20e année
Mai 1999 — n° 90
Bureau de dépôt: 7000 Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 LA LOUVIÈRE.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).
Abonnements :

Belgique :

- Groupés (au moins 5 exemplaires) : 150 BEF
- Isolés : 200 BEF

Étranger :

	CEE	Europe hors CEE	Hors Europe non priorit.	Hors Europe prioritaire
• Groupés	200 BEF/34 FF	240 BEF/40 FF	260 BEF/44 FF	450 BEF/75 FF
• Isolés	370 BEF/62 FF	450 BEF/75 FF	500 BEF/84 FF	950 BEF/160 FF

Anciens numéros :
Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M., rue de la Halle 15, 7000 Mons
Tél. 32-(0)65-373729
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeur responsable : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière

N° 90 Vingtième année 1999

Math-Jeunes

Math-Jeunes n° 90, 114–115, 1999

Le Soleil a rendez-vous avec la Lune

Michel Ballieu, *CREM (Nivelles)*

Le 11 août, une éclipse totale du soleil sera observable en Belgique. Cet événement est quelque peu exceptionnel. En effet, il est possible d'assister chaque année à une éclipse totale de soleil, mais le phénomène ne se reproduit à un endroit donné qu'en moyenne tous les 370 ans ... Ne ratons donc pas celle-ci !

Précisons que l'éclipse ne sera totale que dans le sud de la Belgique, dans la région d'Arlon, Bouillon, Virton, ... Ailleurs dans le pays, elle ne sera que partielle. Avant d'être visible dans notre pays, elle l'aura été dans le sud de l'Angleterre (Plymouth) et en France (Normandie, Champagne, Ardenne). Après nous, ce sera au tour du Luxembourg, de l'Allemagne, de l'Autriche, ... et ainsi jusqu'en Inde.

Si les éclipses vous intéressent, voici quelques adresses utiles

- Le site Internet créé par la Société Astronomique de France et l'Institut d'Astrophysique de Paris : www.iap.fr/eclipse99/
- La Vereniging voor Sterrenkunde a réalisé une brochure dont la version française, *Dans l'ombre de la Lune*, peut être obtenue en versant la somme de 250 BEF au compte 000-0346177-81 (Observatoire Royal de Belgique) avec la mention *Brochure éclipse en français*.
- L'Observatoire Royal de Belgique peut être contacté pour tout renseignement : Yves Coene, avenue Circulaire 3, B1180 Bruxelles, Tel. 02 - 373 04 22, e-mail : eclipse@oma.be.
- La NASA Eclipse Bulletin dont l'édition pour l'éclipse du 11 août est accessible sur le Web : umbra.nascom.nasa.gov/eclipse/
- Le site Web de la NASA réalisé par Fred Espenak : sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/

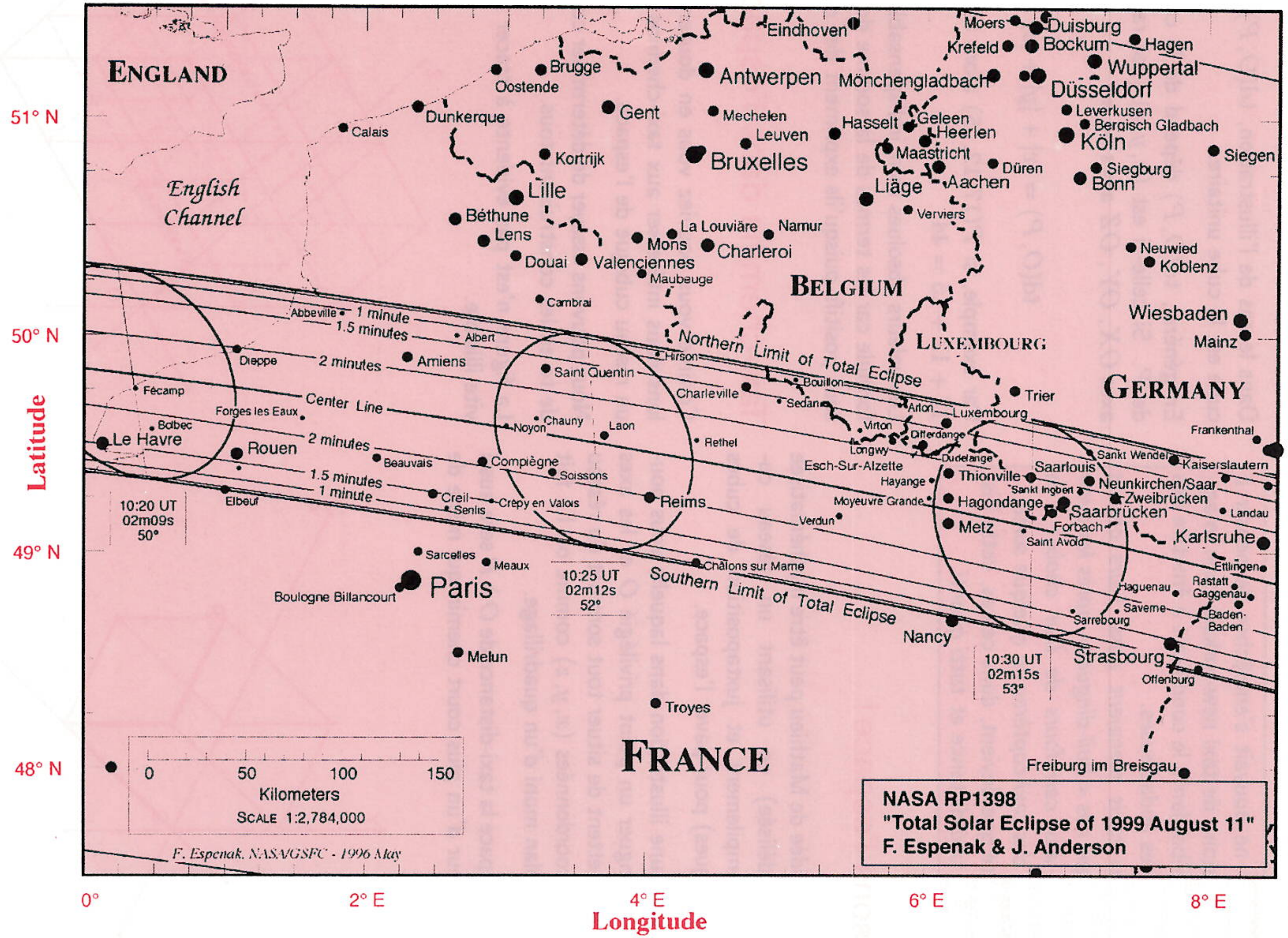
Ville	Début	Durée
Bouillon	12:26:48	59 s
Torgny	12:26:53	125 s
Florenville	12:26:56	88 s
Virton	12:27:03	115 s
Athus	12:27:36	107 s
Maizières-lès-Metz	12:27:50	139 s
Arlon	12:27:53	71 s
Luxembourg	12:28:16	82 s

Attention ... Il est très dangereux d'observer à l'œil nu une éclipse de soleil (risque non négligeable de brulûre de la rétine, donc de cécité). Équipez-vous de verres ad hoc !

Source : ***L'Écho des Savants*****, N° 277, mars-avril 1999.**

Total Solar Eclipse of 1999 August 11

FIGURE 7: THE ECLIPSE PATH THROUGH FRANCE, BELGIUM, LUXEMBOURG AND GERMANY



Math-Jeunes n°90, 116–120, 1999

Taxi-choses et taxi-trucs (4)

Claude Villers

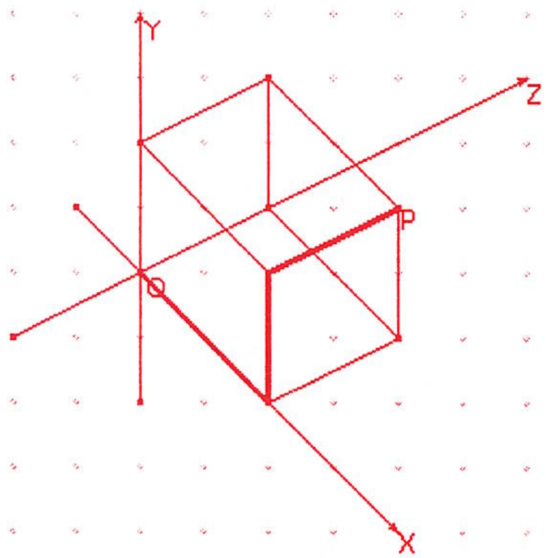
Mathieu ne pouvait s'empêcher de penser à cette histoire de taxi new-yorkais. Son imagination débordante le conduisait à émettre des hypothèses audacieuses.
Et si les taxis menaient aussi leurs clients aux étages des « buil-dingues » après les avoir amenés aux carrefours de leur choix ? Ils seraient des taxi-coptères en quelque sorte.
Voyons ce que devient, dans ce cas, cette histoire de taxi-distance et *tutti quanti*.

Osons l'espace !

En fait l'idée de Mathieu peut être mathématisée (ou modélisée) en utilisant un réseau cubique (empilement et juxtaposition de cubes isométriques) pour paver l'espace.

En voici une illustration dans laquelle vous pouvez distinguer un point privilégié O et les axes qui permettent de situer tout sommet du réseau par ses coordonnées (x, y, z) comme on l'a fait pour le plan muni d'un quadrillage.

Dans l'espace la taxi-distance de O à P sera aussi la longueur d'un plus court chemin qui mène de O à P.



Dans le cas de l'illustration, $\mathrm{td}(O, P) = 3$ si le cube est le cube unitaire.

En général, $\mathrm{td}(O, P)$ dépend de la coordonnée de P. Si celle-ci est (x, y, z) (par rapport aux axes OX, OY, OZ alors on a :

$$\mathrm{td}(O, P) = |x| + |y| + |z|$$

Par exemple, si $P(17, 12, 15)$ alors $\mathrm{td}(O, P) = 17 + 12 + 15 = 44$.

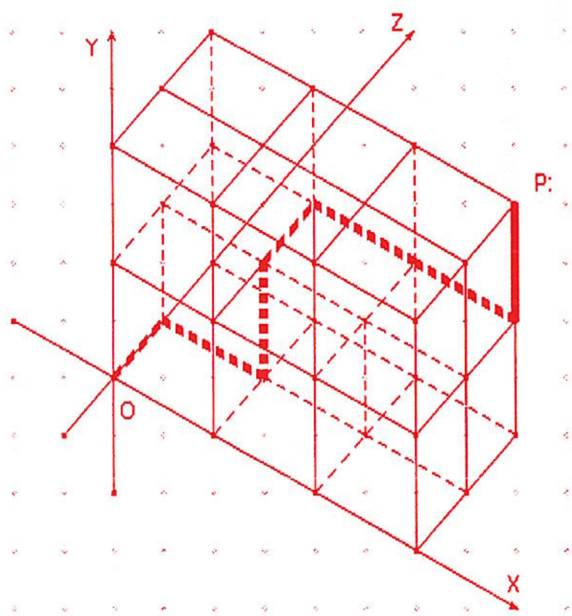
Les valeurs absolues sont indispensables dans la formule car les termes de la somme doivent être tous positifs puisqu'ils expriment des distances.

Taxi-chemins dans l'espace

Comme vous pouviez vous en douter, nous allons nous intéresser aux taxi-chemins (tc) dans un réseau cubique de l'espace.

Nous pouvons essayer de déterminer ces nombres de tc en les construisant tous.

La figure n'est pas évidente à tracer et devient vite illisible.



Dans la figure ci-dessus, il est encore aisé de constater que $\mathrm{td}(O,P) = 7$. Mais s'il fallait tracer tous les taxi-chemins reliant ces deux points !!

L'un de ces tc est tracé en gras. Observez-le bien ! Regardez de quels types de segments il est constitué et en quel nombre pour chacun. Vous avez trouvé ? C'est bien.

La coordonnée de P est, ici, $(3,2,2)$. Cela signifie que tout tc reliant O à P sera obligatoirement constitué de trois segments parallèles à OX, de deux segments parallèles à OY et, fatalement puisque $\mathrm{td}(O,P) = 7$, de deux segments parallèles à OZ.

Le nombre de façons de choisir 3 segments parallèles à OX sur les 7 segments nécessaires est C_7^3 soit 35 (car $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$, voir aussi le triangle de Pascal).

Il reste à choisir deux segments parallèles à OY parmi les quatre segments encore à tracer. Le nombre de choix pour ces deux segments est C_4^2 qui vaut 6.

Il reste alors deux segments que l'on devra obligatoirement placer parallèlement à OZ.

Le nombre total de tc reliant O à P est donc $35 \times 6 = 210$ car on peut combiner les deux types de segments à choisir, de toutes les façons possibles.

Avez-vous tracé ces 210 tc ?

Généralisons (pour les plus courageux).

Si $P(x,y,z)$ alors $\mathrm{td}(O,P) = |x|+|y|+|z|$ et le nombre de $\mathrm{tc}(O,P) = C^{|x|}_{|x|+|y|+|z|} \cdot C^{|y|}_{|y|+|z|}$

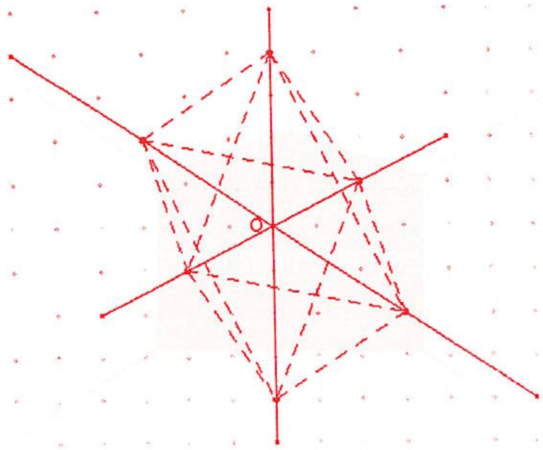
Taxi-sphère

Tous les nœuds du réseau qui sont à la même taxi-distance n (nombre naturel) d'un même nœud (O par exemple) composent cette fois la taxi-sphère ayant ce nœud pour centre et n pour rayon.

La taxi-sphère de centre O et de rayon n est l'ensemble des nœuds C du « cubage » de l'espace tels que $td(O,C) = n$.

Ainsi, la taxi-sphère $\mathrm{tS}(O,0)$ comporte le seul nœud O.

$\mathrm{tS}(O,1)$ comporte 6 nœuds qui sont les sommets d'un octaèdre régulier.



Les six nœuds représentés sur la figure sont tous à distance 1 de O.

Les axes étant perpendiculaires deux à deux, les douze arêtes de l'octaèdre ont toutes la longueur $\sqrt{2}$ (théorème de Pythagore).

La figure ci-dessus est bien un octaèdre régulier (réduit à ses sommets).

Qu'est-ce alors que la taxi-sphère de centre O et de rayon n (nombre naturel) ?

Tout point $P(x,y,z)$ de cette tS est donc tel que $|x| + |y| + |z| = n$.

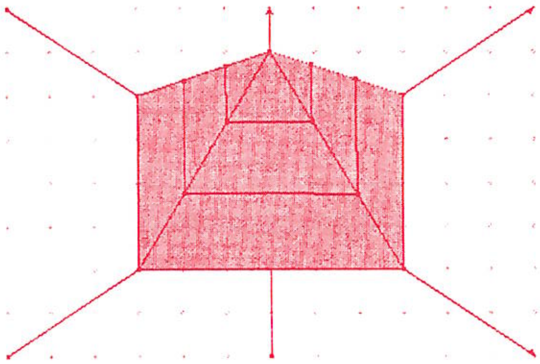
En étudiant cette équation, on montre que ces points P sont aussi les points à coordonnées entières d'un octaèdre.

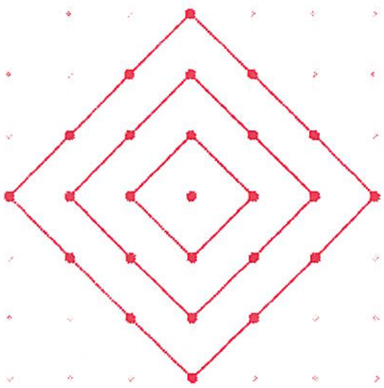
Quelques indications figurent à la fin de cet article.

Quel est le nombre de points d'une taxi-sphère de rayon n (nombre naturel) ?

La taxi-sphère peut être vue comme un empilement de couches qui sont des taxi-cercles. Nous connaissons le nombre de points d'un taxi-cercle de rayon n : c'est $4n$ si n est différent de 0 et 1 si $n = 0$ (cf. *Taxi-choses et taxi-trucs (3)* dans *Math-Jeunes* n° 89).

Or la taxi-sphère de rayon n comporte une couche de base : taxi-cercle de rayon n et, de part et d'autre, des couches dont les rayons vont de $n-1$ à 0 (par pas de -1).





Le nombre de points d'une taxi-sphère de rayon n est donc (quelques calculs ne peuvent vous rebuter) :

$$\begin{aligned}
4n &+ 2[1+4+8+12+\cdots+4(n-1)] \\
&= 4n + 2[1+4(1+2+3+\cdots+(n-1))] \\
&= 4n + 2\left[1 + 4\frac{(n-1)n}{2}\right] \quad (^1) \\
&= 4n + 2(1+2n^2-2n) \\
&= 4n + 2 + 4n^2 - 4n \\
&= 4n^2 + 2 \\
&= 2(2n^2+1)
\end{aligned}$$

Par exemple, le nombre de points d'une taxi-sphère de rayon 3 est $2(2 \cdot 3^2 + 1) = 38$.

Cette taxi-sphère est composée d'une couche de 12 points, de deux couches de 8 points, de deux couches de 4 points et de deux couches de 1 point. Au total on retrouve bien $2(1+4+8)+12 = 38$ points.

Quel est le nombre de points d'une taxi-boule de rayon n (nombre naturel) ?

La taxi-boule de centre O et de rayon n est l'ensemble de tous les nœuds C du « cubage » de l'espace tels que $\mathrm{td}(O, C) \leq n$.

Nous pouvons considérer la taxi-boule comme composée de couches qui sont des taxi-disques. Mais nous connaissons le nombre de points d'un taxi-disque de rayon n, il vaut $2n^2 + 2n + 1$ (cf. *Taxi-choses et taxi-trucs (3)* dans *Math-Jeunes* n° 89.)

Or la taxi-boule de rayon n se compose d'une couche de base qui est un taxi-disque de rayon n et, de part et d'autre de celle-ci, de couches qui sont des taxi-disques dont les rayons vont de $n-1$ à 0 par pas de -1.

(1) Nous avons déja rencontré la formule $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Le nombre de points d'une taxi-boule de rayon n est donc (encore quelques calculs !) :

$$\begin{aligned}
2n^2 &+ 2n+1+2\left[(2(n-1)^2+2(n-1)+1)+(2(n-2)^2+2(n-2)+1)+\cdots\right.\\
&\left.+(2(1)^2+2(1)+1)+(2(0)^2+2(0)+1)\right]\\
&= 2n^2+2n+1+2\left[2\left((n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1^2\right)+2\left((n-1)+(n-2)+\cdots+1\right)+n\right]\\
&= 2n^2+2n+1+2\left[2\times\frac{1}{6}\times(n-1)n(2n-1)+2\times\frac{1}{2}\times(n-1)n+n\right]\ (^2)\\
&= 2n^2+2n+1+2\left[\frac{1}{3}(n^2-n)(2n-1)+(n^2-n)+n\right]\\
&= 2n^2+2n+1+\frac{2}{3}(2n^3-2n^2-n^2+n)+2(n^2-n)+2n\\
&= \frac{1}{3}(6n^2+6n+3+4n^3-4n^2-2n^2+2n+6n^2-6n+6n)\\
&= \frac{4n^3+6n^2+8n+3}{3}
\end{aligned}$$

Par exemple, le nombre de points d'une taxi-boule de rayon 3 est $\frac{1}{3}(4\cdot 3^3+6\cdot 3^2+8\cdot 3+3) = \frac{1}{3}(108+54+24+3) = \frac{189}{3} = 63$.

Cette taxi-boule est composée d'une couche de 25 points et de deux fois des couches de 13, 5 et 1 points soit donc au total $2(13+5+1)+25$ points soit bien 63 points.

Une petite synthèse bien utile

Le tableau suivant donne le nombre de points (à coordonnées entières) d'un taxi-cercle, d'un taxi-disque, d'une taxi-sphère et d'une taxi-boule, en fonction de leur rayon n.

Rayon n	Taxi-cercle	Taxi-disque	Taxi-sphère	Taxi-boule
0	1	1	1	1
1	4	5	6	7
2	8	13	18	25
3	12	25	38	63
4	13	41	66	129
5	20	61	101	231
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$4n$ $(n \neq 0)$	$2n^2+2n+1$	$4n^2+2$ $(n \neq 0)$	$\frac{4n^3+6n^2+8n+3}{3}$

(^{2}) Nous avons utilisé ici une formule classique permettant de calculer la somme des carrés des n premiers naturels non nuls.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Pour aller un peu plus loin !

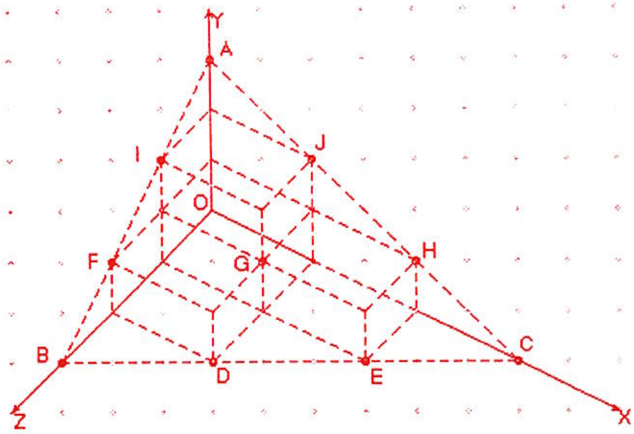
Si le plan muni d'un repère (axes des X et axe des Y) est partagé en 4 quadrants, l'espace muni d'un repère (axes des X, des Y et des Z) est partagé en 8 octants.

L'équation $|x| + |y| + |z| = n$ fournit 8 équations qui diffèrent selon l'octant de référence.

- Pour l'octant où x, y et z sont positifs, $|x| + |y| + |z| = n$ devient $x + y + z = n$.
- Pour l'octant où x et y sont négatifs et où z est positif, $|x|+|y|+|z| = n$ devient $-x-y+z = n$.
- $\cdots$

Chacune de ces équations du premier degré à 3 inconnues caractérise des points d'un plan situés dans l'octant considéré.

Intéressons-nous par exemple à la taxi-sphère d'équation $|x| + |y| + |z| = 3$.

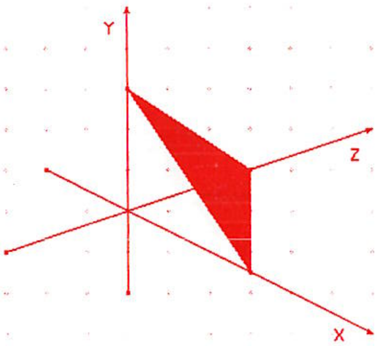


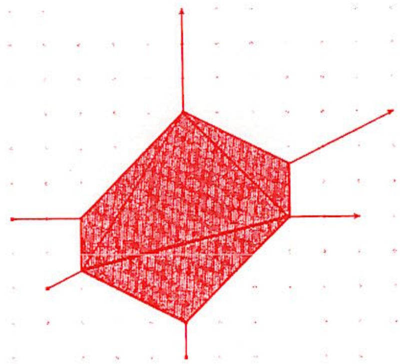
Dans l'octant où x, y et z sont positifs, cette équation devient $x + y + z = 3$. Il s'agit de l'équation d'un ensemble de points appartenant à une même partie triangulaire d'un plan, comme le montre la figure ci-contre.
Les points de la taxi-sphère situés dans cet octant sont $C(3, 0, 0)$, $A(0, 3, 0)$, $B(0, 0, 3)$, $H(2, 1, 0)$, $E(2, 0, 1)$, $I(0, 2, 1)$, $J(1, 2, 0)$, $F(0, 1, 2)$, $D(1, 0, 2)$ et $G(1, 1, 1)$.
On peut procéder de même dans les sept autres octants, et la taxi-sphère prend l'allure d'un octaèdre.
Voilà pourquoi on peut dire que les points d'une taxi-sphère appartiennent à l'enveloppe d'un octaèdre.

Pour aller encore plus loin

Vous pouvez maintenant généraliser ce qui précède en travaillant dans l'ensemble des nombres réels. Vous trouvez ou retrouvez que dans le premier octant $x + y + z = 3$ est l'équation d'une partie triangulaire de plan (figure de gauche).

Dans l'espace, $|x| + |y| + |z| = 3$ est l'équation de l'enveloppe d'un octaèdre (taxi-sphère) et $|x| + |y| + |z| \leq 3$ est celle de l'octaèdre (taxi-boule). Référez-vous à la figure de droite.





Math-Jeunes n ° 90, 121–124, 1999

N. Hervé, *Université de Mons*

Voici enfin un (léger) soulagement aux questions métaphysiques soulevées dans les deux premiers opuscules de l'année par l'ami N. Hervé! Appuyés de façon non négligeable par une kyrielle de forces bénéfiques, des éclaircissements nous parviennent sur les tonneaux de vin et leurs mystères ! Accrochez vos ceintures, ça va déménager...

Kepler savait tout !

Johannes KEPLER

Kepler est né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt (Saint Empire Romain, aujourd'hui Allemagne). Il est mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne. À l'université de Tübingen où il fut étudiant, son professeur d'astronomie, Michael Maestlin avait remarqué ses dons pour les mathématiques. Officiellement, Maestlin enseignait l'astronomie géocentrique de Ptolémée. Pour ses élèves plus doués, parmi lesquels le jeune Kepler, il parlait du système héliocentrique de Copernic (publié en 1543). En 1596, Kepler publie son *Mysterium Cosmographicum* qui donne une explication mathématique du système copernicien en termes de polyèdres réguliers.
Il montre qu'une planète tourne autour du soleil selon une orbite en forme d'ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers. Il montre également qu'une ligne joignant une planète au soleil balaie des aires égales en des temps égaux lorsque cette planète décrit son orbite. Ces deux lois — formulées d'abord pour la planète Mars — furent publiées dans *Astronomia Nova* (1609). Ces calculs d'aires font intervenir une technique proche du calcul intégral.
La troisième loi de Kepler — les carrés des périodes des planètes sont proportionnels aux cubes du rayon moyen de leurs orbites — apparaît dans son *Harmonice Mundi* de 1619.

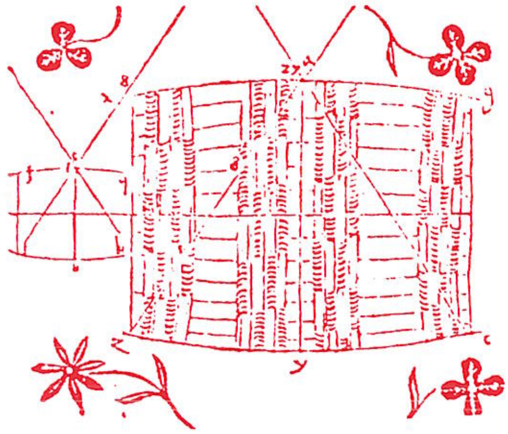
Kepler a également prouvé que la vue était due à la réception de rayons lumineux dans l'œil (1604) ; le point de vue euclidien était que les rayons partaient de l'œil !

De Kepler, on a aussi des écrits sur l'optique du téléscope. Il a laissé des notes sur la nouvelle étoile de 1604 appelée de nos jours *Supernova de Kepler*.

En 1612, Kepler vivait des moments heureux auprès de sa petite famille à Linz, en Autriche. Un beau jour, il commanda du vin et regarda la manière utilisée par le marchand pour jauger les fûts !

Quel choc pour notre ami Kepler ! Le tonnelier s'aidait d'une règle, et procédait à la manière des douaniers (rappelez-vous, le premier *Math-Jeunes* de l'année !). Kepler fut étonné de voir l'évaluation d'un volume par une mesure de longueur ...

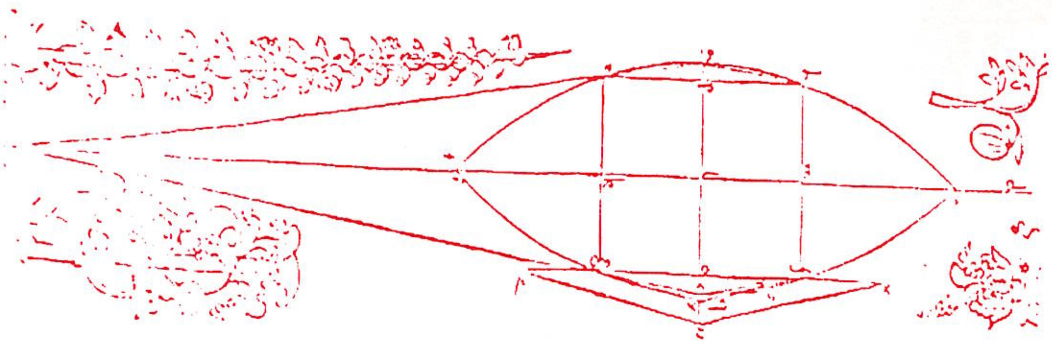
Intrigué, il voulut connaître la formule employée, mais la corporation des tonneliers de Linz lui répondit : *NEIN ! C'est un secret, ach !* ...et le pauvre petit Kepler, friand de connaissances, tenta par lui-même de retrouver la formule.



Et ça a très bien marché !!!!! et même mieux que ça ! À partir de cette question très terre à terre, Kepler se lança dans des calculs et de la recherche qui le menèrent à l'écriture d'un traité en latin intitulé *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* (la nouvelle géométrie solide des barrils de vin !).
Des retards d'impression dus à la difficulté de publier un livre en latin ont permis à Kepler de peaufiner son œuvre jusqu'en 1615. D'ailleurs, dans son infinie sagesse, Kepler décida d'en faire une traduction en allemand sous le titre *Ausszug auss der Vralten Messekunst Archimedis.* C'est la première fois que des termes techniques fort utiles et jusque là réservés au latin se firent une place dans la langue d'outre-Rhin !

À propos d'Archimède, cité dans ce nouveau titre, Kepler avoua ne pas être en mesure de reproduire sa rigueur. L'idée de Kepler était de découper un solide donné en un nombre apparemment infini de morceaux infinitésimaux, d'une forme adéquate au problème (par exemple, découper une sphère en de petites pyramides appropriées).

Tout cela ne vous fait penser à rien ? Mais oui ! Bien des années après, les idées de Kepler influencèrent Newton, ainsi que Cavalieri et Leibniz ! Vous l'aurez compris, la méthode des douaniers, d'où tout est parti, a joué un grand rôle dans l'avènement de ce que l'on appelle de nos jours le calcul intégral ...



Les vrais coupables lèvent enfin le voile !

La tonnellerie Radoux [1] de Jonzac en Charente Maritime, contactée par Guy Noël nous a faxé le texte suivant :

[1] Toute ressemblance homonymique et/ou orthographique avec une personnalité montoise bien connue ne peut être que le fruit du pur hasard !

Monsieur,

Suite à votre courrier du 11 novembre 1998, je vais essayer de répondre à vos quelques questions même si la tonnelllerie reste un travail très artisanal et donc un peu moins rigoureux que les mathématiques.
Les tonneaux n'ont pas tous la même forme. Il existe toutes les contenances comprises entre 100 ℓ et 600 ℓ voire beaucoup plus pour les foudres (grands tonneaux).

La fabrication d'un tonneau se réalise à partir d'une trentaine de douelles (planches de bois formant la coque d'un tonneau). Vous comprendrez qu'elles doivent être homothétiques à la forme du tonneau final (sans tenir compte du retrait lors de la chauffe).
La seule manière rigoureuse de calculer le volume d'un tonneau serait d'intégrer l'équation de la courbe d'un tonneau ou d'appliquer le théorème de Guldin ([2]) à la forme du tonneau.

TONNELLERIE RADOUX

À l'aide de l'équation d'une douelle, de la longueur de cette dernière, de la position des fonds (couvercles du fût), il doit être possible de calculer le volume exact d'un fût.
L'approximation de l'équation de la forme d'une douelle est un polynôme pair du quatrième degré. Donc, pour un fût de 225 ℓ, l'équation est

$$\left(8.32558 \times 10^{-13} x^4 - 8.466 \times 10^{-7} x^2 + 1\right) \cdot L$$

où L est la largeur de douelle au bouge et X est la hauteur sur la douelle. Pour ce même fût, la longueur d'une douelle est 950 mm, la position des fonds est à 50 mm du bout de douelle et le développé au bouge est de 2 150 mm.
Soit un fût composé de 25 douelles de 86 mm de large, l'équation de chaque douelle est

$$8.32558 \times 10^{-13} \times 86x^4 - 8.466 \times 10^{-7} \times 86x^2 + 86$$

L'équation du fût (indépendante du nombre de douelles) sera

$$\frac{8.32558 \times 10^{-16} \times 2\,150x^4 - 8.466 \times 2\,150x^2 + 2\,150}{2\pi}$$

([2]) Paul Guldin, mathématicien né en 1577 à St Gall (Suisse) et décédé en 1643 à Graz (Autriche). Son théorème fait intervenir la notion de barycentre.

Il ne vous reste plus qu'à intégrer cette équation et à la multiplier par 2π.
Pour de plus amples informations, veuillez contacter Nicolas Chauvin. (3)
Je vous prie . . .

Et le fax est signé Benjamin ROUSSEAU.

Le vocabulaire se la joue ironique . . .

Un coup d'œil sur la dénomination des unités utilisées nous en convaincra immédiatement !

BARÈME

UNIVERSEL

CALCULATEUR DU NÉGOCIANT

COMPTES FAITS

Capacité des diverses futailles des vignobles français par ordre de grandeur.

Baral de Carpentras	26 lit. 5
Cruche ou héralde de Paris	32 »
— des Hautes-Alpes	33 »
Quart de muid ou demi-feuillette (vins de Tonnerre, Avallon, Auxerre, Joigny)	68 »
Caque ou tierçon (Champagne)	91 »
Quartaut Mâcon	206 »
— Châlonnais et Beaune	114 »
Demi-pièce et quartaut d'Orléans (pour les vinaigres)	114 »
Demi-muid gros	152 »
Demi-muid très-gros	167 »
Demi-queue Villenoxe (vins entre Provins, Nogent et Anglure)	175 »
Demi-queue Château-Thierry	183 »
Demi-queue Reims (véritable champagne)	108 »
Demi-queue Renaison (département de la Loire)	201 »
Demi-queue ou pièce bordelaise	201 »
Pièce ou demi-queue de l'Ermitage (bords du Rhône)	205 »
Demi-queue cruchée (vins de Vichy, Cusset, Varennes, Moulins	208 »
Demi-queue Saint-Dizier (vins de Joinville et environs)	213 »
Demi-queue Mâcon	213 »
Demi-queue du Gâtinais	221 »
Demi-queue des Riceys	221 »
Demi-queue Lachaise	221 lit. »
Demi-queue Cahors	221 »
Demi-queue de Sancerre	221 »
Demi-queue Grosbard (vins de Bar-sur-Aube, Bar-sur-Seine, Châtillon)	224 »
Demi-queue chalonnaise	224 »
Demi-queue Pouilly	228 »
Demi-queue Orléans	228 »
Busse de Saumur	232 »
Demi-queue Blois et Sologne	236 »
Demi-queue Noël (vins blancs des Noëls)	243 »
Demi-queue de Montlouis	343 »
Demi-queue Chinon et d'Anjou	243 »
Demi-queue de Touraine	247 »
Busse d'Anjou	251 »
Demi-queue Vouvray	255 »
Demi-queue du Cher	255 »
Muid de l'Yonne	272 »
Demi-queue du Languedoc	274 »
Demi-queue de la haute Auvergne	280 »
Demi-queue Saint-Gilles	289 »
Muid d'Orléans	289 »
Muid Bourgogne et Cahors	297 »
Barrique Châtellerault	300 »
Muid Rappé	304 »
Demi-queue d'Auvergne de Ris	365 »
Muid de Languedoc	460 »
Muid Roussillon	472 »
Muid Montpellier	510 »

Mesures pour l'huile.

Le plus souvent l'huile se vend au poids. On calcule dans le commerce la quantité d'huile contenue dans un fût en retranchant 2/27 du poids brut, ce qui revient à retrancher 1/6 et à ajouter ensuite au résultat de la soustraction 1/9 de ce même résultat.

L'huile de colza se vend en gros à la tonne de 91 kilogrammes.

Mesures usitées pour l'huile dans le département de l'Hérault :

La charge	157 lit. 11 à 188 lit. 53
Le quintal	44 89
La quarte	8 lit. 98 à 18 80
L'énigme	20 lit. 44
La canne	10 lit. 80 à 11 36
La palme	7 19

Math-Jeunes tient à remercier tous ceux qui ont collaboré à cet article :

G. NOËL
F. BUEKENHOUT (BEAUCOUP!)
P. TILLEUIL (UN PEU!)
F. POURBAIX
M. BALLIEU
et... N. HERVE!

(3) ! ???

Quelques mots sur les mathématiques de l'Inde védique

Michel Ballieu, *CREM (Nivelles)*

Le mot *veda* signifie science, connaissance.

Les renseignements qui suivent datent d'une époque antérieure de plusieurs siècles à notre ère. Il est possible que les faits relatés soient quelque peu déformés puisqu'ils nous sont parvenus par tradition orale.

Les dieux ont dépecé l'homme primitif (puruṣa).

Lorsqu'ils divisèrent l'homme, en combien de parties l'ont-ils arrangé ?
Que devint sa bouche, devinrent ses bras ?
Comment s'appellent ses jambes et ses pieds ?
*Sa bouche fut le brahmane (*brāhmana*), de ses bras, on fit le Guerrier (*kṣatrīya*), ses jambes, c'est le Laboureur (*vaiśya*).*
*Le Serviteur naquit de ses pieds (*śūdra*).*

(traduction de J. Varenne, *Le Veda*, vol. 2, page 500, Marabout).

L'idée générale est la reconstitution de *prajāpati* afin de réactiver le monde.

Dans cette philosophie, le rite sacrificiel accorde une énorme importance au lieu et au moment. Un des rôles du prêtre brahmane est de s'assurer du respect de la tradition.

atha agni ādheyike vihāre
gārhapatyād āhavanīyasya āyatanam
vijnāyate aṣṭasu prakrameṣu brāhmanas agnim ādadhīta ekādaśasu rājānyas dvādaśasu vaiśyas iti

ce qui signifie :

Maintenant, en ce qui concerne la disposition des feux qui doivent être placés sur le terrain sacrificiel,
la place de l'āhavanīya à partir du gārhapatyā : il est prescrit « le brahmane place le feu à huit prakrama, le rājanya (ksạtrīya) à onze et le vaiśya à douze. »

āyāma tṛtīyena trīṇi caturaśrāṇi anūcīnāni kārayet
aparasya uttarasyām śroṇyām gārhapatyas
tasya eva dakṣiṇe aṃse anvāhāryapacanas
pūrvasya uttare aṃsas āhavanīyas.

Avec le tiers de la distance entre les deux feux précédents, qu'on construise trois carrés adjacents,
Le gārhapatya se trouve sur la hanche nord du carré Ouest,
À l'épaule Sud de celui-ci l'anvāhāryapacana et à l'épaule Nord du carré Est l'āhavanīya.

Le troisième feu, l'anvāhāryapacana est situé au Sud, dans la région des ancêtres où il est censé repousser les puissances et esprits mauvais et recevoir les sacrifices qui leur sont destinés. Sa position exacte est prescrite.
C'est là que l'on débouche sur la construction de triangles rectangles et sur une relation bien connue entre trois nombres entiers.

Dīrghakaturaśrasya akṣṇayārajjus pārśva mānī tiryaṅmānī cayat pṛthak bhūte kurutas tat ubhayam karoti.

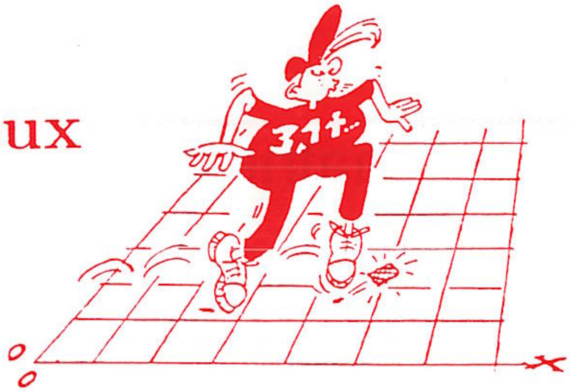
La diagonale d'un rectangle produit en une fois ce que produisent séparément la longueur et la largeur.

Le lecteur avisé aura sans doute flairé l'énoncé de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d' **Euclide**, proposition plus connue sous l'appellation non contrôlée de *Théorème de Pythagore*.

Source : *Les mathématiques de l'Inde védique*, Jean-Michel Delire, communication faite chez ALTAÏR, Université Libre de Bruxelles.

Math-Jeunes n ° 90, 126–126, 1999

Jeux



Les auto-références

Si tu as pris goût à ce jeu que nous t'avons présenté dans *Math-Jeunes* 88, voici deux autres grilles. Rappelons qu'il s'agit de compléter les tableaux pour que les informations soient vraies.

Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 0.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 4.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 5.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 6.

Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 0.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 4.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 5.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 6.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 7.
Dans ce cadre, il y a . . . fois le chiffre 8.

Nombres croisés

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Horizontalement
1. Carré parfait.
2. Il y a 9 ans.
3. Factorielle.
4. Somme des deux premières lignes.

Verticalement
1. Nombre premier.
2. Multiple de 137.
3. La somme des chiffres est 22.
4. Nombre palindrome.

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, . . .). Chacun des nombres-définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essaie de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1					R	
2						T
3				O		
4						
5						
6						

Horizontalement
1. 491 400
2. 810 000
3. 510 300
4. 13
5. 70
6. 211 185

Verticalement
1. 1 228 500
2. 59 850
3. 195 – 19
4. 1 080
5. 2 430 – 144
6. 1 400

Comment résoudre n'importe quel puzzle de type "Rubik" (Deuxième partie)

Arnaud Maes, *Université de Mons-Hainaut*

Voici la seconde partie de l'article consacré au Cube de Rubik, à ses variations, et à une méthode permettant de les résoudre (presque tous).

Dans la première partie, nous avons annoncé qu'il suffisait d'être en mesure de résoudre une face du Cube pour être capable de le résoudre entièrement. Nous allons maintenant démontrer ce fait.

Rappelons que notre méthode se base sur la formule suivante:

$$XsX^{-1}s^{-1}$$

où X est une suite de mouvement qui tourne une pièce ou échange deux pièces de la tranche supérieure, sans la modifier d'avantage, et s est une rotation de cette tranche supérieure.

Nous avons prétendu que la suite de mouvements $XsX^{-1}s^{-1}$ tourne deux pièces ou échange trois ou quatre pièces de la tranche supérieure, tout en laissant le reste du cube intact.

Nous avions illustré ceci sur un exemple. Nous allons réutiliser cet exemple afin de démontrer l'efficacité de cette méthode.

Examinons d'un peu plus près ce qui s'est passé durant la manipulation décrite dans l'article précédent...

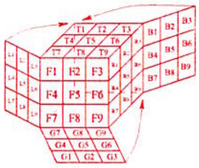
Nous allons nous intéresser à l'**action** des séquences de mouvements X et s sur le cube, c'est-à-dire au **résultat** de ces opérations comme **permutations** des étiquettes du cube (il y en a 9 par face). Une permutation des étiquettes pourra donc être considérée comme le résultat d'un décollage puis d'un recollage de ces étiquettes.

Bien sûr, certaines permutations des étiquettes ne peuvent pas être obtenues comme résultat d'une suite de mouvements réels (par exemple si l'on se retrouve avec plusieurs centres de la même couleur).

Ces permutations sont des applications **bijectives** de l'ensemble des étiquettes sur lui-même.

Elles peuvent donc être **composées** (nous notons la composition de la gauche vers la droite), **inversées**, etc... L'ensemble de ces permutations forme donc un **groupe** pour l'opération de composition. L'ensemble des permutations qui résultent d'une suite de mouvements du Cube en forme un sous-groupe.

Afin de décrire ces permutations, donnons un nom à toutes les étiquettes du cube (ces noms sont inspirés de l'anglais: *F-Front*, *B-Back*, *L-Left*, *R-Right*, *G-Ground*, *T-Top*).



Examinons la permutation **résultat** de l'opération X que nous avons utilisé dans la première partie de cet article. Rappelons que notre but était de retourner deux pièces de bord de la tranche supérieure, à savoir les pièces $T6 - R2$ et $T8 - F2$.

La suite de mouvements X a été choisie de sorte que

i. elle permute les étiquettes $T6$ et $R2$, et laisse inchangées les autres étiquettes de la tranche supérieure,

ii. elle mélange les autres étiquettes du cube.

Nous pouvons donc décomposer X en deux parties:

$$X = (T6\ R2) \cdot Y$$

où $(T6\ R2)$ est la permutation qui correspond à l'action (i), et Y est la permutation qui agit sur les étiquettes autres que celles de la tranche supérieure conformément à l'action (ii) (elle n'agit donc pas non plus sur les étiquettes latérales de cette tranche supérieure).

Rappelons que, dans tout groupe, étant donné deux éléments a et b, l'inverse du produit $a \cdot b$, noté $(a \cdot b)^{-1}$, est le produit $b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Ceci étant également vérifié pour notre groupe de permutations, nous en déduisons que $X^{-1} = Y^{-1} \cdot (R2\ T6)$, où $Y^{-}1$ est la permutation inverse de Y.

Appelons s la permutation des étiquettes du cube lorsque l'on tourne la tranche supérieure.

Voici maintenant LA propriété qui fait tout fonctionner:

Proposition:

*Deux permutations **commutent** si elles agissent sur des ensembles disjoints.*

La preuve de cette proposition est intuitive: si nous désirons appliquer permutation a sur un ensemble A, et permutation b sur un ensemble B **disjoint de** A, alors nous pouvons effectuer a d'abord et b ensuite ou le contraire, le résultat final sera le même.

(Formaliser cette preuve 'mathématiquement' serait cependant un petit peu plus long !)

Rappelons-nous que, par choix de X et définition de Y, la permutation Y *n'agit pas* sur les étiquettes de la tranche supérieure.

Quant à elle, la permutation s *n'agit que* sur les étiquettes de la tranche supérieure.

Donc Y et s commutent !

Ainsi, la permutation complète que nous avons effectuée est

$$\begin{aligned} XsX^{-1}s^{-1} &= (T6\ R2)YsY^{-1}(R2\ T6)s^{-1} \\ &= (T6\ R2)sYY^{-1}(R2\ T6)s^{-1} \\ &= (T6\ R2)s(R2\ T6)s^{-1} \end{aligned}$$

Ceci signifie qu'appliquer la suite de mouvements $XsX^{-1}s^{-1}$ a le même effet qu'appliquer la permutation $(T6\ R2)s(R2\ T6)s^{-1}$. Remarquons maintenant qu'appliquer cette permutation consiste (au niveau du déplacement des étiquettes) en

i. échanger les étiquettes du bord supérieur droit (permutation $(T6\ R2)$) (celles de la première pièce que nous voulons retourner)

ii. tourner la tranche supérieure (permutation s)

iii. échanger les étiquettes du bord supérieur droit (permutation $(R2\ T6)$) (celles de la seconde pièce que nous voulons retourner)

iv. remettre la tranche supérieure à sa position initiale (permutation s^{-1}).

et ceci fournit exactement le résultat que nous voulions obtenir: la permutation ci-dessus échange retourne bien deux pièces sans modifier le reste du cube.

— ⋆ — ⋆ —

En résumé, nous avons montré que:

- si X est une suite de mouvements qui **retourne un** bord de la tranche supérieure et **conserve** le reste de cette tranche mais **mélange** tout le reste du cube,
- et si s est une rotation de la tranche supérieure,

alors la suite de mouvements $XsX^{-1}s^{-1}$ **retourne deux** bords de la tranche supérieure et **conserve** le reste du cube.

Il faut remarquer que, dans notre raisonnement, nous n'avons pas eu besoin de connaître la permutation Y. En appliquant X^{-1}, la permutation Y^{-1} reconstruit 'naturellement' ce que X avait détruit.

Cette indépendance par rapport à Y montre que la suite de mouvements X peut réellement être choisie librement, pour autant que seule une pièce de la tranche supérieure soit modifiée par X.

Mais il est bien plus intéressant encore de remarquer que **le même raisonnement** montre que, si l'on peut trouver une suite de mouvements X qui **tourne un** coin ou **échange deux** bords ou coins de la **tranche supérieure, sans la modifier d'avantage,** mais en détruisant peut-être le reste du cube, alors en appliquant la suite $XsX^{-1}s^{-1}$, il est possible de **tourner deux** coins ou d'**échanger 3 (ou 4)** bords ou coins de la tranche supérieure **sans détruire le reste** du cube.

De plus, comme nous l'avons déjà expliqué, si les pièces que l'on veut tourner ou échanger ne sont pas sur la tranche supérieure, il suffit de trouver une suite de mouvements P qui les y amène, et d'appliquer la formule

$$PXsX^{-1}s^{-1}P^{-1}.$$

Vous voici maintenant capables de résoudre le Cube de Rubik $3 \times 3 \times 3$.

Enfin, nous n'avons en fait jamais réellement utilisé le fait que ce c'était un Cube $3 \times 3 \times 3$ que nous manipulions. Nos arguments peuvent tout aussi bien s'appliquer au Cube $5 \times 5 \times 5$ ou à la plupart de leurs variantes ! La difficulté ne consiste plus qu'à trouver les permutations X.

Cela ne peut pas être si simple...

Bien sûr, c'eût été trop beau si cela avait vraiment été si simple...

Supposons que vous commenciez la résolution de votre Cube par la mise en place des coins par rapport aux centres. Tout à coup, vous remarquez qu'il ne faut plus en échanger que deux !

Bien qu'il ne soit pas possible de n'échanger que 2 pièces du Cube, une telle situation peut se produire, et est due au fait que tous les bords ne sont pas encore en place (autrement dit, un échange de bords devra aussi avoir lieu).

Dans le cas présent, nous sommes confrontés à un problème de parité: chaque fois que nous appliquons la suite $PXsX^{-1}s^{-1}P^{-1}$, nous effectuons un nombre **pair** de mouvements. Mais P permute autant de pièces que P^{-1}, et de même pour X et X^{-1}, ainsi que s et s^{-1}. Nous ne pouvons donc réaliser qu'un nombre pair d'échanges de pièces semblables. Notre méthode ne permet donc pas de n'échanger que deux coins.

Afin de résoudre ce problème de parité, il suffit de tourner une tranche (par exemple la tranche supérieure) *une seule fois*. Au lieu d'avoir deux coins mal placés, il n'y en a maintenant trois. Mais il n'y a alors plus qu'à échanger deux fois une paire de coins à l'aide de notre méthode comme illustré ci-dessous.

Remarques et conclusion

Lorsque vous maîtriserez cette méthode, vous remarquerez qu'elle n'est pas très 'économique' quant au nombre de mouvements nécessaires à la résolution du Cube ! Ceci s'explique par le fait que nous nous efforçons de conserver tout le cube sauf 2, 3 ou 4 pièces, même si il n'y a en réalité rien à conserver...

Cependant, par rapport aux 'pros du Cube' qui sont capables de le résoudre en une dizaine de secondes, sans pouvoir résoudre ses nombreuses variantes, nous sommes en mesure d'aborder sereinement (quasi) tous les puzzles de type Rubik. En effet, notre méthode s'y applique sans peine, pour autant que nous soyons à même de résoudre une face de ceux-ci. Nous n'avons pas d'algorithme à retenir, *nous sommes capables de le construire nous-mêmes.*

Pour ma part, je m'attaque à ces casse-têtes avec une méthode mixte: il est en général possible de compléter une ou plusieurs faces sans trop devoir réfléchir (une seule face pour le Cube $3 \times 3 \times 3$, mais à peu près toutes pour le Dodécahèdre), et je n'applique la méthode exposée ici que pour terminer l'objet.

Pour terminer cet article, voici quelques problèmes que je vous invite à résoudre:

- La méthode fonctionne-t-elle toujours si, plutôt que de considérer la tranche supérieure, vous considérez la tranche centrale (qui contient les 4 centre des faces latérales) ? Comment se formule-t-elle ?

- Pouvez-vous montrer qu'il n'est pas possible de n'échanger que 2 pièces d'un Cube de Rubik $3 \times 3 \times 3$?

- Pouvez-vous montrer qu'il n'est pas possible de ne faire tourner qu'une seule pièce d'un Cube $3 \times 3 \times 3$?

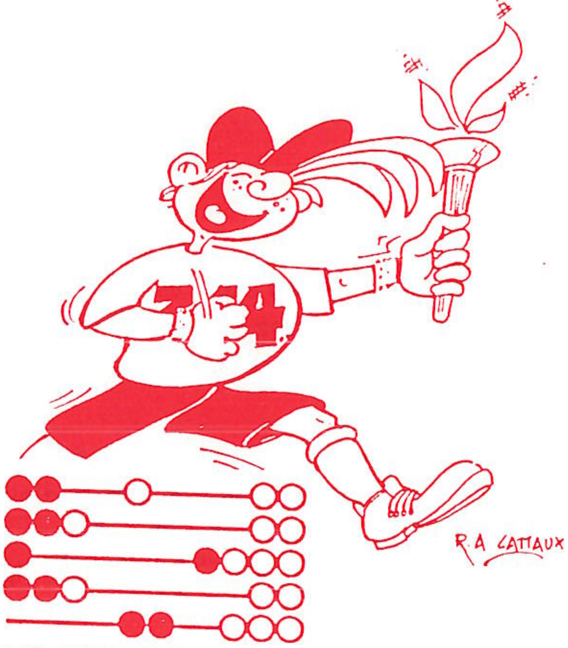
- Pouvez-vous montrer qu'*il est* possible de n'échanger que 2 pièces d'un Pyraminx (la pyramide) ?

- Est-il possible de ne faire tourner qu'une seule pièce d'un Pyraminx ? Si oui, laquelle (ou lesquelles) ?

Enfin, sachez que si vous n'avez pas (ou plus) de Cube de Rubik à votre disposition, il vous est possible de jouer avec un 'cube virtuel' sur Internet. Je vous invite à aller lire ma page `http://saturn.umh.ac.be/~maesa/index.htm`
Vous y trouverez également quelques liens et adresses en rapport avec le sujet.

Bon amusement !

Math-Jeunes n° 90, 132–135, 1999



OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

Palmarès de la 24^e^ Olympiade Mathématique Belge

MINI	MIDI	MAXI
Premier prix	Premier prix	Premier prix
RENOLD Stefan	CLAEYS Mathieu	HAN Zhe
Deuxièmes prix	Deuxièmes prix	Deuxièmes prix
KAUFMANN Marc	ALPAN Ali	VAN BOGAERT Sarah
LOISEAU Didier	FRANCO Nicolas	BAATZ Georges
TROESSAERT Cédric	MAHIEU Olivier	CAPRACE Pierre-Emmanuel
		FOUCART François
Troisièmes prix	Troisièmes prix	Troisièmes prix
BEYLEMANS Jennifer	DANAUX Xavier	BEN ALI Youssef
PONSELET Lise	MALMEDY Vincent	GRAMME Pierre
BONJEAN François	PREMONT Bruno	JARADIN Yves
NOEL Denis		HSU Ming-Koon
VAN ESCHE Amélie		
Quatrièmes prix	Quatrièmes prix	Quatrièmes prix
CHARPENTIER Christophe	DELHAYE Christophe	HENDRICKS Julien
DANDOY Adrien	TRIGALLEZ Quentin	ULLENS de SCHOOTEN Jean-Yves
ANTOINE Sophie	SACRE Anne	MEYER Bob
SCHEFFER Nicolas	DE CORTE Martin	GASPARD François
STREBER Anne-Sophie	LEINER Yves	BOURDOUX Arnaud
ABRAMOWICZ Cécile	REITER Raphaël	HASHEMI Mir Emad
BRUNIAEAU Guillaume	ROLLING Thierry	HSIA Wei
FLAWINNE Sébastien	COMBLEN Richard	PETIT Christophe
VOLKOVA Hélène	VANAERDE Benjamin	
CHIARELLO Laurent		

MINI	MIDI	MAXI
Prix spéciaux	Prix spéciaux	Prix spéciaux
ABRAMOWICZ Cécile	MALMEDY Vincent	BAATZ Georges
BRUNIAEAU Guillaume	LEINER Yves	FOUCART François
CHIARELLO Laurent	ROLLING Thierry	GRAMME Pierre
FLAWINNE Sébastien	DI PIETRO David	JARADIN Yves
HANQUART Alexandre	KRIER Gabriel	HSU Ming-Koon
PONSELET Lise	BRAQUET Pierre	MEYER Bob
VOLKOVA Hélène	MYSORE Sidhath	HASHEMI Mir Emad
	CONRAD Michel	HSIA Wei
		PETIT Christophe
		DRECHSLER Florian
		LUYCKX Antoine

Le Prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues. Cette année, ce prix a été attribué à LOISEAU Didier, élève de deuxième.

♣ ♣ ♣

Voici les questions des finales de la vingt-quatrième Olympiade Mathématique Belge. Ces finales ont eu lieu le mercredi 21 avril dernier à Namur.

Finale Mini

Question 1 – Quarante tuyaux sont disponibles ; leurs longueurs sont de 2 m, 4 m ou 6 m. Il y a autant de tuyaux de 2 m que de tuyaux de 6 m. Quelle est la longueur totale des tuyaux disponibles ?

Question 2 – Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 544 carrés gris. Combien y a-t-il de carrés blancs ?

Question 3 – Dans le trapèze $ABCD$, $AB /\!\!/ CD$, $||AB|| = 10$ et $||CD|| = 6$; en outre, la hauteur de ce trapèze est $h = 4$. Si P est le milieu de $[AD]$ et Q celui de $[PB]$, que vaut l'aire du triangle PCQ ?

Question 4 – Nous observons que

$$1+2+1=4=2^2,$$

$$1+2+3+2+1=9=3^2,$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16=4^2,$$

$$\dots$$

Les sommes ainsi construites sont-elles *toutes* des carrés d'entiers ? Si oui, le démontrer ; si non, indiquer un exemple où cette propriété n'est pas satisfaite.

Finale Midi

Question 1 – Un rectangle dont la longueur vaut trois fois la largeur est garni d'un quadrillage. Le long de chaque côté, quatre rangées de carrés sont gris ; les autres carrés sont blancs. Il y a 915 carrés blancs. Combien y a-t-il de carrés gris ?

Question 2 – Mathieu simplifie erronément la fraction $\frac{\overline{ab}}{\overline{abc}}$, obtenant ainsi $\frac{\overline{a}}{\overline{ac}}$. Et cependant, par extraordinaire, malgré cette erreur, les deux fractions sont égales. Quelle est leur valeur commune ? (N.B. : $\overline{abc}$; $\overline{ab}$; etc. désignent les nombres formés par la juxtaposition des chiffres a, b et c ; a et b ; etc.)

Question 3 – Dans la figure ci-dessous, le *Yin* (la partie noire) et le *Yang* (la partie blanche) sont limités par des demi-cercles.

(a) Construire une droite qui partage le *Yin* ainsi que le *Yang* en deux parties de même aire.

(b) Y a-t-il d'autres solutions ? Si oui, les donner ; si non, expliquer pourquoi.

Question 4 – Cinq fléchettes ont atteint une cible ayant la forme d'un disque de 10 cm de rayon. Montrer que deux des points d'impact, au moins, sont distants de moins de $10\sqrt{2}$ cm.

Finale Maxi

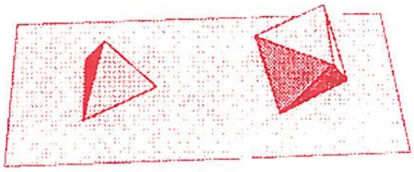
Question 1 – Une suite s_1 est constituée de n nombres naturels. La suite s_2 est obtenue par une modification de l'ordre des termes de s_1 ; la suite s_3 est construite en soustrayant, terme à terme, s_2 de s_1.

(a) Montrer que, lorsque $n = 3$, le produit des termes de s_3 est un nombre pair.

(b) Le résultat subsiste-t-il lorsque $n = 1999$?

Question 2 – Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = (P(X))^2$.

Question 3 – Un tétraèdre régulier et un octaèdre régulier, l'un et l'autre d'arête 1, reposent sur la table, posés sur une face. Lequel surpasse l'autre en hauteur ? De combien ?



Question 4 – Sur chaque côté d'un polygone régulier à n côtés, nous sélectionnons un point qui n'est pas un sommet, et nous construisons le n-gone convexe P que ces n points déterminent.

(a) Lorsque $n = 4$, si le quadrilatère P a ses angles égaux, est-il nécessairement un carré ?

(b) Lorsque $n = 5$, si le pentagone P a ses angles égaux, est-il nécessairement régulier ?

(c) Pour quels nombres naturels n supérieurs à 3 est-il vrai que, si le n-gone P a ses angles égaux, alors il est nécessairement régulier ?

Les deux revues s'appelleront

- *MJ junior*, plus spécialement destiné aux élèves des trois premières années du secondaire.
- *Math-Jeunes*, pour les autres élèves.

Chaque revue paraîtra quatre fois par an — mi-octobre, mi-janvier, mi-mars et vers le 22 mai pour l'année scolaire 1999-2000.

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

Vingt-quatrième Olympiade Mathématique Belge

Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique

INSTRUCTIONS

1. N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
2. Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
3. Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
4. Vingt-six questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par (A), (B), (C), (D) et (E). Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cadre situé à droite du numéro de la question. Exemple : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée par la lettre (D), vous écrirez D à droite du numéro 17, sur la feuille réponse. Chaque question possède une seule réponse correcte. Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez.
5. Quatre questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0;999]$. C'est ce nombre que vous écrirez sur la feuille réponse.
6. Règles de cotation : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
7. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gommez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
8. Quand le professeur donnera le signal, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire.
9. Couvrez les questions à l'aide de la feuille réponse retournée et inscrivez les informations demandées.
10. Quand votre professeur donnera le signal, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 MINUTES.

Questions de la Mini demi-finale

1. Sans réponse préformulée — Que vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$?

2. Sans réponse préformulée — Si cinq enfants reçoivent chacun 6 bonbons d'un paquet, il reste 12 bonbons non distribués. Combien de bonbons resterait-il si chacun des cinq enfants recevait plutôt 7 bonbons ?

3. Que vaut $(-1)^{1998}-(-1)^{1999}$?

   (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

4. Pour me rendre de mon domicile à l'école, je marche 6 min, puis je prends le métro à la station Olympe ; le trajet dure 15 min. Ensuite, après 7 min d'attente, je prends le bus pour un trajet de 12 min. Il me reste alors 4 min à marcher. Les cours commencent à 8 h 25, mais je dois être dans le rang à 8 h 20. À quelle heure, au plus tard, dois-je partir de chez moi s'il y a des métros toutes les dix minutes à partir de 5 h 30 ?

   (A) 7 h 24 (B) 7 h 30 (C) 7 h 32 (D) 7 h 34 (E) 7 h 44

5. Un cercle et un carré ont le même périmètre. Dans ce cas, une seule des propositions suivantes est exacte. Laquelle ?

   (A) Leurs aires sont égales.
   (B) L'aire du cercle est plus grande que celle du carré.
   (C) L'aire du carré vaut $\pi/2$ fois celle du cercle.
   (D) La diagonale du carré et le diamètre du cercle ont même longueur.
   (E) Le côté du carré vaut $3/2$ fois le rayon du cercle.

6. Combien 162 admet-il de diviseurs naturels ?

   (A) 10 (B) 15 (C) 24 (D) 25 (E) 30

7. A, B, C et D sont quatre points dans cet ordre sur une droite. Si $\dfrac{\|AB\|}{\|BC\|}=\dfrac{3}{4}$ et si $\dfrac{\|BC\|}{\|CD\|}=\dfrac{2}{3}$, que vaut $\dfrac{\|AC\|}{\|CD\|}$?

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{6}$ (E) $\frac{4}{3}$

8. Lors de soldes, un commerçant décide d'abord de faire une remise du tiers du prix des articles à solder. Après réflexion, il décide de diminuer encore ce prix de la moitié de la remise précédente. Combien vais-je payer un article soldé dont le prix initial était de 1000 F ?

(A) 750 F (B) 667 F (C) 500 F (D) 333 F
(E) Une autre réponse

9. Un marchand achète p melons ($p \geqslant 25$) à 30 F pièce. Cinq d'entre eux doivent être jetés et les autres sont vendus à 40 F pièce. Quel est le bénéfice réalisé ?

(A) $40p - 30p$ (B) $(p-5)40$ (C) $(p-5)(40-30)$
(D) $(p-5)40 - 30p$ (E) $p(40-30)$

10. Le point P appartient à la droite d ; l'image de P par la symétrie orthogonale d'axe a appartient encore à d

(A) Si et seulement si a passe par P ;
(B) Si et seulement si a et d sont perpendiculaires ;
(C) Si et seulement si a et d sont confondues ;
(D) Si et seulement si a passe par P ou est perpendiculaire à d ;
(E) Si et seulement si a et d sont perpendiculaires ou confondues.

11. Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de paires de nombres premiers dont la somme est 103 ?

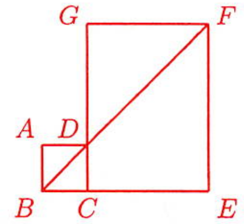
12. Deux droites parallèles sont distantes de 4 cm ; A et B sont deux points de l'une d'elles, distants de 20 cm. Combien y a-t-il, sur l'autre droite, de points C tels que le triangle ABC soit isocèle ?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

13. Si le rayon d'un disque augmente de 100 %, de combien augmente son aire ?

(A) De 100 % (B) De 200 % (C) De 300 % (D) De 400 %
(E) De 314 % environ

14. Dans la figure (approximative) ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 1 ; $CEFG$ est un rectangle, $\|CE\| = 2\,\|BC\|$ et B, D et F sont alignés. Quelle est l'aire du pentagone $ABEFD$?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

15. Il existe des nombres naturels n pour lesquels $n^6 - n^2$ n'est pas divisible par l'un des cinq nombres suivants. Lequel ?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20

16. Un carré non réduit à un seul point voit son périmètre (en mètres) et sa superficie (en mètres carrés) exprimés par un même nombre. Quel est ce nombre ?

(A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 16

17. Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

18. Dans le tableau

8 3 11 5
11 14 16
25 30
55

la somme de chaque paire de nombres adjacents est indiquée en dessous de l'accolade qui les relie. En procédant de même à partir de la ligne

$a \quad b \quad c \quad d \quad e$

quel sera le nombre inscrit à la cinquième ligne ?

(A) $a+b+c+d+e$ (B) $a+2b+2c+2d+e$
(C) $a+4b+6c+4d+e$ (D) $a+3b+4c+3d+e$
(E) $a+2b+3c+2d+e$

19. L'hypoténuse $[AB]$ d'un triangle rectangle ABC est divisée en 8 segments de même longueur ; par chacun des points de division est menée la parallèle à BC, ce qui détermine 7 segments intérieurs au triangle. Si la longueur de $[BC]$ est 10, quelle est la somme des longueurs de ces 7 segments ?

(A) 33 (B) 35 (C) 40 (D) 45
(E) Elle dépend de la longueur de $[AC]$.

20. Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

(A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x/4$
(E) Cela dépend de x.

21. Ma voiture consomme entre 8 et 10 L d'essence aux 100 km et l'essence coute entre 35 et 37 F/L. Combien me coute, en carburant, un trajet de 200 km ?

(A) Entre 43 et 47 F (B) Entre 280 et 296 F
(C) Entre 296 et 350 F (D) Entre 350 et 370 F
(E) Entre 560 et 740 F

22. Lorsqu'elle met au monde son quatrième enfant, une mère a trois fois la somme des âges de ses trois premiers enfants. Elle se dit alors que, dans huit ans, son âge sera la somme de ceux de ses quatre enfants. Quel est son âge actuel ?

(A) 36 ans (B) 35 ans (C) 33 ans (D) 30 ans
(E) 27 ans

23. Une commission de cinq membres A, B, C, D et E se réunit autour d'une table ronde, où le siège du président A est déterminé. De combien de manières les membres peuvent-ils se disposer si A et B refusent d'être voisins, de même que D et E ? (Être assis à la gauche du président n'est bien sûr pas la même chose qu'être assis à sa droite.)

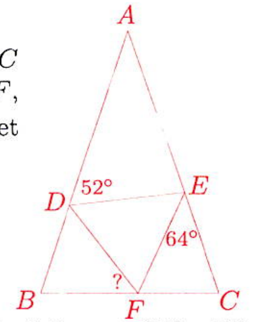
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

24. Sans réponse préformulée — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 9 ?

25. Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?

(A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

26. Dans la figure (imprécise) ci-contre, le triangle ABC est isocèle (avec $\|AB\| = \|AC\|$) et le triangle DEF, qui lui est inscrit, est équilatéral. Si $\widehat{ADE} = 52°$ et $\widehat{CEF} = 64°$, que vaut $\widehat{BFD}$?



(A) 40° (B) 58° (C) 60° (D) 64° (E) 76°

27. Mathieu prélève la moitié du contenu d'une bouteille initialement pleine. Il prélève ensuite le tiers de ce qui reste, puis le quart du dernier reste. Le contenu restant alors dans la bouteille lui permet de se remplir exactement un verre de 33 cL. Quelle est la capacité de la bouteille ?

(A) 66 cL (B) 100 cL (C) 120 cL (D) 132 cL (E) 144 cL

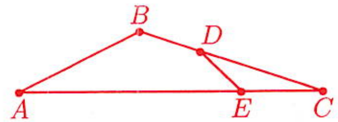
28. Le point B appartient au segment $]AC[$. Si la longueur du cercle de diamètre $[AC]$ est égale à la somme de celles des cercles de diamètres $[AB]$ et $[BC]$, que vaut le rapport $\|AB\| / \|BC\|$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) N'importe quel nombre strictement positif

29. 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

(A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 (B) 6, 8, 9, 10 et 12
(C) 6, 10 et 12 (D) 6, 8, 10 et 12 (E) 6, 7, 8 et 12

30. Les côtés $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC mesurent respectivement 10 et 6. En outre, $\|EC\| = 3$ et $\|DC\| = 4$. Si l'aire du triangle DEC est 3, quelle est celle du quadrilatère $ABDE$?



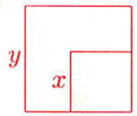
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

Questions de la Midi demi-finale

1. Le décalage horaire entre la Belgique et la Californie est en hiver de neuf heures : lorsqu'il est midi à Bruxelles, il est trois heures du matin à Hollywood. Lorsque l'Europe passe à l'heure d'été, nos montres sont avancées d'une heure. Si la Californie garde la même heure, quel est alors le décalage horaire ?

(A) 7 heures (B) 8 heures (C) 9 heures (D) 10 heures
(E) Il ne peut être déterminé à partir de l'énoncé.

2. Dans la figure ci-contre, l'aire du grand carré vaut 3 fois celle du petit. Que vaut le rapport x/y de leurs côtés ?



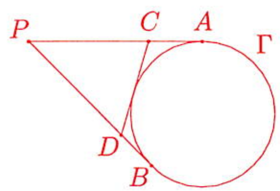
(A) 3 (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

3. Un cercle et un carré ont le même périmètre. Dans ce cas, une seule des propositions suivantes est exacte. Laquelle ?

(A) Leurs aires sont égales.
(B) L'aire du cercle est plus grande que celle du carré.
(C) L'aire du carré vaut $\pi/2$ fois celle du cercle.
(D) La diagonale du carré et le diamètre du cercle ont même longueur.
(E) Le côté du carré vaut $3/2$ fois le rayon du cercle.

4. Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il de paires de nombres premiers dont la somme est 103 ?

5. Les trois côtés du triangle PCD sont tangents au cercle Γ. Les segments $[PA]$ et $[PB]$, limités aux points de contact A et B, mesurent 1 ; de plus, $C \in [PA]$ et $D \in [PB]$. Quel est le périmètre du triangle PCD ?



(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3
(E) Les données sont insuffisantes pour le déterminer.

6. Ma voiture consomme entre 8 et 10 L d'essence aux 100 km et l'essence coute entre 35 et 37 F/L. À une unité près, la distance que je peux parcourir pour 100 F d'essence est nécessairement comprise

(A) Entre 29 et 33 km ; (B) Entre 27 et 36 km ;
(C) Entre 26 et 34 km ; (D) Entre 30 et 35 km ;
(E) Entre 35 et 37 km.

7. Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

8. L'hypoténuse $[AB]$ d'un triangle rectangle ABC est divisée en 8 segments de même longueur ; par chacun des points de division est menée la parallèle à BC, ce qui détermine 7 segments intérieurs au triangle. Si la longueur de $[BC]$ est 10, quelle est la somme des longueurs de ces 7 segments ?

(A) 33 (B) 35 (C) 40 (D) 45
(E) Elle dépend de la longueur de $[AC]$.

9. Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

(A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x/4$
(E) Cela dépend de x.

10. Sans réponse préformulée — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 9 ?

11. Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 1, quel est le périmètre du triangle ACE ?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{3}$

12. Combien 16 200 admet-il de diviseurs naturels ?

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70

13. Dans un repère orthonormé, les sommets d'un rectangle ont pour coordonnées $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Une droite passant par l'origine partage ce rectangle en deux parties dont les aires sont dans le rapport de 1 à 2. Quelle est sa pente ?

(A) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$

14. La fraction $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ est égale à :

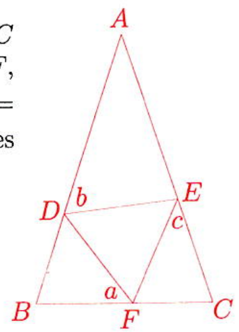
(A) $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$ (B) $\dfrac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{10}-2}{6}$

(D) $\dfrac{3+\sqrt{6}-\sqrt{15}}{12}$ (E) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{12}$

15. Si le rayon d'un cylindre est augmenté de 6 cm, son volume augmente de x cm^3. Si la hauteur du cylindre initial est augmentée de 6 cm, son volume augmente aussi de x cm^3. La hauteur du cylindre initial est de 2 cm ; quel est son rayon ?

(A) 2 cm (B) 3 cm (C) 4 cm (D) 6 cm (E) 8 cm

16. Dans la figure (imprécise) ci-contre, le triangle ABC est isocèle (avec $\|AB\| = \|AC\|$) et le triangle DEF, qui lui est inscrit, est équilatéral. Si $a = \widehat{BFD}$, $b = \widehat{ADE}$ et $c = \widehat{CEF}$, laquelle des relations suivantes est toujours vraie ?



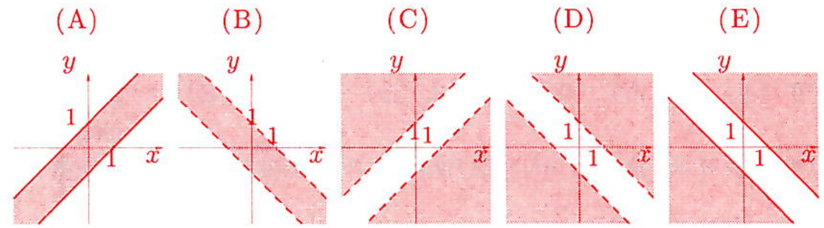
(A) $2a = b + c$ (B) $2a = b - c$
(C) $2b = a + c$ (D) $2b = a - c$
(E) $a + b + c = 120°$

17. Sans réponse préformulée — Trois cercles centrés en A, B et C sont tangents extérieurement deux à deux. Ceux de centres B et C ont chacun une longueur de 6π et celui de centre A a une longueur de 4π. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

18. Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?

(A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

19. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x+y| \geqslant 1$ est représenté par la zone ombrée et le trait gras continu (mais non par le trait interrompu) sur l'une des figures suivantes. Laquelle ?



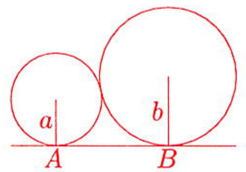
20. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x, $f(2x+1) = 4x^2 - 4x + 1$, alors $f(t) = 0$ lorsque t vaut :

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

21. 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

(A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 (B) 6, 8, 9, 10 et 12
(C) 6, 10 et 12 (D) 6, 8, 10 et 12 (E) 6, 7, 8 et 12

22. Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents à la droite et sont tangents extérieurement l'un à l'autre. Si leurs rayons sont a et b, que vaut la distance des points de contact A et B ?

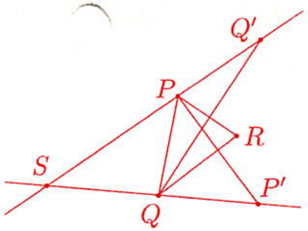


(A) $a+b$ (B) $\sqrt{ab}$ (C) $2\sqrt{ab}$ (D) ab (E) $\sqrt{ab(a+b)}$

23. Un carré a ses quatre sommets parmi ceux d'un octogone régulier. Quel est le rapport de l'aire de l'octogone à celle du carré ?

(A) $3/2$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (E) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

24. Dans la figure ci-contre, P' est le symétrique de P par rapport à QR et Q' est le symétrique de Q par rapport à PR. Si l'angle $\widehat{PRQ}$ vaut 50°, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PSQ}$?



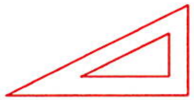
(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

25. Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il, outre la liste triviale (98), de suites croissantes d'entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?

26. Quel est le nombre des solutions de l'équation $(x-3)^{x+2} = 1$, d'inconnue entière x ?

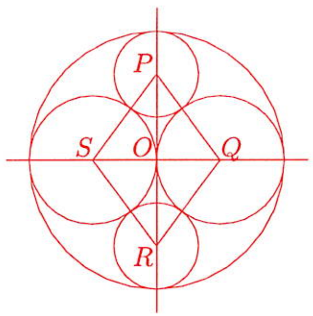
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

27. La figure ci-contre représente une équerre dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 et 24 ; à l'intérieur, un petit triangle est évidé ; chacun de ses côtés est à distance 3 du côté parallèle du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à celle du petit ?



(A) 10 (B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ (C) $\frac{8}{3}(2+\sqrt{3})$ (D) $\frac{8}{5}(3+\sqrt{5})$
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

28. Dans la figure ci-contre, les rayons des cercles de centres P, Q, R, S et O sont respectivement p, q, p, q et r. Les cercles de centres P et R sont chacun tangents à trois des autres cercles, et ceux de centres Q, S et O sont chacun tangents aux quatre autres cercles. Soit les propositions :



(A) $\|OP\| = r - p$;
(B) $q^2 + (r-p)^2 = (p+q)^2$;
(C) $p = r/3$;
(D) L'aire du losange $PQRS$ vaut $2q(r-p)$.
Laquelle des cinq affirmations ci-dessous est exacte ?

(A) (A) est fausse. (B) (B) est fausse.
(C) (C) est fausse. (D) (D) est fausse.
(E) Les quatre affirmations (A), (B), (C) et (D) sont vraies.

29. Si x est un réel strictement positif tel que $x^2 + 1/x^2 = 2$, que vaut $x + 1/x$?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

30. Des tétraèdres dont les quatre faces sont des triangles non isocèles isométriques l'un à l'autre :

(A) Cela n'existe pas ;
(B) Cela existe et ils sont tous isométriques ;
(C) Cela existe et ils sont tous semblables ;
(D) Cela existe et ils ont tous un centre de symétrie ;
(E) Cela existe et ils ne possèdent jamais de plan de symétrie.

Questions de la Maxi demi-finale

1. Je traine une moyenne de 9/20 en mathématique depuis le début de ce trimestre. Heureusement, avec le 17/20 que je viens d'obtenir, ma moyenne remonte à 10/20. Si chaque interrogation est notée sur 20 points, combien y en a-t-il eu durant ce trimestre, celle-ci comprise ?

   (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

2. Si les cinq nombres $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x+2$ et $x/4$ sont récrits dans l'ordre croissant, quel est celui qui se trouve au milieu de la liste obtenue ?

   (A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x/4$
   (E) Cela dépend de x.

3. Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 1, quel est le périmètre du triangle ACE ?

   (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{3}$

4. Dans un repère orthonormé, les sommets d'un rectangle ont pour coordonnées $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$. Une droite passant par l'origine partage ce rectangle en deux parties dont les aires sont dans le rapport de 1 à 2. Quelle est sa pente ?

   (A) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$

5. Sans réponse préformulée — Trois cercles centrés en A, B et C sont tangents extérieurement deux à deux. Ceux de centres B et C ont chacun une longueur de 6π et celui de centre A a une longueur de 4π. Que vaut l'aire du triangle ABC ?

6. Si x est négatif et que $xy = 6$, $yz = 24$ et $xz = 16$, que vaut xyz ?

   (A) -2304 (B) -49 (C) -48 (D) 48 (E) 49

7. 60 joueurs de basket doivent être répartis dans des équipes de 5 à 10 joueurs, de telle sorte qu'aucune équipe n'ait deux ou plus de deux joueurs de plus qu'une autre. Quels sont les nombres d'équipes que ces règles permettent de former ?

   (A) 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 (B) 6, 8, 9, 10 et 12
   (C) 6, 10 et 12 (D) 6, 8, 10 et 12 (E) 6, 7, 8 et 12

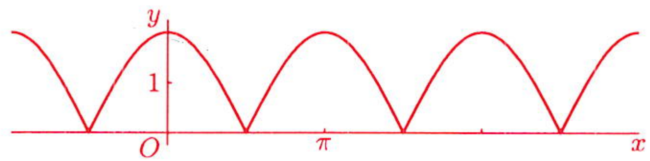
8. Dans lequel des intervalles suivants se trouve $3^{0,1}$?

   (A) $]0{,}1\,;0{,}3[$ (B) $]0{,}3\,;1[$ (C) $]1\,;2[$ (D) $]2\,;3[$ (E) $]3\,;30[$

9. Un carré a ses quatre sommets parmi ceux d'un octogone régulier. Quel est le rapport de l'aire de l'octogone à celle du carré ?

   (A) $3/2$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (E) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

10. Le graphe ci-dessous est celui de l'une des fonctions suivantes; laquelle ?



   (A) $x \mapsto 2\cos^2 x$ (B) $x \mapsto 2|\cos x|$ (C) $x \mapsto 2\cos|x|$
   (D) $x \mapsto 1+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (E) $x \mapsto 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

11. Les géographes comptent l'azimut a d'une direction sur la carte en degrés, de 0° à 360°, dans le sens horlogique, à partir du nord (qui est en haut de la carte). Les mathématiciens préfèrent travailler avec l'angle polaire p, mesuré en radians, de 0 à 2π, dans le sens antihorlogique, à partir de l'axe Ox, qui pointe vers la droite. Laquelle des relations suivantes permet de calculer p à partir de a ?

   (A) $p = \frac{\pi}{180}a$ (B) $p = \frac{\pi}{180}(90+a)$ (C) $p = \frac{\pi}{360}a$

   (D) $p = \begin{cases} \frac{\pi}{180}(90-a) & \text{si } a \leqslant 90 \\ \frac{\pi}{180}(450-a) & \text{si } a > 90 \end{cases}$ (E) $p = \begin{cases} \frac{\pi}{180}(90-a) & \text{si } a \leqslant 90 \\ \frac{\pi}{180}(90+a) & \text{si } a > 90 \end{cases}$

12. Soit m un paramètre réel différent de 1 ; le point représentant la solution du système

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ mx - y - 2m = 0, \end{cases}$$

   d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, appartient au premier quadrant (ouvert) si et seulement si m satisfait à l'une des conditions suivantes ; laquelle ?

   (A) $m < -1$ (B) $-1 < m < 0$ (C) $-1 < m < 1$
   (D) $0 < m < 1$ (E) $m < -1$ ou $m > 1$

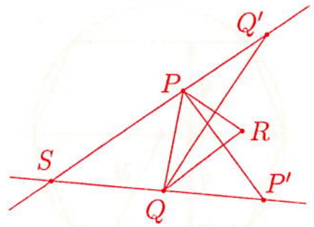
13. Si x est un nombre réel tel que $(x+1/x)^2 = 5$, que vaut $x^3 + 1/x^3$?

   (A) 1 (B) 2 (C) 2 ou -2 (D) $\sqrt{5}$ ou $-\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$ ou $-2\sqrt{5}$

14. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x, $f(2x+1) = 4x^2 - 4x + 1$, alors $f(x) = 0$ lorsque x vaut :

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

15. Dans la figure ci-contre, P' est le symétrique de P par rapport à QR et Q' est le symétrique de Q par rapport à PR. Si l'angle $\widehat{PRQ}$ vaut 50°, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PSQ}$?



(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

16. Sans réponse préformulée — Combien existe-t-il, outre la liste triviale (98), de suites croissantes d'entiers naturels consécutifs dont la somme est 98 ?

17. Parmi les suivantes, l'équation du second degré qui admet pour solutions $\dfrac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$, quels que soient les réels a et b tels que $a > b > 0$, est :

(A) $bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0$;
(B) $(2a-b)x^2 - 2a\sqrt{a}x - (2a^3 - a^2b) = 0$;
(C) $bx^2 + 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0$;
(D) $bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2b = 0$;
(E) $(2a-b)x^2 - a\sqrt{a}x + b = 0$.

18. Un quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur et ses deux autres côtés ont une longueur triple des deux côtés précédents. Les angles adjacents à deux côtés de longueurs distinctes sont droits. Quel est le sinus de l'angle aigu de ce quadrilatère ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

19. Quel est le reste de la division de $x^{13} + 1$ par $x^2 - 1$?

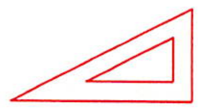
(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $x+1$ (E) $x-1$

20. Sans réponse préformulée — De combien de régions connexes (c.-à-d. d'un seul tenant) se compose la partie de l'espace E obtenue en ôtant de E les plans des quatre faces d'un tétraèdre ?

21. Quel est le nombre des solutions de l'équation $(x-3)^{x+2} = 1$, d'inconnue entière x ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

22. La figure ci-contre représente une équerre dont les côtés de l'angle droit mesurent 12 et 24 ; à l'intérieur, un petit triangle est évidé ; chacun de ses côtés est à distance 3 du côté parallèle du grand triangle. Quel est le rapport de l'aire du grand triangle à celle du petit ?



(A) 10 (B) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ (C) $\frac{8}{3}(2+\sqrt{3})$ (D) $\frac{8}{5}(3+\sqrt{5})$
(E) Les données ne suffisent pas pour le déterminer.

23. Jean, qui s'est caché, est recherché par ses amis. A priori, il y a une chance sur quatre qu'il soit dans le jardin. Sinon, il est dans l'une des neuf pièces de la maison, de manière équiprobable. Ses amis ont déjà fouillé sans le trouver six des pièces. Quelle est, compte tenu des seules informations disponibles à ce moment, la probabilité qu'il se trouve dans la pièce suivante ?

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

24. Un quadrilatère convexe $ABCD$ satisfait l'égalité $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 = \|BC\|^2 + \|DA\|^2$. Nécessairement :

(A) Ce quadrilatère est un trapèze ;
(B) Ce quadrilatère est un parallélogramme ;
(C) Les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires ;
(D) Ce quadrilatère a deux côtés opposés de même longueur ;
(E) Ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

25. Que vaut l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$, comportant une infinité de radicaux superposés ?

(A) 2 (B) $1+\sqrt{2}$ (C) 3 (D) 4 (E) $\sqrt{5}$

26. Sans réponse préformulée — Quel est le reste de la division de 3^{1999} par 11 ?

27. Des tétraèdres dont les quatre faces sont des triangles non isocèles isométriques l'un à l'autre :

(A) Cela n'existe pas ;
(B) Cela existe et ils sont tous isométriques ;
(C) Cela existe et ils sont tous semblables ;
(D) Cela existe et ils ont tous un centre de symétrie ;
(E) Cela existe et ils ne possèdent jamais de plan de symétrie.

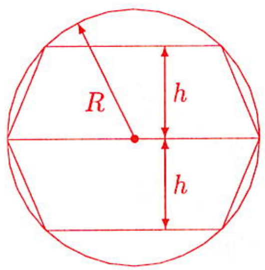
28. Si une fonction polynomiale de degré 4 a exactement trois racines distinctes, alors :

(A) Cette fonction est paire ;
(B) Cette fonction est impaire ;
(C) Cette fonction s'annule en 0 ;
(D) Cette fonction admet un minimum d'ordonnée 0 ;
(E) Une des trois racines de cette fonction est aussi racine de sa dérivée.

29. Un triangle rectangle (dont les côtés de l'angle droit sont notés a et b et les angles opposés α et β respectivement), satisfait la condition $a = \cos\alpha$. À son sujet, laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

(A) La longueur de l'hypoténuse peut valoir 2.
(B) La longueur de l'hypoténuse vaut nécessairement 1.
(C) Les trois côtés sont nécessairement de longueur inférieure à 1.
(D) La longueur du côté b est nécessairement supérieure à celle de a.
(E) Le côté b est nécessairement de longueur inférieure à 1.

30. Dans un tronc d'arbre supposé cylindrique, doivent être découpées deux poutres de même forme dont la section est un trapèze isocèle (voir la figure ci-contre) et dont les faces rectangulaires sont parallèles à l'axe du tronc. Si le rayon du tronc est R, quelle doit être la hauteur h commune de ces trapèzes pour que le volume de ces poutres soit maximal ?



(A) $\frac{1}{4}R$ (B) $\frac{1}{2}R$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ (E) R

Solutions des jeux

Les auto-références

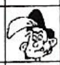
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0.
Dans ce cadre, il y a 4 fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 4.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 5.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 6.

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0.
Dans ce cadre, il y a 6 fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a 3 fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 4.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 5.
Dans ce cadre, il y a 2 fois le chiffre 6.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 7.
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 8.

Nombres croisés

	1	2	3	4
1	1	3	6	9
2	1	9	9	0
3		7	2	0
4	3	3	5	9

Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	N	O	M	B	R	E
2	O	C	E	L	O	T
3	R	E	C	O	I	N
4	M	A		C		A
5	E	N	A		P	
6	E	S	S	A	I	M

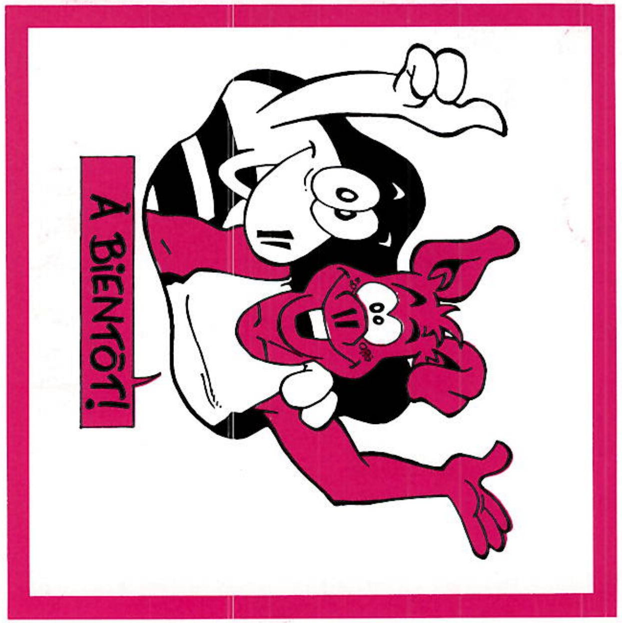
Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Rue A. Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124



Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée