MATH JEUNES

21e année
Octobre 1999 - N° 91
Bureau de dépôt : Mons 1

Math-Jeunes

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 La Louvière.

Comité de Rédaction : M. Ballieu, J.-P. Cazzaro, C. Festraets, J. Miéwis, G. Noël, F. Pourbaix, G. Sinon, S. Trompler, C. Van Hooste, C. Villers

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Ch. de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour.

Comité de Rédaction : C. Festraets, G. Laloux, R. Midavaine, G. Noël, A. Paternottre, F. Pourbaix, C. Vandercammen, C. Van Hooste, C. Villers

Illustrations : F. Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière
- pour *Math-Jeunes junior* : C. Van Hooste, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour

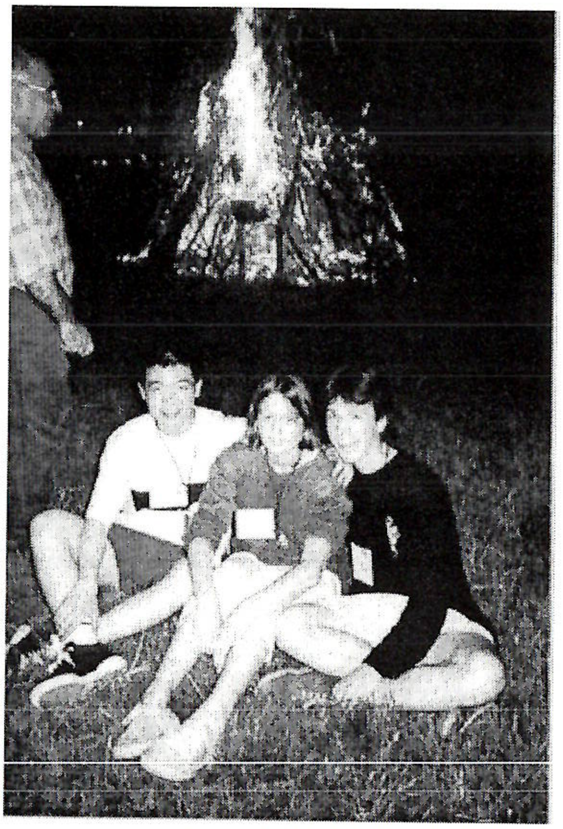
N° 91 S Vingt et unième année 1999

Math-Jeunes

Échos de l'Olympiade Mathématique Internationale 1999

Sarah Van Bogaert, Zhe Han, Pierre-Emmanuel Caprace

Ils se connaissent déjà depuis deux ans. Ils se sont côtoyés aux stages de préparations de Han ; puis de Wépion. Choisis sur base de leurs résultats à l'olympiade belge, à l'A.I.M.E. (1) ainsi qu'à des tests de sélections particuliers, les voilà rassemblés, le 13 juillet à Zaventem, dans un aéroport encore quelque peu endormi ...



De gauche à droite : Han Zhe, Sarah Van Bogaert et Pierre-Emmanuel Caprace

Nous arrivons vers sept heures, et ne tardons pas à rencontrer nos collègues flamands, avec lesquels nous formons l'équipe belge complète. Nous saluons donc Jeroen, vainqueur de l'olympiade flamande, Bram, au regard avisé, et Stefan à l'air plutôt décontracté. Ils sont accompagnés de M. Noël Vanhaverbeke, deputy leader de notre équipe, ainsi que de son épouse. M. Gérald Troessaert, et son épouse, sont déjà à Bucarest. Avec les leaders des autres équipes, ils forment le jury de l'Olympiade et ont la « périlleuse » mission de sélectionner les six problèmes.

Première petite émotion lorsque les panneaux d'affichage de l'aéroport annoncent notre vol avec quarante minutes de retard ; nous craignons de rater la correspondance pour Bucarest à Munich. Finalement, notre temps de transit là-bas aura juste été réduit à sa plus simple expression ... Pas plus mal, au fond, puisqu'une fine pluie arrosait les lieux.

Nous arrivons ainsi à Bucarest à l'heure programmée, où par contre un soleil ardent déploie ses rayons. Rapidement, nous identifions notre guide : Alice, jeune étudiante roumaine à la voix douce, très dévouée ; elle remplira parfaitement sa fonction tout au long du séjour. La chaleur ambiante pousse Zhe à poser immédiatement à Alice une première question : les chambres et les salles de concours sont-elles pourvues d'un système de climatisation ? Le souvenir ardent de Taiwan, l'année dernière, entretient en lui une certaine appréhension ... renforcée par la réponse négative d'Alice.

Le lendemain, une excursion est prévue pour nous faire découvrir globalement la ville. Nous voyageons dans un impressionnant convoi d'une douzaine d'autocars, nécessaires au transport des 450 étudiants (et de leurs accompagnants) venus de plus de 80 pays différents ! Malgré cette importante concentration de

(1) **American Invitational Mathematics Examination**

Math-Jeunes n°91 S, 2–5, 1999

cultures diverses et hétéroclites, nous sentons le climat plutôt tendu ; chaque délégation reste assez fermée, recluse sur elle-même. Les contacts avec les étudiants étrangers ne sont donc pas faciles, mais nous attribuons cela à la proximité des deux jours fatidiques de concours : même si personne n'ose vraiment l'avouer, les cœurs sont serrés et les ventres noués...

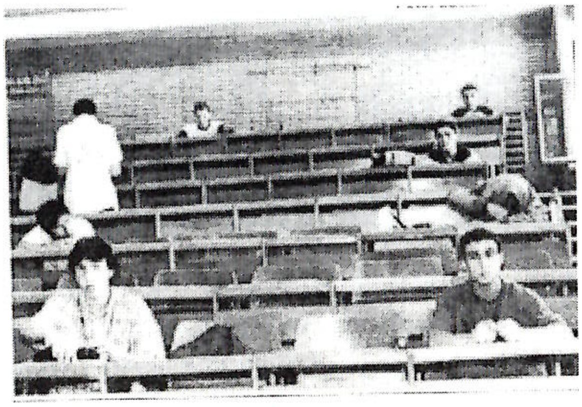
On le remarque également en soirée : les couloirs sont vides et silencieux ; certains révisent leurs formulaires, d'autres préfèrent se reposer au plus vite. Bref, le concours occupe tous les esprits.

La veille du grand jour, on nous conduit dans les salles d'examen afin d'opérer une première reconnaissance des lieux. Les étudiants sont répartis en de très nombreux groupes, chacun dans une classe différente. En pensant que le lendemain, à la même heure, au même endroit, nous serons en train de découvrir les trois questions du premier jour de compétition, nous essayons notre siège. Le plus mal loti d'entre nous est Zhe, qui devra travailler quatre longues heures et demie sur un tabouret relativement vétuste ...

La compétition proprement dite se rapproche encore un peu plus, lorsque l'olympiade débute officiellement par une cérémonie d'ouverture, l'après-midi. Plusieurs numéros de danse et de musique succèdent à une série de discours officiels concernant l'olympiade. Lorsque les rideaux se ferment sur cette cérémonie, seule une nuit nous sépare encore du premier « grand jour ».

Le matin suivant, la pluie tombe sur le campus. Heureux hasard : elle jouera le rôle que les climatiseurs inexistants ne peuvent remplir. Après un petit déjeuner rapide, nous nous rendons promptement vers les salles de concours. Dans le hall d'entrée règne une atmosphère tendue. Certaines équipes poussent un cri de guerre, plutôt pour évacuer la surpression que pour intimider leurs adversaires. Nous échangeons des poignées de mains entre nous, et nous nous souhaitons, un peu hésitants, mutuellement bonne chance. Chacun se dirige alors vers sa propre salle, désormais seul face à l'épreuve.

A neuf heures précises, les enveloppes contenant les questions et les feuilles de réponses nous sont distribuées. Chacun les ouvre, non sans une certaine émotion ... Ensuite, quatre heures et demie, seul avec soi-même, pour affronter les trois problèmes du jour, muni uniquement d'un crayon, d'une règle et d'un compas... Ballottés d'essai en essai, de griffonnage en griffonnage, nous ne voyons guère le temps s'écouler ; déjà il est l'heure de remettre ses copies.



À l'avant-plan à gauche : P.-E. Caprace

Dehors, nous confrontons rapidement nos résultats, nos (timides embryons de) solutions. Et déjà nous pensons au lendemain, à la deuxième moitié ... qui ne tarde pas d'arriver. Se déroulant de manière similaire à la première, elle s'élève cependant à un niveau de difficulté encore supérieur. Lorsque sonne l'heure de fin d'épreuve, l'aspect concours de cette olympiade se clôture. Mais notre sentiment est loin d'être celui d'une « libération », un peu comme on peut le ressentir après une longue session d'examens. Au contraire, notre avidité de savoir, de comprendre, de trouver, a été aiguisée par notre insuccès relatif de ces deux matinées. Nous nous rassemblons donc, discutons et cherchons encore ensemble sur les six problèmes jusqu'aux petites heures de la nuit ...

Les deux jours suivants sont consacrés à de petites excursions, dans des musées notamment, à Bucarest même. Au cours des deux après-midi respectives sont publiés les résultats, par problème, au fur et à mesure qu'ont lieu les corrections et les défenses devant jury. Le hasard fait que les cinq derniers problèmes sont d'abord corrigés pour la Belgique ; nos scores varient pour ces questions entre 0, 1 ou 2 sur 7 ! Heureusement, les résultats un peu meilleurs pour le premier problème viennent quelque peu renflouer nos scores, même si le tout reste loin d'être brillant.

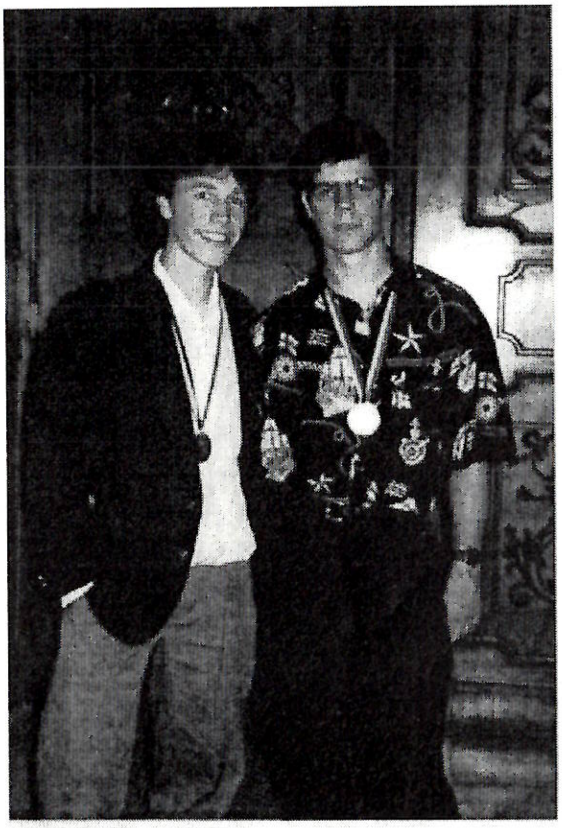
Des conversations multiples : à l'avant-plan à droite, P.-E.Caprace. Au deuxième plan, Gérald Troessaert et les deux autres concurrents francophones. Ensuite, les trois concurrents néerlandophones et enfin Noël Vanhaverbeke et son épouse.

Le soir du 19, un barbecue rassemble autour d'un immense feu, tous les participants y compris les leaders. C'est la première fois, ils étaient jusqu'alors tenus à l'écart des étudiants. C'est là que l'on apprend les seuils délimitant l'obtention des médailles. De justesse, deux d'entre nous, Stefan et Pierre-Emmanuel, seraient récompensés du bronze.

Le lendemain, lever matinal pour le départ en excursion à Sinaia et Bran, situés à quelque 150 km de Bucarest. Pour y parvenir, plus de trois heures d'autocar nous sont nécessaires, malgré l'escorte policière qui fait céder le passage à tous les autres véhicules … À Bran s'élève le château qui est dit avoir abrité Dracula … Le palais de Sinaia, quant à lui, appartenait à la famille royale de Roumanie, aujourd'hui déchue. Après les visites, nous remontons dans les cars pour le même trajet en sens inverse … Même si toutes ces excursions sont souvent fatigantes, vu l'importance du groupe que nous formons, elles ont l'avantage de nous rapprocher davantage des étudiants étrangers. Maintenant que les tests proprement dits sont terminés, la tendance à la décontraction aide à l'ouverture des esprits, ce qui facilite les rencontres …

La remise des médailles

Le 21 juillet est le jour de la cérémonie officielle de clôture de l'olympiade. Elle se déroule au sein du fastueux palais du Parlement roumain, troisième plus grand bâtiment du monde après le Pentagone et le château de Versailles. On se rend compte, au vu de l'organisation de cette séance, de l'importance qu'occupe cette épreuve, d'autant que le président de Roumanie en personne honore l'assemblée de sa présence. Il remettra même leurs médailles d'or aux dix meilleurs scores de l'olympiade. Les trois premiers exaequo sont Stefan Laurentiu Hornet (un roumain déjà double médaillé d'or), Tamas Terpai (hongrois et également détenteur de deux autres médailles d'or) et Maksym Fedorchuk (jeune Ukrainien de seize ans participant pour la première fois à une olympiade internationale). Le fait qu'ils n'aient obtenu que 39 points, et non 42 (score maximal possible) témoigne de la difficulté particulière de cette quarantième édition de l'OMI.



Les deux « médaillés de bronze » belges

Le soir, nous nous retrouvons dans un restaurant pour le banquet final. Soirée d'adieux, soirée des derniers échanges d'adresses : déjà l'ultime soirée de ce court séjour à Bucarest …

Le lendemain, les différentes délégations quittent le campus où nous logions à des heures diverses pour rejoindre l'aéroport. Nous prenons encore le repas de midi à la cantine du campus, qui nous semble bien triste et bien vide, comparé à la veille. Finalement, notre tour vient de prendre l'avion … À Bruxelles, les retrouvailles avec ceux qui nous attendent coïncident avec les adieux aux membres de notre équipe pour cette olympiade. Moments peu agréables … Nous nous quittons en nous promettant de nous revoir bientôt, tous ensemble …

Au cours de cette expérience, les mathématiques nous ont apporté bien plus qu'une vulgaire compétition, qu'un cours traditionnel ou qu'une simple olympiade : cette discipline unique, qui, à Bucarest, a rassemblé tant de monde de tant d'origines, est aussi, nous le comprenons maintenant mieux, un lieu commun fondamental qui rapproche un peu plus les hommes les uns des autres …

40th IMO

L'OMI consiste en la résolution de 6 problèmes. Chaque problème étant évalué sur 7 points, tout étudiant peut prétendre à un maximum de 42 points.

Voici les résultats des étudiants belges : Caprace Pierre-Emmanuel (fr.) 12, médaille de bronze ; Hallez Stephane (nl.) 12, médaille de bronze ; Han Zhe (fr.) 10 ; Van Bogaert Sarah (fr.) 7 ; Demeyer Jeroen (nl.) 5 et Minnaert Bram (nl.) 5.

Deux étudiants luxembourgeois ont aussi participé à cette olympiade. Il s'agit de Baatz Georges 15 points, médaille de bronze et Hsu Min Koon 11 points.

Les trois vainqueurs obtiennent 39 points, ils sont respectivement Hongrois, Roumain et Ukrainien. Les pays les plus performants sont la Chine et la Russie qui totalisent chacun 182 points. La Belgique avec ses 51 points occupe une modeste 53e position dans l'officieux classement inter-nations.

ANNIVERSAIRE

Simone Trompler

Maria Gaetana AGNESI (1718–1799)

Il y a 200 ans mourait Maria Gaetana AGNESI, à l'âge de 81 ans, à Milan. Sa famille milanaise, très riche, avait fait sa fortune dans le commerce de la soie. Comme elle montra, toute jeune, d'excellentes dispositions intellectuelles, son père la fit instruire par les meilleurs professeurs que pouvait lui fournir l'Église. Elle maîtrisait le latin, le grec et l'hébreu à un âge très tendre.

À 20 ans, elle publia une série d'essais sur la philosophie et les sciences naturelles. Elle était très intéressée par la philosophie de Newton. Ses deux sujets d'étude favoris étaient les mathématiques et la religion. Elle eut la chance de faire la connaissance d'un moine, Ramiro RAMPINELLI, ancien professeur aux universités de Rome et de Bologne, qui la guida efficacement. Il l'encouragea à écrire un livre sur le calcul différentiel « *Istituzioni analitiche ad uso delle gioventù italiana* ». Elle le fit en italien, soucieuse d'être bien comprise et demanda au mathématicien RICCATI des conseils et des suggestions. Sa fortune lui permit de le faire imprimer chez elle.

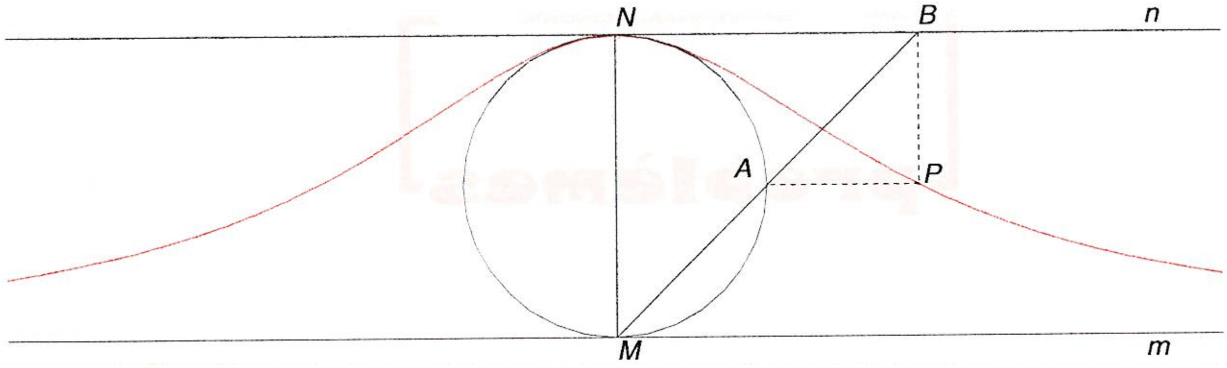
La parution de ce livre en 1748 lui apporta beaucoup de gloire et une chaire à l'université de Bologne lui fut offerte par le pape Benoît XIV et par le président de l'académie de Bologne. Il semble qu'elle ne rejeta pas l'offre mais n'en profita pas. Elle mena une vie très retirée et dépensa toute sa fortune à aider des vieilles femmes infirmes. Elle mourut dans la pauvreté à l'hospice qu'elle avait créé.

Son livre ne contient pas de mathématiques originales, mais illustre la théorie par de nombreux exemples. On y trouve la discussion d'une courbe cubique, étudiée précédemment par Fermat et Grandi, qui est connue sous divers noms : *Agnésienne, cubique d'Agnesi* ou *sorcière d'Agnesi (versiera)*. Ce dernier nom, peu explicable par la forme de la courbe, proviendrait d'une confusion lors de la traduction du latin : *versiera* vient de *vertere* qui signifie tourner, alors que le mot italien *avversiera* signifie « femme du diable ».

La cubique d'Agnesi s'obtient ainsi :

Tracer un cercle et un de ses diamètres, $[M, N]$. En le point N, tracer la tangente n au cercle. Le point A étant un point quelconque du cercle, on trace la droite MA qui coupe la tangente n en B. Il reste à tracer la parallèle à n passant par A et la parallèle à MN passant par B. Ces deux droites se coupent en P. La cubique d'Agnesi est engendrée par le point P lorsque le point A parcourt le cercle.

Math-Jeunes n°91 S, 6–7, 1999



On constate que le point P se rapproche de la droite m, tangente au cercle en M lorsque le point A se rapproche de M.

Exercice : *Construisez cette courbe à l'aide de Cabri-Géomètre ou d'un logiciel équivalent.*

Exercice *à l'intention des plus âgés :*

1. *Adoptez la droite m comme axe des x, et la droite MN comme axe des y.*
2. *Notez a le diamètre du cercle et t la tangente de l'angle $\widehat{NMA}$.*
3. *Cherchez des équations paramétriques de la cubique d'Agnesi. Vous devez trouver*

$$\begin{cases} x = at \\ y = a/(1+t^2) \end{cases}$$

4. *Déduisez-en une équation cartésienne : $y(x^2+a^2) = a^3$*

Sources :

- L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*
- Encyclopédie Universalis
- Encyclopedia Britannica
- D. M. Burton, *History of mathematics*, 1997.
- Internet :
  `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Mathematicians`

Solutions des questions de la rubrique Olympiade Mathématique Belge

Question	Réponse
1	C
2	B
3	E
4	A
5	E
6	A

Question	Réponse
7	D
8	B
9	A
10	C
11	D
12	D

Question	Réponse
13	C
14	E
15	D
16	E
17	E
18	D

Question	Réponse
19	A
20	B
21	C
22	C
23	8
24	2

Rallye problèmes

C. Festraets

Le rallye problèmes 1999-2000 comportera trois étapes. À chaque étape, cinq problèmes seront proposés à votre sagacité ; la plupart des problèmes posés ne nécessitent guère que des connaissances mathématiques élémentaires, mais il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement. Évidemment, ce n'est pas toujours facile, mais vous pouvez envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu que la première partie d'un problème et estimez que la suite est trop difficile pour votre âge ou encore, si vous aboutissez à une équation dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école. La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis.

Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seraient hélas pas pris en considération. Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu correctement de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.

Les solutions doivent être envoyées à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 13 décembre 1999 au plus tard.

Problèmes 1 à 5

1 – Découpons

Dans une feuille de papier rectangulaire, on découpe le plus grand carré possible, puis dans le morceau restant, on découpe à nouveau le plus grand carré possible et ainsi de suite jusqu'au moment où le morceau restant est lui-même un carré. Quelle est la longueur du côté du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont

1. 6 cm et 10 cm ?
2. 84 cm et 192 cm ?
3. 25 cm et 49 cm ?
4. x cm et y cm où x et y sont des naturels non nuls ?

2 – Bon appétit

Dans cet athénée, il y a deux ans, le réfectoire comportait des tables de 10 élèves où toutes les places étaient occupées. L'an dernier, les inscrits aux repas étaient plus nombreux. L'économe songea d'abord à ajouter deux tables de 10, mais c'était insuffisant ; par contre, sans ajouter ces deux tables et en mettant 11 élèves par table, il y avait trop de places. L'économe alors diminua le nombre de tables, mit 12 élèves par table et c'était tout juste. Cette année, il y a le même nombre d'inscrits aux repas qu'il y a deux ans. L'économe voulait d'abord retirer deux tables de 12, mais calcula qu'il aurait manqué de places. Il les laissa donc, mit 11 élèves par table et eut alors un peu trop de places. Combien y avait-il d'élèves au réfectoire chaque année ?

3 – Probabilité

On a deux cubes dont les faces sont peintes en rouge ou en bleu. Lorsqu'on lance ces deux cubes, la probabilité que les deux faces soient de la même couleur est de $\frac{1}{2}$. Sachant que l'un des cubes a 5 faces rouges et une bleue, déterminer le nombre de faces rouges et bleues du second cube.

4 – Échec et mat(h)

Dans ce club d'échecs, il y a 14 joueurs ; chacun d'eux a rencontré chaque autre joueur à 10 reprises et il n'y a eu aucun match nul. À la fin du tournoi, on a dressé un tableau d'honneur où les joueurs sont classés par ordre décroissant du nombre de parties gagnées et on s'est aperçu que la différence entre le nombre de victoires de deux joueurs consécutifs dans ce tableau est toujours le même. Déterminer le plus grand nombre de parties que le dernier joueur a pu gagner.

5 – Multiplions

Compléter les multiplications suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \star & \star & 3 & \star \\
 & & & & \star & \star & 3 \\
\hline
 & & & 3 & \star & \star & \star \\
 & \star & \star & \star & 3 & 3 & \\
 & \star & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & 5 & \star & \star \\
 & & & 5 & \star & \star \\
\hline
 & & & 5 & \star & \star \\
 & \star & \star & 5 & \star & \\
\star & \star & \star & 5 & & \\
\hline
\star & \star & \star & 5 & \star & \star
\end{array}$$

sachant que dans la première, il n'y a pas d'autre 3 et que dans la seconde, il n'y a pas d'autre 5.

Lauréats du rallye-problèmes 1998–1999

- CAEBERGS, Thierry, 1re année, Athénée Royal de Thuin
- TROESSAERT, Cédric, 2ème année, Institut Centre Ardennes de Libramont
- NICOLAS, François, 3e année, Collège Saint Joseph à Chimay
- SOHET, Florence, 4e année, Collège Saint Joseph à Chimay
- DECOSTER, Adrien, 5ème année, Centre scolaire Saint Stanislas à Mons
- LUIJKX, Antoine, 5e année, Athénée Royal Jules Bara à Tournai
- MEINGUET, Thomas, 5e année, Collège Cardinal Mercier à Braine l'Alleud
- ANTOINE, Vincent, 5e année, Athénée Royal Vauban à Charleroi

Roméo et Juliette

Corinne Cerf et Jacqueline Sengier, U.L.B.

L'an dernier, Claude Villers a signé, dans Math-Jeunes, *plusieurs articles qui traitaient de la taxidistance. Ce sujet semble avoir éveillé l'attention. En effet, nous avons reçu une proposition de « prolongement » que nous avons le plaisir de publier dans ce numéro. La rédaction.*

Quelques rappels de résultats établis précédemment

Le nombre de taxi-chemins de longueur m, menant d'un sommet à un autre d'un quadrillage en empruntant n segments dans une direction (donc $m-n$ segments dans l'autre) est C_m^n qui est donc égal à C_m^{m-n}.

C_m^n est obtenu en divisant le produit de n facteurs naturels consécutifs décroissant à partir de m par n facteurs naturels consécutifs croissant à partir de 1. Ainsi, le nombre de taxi-chemins menant de A à B est $C_7^2 = C_7^5 = \frac{7\times 6}{1\times 2} = \frac{42}{2} = 21$. De plus, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ et $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

La petite amie de Mathieu vient d'arriver elle aussi à New York. Son hôtel est situé dix blocs plus au nord et dix blocs plus à l'est que celui de Mathieu. Aussitôt, chacun saute dans un taxi et demande au taximan de le conduire à l'autre hôtel, au plus court. En route, Mathieu soudain se rappelle qu'il y a plusieurs taxi-chemins possibles entre les deux hôtels. Il s'inquiète :

Allons-nous nous rencontrer ?

Mathieu a raison de s'inquiéter. La probabilité que lui et sa petite amie se rencontrent à mi-chemin ne vaut pas un. Calculons cette probabilité de rencontre.

Problème de Roméo et Juliette

En fait, de nombreux mathématiciens se sont déjà posé cette question. Elle est devenue célèbre grâce à un journaliste du *Monde* qui a baptisé le problème « *problème de Roméo et Juliette* ». Généralisons-le au cas où les deux hôtels sont situés aux coins sud-ouest et nord-est d'un carré de blocs. On va appeler ces deux points R (pour Roméo) et J (pour Juliette). Si Roméo et Juliette se rencontrent, leur rencontre se fera nécessairement sur la taxi-médiatrice de (R, J), c'est-à-dire, en un des points m_k (cf. *Taxi-choses et taxi-trucs (3)* dans *Math-Jeunes* n° 89).

Math-Jeunes n° 91 S, 10–14, 1999

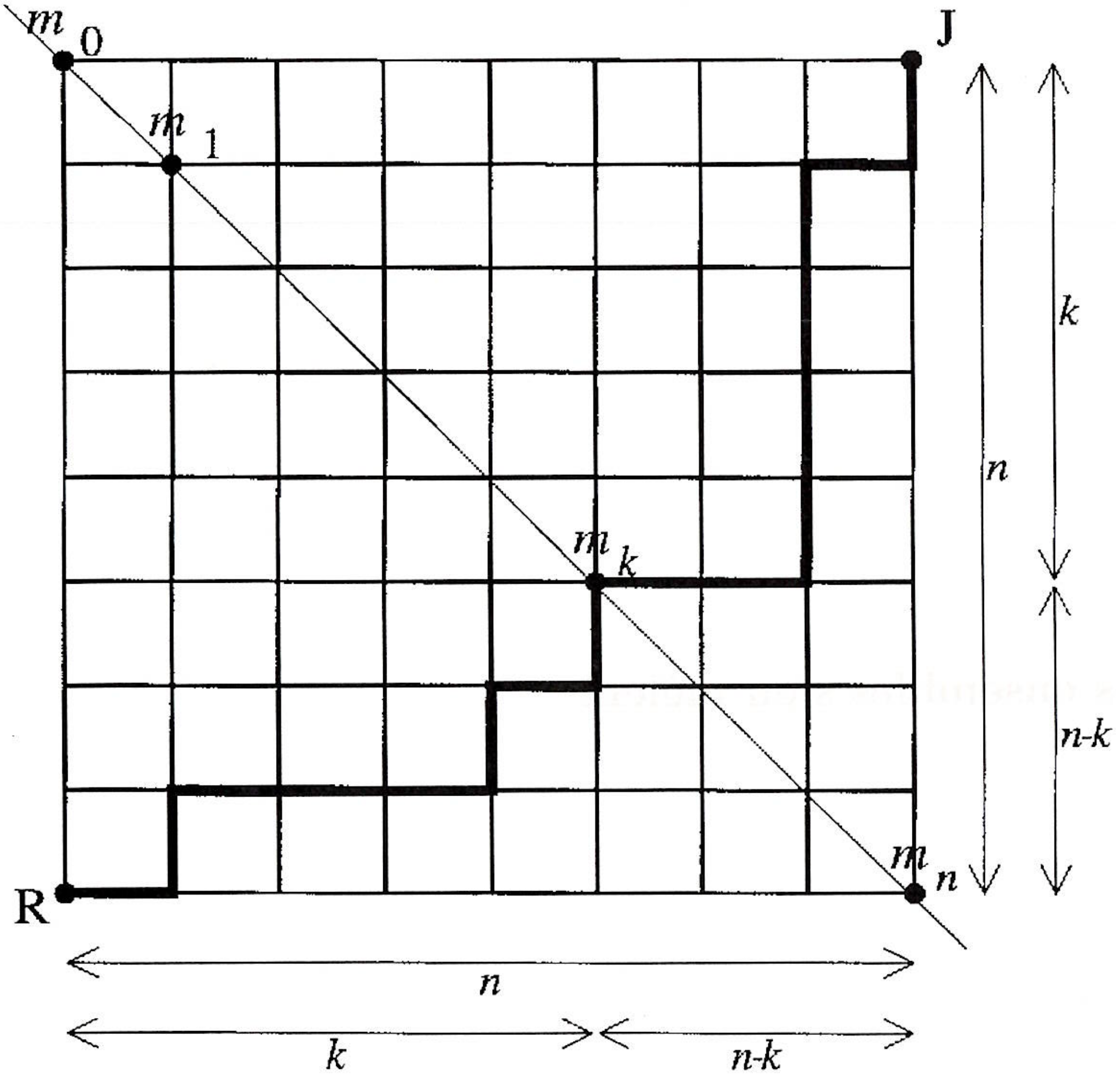


Figure 1

On a donc :

$$p(\text{rencontre}) = p(\text{rencontre en } m_0 \text{ ou en } m_1 \text{ ou } \ldots \text{ou en } m_n)$$

Comme les événements « *rencontre en* » sont exclusifs (c'est-à-dire que Roméo et Juliette ne peuvent jamais se rencontrer en deux points en même temps), la probabilité de l'union des événements (« *ou* ») peut être égalée à la *somme* des probablités de chacun des événements :

$$p(\text{rencontre}) = \sum_{k=0}^{n} p(\text{rencontre en } m_k) = \sum_{k=0}^{n} p(\text{Roméo passe par } m_k \text{ et Juliette passe par } m_k)$$

Chaque probabilité correspond maintenant à une *intersection* de deux événements (« *et* »). Comme ces événements sont indépendants (le fait que Roméo passe ou ne passe par m_k ne changera pas la probabilité que Juliette y passe), chaque probabilité vaut le *produit* de la probabilité de chacun des deux événements :

$$p(\text{rencontre}) = \sum_{k=0}^{n} p(\text{Roméo passe par } m_k) \cdot p(\text{Juliette passe par } m_k)$$

Calculons la probabilité que Roméo passe par m_k. On l'obtient en divisant le nombre de cas favorables (nombre de taxi-chemins de R à m_k, soit C_n^k : il faut avancer k fois vers l'est dans une séquence de n mouvements nord ou est) par le nombre de cas possibles (nombre de séquences possibles de n mouvements nord ou est, soit 2^n). Si vous ne vous rappelez plus ce que représente C_n^k, relisez « *Taxi-choses et taxi-trucs (1)* » dans *Math-Jeunes* n° 87.

La probabilité que Juliette passe par m_k est la même : au lieu d'avancer k fois vers l'est, elle doit avancer k fois vers le sud dans une séquence de n mouvements (qui pour elle sont sud ou ouest). La probabilité de rencontre peut donc être exprimée comme :

$$p(\text{rencontre}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{C_n^k}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$$

Les ensembles s'en mêlent

On peut rendre cette formule plus élégante en démontrant que $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$, ce qui fait disparaître la somme, comme par enchantement. Pour cela, nous allons jouer avec des ensembles (des patates !). Considérons un ensemble A comprenant $2n$ éléments partitionné en deux parties de n éléments chacune, appelées A_1 et A_2. On va maintenant inclure dans A un ensemble B comprenant n éléments pris au hasard dans A.

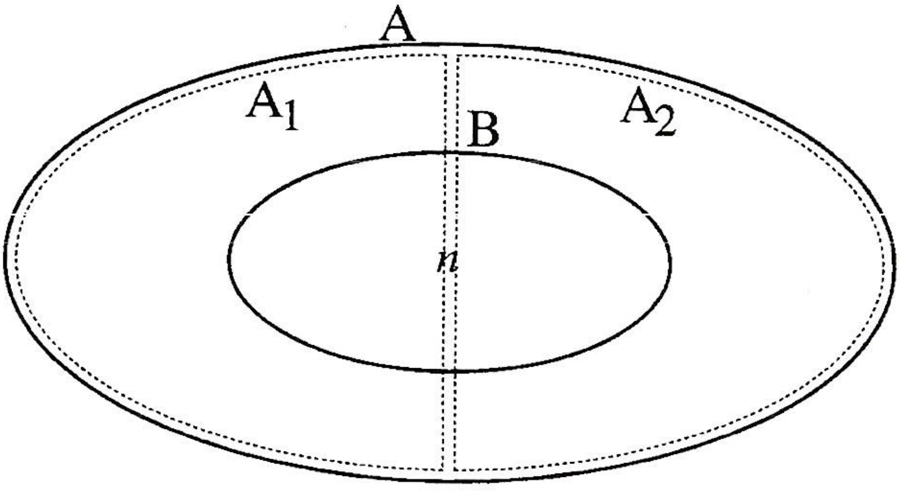


Figure 2

Si vous avez bien compris les combinaisons, vous conviendrez que le nombre de façons de faire cela est C_{2n}^n . Mais on peut aussi scinder le nombre de cas possibles de la manière suivante : soit on prend 0 élément dans A_1 et n dans A_2, soit on prend 1 élément dans A_1 et $n-1$ dans A_2, soit on prend 2 éléments dans A_1 et $n-2$ dans A_2, etc.

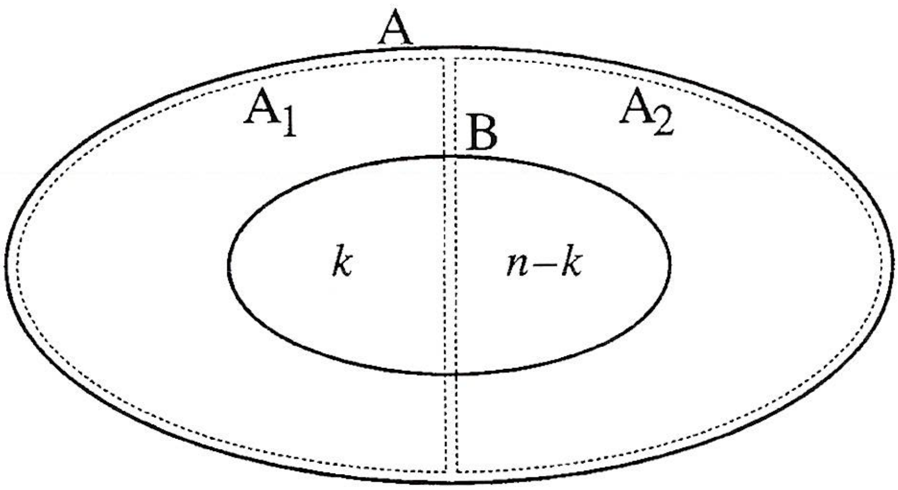


Figure 3

En comptant les cas possibles de cette manière, on arrive à $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_n^{n-k}$ qui est bien égal à $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$ (encore une fois, cf. *Taxi-choses et taxi-trucs (1)* dans *Math-Jeunes* n° 87). CQFD !

Si ce genre de démonstration vous plaît, amusez-vous à généraliser cette formule au cas où A_1 comprend n éléments, A_2 comprend m éléments, et B comprend r éléments. Bon travail !

Et cette rencontre ?

Nous sommes donc arrivés à :

$$p(\text{rencontre}) = \frac{C_{2n}^n}{4^n}$$

D'accord, cette probabilité est plus petite que un. Mais est-elle beaucoup plus petite ? Roméo et Juliette (Mathieu et sa petite amie !) ont-ils une toute petite chance de se rencontrer ?

Comme vous vous en doutez, tout dépend de n. Si Roméo et Juliette sont aux coins opposés d'un seul bloc, ils ont chacun deux taxi-chemins possibles. Ils ont une chance sur deux de se rencontrer (faites le calcul directement, puis en utilisant la formule générale).

Rappelez-vous que Mathieu et sa petite amie se trouvaient aux coins d'un carré de 10×10 blocs. Pour eux, la probabilité de rencontre est de 0,176 : moins d'une chance sur cinq ! Ils ont intérêt à mettre au point une autre tactique pour se rencontrer !

Et pour n tendant vers l'infini, à votre avis ? La probabilité tend vers zéro ! Pour démontrer cela, il faut utiliser la formule de Stirling. Celui-ci a établi au dix-huitième siècle que

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$$

On va pouvoir utiliser cette formule en réalisant que

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

En effet, $C_7^2 = \frac{7\times 6}{2\times 1}$ peut aussi s'écrire comme $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times5\times4\times3\times2\times1}$, soit $\frac{7!}{2!5!}$.
On obtient donc de la sorte :

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \simeq \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}$$

Simplifions, simplifions, simplifions...

$$C_{2n}^n \simeq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc en passant à la limite pour n tendant vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} p(\text{rencontre}) = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} \simeq \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n\sqrt{\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0$$

* *
*

Où est l'erreur ?

Un bédouin mourant laisse dix-sept chameaux à ses trois fils qui doivent se les répartir de la manière suivante.

Le premier en reçoit la moitié, le second, le tiers et le troisième, le neuvième.

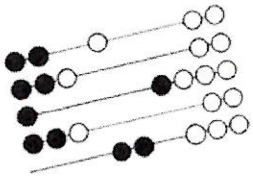
Comme le partage présente une certaine difficulté, les héritiers s'en réfèrent au cadi (1)*, qui résout la question de la manière suivante.*
Il se fait prêter un chameau et fait le partage avec dix-huit chameaux, si bien que le premier en obtient neuf, le second, six et le troisième, deux.
Le total $9 + 6 + 2$ *vaut 17 ce qui permet de rendre à son propriétaire le chameau qu'il avait prêté.*

Les trois fils furent contents du travail effectué par leur juge puisque chacun d'eux avait reçu plus que ce que leur père leur avait légué.

Comment cela est-il possible ?

(1) *Juge musulman qui remplit des fonctions civiles et religieuses.*

Olympiades



C. Van Hooste

Participons à l'OMB !

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-cinquième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis trois ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » est réservée aux élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » accueille les élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade », est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre-eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale.

Le calendrier de la 25ème Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

Mercredi 19 janvier 2000 : éliminatoire,
Mercredi 1 mars 2000 : demi-finale,
Mercredi 26 avril 2000 : finale,
Samedi 13 mai 2000 : proclamation

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Aussi, si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « préformulée ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un *nombre entier* appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit *un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.*

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois deux points. Là, tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais, précisément, de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux

Math-Jeunes n°91 S, 15–18, 1999

ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin, tu dois aussi savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de cinq questions pour être classé.

Voici les questions promises. Essaie de les résoudre sans consulter les solutions proposées.

Les questions marquées du signe (*) sont à la portée des élèves du premier degré. Tu dois donc pouvoir les résoudre. Si tu es élève du second degré, les questions marquées (**) sont de ton niveau. Enfin, les questions n° 7 et 21, marquées (***), sont normalement destinées à des élèves du troisième degré.

1. La princesse [1979](**)

Une princesse a 25 prétendants. Aucun n'est à la fois beau, riche et intelligent ; 8 sont beaux, 17 sont riches et 13 sont intelligents ; enfin, 6 ne sont ni beaux, ni riches, ni intelligents. Sachant que l'heureux élu devra être beau et intelligent, combien de prétendants ont une chance d'être choisis ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 21

2. Moyennes [1981] (*)

Soit m la moyenne de quatre nombres réels. Sachant que la moyenne de ces quatre nombres et de 40 vaut 12, alors

(A) $m = 4$ **(B)** $m = 5$ **(C)** $m = 8$ **(D)** $m = 10$ **(E)** m ne peut être déterminé : les données sont insuffisantes.

3. Racine carrée [1976] (**)

Que peut-on affirmer au sujet d'un nombre réel x si $\sqrt{x^2} = -x$?

(A) Il n'existe aucun réel x vérifiant cette égalité.

(B) Tout nombre réel x vérifie cette égalité.

(C) Nécessairement, $x = 0$.

(D) Nécessairement, $x = -1$

(E) Nécessairement, $x \leqslant 0$

4. La fraction [1976](*)

$$\frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}} =$$

(A) $\frac{21}{55}$ **(B)** $\frac{8}{21}$ **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{8}{3}$

5. Divisibilité [1976](*)

Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour tout naturel n ?

(A) Si 5 est un diviseur de n, alors 15 est un diviseur de n.

(B) Si n est un diviseur de 12, alors 12 est un diviseur de n.

(C) Si n est un diviseur de 12, alors 12 n'est pas un diviseur de n.

(D) Si 4 et 6 sont des diviseurs de n, alors 24 est un diviseur de n.

(E) Si 12 est un diviseur de n, alors 3 et 6 sont des diviseurs de n.

6. Fractions [1979](**)

Si a, b, c, d sont des nombres réels positifs non nuls et si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, lesquels parmi les nombres suivants

$$x = \frac{a+c}{b+d}, \qquad y = \frac{ad+bc}{2bd},$$
$$z = \frac{a+c}{d}, \qquad u = \frac{a}{b+d}$$

appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$?

(A) x et y **(B)** x, z et u **(C)** y, z et u **(D)** x, y et z **(E)** x, y et u

7. Racines [1981] (***)

x étant un nombre réel, $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ si et seulement si

(A) $x > 0$ **(B)** $0 < x < 1$ **(C)** $-1 < x < 1$ **(D)** $x > 1$ **(E)** $x < 1$

8. À la cafétéria [1976] (**)

Trois personnes entrent dans une cafétéria. La première prend 4 croissants, 1 café et 10 jetons de téléphone ; la caissière lui réclame 169 F. La deuxième personne, qui a pris 3 croissants, 1 café et 7 jetons de téléphone, doit payer 126 F. Pour un croissant, un café et un jeton de téléphone, la troisième personne devra alors débourser **(A)** moins que 40 F **(B)** 40 F **(C)** 43 F **(D)** 45 F **(E)** plus que 45 F

9. Voyage [1976] (**)

Au cours d'un voyage, une moitié de la distance est parcourue à la vitesse moyenne de 80 km/h et l'autre moitié à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne du voyage ?

(A) 96 km/h **(B)** 98 km/h **(C)** 100 km/h **(D)** 102 km/h **(E)** 105 km/h

10. Le dix mille mètres [1977] (**)

Dans une course de 10 000 m, le premier termine avec une avance de 200 m sur le second et de 400 m sur le troisième. En supposant que les coureurs maintiennent une vitesse constante durant toute la course, quelle sera l'avance du deuxième sur le troisième à l'arrivée (arrondir la réponse au mètre) ?

(A) 196 m **(B)** 200 m **(C)** 204 m **(D)** 208 m **(E)** 220 m

11. Multiplication [1979](*)

Dans la multiplication ci-dessous, chaque lettre représente un chiffre de 0 à 9 et deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents. Quel est le chiffre représenté par la lettre a ?

$$\begin{array}{r} a\ b \\ \times \quad a \\ \hline c\ a\ d \end{array}$$

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

12. Intersection [1981](*)

Quel est le nombre maximum de points d'intersection d'un cercle et d'un rectangle ?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 10

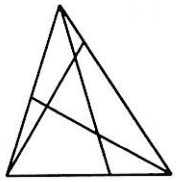
13. Hexagone régulier [1977] (*)

Soit H un hexagone régulier. Quel est le nombre de triangles isocèles dont les sommets sont des sommets de H ?

(A) 2 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 12

14. Triangles [1978](*)

Combien la figure ci-dessous contient-elle de triangles ?



(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 16 **(E)** 17

15. Octogone régulier [1979] (**)

Si P est un octogone régulier du plan, l'angle de deux arêtes consécutives de P vaut

(A) 90° **(B)** 105° **(C)** 120° **(D)** 135° **(E)** 150°

16. Section d'un cube [1981] (**)

Si on coupe un cube par un plan passant par un sommet, la section obtenue est nécessairement

(A) un triangle

(B) un triangle ou un parallélogramme

(C) un triangle, un parallélogramme ou un trapèze

(D) un triangle, un trapèze ou un pentagone

(E) un triangle, un parallélogramme, un trapèze ou un pentagone.

17. Dans le plan [1976] (**)

Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy orthonormé, l'ensemble des points de coordonnée (x, y) qui vérifient l'inéquation $|x - y| \leqslant 1$ est

(A) un demi-plan **(B)** un carré

(C) un disque

(D) le premier quadrant (partie du plan où abscisses et ordonnées sont positives)

(E) une bande (partie du plan comprise entre deux droites parallèles)

18. La cerise [1978] (**)

Dans une cerise, on peut estimer que la couche de chair a la même épaisseur que le noyau. On peut également admettre que le noyau et la cerise ont la forme d'une boule. Le rapport entre le volume de la chair et celui du noyau est égal à

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 15 **(D)** 26 **(E)** 27

19. Le parallélipipède rectangle [1980] (**)

Les faces d'un parallélipipède rectangle ont pour aire 6 cm^2, 9 cm^2 et 24 cm^2. Quel est le volume de ce parallélipipède ?

(A) 36 cm^3 **(B)** 96 cm^3 **(C)** 162 cm^3 **(D)** 648 cm^3 **(E)** 1296 cm^3

20. À la poste [1976] (*)

Laquelle des cinq propositions ci-dessous est la négation de « Tous les guichets sont ouverts tous les jours » ?

(A) Il y a un jour où tous les guichets sont fermés.

(B) Il y a au moins un guichet qui est fermé au moins un jour.

(C) Tous les guichets sont fermés tous les jours.

(D) Chaque guichet est fermé au moins un jour.

(E) Un des guichets est fermé tous les jours.

21. Le dé [1977] (***)

Quand vous jetez un dé, vous recevez un nombre de francs égal au nombre de points indiqué par le dé. Combien pouvez-vous espérer gagner en moyenne par jet ?

(A) 3 F **(B)** 3,25 F **(C)** 3,5 F **(D)** 3,75 F **(E)** 4 F

22. Le Mont Chauve [1981] (*)

Dans l'île du Mont Chauve, on a constaté que

- deux habitants n'ont jamais exactement le même nombre de cheveux sur la tête ;
- aucun habitant n'a exactement 518 cheveux sur la tête ;
- le nombre total d'habitants est plus grand que le nombre de cheveux sur la tête de n'importe lequel d'entre eux.

Quel est le nombre maximum d'habitants qu'il peut y avoir sur l'île du Mont Chauve ?

(A) 1 **(B)** 517 **(C)** 518 **(D)** 519 **(E)** 520

23. L'affranchissement [1978] (sans réponse préformulée) (*)

Si vous disposez de timbres à 6,50 F, à 4,50 F et à 1,50 F, en quantité aussi grande que vous le désirez, quel est le plus petit nombre de timbres nécessaires pour un affranchissement de 36 F ?

24. Carré magique [1981] (sans réponse préformulée)(*)

Dans un carré magique, la somme des nombres inscrits dans les cases d'un rangée horizontale, d'une rangée verticale ou d'une diagonale est toujours la même.

Ci-dessous, voici un carré magique incomplet. Quel est le nombre qui doit nécessairement figurer dans la case marquée d'un point d'interrogation ?

		?
1	14	
26		13

* * *

Les problèmes que tu viens de résoudre (contrôle tes réponses à la page 7) ont été choisis dans le Tome 1 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1976 à 1981. Malheureusement, ce Tome n'est plus en vente car il est épuisé. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique sur des questions plus récentes, tu peux acquérir les Tomes 3 et 4 des OMB. Je te donne ci-dessous tous les renseignement nécessaires pour cela.

Olympiades Mathématiques Belges

- Tome 3 : 1988–1993. **Prix : 240 F.** Il n'en reste que quelques exemplaires.
- Tome 4 : 1994–1998. **Prix : 220 F.** Le prix peut descendre jusqu'à 160 F pour des commandes groupées.

Où commander ?

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 MONS
Fax et Tél. : 065-37.37.29

Jeux

Produits croisés

À chaque lettre de l'alphabet, on a associé une valeur selon son rang (A=1, B=2, C=3, ...). Chacun des nombres-définitions est le produit des valeurs associées aux lettres des mots à placer dans la grille. Essayez de reconstituer une grille de mots croisés cohérente.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

Horizontalement

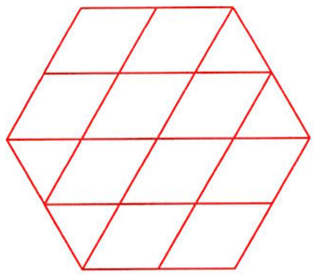
1. 9 072
2. 2 646
3. 39 900
4. 60 — 1 500
5. 541 500

Verticalement

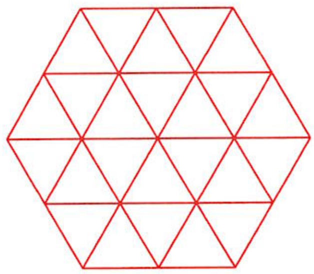
1. 179 550
2. 5 880
3. 36
4. 3 600
5. 9 000
6. 1 805

Les jeux mathématiques de Tonton C

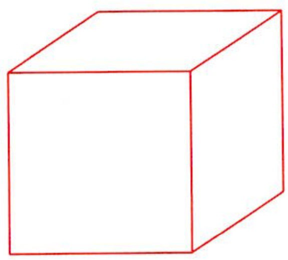
◇ Combien comptez-vous de parallélogrammes dans la figure suivante ?



◇ Combien comptez-vous de triangles dans la figure ci-dessous ?



◇ Vous souhaitez découper ce cube en 27 petits cubes. Combien de passages à la scie devez-vous effectuer au minimum sachant que vous pouvez regrouper les morceaux déjà sciés ?



Math-Jeunes n°91 S, 19–20, 1999

Solutions

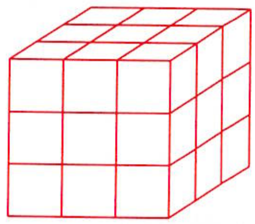
Produits croisés

	1	2	3	4	5	6
1	R	A	D	I	A	N
2	U	N	I		R	
3	E	G	A	L	E	S
4	E	L		O	T	E
5	S	E	C	T	E	S

Les jeux mathématiques de Tonton C

◇ Il est immédiat qu'il y a dix parallélogrammes élémentaires. Il y a aussi des parallélogrammes formés par la juxtaposition de deux parallélogrammes élémentaires. Ils sont au nombre de douze. Il y a ceux qui sont formés de trois parallélogrammes élémentaires, il y en a quatre. Enfin, il y a trois parallélogrammes formés de quatre plages.
Cela fait au total vingt-neuf parallélogrammes visibles dans cette figure.

◇ Il y a vingt-quatre triangles élémentaires. Il y a douze triangles formés de quatre triangles élémentaires. On compte deux triangles formés de neuf triangles élémentaires. Au total, on dénombre donc trente-huit triangles.



◇ La découpe demandée demande un minimum de six passages à la scie (deux dans chacune des trois directions des arêtes du cube).
D'ailleurs, le cube central ainsi découpé doit avoir six faces qui nécessitent donc ces six passages à la scie.

Où est l'erreur ?

Soient deux nombres égaux x et y. On a

$$xy = x^2 \text{ d'où } xy - y^2 = x^2 - y^2$$

On a encore :

$$y(x-y) = (x+y)(x-y)$$

On en tire donc

$$y = x + y \text{ ou } y = 2y \text{ puisque } x = y$$

En donnant à y la valeur 1, par exemple, on obtient $1 = 2$.

Nadine Joelants

Cyber-plaidoyer pour Euclide

Les fameux Centres Cyber Médias ont commencé à pointer leur nez dans nos écoles. Internet enfin accessible à tous ? Espérons-le ! Quoi qu'il en soit, réclamez à corps et à cris l'accès aux fameux locaux « cyber-machin-chose » et faites la preuve par ... zut alors, en binaire, comment ça marche ? ... bref, démontrez qu'il est possible d'utiliser les ressources du réseau pour faire des maths !

D'ailleurs, pour ne prendre aucun risque, nous allons commencer de façon très classique. Parlez-leur d'Euclide à vos profs et vous verrez les poussières fuser hors des costumes sous l'effet d'une réaction épidermique.

David E. Joyce est professeur à l'Université de Pennsylvanie. Il a bien compris qu'Euclide était incontournable et que rappeler à un enseignant des souvenirs du temps où il était élève, c'était s'en faire un allié !

`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html` est l'adresse d'un site consacré essentiellement aux mathématiques mais particulièrement intéressant pour les pages dédiées à Euclide.

Les *Éléments d'Euclide* ont été étudiés pendant des siècles et des siècles que ce soit en grec, en arabe, en latin ou, actuellement, dans de nombreuses langues modernes. Mais jamais les figures ne se sont animées sous la pointe d'un crayon. De l'aveu de David E. Joyce, livrer les *Éléments* en version « navigable » relève d'un double but : celui de provoquer un regain d'intérêt pour cette bible de la géométrie et celui de donner vie aux treize livres d'Euclide en animant les figures (il a créé lui-même un applet à cette intention).

La partie de ce site consacrée aux *Éléments d'Euclide* est structurée de la façon suivante. Une « hyper »table des matières permettant un renvoi direct à n'importe quel livre et même à une partie de ce livre.

Voici, par exemple, l'organisation du livre I :

Book I. The fundamentals of geometry : theories of triangles, parallels and area.
Definitions (23)
Postulates (5)
Common Notions (5)
Propositions (48)

Le contenu de chaque livre est ensuite repris sans détail **mais** chaque définition, chaque proposition, chaque postulat est « cliquable » et conduit à une page détaillée et illustrée. Lors d'une démonstration, les numéros des propositions invoquées sont également des liens hypertexte et à la fin de chaque page, l'auteur précise où la proposition achevée se révèle utile.

C'est un site anglais ? Pas grave, la logique d'Euclide est universelle ! Et avant de lever la voile vers d'autres rivages, je voudrais citer le professeur Francis Buekenhout de l'ULB, lors du dernier congrès des professeurs de mathématique, en août 99, parlant de la nécessité d'apprendre aux élèves à raisonner :

> *Bronzer ? Oui ... Mais pour combien de temps ? Réfléchir et raisonner correctement, c'est pour la vie !*

Math-Jeunes n° 91 S, 21–21, 1999

1/4 de finales Individuels 2000

DÉBUT CM

1 - LE X IÈME X (coefficient 1)

Mathias écrit les nombres entiers en toutes lettres, dans l'ordre, à partir de un :

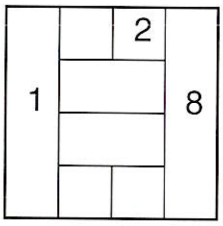
UN DEUX TROIS QUATRE CINQ SIX SEPT HUIT...

Le dixième "E" écrit apparaît dans "QUINZE" et le dixième "U" dans "DIX-NEUF".

Mais dans l'écriture de quel nombre le dixième "X" apparaît-il ?

2 - LES 8 NOMBRES (coefficient 2)

Mathilde prétend qu'il est possible de placer les nombres de 1 à 8 dans les cases du tableau ci-contre de façon que deux nombres qui se suivent (comme 3 et 4 par exemple) ne soient jamais situés sur deux cases qui se touchent. Mathias a déjà placé les nombres 1, 2 et 8.

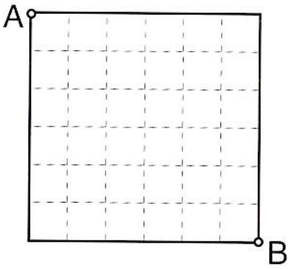


A vous de placer les 5 autres !

DÉBUT C1

3 - LA TARTE CARRÉE (coefficient 3)

C'est aujourd'hui l'anniversaire de Mathias. Sur la table, il y a une superbe tarte carrée. Il faut la partager en trois parts de même poids, en donnant deux coups de couteau rectilignes passant l'un par le point A et l'autre par le point B. **Faites le partage**.



4 - LA VIEILLE CALCULATRICE (coefficient 4)

Ma vieille calculatrice ne peut plus faire que deux opérations : ajouter 12 au nombre affiché, ou bien lui soustraire 7. Aujourd'hui, elle affiche 1999.

En combien d'opérations, au minimum, pourrai-je faire apparaître le nombre 2000 sur l'écran ?

DÉBUT C2 L1 L2 GP HC

5 - HISTOIRE DE BILLES (coefficient 5)

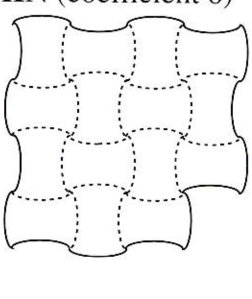
Mathilde a deux billes de plus que Mathias. Le nombre de billes de Mathias est le double du nombre de billes de Matthieu. Matthieu a sept billes de moins que Mathilde.

Combien ont-ils de billes à eux trois ?

6 - LE CARRELEUR AMÉRICAIN (coefficient 6)

Tom, carreleur originaire des Amériques, fabrique lui-même les "carreaux" qu'il utilise.

Aujourd'hui, il a fabriqué cinq "carreaux" identiques pour "carreler" la forme ci-contre. Les bords des carreaux, qui ne peuvent être retournés, suivent les lignes du "quadrillage". **Retrouvez la position des cinq carreaux.**



FIN CM

7 - AUTORÉFÉRENCE (coefficient 7)

Dans ce cadre, il y a .... consonnes de plus que de voyelles.

Complétez le cadre ci-contre à l'aide d'un nombre écrit en toutes lettres, de telle sorte que la phrase qu'il contient soit vraie.

8 - LA FURIBARDE (coefficient 8)

Le "lapgourou" est un animal qui court en ligne droite de la manière suivante : il met 2 secondes pour faire un saut de 4 m, il se repose une seconde et il recommence à sauter.

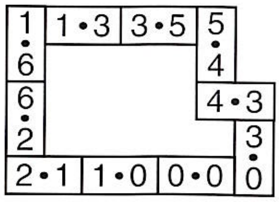
La "furibarde" est un animal qui saute moins loin ; elle met une seconde pour faire un bons de 3 m, mais elle ne s'arrête pas entre les bonds.

La furibarde est à 32 m du lapgourou qu'elle décide de poursuivre. Elle ne peut capturer le lapgourou que lorsqu'il est arrêté.

Dans combien de secondes, au maximum, pourra-t-elle le faire ?

9 - CHAÎNE DE DOMINOS (coefficient 9)

Philippe possède un jeu complet de 28 dominos (du 0-0 au 6-6). Sa soeur Sophie lui a subtilisé les 7 dominos comportant un 6 (de 0-6 à 6-6). Qu'à cela ne tienne ! Philippe décide de former une chaîne fermée avec les dominos restants, en respectant la règle du jeu de dominos. On rappelle que deux dominos ne peuvent être mis en contact que par un côté portant le même nombre de points (voir l'exemple donné ci-contre avec 10 dominos).



Quelle sera le nombre maximum de dominos utilisés par Philippe pour former une chaîne fermée ?

FIN C1

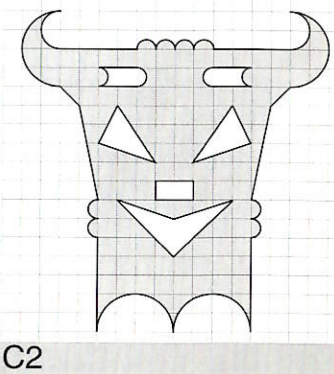
10 - TÉLÉPHONE (coefficient 10)

Lorsque Pierre demande à Marie son numéro de téléphone pour pouvoir l'appeler, celle-ci répond :

« Comme tous les numéros de téléphone français, il est formé de 10 chiffres que l'on a l'habitude de grouper par deux. Les dix chiffres sont tous différents, et chaque groupe de deux chiffres est supérieur à la somme de tous les groupes précédents. De plus, si l'on considère le nombre que forme ce numéro, c'est le plus petit possible. » **Quel est le numéro de téléphone de Marie ?**

11 - LE MASQUE INCA (coefficient 11)

Des recherches archéologiques viennent de révéler à nos yeux émerveillés un masque inca en or pur. Le plan de ce masque est représenté ci-contre sur un plan quadrillé.



Calculez l'aire de ce masque, l'unité d'aire étant l'aire d'un petit carreau. On n'oubliera pas de déduire l'aire des yeux, de la bouche, du nez et des sourcils. Pour d'éventuels calculs, on prendra 355/113 pour π.

FIN C2

12 - LA FRACTION (coefficient 12)

$$\frac{?}{?}$$

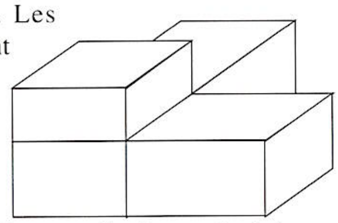
On choisit le numérateur et le dénominateur, qui peuvent être égaux ou différents, de la fraction ci-contre dans l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
Combien de valeurs différentes la fraction peut-elle prendre ?
remarque : 2 / 1 est une fraction.

13 - LE COUPLE PARFAIT (coefficient 13)
Deux nombres se marient pour former un nouveau nombre. Un couple de nombres entiers plus grands que 0 est dit parfait si chacun des nombres est un carré parfait ainsi que le nombre obtenu en les juxtaposant. Ainsi, (324 ; 9) est le plus petit couple parfait supérieur à 1999, car 324, 9 et 3249 sont des carrés. **Combien y a-t-il de couples parfaits inférieurs à 1999 ? Donnez-en deux.**

14 - LE CARRÉ ET LE RECTANGLE (coefficient 14)
Un rectangle dit à un carré : «Tiens, nous avons des diagonales égales».
_ Certes, répond le carré, mais j'ai une aire de 144 cm², tout le monde ne peut pas en dire autant !
_ Voyons cela, rétorque le rectangle, en appliquant une de ses diagonales sur une diagonales du carré.
Tous deux constatent alors que leur partie commune a une aire de 96 cm ².
Quelle est l'aire du rectangle ?

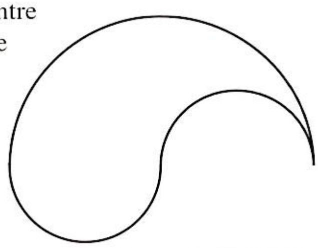
FIN L1 GP

15 - LES BRIQUES DE MARK OV (coefficient 15)
Les briques de Mark Ov sont des parallélépipèdes rectangles ne possédant aucune face carrée. Les dimensions de chaque brique sont entières, dans une certaine unité. De plus, ces briques présentent la particularité que la somme des carrés de leurs trois dimensions est égale au triple de leur produit, à l'instar du cube de côté unité. Un exemple d'une telle brique est (2 ; 5 ; 29), puisque $2^2 + 5^2 + 29^2 = 3 \times (2 \times 5 \times 29) = 870$.



La figure ci-dessus, qui ne respecte pas les proportions, montre quatre briques de Mark Ov assemblées en coin. Pour chacune des trois surfaces de contact, les deux dimensions de chacune des deux briques correspondent exactement.
Si les quatre briques sont toutes différentes les une des autres, quelle est le volume minimum de la plus volumineuse d'entre elles.

16 - LE CARRÉ DANS LA PETITE LARME (coef. 16)
La "petite larme" représentée ci-contre est formée de deux demi-cercles de rayon 5 cm et d'un demi-cercle de rayon 10 cm. On place 4 points A, B, C, D sur le pourtour de cette petite larme de telle sorte que ABCD soit un carré.
Quelle est l'aire de ce carré ?



FIN L2 HC

Les catégories sont les suivantes:

Les **catégories** sont les suivantes :

CM: Elèves de 4ᵉ et 5ᵉ année primaire
Résoudre les problèmes n°1 à n°6

C1: Elèves de 6ᵉ primaire et de 1ʳᵉ secondaire
Résoudre les problèmes n°3 à n°9

C2: Elèves de 2ᵉ et 3ᵉ secondaire
Résoudre les problèmes n°5 à n°11

L1: Elèves de 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ secondaire
Résoudre les problèmes n°5 à n°14

L2: Etudiants des candidatures universitaires
Résoudre les problèmes n°5 à n°16

GP: Grand Public (adultes)
Résoudre les problèmes n°5 à n°14

HC: Haute compétition (adultes)
Résoudre les problèmes n°5 à n°16

Les différentes étapes :
Phase 1 : les quarts de finale - octobre à fin janvier 2000
Phase 2 : les demi-finales - le 18 mars 2000
Phase 3 : la finale belge - le 13 mai 2000 à Mouscron
Phase 4 : la finale internationale - fin août 2000 à Paris

Epreuves individuelles
Elles sont diffusées par la presse associée au championnat :
MATH-JEUNES, LE SOIR, TANGENTE, LA CLASSE, HYPERCUBE, LA RECHERCHE.
A la 1ʳᵉ phase de l'épreuve la participation est entièrement gratuite, et il n'est pas nécessaire de répondre correctement à toutes les questions pour espérer se qualifier.

Epreuves collectives dans les établissements scolaires
L'instituteur, le professeur de mathématique peut organiser une épreuve collective en classe. Il lui suffit de demander un dossier de participation comportant les explications, le questionnaire, les solutions.

POUR TOUTE INFORMATION

FFJM
BP 157
7700 MOUSCRON

Télécopie : 056 33 14 53
Courriel : andre.parent@ping.be
Internet: http://www.ping.be/ffjm

BULLETIN REPONSE

à retourner **au plus tard le 31/1/2000**
à FFJM – B.P. 157 – 7700 Mouscron
MATH-JEUNES

Report du total |_|_|_|_|

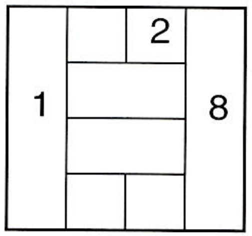
Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
....
E-mail::.. Tel :...

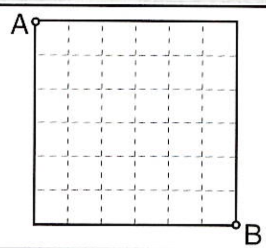
CATEGORIE (impératif) **CM**☐ **C1**☐ **C2**☐ **L1**☐ **GP**☐ **L2**☐ **HC**☐

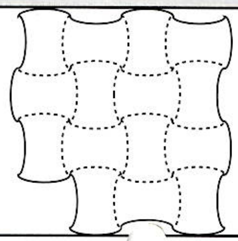
☐ Adhérent FFJM en 1999 : n° FFJM ....

☐ J'adhérent pour 2000 et je vire la somme de 175 F (CM), 350 F (C1 et C2), 450 F (L1), 500 F (L2), 650 F (GP et HC) (-20% par virement du compte CGER du candidat) au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP 157 – 7700 Mouscron

N° du Pb	Votre solution	Points (1-0)	Coef (0 à 6)
	catégorie : CM		
1	nombre écrit en toutes lettres :		
2	complétez le dessin ci-contre		
	catégories : CM C1		
3	complétez le dessin ci-contre		
4	nombre d'opérations :		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	nombre de billes : |_|_|		
6	repassez en traits épais le contour des cinq carreaux sur le dessin ci-contre		
	TOTAL		







BULLETIN REPONSE

(toutes catégories *sauf* **CM - Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !**)

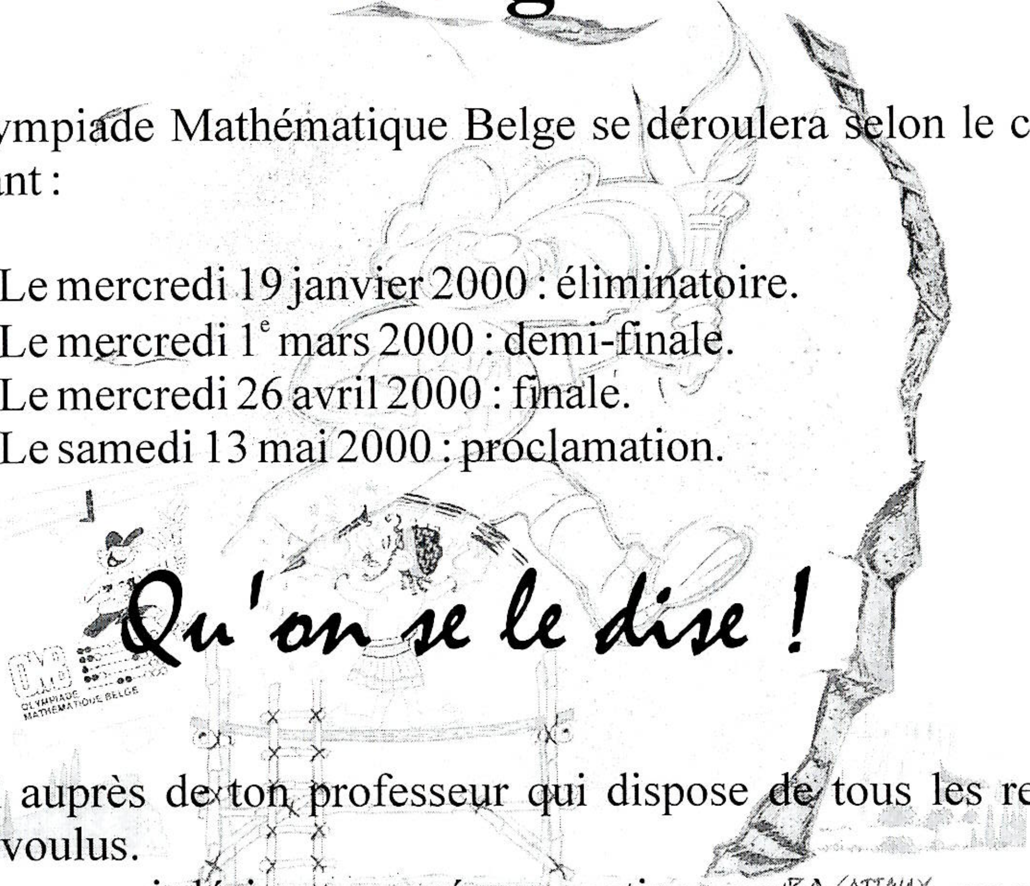
N° du Pb	Nbre de solutions	Votre ou vos solutions		Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
	catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC				
7	**.... solution(s)**	solution 1 :	solution 2 :		
8	**1 solution**	nombre de secondes : |_|_|_|_|_|_|_|			
9	**1 solution**	nombre de dominos : |_|_|			
	catégories : C2 L1 GP L2 HC				
10	**... solution(s)**	1) .... 2)			
11	**1 solution**	aire : |_|_|_| petits carreaux			
	catégories : L1 GP L2 HC				
12	**1 réponse**	nombre de valeurs : |_|_|			
13	**.... solution(s)**	solution 1 : (............ ; ....)	solution 2 : (............ ; ....)		
14	**.... solution(s)**	solution 1 : .... cm²	solution 2 : .... cm²		
	catégories : L2 HC				
15	**1 solution**	volume minimum : |_|_|_|_|_|_|_|			
16	**.... solution(s)**	1) |_|_|_| cm²	2) |_|_|_|_| cm²		
			TOTAL		

Pour les distraits !

25e Olympiade Mathématique Belge

La 25e Olympiade Mathématique Belge se déroulera selon le calendrier suivant :

- Le mercredi 19 janvier 2000 : éliminatoire.
- Le mercredi 1e mars 2000 : demi-finale.
- Le mercredi 26 avril 2000 : finale.
- Le samedi 13 mai 2000 : proclamation.



Qu'on se le dise !

Inscris-toi auprès de ton professeur qui dispose de tous les renseignements voulus.
Celles et ceux qui désirent se préparer activement à cette amusante épreuve liront avec intérêt la rubrique qui y est consacrée dans la revue.

Des renseignements complémentaires sur l'Olympiade ou sur toute autre activité de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBPMef) peuvent se trouver à l'adresse Internet suivante :

http://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm/sbpm.htm

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Rue A. Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée