu as choisie ?

R: C'est une spécialité très jeune : elle n'existe que depuis une dizaine d'années. Elle provient surtout de l'avènement des ordinateurs.
Les cours se divisent en trois grandes catégories :

mathématiques (pures et appliquées), économie et informatique avec en plus tous les cours généraux spécifiques aux ingénieurs.
La spécificité de ce type d'études est le choix des cours.

Q: Quelle est la durée des études après le secondaire ?

R: 5 ou 6 ans selon qu'on fait une année de scientifique supérieure (spéciale-math) ou pas (il y a un examen d'entrée avant de pouvoir commencer les candidatures en sciences appliquées.

Q: Quels sont les débouchés qui peuvent éventuellement s'offrir à toi ?

R: Les débouchés sont assez vastes : dans l'industrie, les banques, les assurances ... Dès qu'il s'agit de faire des études à caractère plus ou moins mathématique on a besoin d'ingénieurs (ou de licenciés) en maths appliquées. En fait, vu la formation que tout ingénieur a en Belgique, nous pouvons aboutir à peu près dans n'importe quelle industrie.

Q: La crise économique actuelle doit-elle inquiéter également les gens hautement spécialisés ?

R: Tout d'abord, j'estime qu'on ne peut pas dire que les études d'ingénieur soient hautement spécialisées (ce que je retiens surtout de mes études, c'est que j'ai d'abord appris à apprendre...).
D'après certaines études, en tout cas, parmi les universitaires, ce sont les ingénieurs qui ont le moins de problèmes de chômage.
De toute façon, tout ce qui touche à l'informatique aujourd'hui offre beaucoup de débouchés (pas seulement pour les ingénieurs, mais aussi les gradués en informatique).

Q: Quels conseils donnerais-tu à un jeune qui désire entreprendre des études universitaires en général ... et plus particulièrement dans la voie que tu as choisie.

R: Il faut d'abord bien se renseigner, parce que 4, 5 ou 6 années d'études, c'est quand même une aventure difficile (et j'estime, pour ma part, qu'il y a un manque réel d'information entre les humanités et le cycle d'études supérieures).
De plus, il faut une bonne base de connaissances (pas seulement en math ou en sciences) mais aussi en <u>anglais</u> et ... en français ! La majorité des livres techniques sont écrits en anglais et, à tout moment pendant les études, il faut remettre des rapports ...

Après avoir répondu simplement à mes questions, Patrick a ajouté qu'il était disposé à répondre plus particulièrement à celles que vous souhaiteriez lui poser ... Nous nous sommes quittés en se promettant de nous revoir bientôt...

Le courrier de cette rubrique est à adresser à :

J. P. DECLERCQ , rue de Ten Brielen, 124, 7780-COMINES.

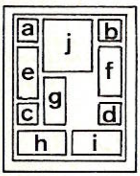
BRICO-PUZZLE

Voici une solution au brico-puzzle proposé page 11 du M-J n° 6. Le décompte des coups est conforme à la règle proposée dans l'énoncé. La solution nous est proposée par Mme Claudine FESTRAETS.

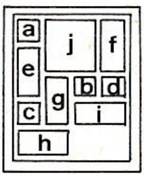
1 d←	2 d↑	3 i↑	4 h→→	5 c↓	6 c→	7 e↓↓	8 a↓↓	9 j←
10 b←	11 f↑	12 d→	13 b↓↓	14 j→	15 a↑↑	16 e↑↑	17 c←	18 c↑
19 h←←	20 i↓	21 b↓	22 b→	23 g→	24 c→	25 c↑	26 h↑	27 i←←
28 g↓	29 d←	30 b↑	31 g→	32 d↓↓	33 b←	34 g↑	35 d→	36 i→
37 h→	38 e↓↓	39 c←	40 c↑	41 e↑	42 i←	43 d←	44 g↓	45 b→
46 h↑	47 d↑	48 d←	49 i→	50 e↓	51 h←	52 b←	53 g↑	54 i→
55 d↓	56 b↓	57 b←	58 g←	59 f↓↓	60 j→	61 c→	62 c↑	63 h↑
64 b↑	65 d↑	66 e↑	67 i←←	68 g↓	69 f↓	70 j↓	71 c→→	72 a→→
73 h↑	74 b↑	75 b←	76 j←	77 f↑↑	78 g→	79 d→	80 d↓	81 j↓
82 a↓	83 a←	84 c←	85 c↓	86 h→→	87 b↑	88 b→	89 e↑↑	90 j←
91 c↓↓	92 a→	93 b↓	94 h←	95 f↑	96 g↑	97 d→	98 c↓	99 j→
100 e↓↓	101 h←	102 b←	103 a←	104 f←	105 g↑↑	106 j→	107 a↓	
108 b→	109 e↑	110 i↑	111 c←←	112 d←←	113 j↓	114 f↓	115 g↓	
116 h→→	117 e↑	118 b↑	119 a↑	120 i↑	121 d↑	122 d←	123 j←	

Pour mieux suivre, voici quelques étapes intermédiaires :

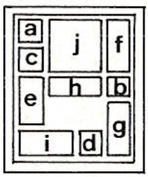
Départ



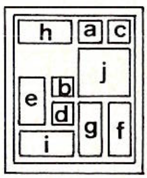
Après 19 coups



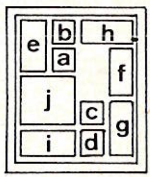
Après 46 coups



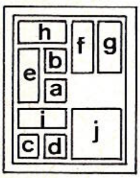
Après 73 coups



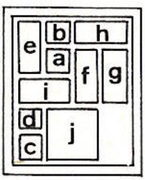
Après 91 coups



Après 113 coups



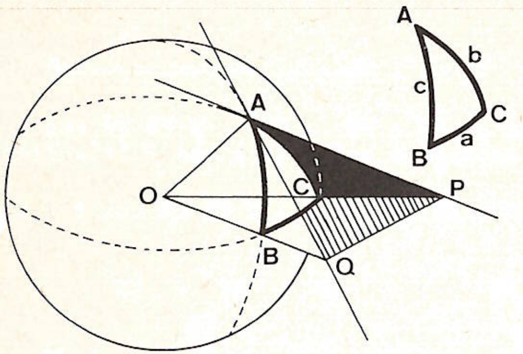
Arrivée



QUI DIT MIEUX ?

Nous publierons toutes solutions de moins de 123 coups !

LES TRIANGLES SPHERIQUES

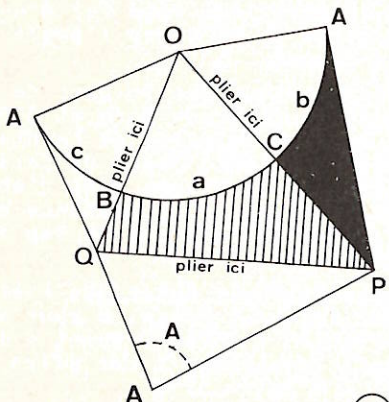


Comment calculer le cap à suivre pour se rendre d'un point à un autre par le plus court chemin, en admettant que la terre est parfaitement sphérique ?

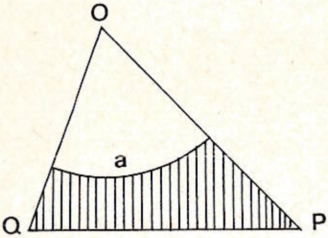
La question nous est posée par Michel BERNARD, 5ScA à l'Institut St Jean-Baptiste de Wavre.

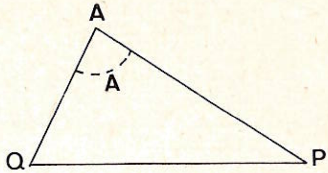
Ce genre de problème trouve aisément une solution lorsque l'on connait les formules de trigonométrie sphérique. Ces formules dérivent des formules correspondantes des triangles du plan, et la seule difficulté qu'il y ait à les comprendre est due au fait qu'il est difficile de tracer sur un plan des diagrammes clairs de figures de l'espace.

Ci-dessus, on peut voir un triangle sphérique ABC : il est formé par l'intersection de trois cercles ayant leur centre commun O au centre de la sphère. Les plans des trois cercles dont les arcs sont a,b,c se coupent suivant les droites OA, OBQ et OCP. Les droites AQ et AP sont tangentes en A aux grands cercles contenant les arcs c et b. Ainsi les angles OAQ et OAP sont en réalités des angles droits. Les droites AP,AQ et PQ forment un triangle plan PAQ dont l'angle au sommet PAQ est par définition, égal à l'angle A du triangle sphérique.



Pour avoir une image nette de la manière dont les différentes parties d'un triangle spérique sont liées aux parties des quatre triangles plans formant les faces d'une pyramide dans laquelle il est situé, vous pouvez découper le modèle ci-contre et le plier comme on vous l'indique. Il devient simple de suivre la démonstration en regardant à chaque étape la face voulue de la pyramide.



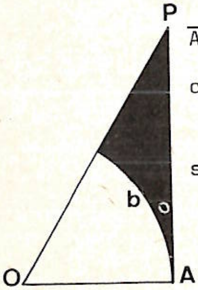


$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\,\overline{PO}\,\overline{OQ}\cos a$ $\quad \overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{QA}^2 - 2\,\overline{PA}\,\overline{QA}\cos A$

(Résultat du théorème de Pythagore appliqué à ces 2 triangles.)

d'où :

$$(\overline{PO}^2 - \overline{PA}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{QA}^2) - 2\,\overline{PO}\,\overline{QO}\cos a + 2\,\overline{PA}\,\overline{QA}\cos A = 0$$



$$\overline{AO}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PA}^2$$

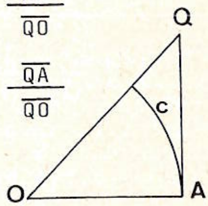
$$\cos b = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$$

$$\sin b = \frac{\overline{PA}}{\overline{PO}}$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{QA}^2$$

$$\cos c = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$$

$$\sin c = \frac{\overline{QA}}{\overline{QO}}$$



d'où : $2\,\overline{PO}\,\overline{QO}\cos a = 2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{PA}\,\overline{QA}\cos A$

et en divisant par $2\,\overline{PO}\,\overline{QO}$,

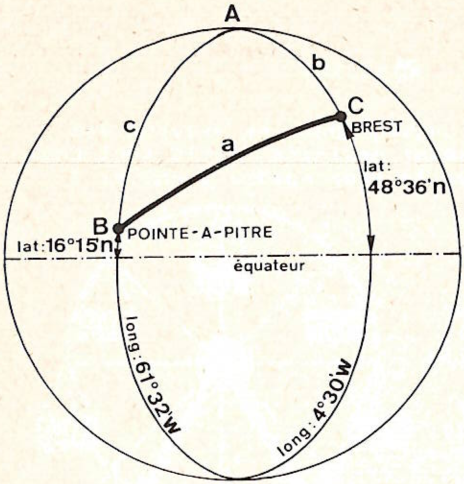
$$\cos a = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}\,\frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} + \frac{\overline{PA}}{\overline{PO}}\,\frac{\overline{QA}}{\overline{QO}}\cos A$$

d'où $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Cette formule permet de trouver le troisième côté (a) d'un triangle sphérique lorsque deux côtés (b et c) et l'angle qu'ils comprennent (A) sont déjà connus.

Un bon atlas de géographie vous indique que le port de Brest en France est situé à 48°36' de latitude Nord et 4°30' de longitude West de Greenwich. Quant à la ville de Pointe-à-Pitre en Guadeloupe, elle se situe par 16°15' Nord de latitude et 61°32' de longitude West de Greenwich. Voyons tout d'abord comment notre formule nous donne une idée de la distance séparant ces deux ports ; ensuite, nous calculerons un cap à tenir dès la sortie de la rade de Brest.

On associe le sommet A de notre triangle sphérique avec le pôle Nord, C avec Brest et B avec Pointe-à-Pitre. b vaut 90° - 48°36' = 41°24'. c vaut 90° - 16°15' = 73°45'. Quant à l'angle A, il vaut la différence des 2 longitudes (car elles sont toutes 2 à l'Ouest) soit 61°32' - 4°30' = 57°2'.



cos a =

cos 41°24' cos 73°45'

+ sin 41°24' sin 73°45'

sin 57°2'

cos a = 0,7425

a = 42°3'

Un grand cercle (=360°) mesurant 40 030 Km, on en déduit que la distance entre Brest et Pointe-a-Pitre vaut près de

4676 Km (= 2520 miles nautiques)

La formule que nous avons établie peut s'écrire sous trois formes; ainsi il est vrai que

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \sin B$$

n° 10 p. 72.

d'où

$$\sin B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 0{,}84342$$

et B vaut 122°30' (par rapport au Nord, vers l'Ouest).

Voilà l'essentiel de la trigonométrie sphérique. D'autres formules se déduisent de celle-ci et on peut établir une série de formules valables pour les triangles rectangles sphériques. A partir de cet exemple, il ne nous semble pas difficile d'élaborer un programme. Un dernier détail : prenez garde aux signes dans le calcul de b et c lorsque l'un des deux points est de latitude sud...

LE COIN DES PROBLEMES

44 PGCD et PPCM.

Le PGCD de deux nombres naturels a et b est 504. Le PPCM de a et b est 66528. Déterminer a et b et dénombrer toutes les possibilités.

(proposé par Bruno RASE, 1R., Institut du Sacré Coeur, Burnot)

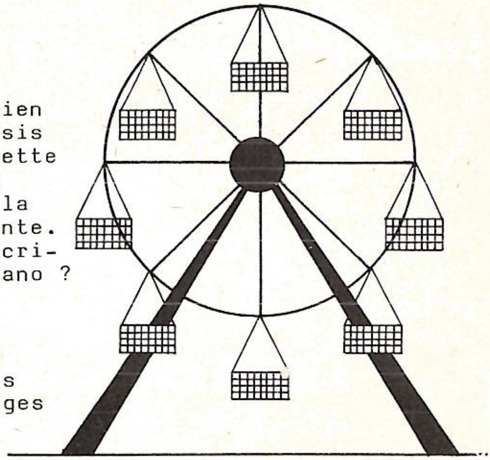
45 Drôles de dés ! * (8,8)

Combien de dés différents peut-on réaliser en disposant les six faces de toutes les manières possibles ?

46 Triangles rectangles... ✻(5,10)

Parmi les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont des entiers strictement positifs, quels sont ceux dont le périmètre s'exprime par le même nombre (entier) que l'aire ?

47 La grande roue.

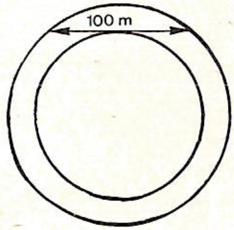


Monsieur Hercule Savinien de Cyrano de Bergerac est assis dans l'une des nacelles de cette grande roue de foire. Il est immobile dans sa nacelle et la roue tourne à vitesse constante. Quelle est la trajectoire décrite par le bout du nez de Cyrano ?

48 Problème médical.

Un médecin reçoit trois malades dont le produit des âges vaut 2450 et la somme, le double de l'âge de l'infirmière. Avec ces données, l'infirmière est incapable de trouver l'âge des malades. Mais il suffit que son patron lui précise être plus âgé que le plus vieux des malades pour qu'elle soit capable de répondre avec certitude. On demande l'âge des trois malades, l'âge du médecin et l'âge de l'infirmière.

49 La moquette. ✻ (10,5)



On doit poser une nouvelle moquette dans un couloir en forme d'anneau circulaire. L'architecte - distrait - n'a renseigné sur son plan que la longueur d'une corde tangente au mur intérieur. Quelle est la surface de la moquette.

MATH-JEUNES est une publication bimestrielle de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'Expression Française.

Editeur responsable	Rédacteur (et courrier)	Abonnement
W. VANHAMME,	J. MIEWIS	(5 numéros)
Rue Firmin Martin,2,	Rue de Joie, 75,	Belgique:50FB
1160 Bruxelles	4000 Liège	Etranger:100FB