

TOU
T
F
Z
AD
Σ
5



MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Rue A. Moitroux
22, 7100 La Louvière.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Ch. de Marbisœul
25, 6120 Marbaix-la-Tour.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LA-LOUX, R. MIDAVAINNE, G. NOËL, A. PATER-NOTTRE, F. POURBAIX, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé					
<i>Math-Jeunes junior</i> ou <i>Math-Jeunes</i> (*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)					
<i>Math-Jeunes junior</i> ou <i>Math-Jeunes</i> (*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière
- pour *Math-Jeunes junior* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour

Math-Jeunes

Claude Villers, La mathématique au quotidien ...

50

Gérald Troessaert, Comment se répartissent les nombres premiers ?

55

Guy Noël, Le dodécaèdre rhombique (2)

58

Daniel Bernoulli (1700–1782)

63

C. Festraets, Le jeu de la vie

64

Rallye-problèmes

66

Jeux

70

Internet

71

La mathématique au quotidien . . .

Claude Villers, Athénée Royal de Mons

Question de tempérament . . . !

Vous avez certainement déjà pu voir des annonces publicitaires comme celle qui est illustrée ci-dessous. Les « toutes boîtes » en regorgent.

**TELEPHONEZ-NOUS
EN PRIORITE !**

Courrier en crédit

SIMPLE : par téléphone ... et l'argent chez vous ou chez nous même si crédits en cours ailleurs.

POUR TOUS : ouvriers, employés, indépendants, pensionnés, invalides, célibataires, mariés, séparés, divorcés, veufs(ves)

Prêts à tempérament

Exemple de tarification "voiture neuve" 20% d'acompte min. pour nos clients.			Exemple de tarification "prêt personnel" Propriétaires				
Montant	Mensualités		*Taeg	Montant	Mensualités		*Taeg
	Nbre	Rembours.			Nbre	Rembours.	
101.000	= 30 x	3.583	5.82*	601.000	= 84 x	10.413	12*
151.000	= 36 x	4.540	5.82*	650.000	= 84 x	11.262	12*
200.000	= 36 x	6.055	5.82*	700.000	= 84 x	12.128	12*
226.000	= 42 x	5.945	5.82*	800.000	= 84 x	13.861	12*
301.000	= 48 x	7.000	5.82*	900.000	= 84 x	15.593	12*
401.000	= 60 x	7.666	5.79*	1.000.000	= 84 x	17.326	12*
500.000	= 60 x	9.583	5.79*	1.100.000	= 84 x	19.058	12*
600.000	= 60 x	11.500	5.79*	1.300.000	= 84 x	22.523	12*
800.000	= 60 x	15.333	5.79*	1.500.000	= 84 x	25.989	12*

Possibilité de souscrire une assurance perte d'emploi.

TAEG: Taux annuel effectif global. Taux applicable au 14/04/97 uniquement à titre indicatif et sous réserve de modification.

Avec l'argent, ne prenez pas de risque !

S.A. Crédit Régional du Hainaut (siège), rue du Gouvernement 8, 6000 Charleroi

La plupart des personnes qui font appel au crédit doivent probablement se résoudre à accepter ce qui est indiqué ou ce qu'on leur donne comme renseignements. Mais un esprit un peu curieux est interpellé par ces indications. Il se pose des questions du type : que représente ce TAEG ? Comment les montants des mensualités sont-ils calculés ? . . .

Pour en savoir plus sur ce sujet, j'ai interrogé mon organisme financier habituel qui m'a aimablement répondu mais . . . en ne me fournissant que les formules utilisées. Elles sont particulièrement complexes.

Voici, une de ces formules telle qu'elle m'a été donnée (et c'est encore bien la plus simple d'aspect).

$$\text{Mensualité} = \text{Capital} \times \text{TMEG} / (1 - (1 / (1 + \text{TMEG}))^{\text{durée}})$$

Je vous propose donc de me suivre dans une démarche qui vous permettra de retrouver cette formule et d'ainsi valider son application dans la vie réelle. Munissez-vous de papier brouillon et de . . . persévérance.



On m'a d'abord expliqué que toute mise à disposition d'un certain capital (que nous désignerons par C) devait être rétribuée sous la forme d'un intérêt (nous écrirons I) exprimé sous la forme d'un taux, généralement annuel. C'est le fameux TAEG (taux annuel effectif global) que nous représenterons plus simplement par T .

Ainsi, $T = \text{TAEG} = 12\%$ (ou encore 0.12) signifie que l'on paiera un intérêt de 12 (Euros) pour la mise à disposition de 100 (Euros) pendant un an. Mais cela ne vous apprend certainement rien de neuf.

Remarquons que si la durée du prêt est de n années, il faut tenir compte du fait que le capital augmente, à la fin de chaque année, de la valeur des intérêts qu'il est censé rapporter.

Après 1 an, C est devenu : $C + C \cdot T = C \cdot (1 + T)$

Après 2 ans, C est devenu : $C \cdot (1 + T) + C \cdot (1 + T) \cdot T = C \cdot (1 + T) \cdot (1 + T) = C \cdot (1 + T)^2$

Après 3 ans, C est devenu : $C \cdot (1 + T)^2 + C \cdot (1 + T)^2 \cdot T = C \cdot (1 + T)^2 \cdot (1 + T) = C \cdot (1 + T)^3$

⋮

près n années, C est devenu

$$C \cdot (1 + T)^n \quad (1)$$

C'est la formule « de l'intérêt composé » que vous connaissez peut-être déjà.

Le TAEG ne figure pas dans la formule fournie par ma banque. C'est le TMEG qui y est utilisé. Le TMEG est le taux mensuel effectif global. Nous le désignerons plus simplement par t . Ce TMEG (ou t) est en fait le taux à appliquer chaque mois pour que l'intérêt produit au bout de 12 mois soit le même que celui produit en un an par le TAEG (ou T). Ouf! Vous suivez?

Donc en application de la formule rappelée plus avant : $C(1 + t)^{12} = C(1 + T)$ d'où $(1 + t)^{12} = 1 + T$ ou $1 + t = \sqrt[12]{1 + T}$ donc

$$\text{TMEG} = t = \sqrt[12]{1 + T} - 1 = (1 + T)^{\frac{1}{12}} - 1$$

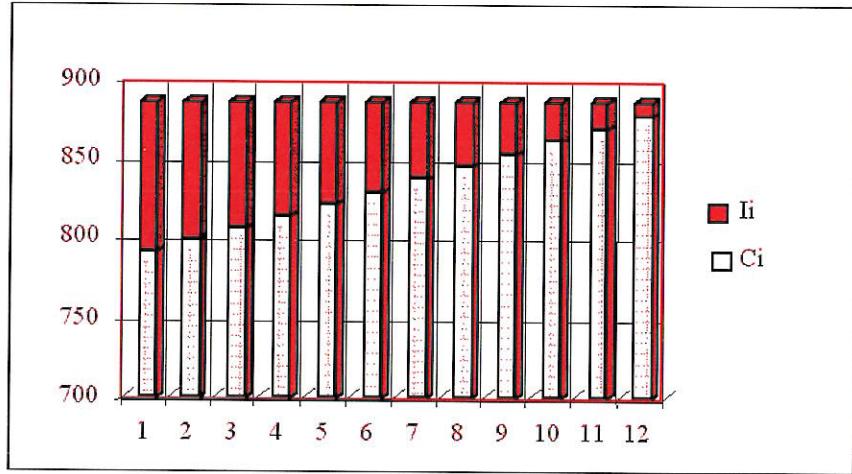
Comme vous le constatez, cela se corse!

Puisque dans le cas qui nous concerne le prêt est remboursé par mensualités **constants**, le capital à rembourser diminue chaque mois d'une certaine valeur et les intérêts du mois suivant vont dépendre du capital restant dû et non du capital initial. Ces intérêts vont donc diminuer de mois en mois ce qui a pour conséquence que la part de capital composant la mensualité doit aller en augmentant de mois en mois.

Soit donc un capital C , emprunté à un taux annuel T et à rembourser en d (initiale de « durée ») mois par mensualités constantes M . Désignons par $M_1, M_2, M_3, \dots, M_d$ les d mensualités (égales), par $C_1, C_2, C_3, \dots, C_d$ les parts de capital remboursées qui les composent et par $I_1, I_2, I_3, \dots, I_d$ les parts d'intérêt des mois échus correspondants.

Ci-dessous une illustration des parts de capital et d'intérêt composant, à chaque échéance, la mensualité constante du remboursement de 10 000 Euros en 12 mois empruntés à un TAEG de 12%.





On a : $M_1 = C_1 + I_1$ (C_1 est la part de capital remboursée dans cette première mensualité et I_1 est l'intérêt, au taux mensuel t du capital C qui restait dû) Comme $I_1 = Ct$, on a $M_1 = C_1 + C \cdot t$ et il reste à rembourser : $C - C_1$.

$$M_2 = C_2 + I_2 = C_2 + (C - C_1) \cdot t = C_2 + C \cdot t - C_1 \cdot t$$

Mais comme on veut $M_2 = M_1$, il faut

$$C_2 + C \cdot t - C_1 \cdot t = C_1 + C \cdot t$$

d'où

$$C_2 = C_1 + C \cdot t - C \cdot t + C_1 \cdot t$$

ou encore

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + t)$$

Il reste alors à rembourser

$$C - C_1 - C_1 \cdot (1 + t) = C - C_1 - C_1 - C_1 \cdot t = C - 2 \cdot C_1 - C_1 \cdot t$$

Continuons (le combat) !

$$M_3 = C_3 + I_3 = C_3 + (C - 2C_1 - C_1 \cdot t) \cdot t = C_3 + C \cdot t - 2 \cdot C_1 \cdot t - C_1 \cdot t^2$$

Mais comme on veut $M_3 = M_1$, il faut

$$C_3 + C \cdot t - 2 \cdot C_1 \cdot t - C \cdot t^2 = C_1 + C \cdot t$$

d'où

$$C_3 = C_1 + C \cdot t - C \cdot t + 2 \cdot C_1 \cdot t + C_1 \cdot t^2 = C_1(1 + 2 \cdot t + t^2)$$

ou encore

$$C_3 = C_1 \cdot (1 + t)^2$$

Il reste alors à rembourser

$$C - 2 \cdot C_1 - C_1 \cdot t - C_1 \cdot (1 + t)^2 = C - 2 \cdot C_1 - C_1 \cdot t - C_1 - 2 \cdot C_1 \cdot t - C_1 \cdot t^2$$



soit

$$C - 3 \cdot C_1 - 3 \cdot C_1 \cdot t - C_1 \cdot t^2$$

De même, on a $M_4 = C_4 + I_4$. En appliquant le même type de calculs que précédemment, on obtient $C_4 = C_1 \cdot (1+t)^3$ et, à la fin,

$$C_d = C_1 \cdot (1+t)^{d-1}$$

Comme vous pouvez le constater, nous avons utilisé les produits remarquables. Cela montre qu'ils ne sont certainement pas inutiles !

Peut-être pensez-vous que tout cela ne vous donne pas satisfaction car vous ne connaissez toujours pas C_1 .

C'est vrai mais ... rappelez-vous que toutes les parts de capital remboursées doivent reformer ensemble le capital emprunté.

Dès lors, on a

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \cdots + C_d = C$$

ou encore

$$C_1 + C_1 \cdot (1+t) + C_1 \cdot (1+t)^2 + C_1 \cdot (1+t)^3 + \cdots + C_1 \cdot (1+t)^{d-1} = C$$

donc

$$C_1 \cdot (1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^{d-1}) = C$$

Or

$$1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \cdots + (1+t)^{d-1} = \frac{(1+t)^d - 1}{(1+t) - 1}$$

car c'est de la forme $\frac{a^d - 1}{a - 1}$ qui vaut $a^{d-1} + \cdots + a^3 + a^2 + a + 1$ (avec ici, $a = 1+t$).

Si vous n'avez pas encore rencontré cette formule, retenez-la car elle est souvent utile.

D'où il vient :

$$C_1 \frac{(1+t)^d - 1}{t} = C \text{ ou } C_1 = \frac{Ct}{(1+t)^d - 1}.$$

Est-ce que vous tenez le coup ?

Maintenant, nous pouvons calculer le montant de la mensualité M puisque elle est égale à M_1 .

On a :

$$M_1 = C_1 + C \cdot t = \frac{C \cdot t}{(1+t)^d - 1} + C \cdot t = \frac{Ct(1+t)^d}{(1+t)^d - 1}$$

En fait c'est, écrite sous une autre forme, la formule donnée par la banque. Vous pouvez le vérifier ... s'il vous reste un peu de tonus.

Exemple : La publicité reproduite annonce qu'un prêt de 1 000 000 à un TAEG de 12% est remboursable en 84 mensualités de 17 326. (On suppose qu'on s'exprime en BEF). Appliquons les formules que nous avons trouvées.



$$\begin{aligned}
 T &= 12\% = 0,12 \\
 t &= (1 + 0,12)^{1/12} - 1 = 0,009488\dots \text{ (calculatrice)} \\
 C_1 &= \frac{1\,000\,000 \times 0,009488\dots}{(1 + 0,009488\dots)^{84} - 1} \text{ (application de la formule)} \frac{C \cdot t}{(1 + t)^d - 1} \\
 &= 7838,\dots \\
 I_1 &= 1\,000\,000 \times 0,009488\dots = 9\,488,\dots
 \end{aligned}$$

Dès lors $M = M_1 = 7838 + 9\,488 = 17\,326$. C'est bien le montant annoncé (heureusement, n'est-ce pas?).

Quelques calculs supplémentaires vous permettront d'obtenir C_n et I_n pour n situé entre 1 et d inclus. Un ordinateur devrait pouvoir écrire des tables de mensualités en précisant les parts de capital et d'intérêt comprises dans chacune d'elles. Mais cela je vous le laisse faire complètement, pour occuper vos loisirs !

Voici les dix premières lignes d'une table (obtenue en utilisant un tableur) donnant l'évolution du remboursement du capital (C_i) et des intérêts payés (I_i), pour le cas du prêt de l'exemple. Vous remarquerez que l'emploi d'un ordinateur permet d'effectuer des calculs très précis.

TAEG	TMEG	C	D
0,12	0,009488793	1 000 000	84
I	M_i	C_i	I_i
1	17 326,35687	7 837,563934	9 488,792935
2	17 326,35687	7 911,932956	9 414,423913
3	17 326,35687	7 987,007649	9 339,349220
4	17 326,35687	8 062,794711	9 263,562158
5	17 326,35687	8 139,300900	9 187,055969
6	17 326,35687	8 216,533041	9 109,823828
7	17 326,35687	8 294,498022	9 031,858847
8	17 326,35687	8 373,202796	8 953,154073
9	17 326,35687	8 452,654384	8 873,702485
10	17 326,35687	8 532,859871	8 793,496998

Quelques compléments pour ceux qui ne se sont pas totalement effondrés (Vous pouvez choisir l'unité monétaire utilisée !)

1 000 000 sont donc remboursés en 84 mensualités de 17 326. Le remboursement total est de $84 \times 17\,326$ soit 1 455 384. Le prêt vous a alors coûté 455 384 au total (c'est la somme de tous les intérêts payés) soit donc, en moyenne, pour chaque mois : $\frac{455\,384}{84} = 5\,421,\dots$ Cette somme est appelée **chargement mensuel**.

Les organismes financiers font souvent référence au taux de chargement. C'est, exprimé en un pourcentage, le rapport entre le chargement mensuel et le capital emprunté. Dans le cas de l'exemple, le taux de chargement est donc $\frac{5\,421}{1\,000\,000}$ soit 0,005421 ou encore 0,54...%.



Comment se répartissent les nombres premiers ?

Gérald Troessaert, Institut Supérieur Industriel à Arlon

Un nombre premier est un nombre naturel qui possède exactement deux diviseurs. Classés en ordre croissant, les premiers nombres premiers sont

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Un nombre composé est un nombre qui peut être factorisé en nombres naturels différents de 1, par exemple,

$$74 = 2 \cdot 37, \quad 144 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Le nombre 1 n'est ni premier ni composé.

L'ensemble des nombres premiers est donc inclus dans l'ensemble \mathbb{N} des nombres naturels mais, ... comment sont-ils répartis dans cet ensemble ? Cette question est très complexe et loin d'être résolue mais les mathématiciens ont obtenu quelques résultats surprenants.

Nous allons envisager trois aspects de la répartition des nombres premiers parmi les nombres naturels : l'existence d'intervalles dont on sait qu'ils contiennent au moins un nombre premier, l'existence d'intervalles dont on sait qu'ils ne contiennent pas de nombres premiers et enfin le lien entre les nombres premiers et les suites arithmétiques.

Intervalles comprenant des nombres premiers

Avant de découvrir ceux-ci, introduisons la notation $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ où $n!$ se lit « factorielle de n ». Par exemple : $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer un premier théorème :

Le plus petit diviseur du nombre $N = n! + 1$ est un nombre premier plus grand que n .

En effet, appelons p le plus petit diviseur de N . On a $p > n$ car $n! + 1$ n'est pas divisible par $2, 3, 4, \dots, n$. D'autre part, si on suppose que p est un nombre composé, alors p n'est pas le plus petit diviseur de $n! + 1$ puisqu'il a lui-même des diviseurs. On peut donc dire que p est un nombre premier plus grand que n .

De ce théorème, on peut conclure que chaque intervalle $[n, n! + 1]$ contient au moins un nombre premier. Les nombres

$$2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, ((2! + 1)! + 1)! + 1, \dots$$

définissent donc une partition des nombres entiers en intervalles qui contiennent chacun au moins un nombre premier. Comme on construit ainsi une infinité d'intervalles disjoints, on a aussi prouvé qu'il existe une infinité de nombres premiers. Ce résultat est très ancien et le mathématicien grec EUCLIDE (III^e siècle avant J.-C.) en a donné une démonstration très élégante (voir Math-Jeunes n° 84).

Il existe de nombreuses autres façons de partager l'ensemble des nombres naturels en intervalles contenant chacun au moins un nombre premier. Ainsi, il apparaît que chacun des intervalles

$$[2, 4], [4, 8], [8, 16], [16, 32], [32, 64], \dots, [2^n, 2^{n+1}], \dots$$

contient au moins un nombre premier. Ce résultat est difficile à prouver, il est une conséquence d'un théorème datant de 1845 et connu sous le nom de « Postulat de BERTRAND ». Ce théorème, qui s'énonce :

Pour $n > 7$, il existe au moins un nombre premier entre n et $2n - 2$.

a été démontré en 1852 par le célèbre mathématicien russe TCHEBYCHEV (1821 – 1894).

Intervalles ne contenant pas de nombres premiers

On peut aussi s'intéresser au problème inverse, l'existence d'intervalles qui ne contiennent pas de nombre premier.

Ainsi, par exemple, les mille nombres successifs

$(1001)! + 2, (1001)! + 3, (1001)! + 4, \dots, (1001)! + 1001$

sont tous composés. Le premier est divisible par 2, le deuxième par 3, ..., le millième est divisible par 1 001.

Il est clair que l'on peut reproduire cet exemple avec un million, un milliard, ..., de nombres successifs. Cette méthode permet donc de construire des intervalles arbitrairement longs ne contenant aucun nombre premier.

Nombres premiers et suites arithmétiques

Considérons l'ensemble infini de nombres

$2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$

Chaque nombre est obtenu à partir du précédent en ajoutant 3. Un tel ensemble est appelé *suite arithmétique de raison 3*. Ces nombres peuvent être représentés par les formules

$$3n + 2 \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ou } 3n - 1 \text{ avec } n \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons qu'il y a une infinité de nombres premiers dans cet ensemble. Considérons le nombre

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p - 1,$$

produit des premiers nombres premiers auquel on retire 1. Ce nombre appartient à la suite

arithmétique définie ci-dessus car c'est un multiple de 3 moins 1. Le nombre M n'est pas divisible par les nombres $2, 3, \dots, p$. Alors, soit M est premier, soit M possède des facteurs premiers plus grands que p . Ces facteurs premiers sont de la forme $3k+1$ ou $3k+2$ (ils ne peuvent pas être multiples de 3). Supposons que tous les facteurs premiers soient de la forme $3k+1$, alors M serait de la forme $3k+1$ car le produit de deux multiples de 3 plus 1 est un multiple de 3 plus 1, ce qui est contradictoire. Il s'ensuit que le nombre M a au moins un facteur premier de la forme $3k+2$ inclus dans l'intervalle $[p, M]$. On en déduit qu'il y a un nombre infini de premiers de la forme $3k+2$.

Ce résultat est un cas particulier du théorème suivant, formulé par le mathématicien français LEGENDRE (1752 – 1833) en 1788 et démontré par le mathématicien allemand DIRICHLET (1805 – 1859) en 1837 :

Toute suite arithmétique infinie $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$ dans laquelle le premier élément a est premier avec la raison d contient une infinité de nombres premiers.

Rappelons que deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de diviseurs communs (sauf 1 évidemment).

La preuve de Dirichlet est très difficile. En 1949, le mathématicien danois A. SELBERG a publié une autre preuve beaucoup plus simple mais néanmoins trop complexe pour être présentée ici.

Le mathématicien hongrois P. ERDÖS (1913 – 1996) a soulevé le problème suivant :

L'ensemble des nombres premiers contient-il des suites arithmétiques de longueur quelconque ?

Ce problème est un problème ouvert (un problème que les mathématiciens n'ont pas encore résolu). En 1998, le mathématicien Tim GOWERS de l'Université de Cambridge



a reçu la médaille Fields (le « Prix Nobel » des mathématiciens) notamment pour avoir fait un premier pas dans la résolution du problème posé par Erdős. Il a montré que si N est suffisamment grand, chaque sous-ensemble de δN nombres, où $\delta \in]0, 1[$ est une densité fixée *a priori*, contient au minimum une suite arithmétique de quatre termes.

Le chemin pour résoudre le problème général est encore long.

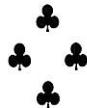
Pour terminer, voici quelques problèmes liés aux notions rencontrées dans cet article.

1. (a) Calculer $20!$
(b) Combien y a-t-il de chiffres 0 à la fin du nombre 2000 ?
2. Trouver toutes les paires de nombres premiers dont la différence vaut 17.
3. Prouver que le produit de deux nombres de la forme $3k + 1$ est un nombre de la forme $3k + 1$.
4. En utilisant le « *postulat de Bertrand* », prouver que pour tout naturel n
 - (a) il y a au moins un nombre premier contenant n chiffres
 - (b) il y a au moins trois nombres premiers contenant n chiffres.
5. Trouver le plus petit nombre premier qui est le cinquième terme d'une suite arithmétique croissante, les quatre termes précédents de la suite étant aussi premiers. (AIME 99, question 1)
6. (plus difficile) Prouver que si p divise $(p-1)!+1$ alors p est un nombre premier.
7. (plus difficile) En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p n'appartenant pas à une paire de nombres premiers (q, r) tels que $r = q + 2$.

Références

- G.A. Galperin, *Prime time*, Quantum, Volume 9, number 3, January/February 1999.

- W. Sierpinsky, *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, Editions Jacques Gabay.
- *Lignes de billes, perspectives scientifiques*, Pour la Science n° 257, mars 1999



Le mot à retrouver était PROBABILITE.

Cette famille comporte 3 filles et 4 garçons soit un total de 7 enfants.

Un problème familial

4-A, 5-B, 6-B, 7-A, 8-A, 9-B, 10-B

Les écritures correctes sont : 1-B, 2-B, 3-A,

Le coin du bon langage

Peut-être en avez-vous trouvé (au moins) une

A 6x10 grid of 60 empty square boxes for handwriting practice. The grid is labeled with 'P', 'F', and 'E' at the top and left edges. The 'P' label is at the top left, 'F' is at the top right, and 'E' is at the left edge. The grid is composed of 6 rows and 10 columns of squares.

Voici une solution en 5 opérations
jeu d'argent

Solutions des jeux

Le dodécaèdre rhombique (2)

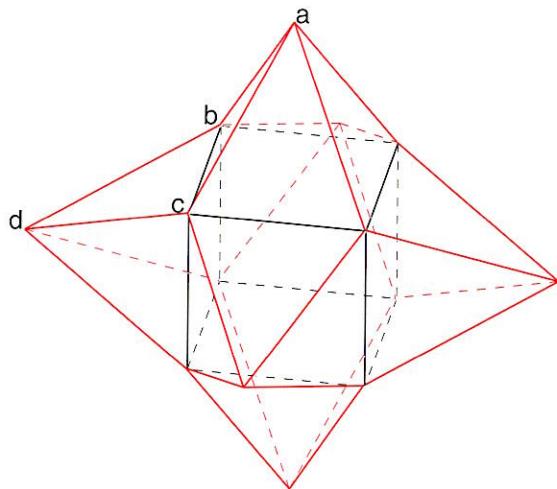
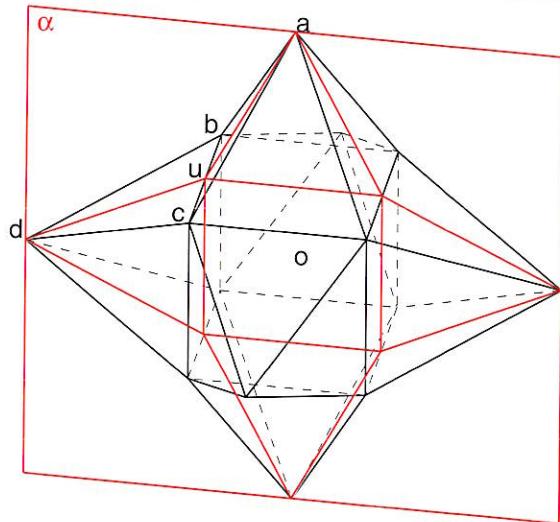
Guy Noël, *Université de Mons-Hainaut*



Avez-vous trouvé les réponses aux questions posées à la fin de l'article précédent ? Comparez-les aux nôtres. Notre méthode pour les trouver n'est pas nécessairement celle que vous avez employée. Mais les résultats doivent être les mêmes. Reprenons chacune des questions.

Première question

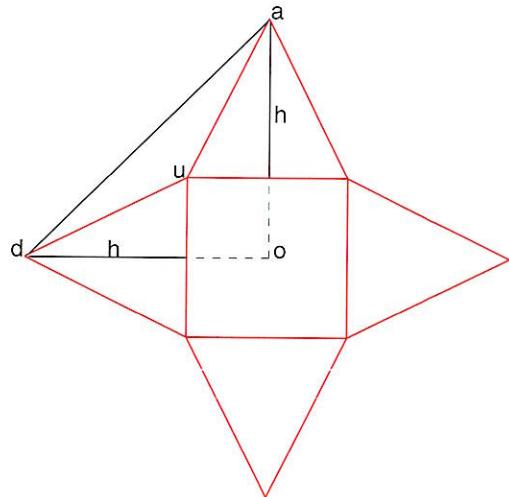
Admettons que les arêtes du cube soient de longueur 2 unités. Combien vaut la hauteur h de chacune des pyramides, pour que le quadrilatère $abdc$ soit plan ?



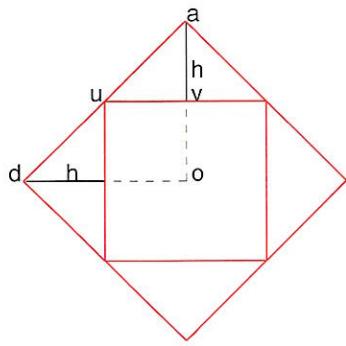
Le quadrilatère $abdc$ est plan si et seulement si ses diagonales se coupent. Et dans ce cas, c'est un losange (toutes les pyramides ont même base et même hauteur donc toutes leurs arêtes latérales ont même longueur), et les diagonales $[ad]$ et $[bc]$ se coupent en leur milieu.

Traçons la section du polyèdre formé du cube et des six pyramides par le plan α passant par le centre du cube (que nous noterons o), et les points a et d .

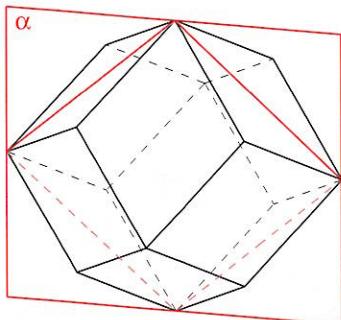
Le point u est le milieu du segment $[bc]$. Nous devons choisir la hauteur h des pyramides de façon que ce point appartienne au segment $[ad]$. Voici la section en vraie grandeur :



Quelle que soit la valeur de h , le triangle aod est rectangle et isocèle. Il n'est alors pas difficile de faire en sorte que le point u appartienne à $[ad]$:



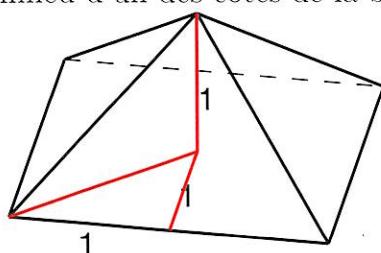
Puisque u est le milieu de $[ad]$, v est le milieu de $[ao]$ (théorème de Thalès). Et puisque les arêtes du cube sont de longueur 2, on $|ov| = h = 1$. Remarquons au passage que la section du dodécaèdre rhombique par le plan α est un carré.



Deuxième question

Quelle est la longueur des arêtes du dodécaèdre rhombique ?

Les 24 arêtes du dodécaèdre sont les arêtes latérales des six pyramides. Nous savons déjà que chacune de celles-ci est de hauteur 1. Leurs bases sont des carrés de côté 2. Dessinons l'une de ces pyramides, et joignons le pied de la hauteur au milieu d'un des côtés de la base.

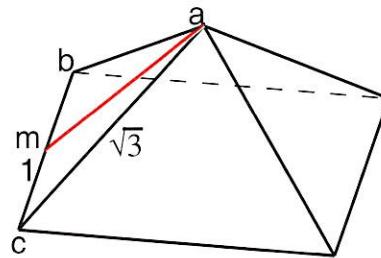


Deux applications successives du théorème de Pythagore montrent que l'arête du dodécaèdre est de longueur $\sqrt{3} = 1,732\dots$

Troisième question

Combien mesurent les angles des losanges ?

Notons m le milieu de l'arête $[bc]$ et examinons la figure suivante :



Vu les formules de trigonométrie des triangles rectangles, nous pouvons affirmer

$$|mc| = |ac| \cdot \sin \widehat{mac}$$

Donc

$$\sin \widehat{mac} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et

$$\cos \widehat{bac} = 1 - 2 \sin^2 \widehat{mac} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

N'importe quelle calculatrice scientifique fournit alors pour \widehat{bac} la valeur, (arrondie au millième de degré) $70,529^\circ$. (Attention, ce sont des degrés décimaux, non des degrés-minutes-secondes.) Les angles obtus des losanges sont les supplémentaires des angles aigus : au millième de degré près, ils mesurent $109,471^\circ$.

Quatrième question

Introduisez judicieusement un système d'axes, et calculez les coordonnées de tous les sommets du dodécaèdre.

Le dodécaèdre rhombique étant construit à partir d'un cube, nous allons choisir un système d'axes qui y soit adapté : nous plaçons l'origine au centre du cube et choisissons des axes parallèles aux arêtes de ce cube. Celles-ci étant de longueur 2, les huit sommets du cube (ce sont aussi des sommets du dodécaèdre) sont les points de coordonnées

$$(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$$

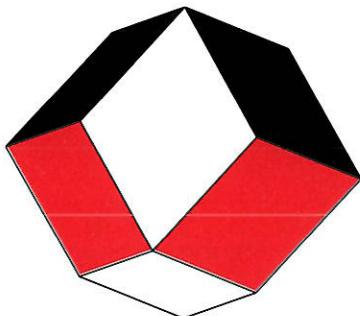
Les six autres sommets du dodécaèdre sont les sommets des six pyramides. Puisque $h = 1$, ce sont les points

$$(0, 0, 2), (0, 2, 0), (2, 0, 0), (0, 0, -2), (0, -2, 0), (-2, 0, 0)$$

Parmi ces sommets, on retrouve les points a $(0, 0, 2)$, b $(-1, -1, 1)$ et c $(-1, 1, 1)$.

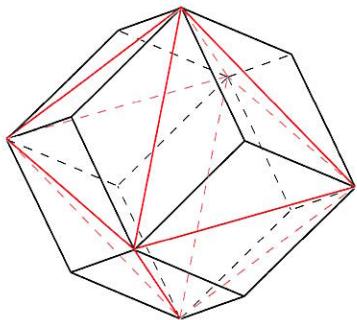


Nous avons vu plus haut que la section du dodécaèdre rhombique par le plan α est un carré. Les côtés de ce carré sont les grandes diagonales d'une chaîne de quatre faces n'ayant aucune arête commune, mais se touchant en des sommets d'angles aigus. Observons qu'il existe trois chaînes de ce type. Sur la figure suivante, les faces du dodécaèdre sont opaques. Seules six faces sont visibles. Les faces d'une même chaîne sont coloriées de la même couleur.

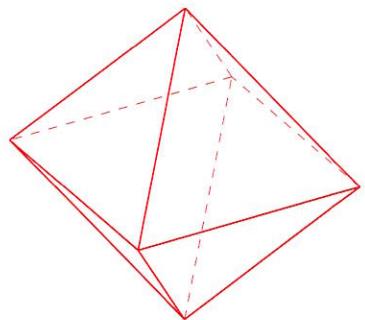


Les sommets des angles obtus sont communs à trois faces, une de chaque couleur, les sommets des angles aigus appartiennent à quatre faces, de deux couleurs différentes.

Représentons à nouveau le dodécaèdre en vu et caché et traçons les grandes diagonales des faces en rouge.



Effaçons les arêtes du dodécaèdre.



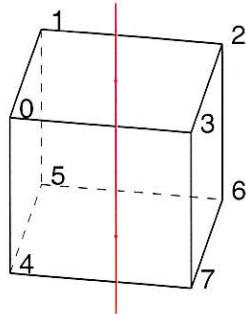
Un nouveau polyèdre apparaît. Il comporte 12 arêtes, comme le cube. Mais il a 8 faces et 6 sommets alors que le cube a 8 sommets et 6 faces. Puisqu'il a 8 faces, ce polyèdre est appelé un octaèdre. Et puisque toutes ses faces sont des polygones réguliers (dans ce cas des triangle équilatéraux), et qu'il y en a le même nombre en chaque sommet, on dit que c'est un octaèdre régulier

Remarquez que le dodécaèdre rhombique n'est pas un polyèdre régulier : ses faces ne sont pas des polygones réguliers. De plus, il n'y en a pas le même nombre en chaque sommet.

Nous avons vu qu'à partir du dodécaèdre rhombique, nous pouvons retrouver un cube en traçant les petites diagonales des faces, et un octaèdre en traçant les grandes diagonales. Le cube et l'octaèdre ainsi construits sont *inscrits* au dodécaèdre rhombique. Ces trois polyèdres appartiennent à une même famille : ils ont beaucoup de choses en commun. Par exemple, certains sommets du dodécaèdre sont des sommets du cube : ceux qui appartiennent à quatre losanges ; les autres sont des sommets de l'octaèdre : ceux qui n'appartiennent qu'à trois losanges.

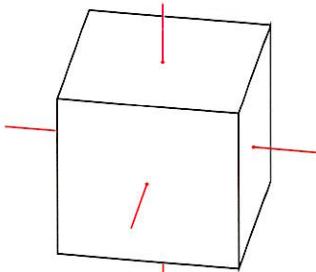
Mais ce qui sert souvent à classer les polyèdres, ce sont les symétries et les rotations qui les conservent. Qu'est-ce que cela veut dire ?

Regardez un cube :

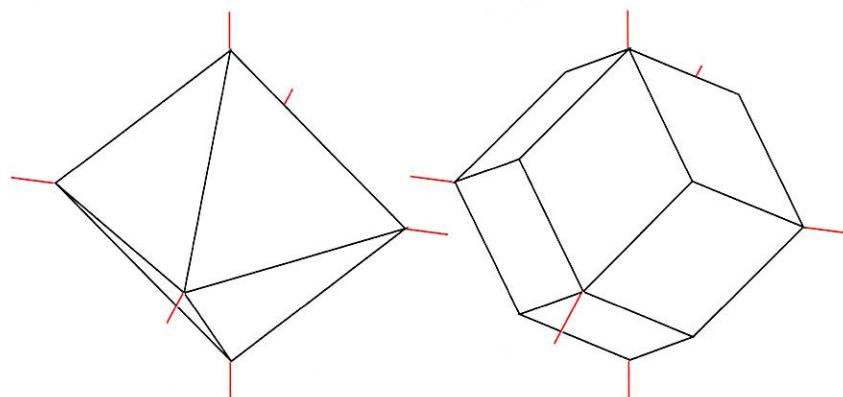


Une des deux rotations de 90° autour de l'axe présent sur la figure applique le sommet 1 sur le sommet 0, le sommet 0 sur le sommet 3, le sommet 3 sur le sommet 2, ... et finalement, elle applique le cube sur lui-même. On dit que cette rotation *conserve* le cube. De plus en effectuant la même rotation quatre fois, tous les points reviennent à la position de départ : c'est une rotation d'ordre 4, et l'axe de la rotation est appelé un axe d'ordre 4.

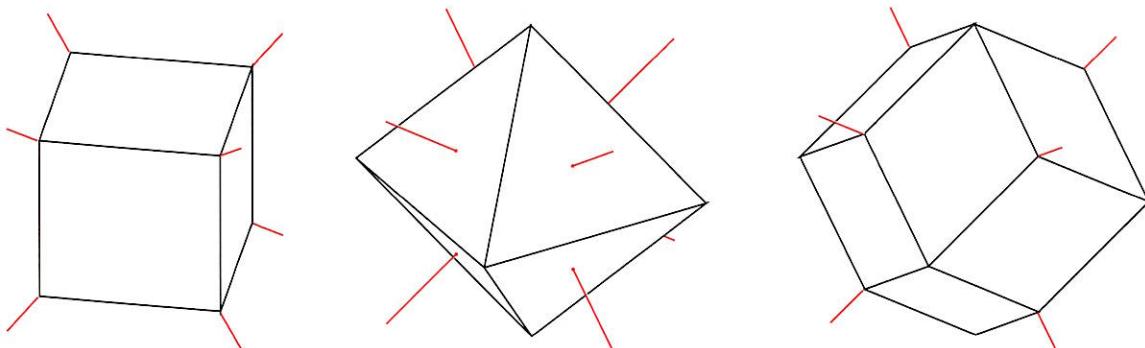
Un cube possède 3 axes d'ordre 4 :



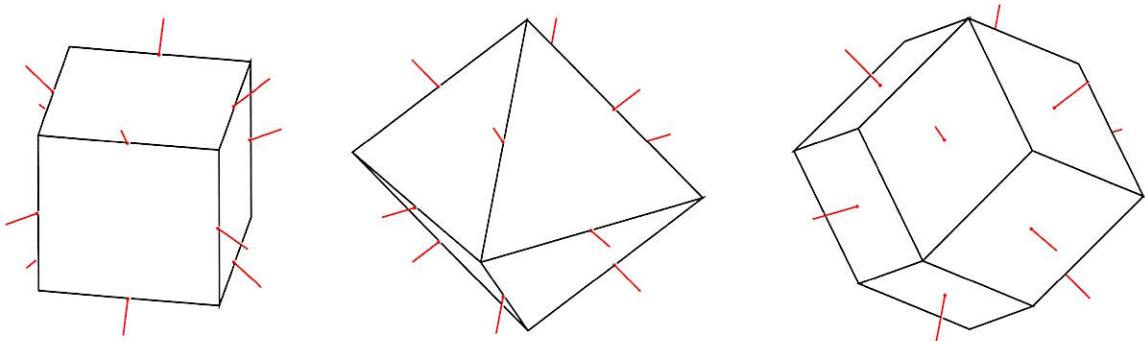
L'octaèdre régulier et le dodécaèdre rhombique possèdent les mêmes axes d'ordre 4 :



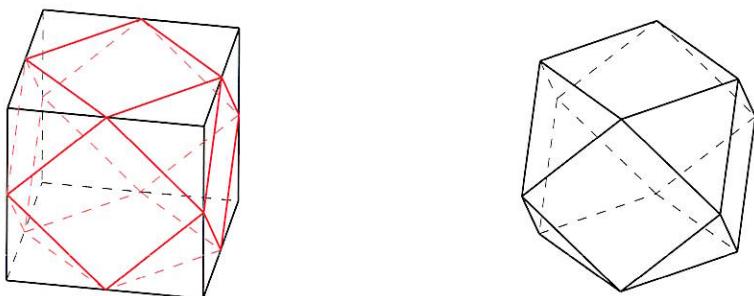
Le cube, l'octaèdre régulier et le dodécaèdre rhombique ont également les mêmes axes d'ordre 3 ...



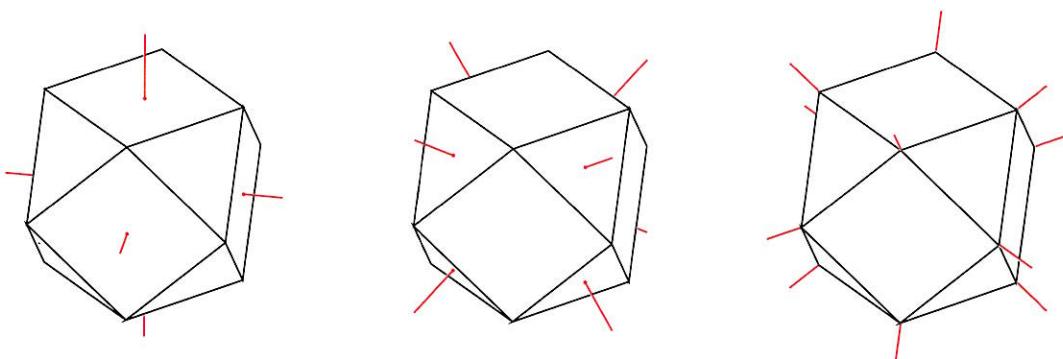
... et les mêmes axes d'ordre 2



Nous dirons que ces trois polyèdres ont le même *groupe de rotations*. Il en est d'autres ayant aussi le même groupe. Par exemple, le *cuboctaèdre* est obtenu en joignant les milieux des arêtes d'un cube.



Voici ses axes de rotation :



Un dernier mot à propos du dodécaèdre rhombique : il peut servir à « paver l'espace ». Mais ceci est une autre histoire...

Pour terminer, nous vous proposons d'étendre les résultats obtenus au cas où, au lieu de coller des pyramides sur un cube, on les colle sur un parallélépipède rectangle quelconque. Pour fixer les idées, on notera $2u$, $2v$ et $2w$ les longueurs des arêtes de ce parallélépipède. Les pyramides ne doivent plus nécessairement avoir toutes la même hauteur, mais on voudrait qu'elles permettent encore de construire un dodécaèdre, en se regroupant deux par deux. Sous quelles conditions est-ce possible ? Quelles sont les rotations qui conservent le dodécaèdre ? Ses faces sont-elles encore des losanges isométriques ? Combien mesurent les angles ?

Rédigez soigneusement vos résultats et envoyez-les à la rédaction. Les meilleurs textes reçus seront publiés.



Simone Trompler

Daniel BERNOULLI (1700–1782)



Il y a 300 ans, Daniel BERNOULLI naissait à Groningen. La famille Bernoulli est peut-être la famille la plus célèbre dans l'histoire des mathématiques par le nombre de mathématiciens qu'elle comprend et l'importance des travaux accomplis. Cette famille vient d'Espagne, s'installe à Anvers mais fuit le duc d'Albe en 1583, pour vivre dorénavant en Suisse, à Bâle.

A partir de Nicolaus, fils, petits-fils et arrières petits-fils partagent le même enthousiasme pour les mathématiques. Cette situation créera d'ailleurs des rivalités et des brouilles familiales. Les trois plus célèbres d'entre eux sont : Jakob I (1634-1705), son frère Johann I (1667-1748) et le fils de celui-ci, Daniel. Johann était très opposé à l'idée que Daniel fasse carrière en mathématique et il l'envoya étudier la médecine à l'université de Bâle. Da-

niel devint médecin mais s'intéressa surtout à l'application de la mathématique physique en médecine (par exemple le mécanisme de la respiration).

Parti à Venise pour étudier la médecine pratique, il devint gravement malade et dut renoncer à poursuivre ses études médicales. Il en profita pour se consacrer aux mathématiques et écrivit un livre « *Exercices mathématiques* ». On y voit déjà son intérêt pour le calcul des probabilités. Ce livre lui procura la gloire et on lui offrit une chaire de mathématiques à Saint-Petersbourg, en 1725. Son frère Nicolaus II obtint aussi un poste dans cette ville mais il mourut peu de temps après.

En 1727, le grand mathématicien Euler arriva à Saint-Petersbourg et les deux hommes collaborèrent jusqu'en 1733, date à laquelle Daniel quitta Saint-Petersbourg. Cette période fut la plus féconde de sa vie : il étudia les mouvements des cordes musicales, travailla sur le calcul des probabilités et l'économie politique et surtout, écrivit un livre « *Hydrodynamica* » qui est le fondement de l'hydrodynamique théorique. Après Saint-Petersbourg, il voyagea dans divers pays et retourna à Bâle en 1734. Il gagna dix fois le Grand Prix de l'Académie de Paris pour des sujets d'astronomie et de navigation ! Il fut très honoré de son vivant.

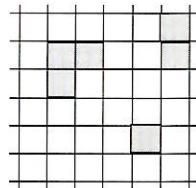
Sources

- L. Geymonat, *Storia del pensiero scientifico*, Ed. Garzanti.
- D.M.Burton, *The History of mathematics*, 1997.
- Internet :
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Mathematicians/>

Le jeu de la vie

C. FESTRAETS, A.R. WOLUWÉ-ST-PIERRE

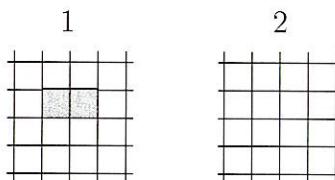
Ce jeu, inventé par le mathématicien John Conway, est une simulation de la vie, la mort, la reproduction des cellules. Il se joue sur une grille comme celle dessinée ci-contre, où chaque case représente une cellule, celles qui sont colorées sont des cellules vivantes, les autres sont mortes.



L'ensemble des cellules vivantes est appelé la population. Chaque cellule est entourée par 8 autres cellules (mortes ou vivantes), ce sont ses voisines. Deux cellules voisines se touchent donc soit par un bord, soit par un sommet. Au cours du temps, la population évolue, certaines cellules meurent, d'autres naissent. Les règles qui régissent cette évolution sont simples, les voici.

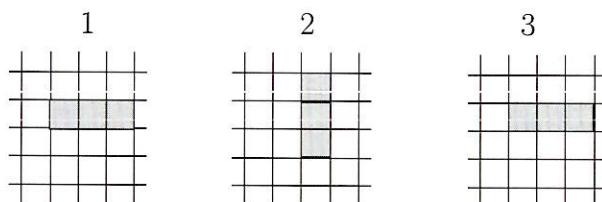
1. Si une cellule vivante a 2 ou 3 voisines vivantes, elle reste en vie à la génération suivante.
2. Si une cellule vivante a 0 ou 1 voisine vivante, à la génération suivante, elle meurt par isolement.
3. Si une cellule vivante a au moins 4 voisines vivantes, à la génération suivante, elle meurt par surpeuplement.
4. Si une cellule morte a exactement 3 voisines vivantes, à la génération suivante, une cellule vivante naît et remplace la cellule morte.

Exemple 1



À la première génération, il y a deux cellules vivantes, chacune d'elles n'a qu'une seule voisine vivante, donc elles meurent ; aucune cellule morte n'a 3 cellules voisines vivantes, il n'y a aucune naissance. À la seconde génération, toutes les cellules sont mortes.

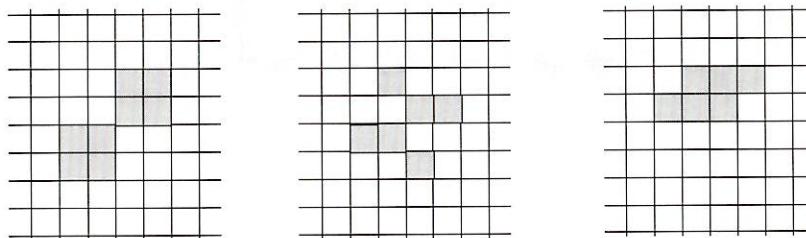
Exemple 2



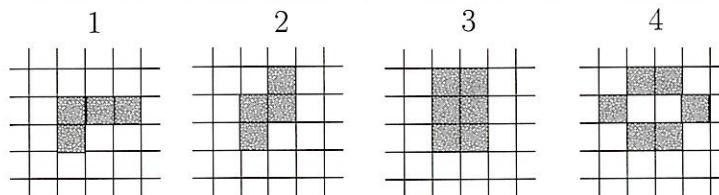
À la première génération, la cellule vivante centrale a deux voisines vivantes, à la deuxième génération, elle reste vivante. Les deux autres cellules vivantes n'ont chacune qu'une seule voisine vivante, à la deuxième génération, elles meurent. Mais il y a aussi deux cellules mortes qui ont trois cellules voisines vivantes, elles sont donc remplacées par des cellules vivantes. À la troisième génération, on retrouve le même schéma qu'à la première génération et bien



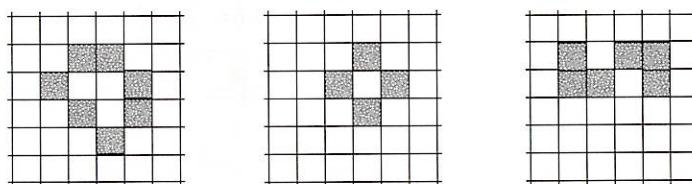
évidemment, les générations impaires seront toutes semblables à la première et les générations paires seront toutes semblables à la deuxième. Ce cycle de vie est dit périodique, de période 2. En voici d'autres.



Exemple 3

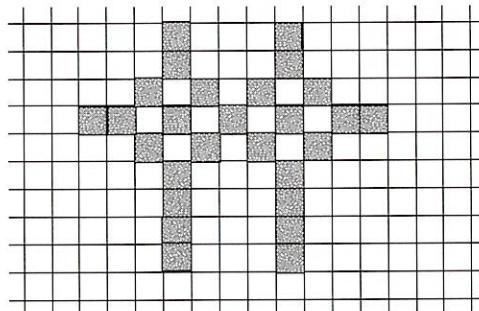
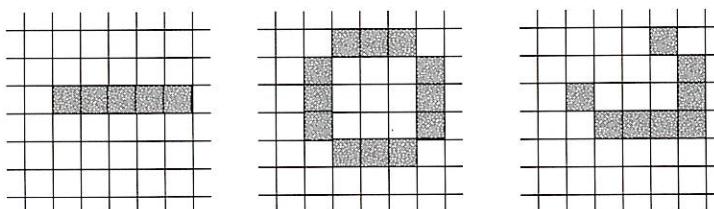


A la quatrième génération, chaque cellule vivante a deux voisines vivantes et aucune cellule morte n'a exactement trois voisines vivantes. Les générations suivantes seront similaires à la 4^e, la population est stable. Voici d'autres configurations où la population est stable :



Il en existe beaucoup d'autres, pouvez-vous en trouver quelques unes ?

Que deviennent les populations suivantes à la 5^e génération ?



Si ce jeu vous a intéressé et si vous disposez d'internet, vous pouvez charger gratuitement un logiciel qui permet de créer ses propres configurations et de voir comment elles évoluent génération après génération. En voici l'adresse : <http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html>.



RALLYE problèmes

C. Festraets

Voici les cinq derniers problèmes de ce rallye. N'oubliez pas de présenter vos solutions sur des feuilles séparées pour chaque problème et d'y indiquer vos nom, prénom, âge, classe, école et adresse personnelle. Soignez votre présentation. Bon courage ! Vos solutions doivent parvenir à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le **12 mai 2000** au plus tard.

11 — Le multimilliardaire

Ce multimilliardaire a sur son compte en banque une somme dont le montant est un très grand nombre (près de 50 chiffres!). Découvrant un des extraits de compte de leur père, les deux fils s'amusent à leur jeu habituel avec ce montant : l'un découpe le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite puis additionne tous les nombres de deux chiffres ainsi formés et annonce à son frère que le total est 2000, l'autre écrit le premier chiffre de droite, en soustrait le deuxième, ajoute le troisième, soustrait le quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier chiffre à gauche et fait alors deviner à son frère le résultat qu'il obtient. Sachant que ce résultat est un nombre positif d'un seul chiffre, pouvez-vous trouver lequel ?

12 — Les bougies

1. Jean a acheté 5 longues bougies. Il en fait brûler certaines chaque jour pendant une heure. Le premier jour, il fait brûler une seule bougie, le deuxième jour, il fait brûler deux bougies (bien choisies), le troisième jour, trois bougies (bien choisies), le quatrième jour, quatre bougies (bien choisies) et le cinquième jour, les cinq bougies. Est-il possible que les cinq bougies soient alors consumées exactement de la même manière ?
2. Et si Jean avait 6 bougies ?
3. Et si Jean avait n bougies ?

13 — Des sommes

1. Parmi les sommes suivantes :

$$1^2 + 2^2 + 3^2, 1^3 + 2^3 + 3^3, 1^4 + 2^4 + 3^4, 1^5 + 2^5 + 3^5, \dots$$

y en a-t-il qui sont divisibles par $1 + 2 + 3 = 6$?

2. Parmi les sommes suivantes :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2, 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3, 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4, 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5$$

y en a-t-il qui sont divisibles par $1 + 2 + 3 + 4 = 10$?



14 — Un curieux pays

Dans ce curieux pays, il n'y a que deux sortes de billets, ceux à x pesas et ceux à y pesas (le pesas est la monnaie du pays et en plus des billets, il y a aussi des pièces). Vous aimeriez aller visiter ce pays et vous allez vous renseigner à l'ambassade. Les employés ne sont pas de très bonne humeur ce jour-là et vous ne parvenez à leur extorquer que quelques indications :

- x et y sont strictement supérieurs à 30 ;
- 2000 est la plus grande valeur qui ne peut être obtenue au moyen des seuls billets ;
- si x et y sont premiers entre eux, alors la plus grande valeur qui ne peut être obtenue au moyen des billets est $xy - x - y + 1$.

De ces maigres renseignements pouvez-vous déduire les valeurs de x et y ?

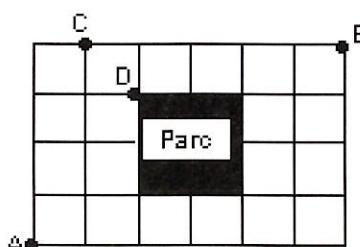
15 — Des triples pythagoriciens

Un triple de nombres naturels (a, b, c) est dit « pythagoricien » s'il satisfait l'équation $a^2 + b^2 = c^2$; si de plus a , b , c sont premiers entre eux, alors on dit que le triple est primitif.

1. Quels sont les triples pythagoriciens primitifs dont le premier élément est 15 ?
2. Combien y a-t-il de triples pythagoriciens primitifs dont le premier élément est 1 155 ?
3. N étant un nombre naturel impair admettant k diviseurs premiers, combien y a-t-il de triples pythagoriciens primitifs commençant par N ?

Solutions des problèmes 6 à 10

Solution du problème 6



Tous les trajets de A vers B qui passent au-dessus du parc passent soit par C , soit par D (et aucun trajet ne passe par ces deux points). Il y a 5 façons d'aller de A à C , et de là, une seule route pour rejoindre B , donc 5 routes de A à B passant par C . Il y a 10 façons d'aller de A à D , et de là, 5 routes pour rejoindre B , donc 50 routes de A à B passant par D . Ce qui nous donne 55 trajets passant au-dessus du parc. Ensuite, il y a le même nombre de trajets qui passent en dessous du parc. D'où le nombre total de trajets est 110.

Solution du problème 7

Sur une journée de 24 heures, les deux aiguilles d'une horloge forment un angle droit à 44 reprises. Cela se produit aux heures (approximatives) suivantes :

0h16, 0h49, 1h22, 1h55, 2h27, 3h, 3h33, 4h05, 4h38, 5h11, 5h44, 6h16, 6h49, 7h22, 7h55, 8h27, 9h, 9h33, 10h05, 10h38, 11h11, 11h44, 12h16, 12h49, 13h22, 13h55, 14h27, 15h, 15h33, 16h05, 16h38, 17h11, 17h44, 18h16, 18h49, 19h22, 19h55, 20h27, 21h, 21h33, 22h05, 22h38, 23h11, 23h44.



Le bon sens suffit pour déterminer ces différentes heures, tout au moins à quelques minutes près. Mais si on désire une précision plus grande, voici comment procéder.

Fixons l'origine du temps à minuit. En 1 heure, la grande aiguille tourne de 360° et la petite aiguille de $360^\circ/12 = 30^\circ$. En t heures, elles tournent respectivement de $t \cdot 360^\circ$ et $t \cdot 30^\circ$ et leur angle est, au bout de t heures, égal à $t \cdot 360^\circ - t \cdot 30^\circ = t \cdot 330^\circ$. Si les deux aiguilles forment alors un angle droit, on a soit $t \cdot 330^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, soit $t \cdot 330^\circ = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ (où k est un nombre entier). D'où les valeurs de t :

$$t = \frac{3}{11} + \frac{12}{11}k \quad \text{ou} \quad t = \frac{9}{11} + \frac{12}{11}k$$

On remplace k dans ces égalités par $0, 1, 2, \dots, 21$ (à partir de 22, t est plus grand que 24 et on dépasse les limites d'un journée) et on obtient les 44 valeurs :

$$t = \frac{3}{11}, \frac{9}{11}, \frac{15}{11}, \dots, \frac{361}{11}$$

Solution du problème 8

Montrons que l'on peut changer le signe d'un seul élément quelconque de A . Dans ce cas, il suffira de le faire pour chacun des éléments de A qui n'ont pas le même signe que l'élément correspondant de B , ce qui rendra finalement A identique à B .

- Soient x et y deux éléments choisis arbitrairement dans A et prenons dans A dix éléments distincts de x et de y . Changeons le signe de x et de ces 10 éléments, puis changeons le signe de y et de ces 10 éléments. Seuls x et y ont changé de signe, les 10 autres éléments ont repris leur signe initial.
- Soit a un élément quelconque de A . Adjoignons à a 10 autres éléments a_1, a_2, \dots, a_{10} et changeons le signe de ces 11 éléments. Puis en utilisant le procédé expliqué en (1), changeons le signe de a_1 et a_2 , de a_3 et a_4, \dots , de a_9 et a_{10} . En fin de compte, seul a aura changé de signe.

Solution du problème 9

$E = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\}$. On sait que $\frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ donc

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047$$

Tout nombre de 1 à 2047 est une somme d'éléments de E . Prenons un exemple.

- La plus haute puissance de 2 que l'on peut soustraire de 157 est 128, il reste $157 - 128 = 29$.
- La plus haute puissance de 2 que l'on peut soustraire de 29 est 16, il reste $29 - 16 = 13$.
- La plus haute puissance de 2 que l'on peut soustraire de 13 est 8, il reste $13 - 8 = 5$.
- La plus haute puissance de 2 que l'on peut soustraire de 5 est 4, il reste $5 - 4 = 1$.

Et on a $157 = 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$.



Solution du problème 10

Une des cinq baguettes doit couvrir un intervalle de la forme $]0, 1/x]$.

Pour $x = 10$, une baguette couvre 1,
la 2^e baguette couvre $1/2$,
la 3^e baguette couvre $1/3$ et $1/4$ car $1/3 - 1/4 = 1/12 < 1/10$,
la 4^e baguette couvre $1/5, 1/6, 1/7, 1/8$ et $1/9$ car $1/5 - 1/9 = 4/45 < 1/10$,
la 5^e baguette couvre l'intervalle $]0, 1/10]$.

Il est facile de vérifier que $x = 11$ ne convient pas, un au moins des points $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/10$ n'est pas couvert. D'où la plus petite longueur commune aux 5 baguettes et permettant de recouvrir tous les points $1, 1/2, 1/3, \dots$ est $1/10$.

Erratum

Dans le dernier numéro de *Math-Jeunes*, une malencontreuse erreur s'est glissée dans la solution du problème 2.

Nous donnons ci-dessous la résolution correcte.

Désignons par t le nombre de tables de 10 élèves, il y a deux ans. Le nombre d'élèves était alors $10t$. Soit n le nombre d'élèves de l'an dernier. On sait que

$$n > 10(t + 2), \quad n < 11t \quad \text{et} \quad n = 12(t - x)$$

où x est le nombre de tables enlevées par l'économe. D'où

$$\begin{aligned} 12t - 12x &> 10t + 20 & \text{et} & & 12t - 12x &< 11t \\ 2t &> 12x + 20 & & & t &< 12x \\ t &> 6x + 10 & & & & \end{aligned}$$

De là

$$6x + 10 < t < 12x \tag{1}$$

et donc $6x + 10 < 12x$ ou $x > 5/3$.

Cette année, le nombre d'élèves est $10t$ et on a $10t > 12(t - x - 2)$ et $10t < 11(t - x)$. D'où

$$\begin{aligned} 2t &< 12x + 24 \\ t &< 6x + 12 \\ \text{et } t &> 11x \end{aligned}$$

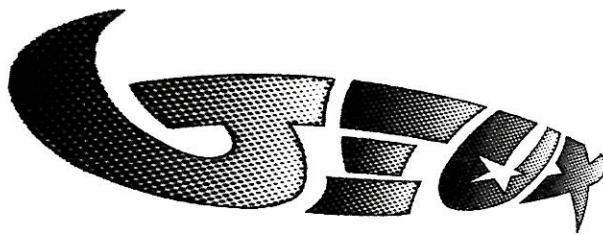
De là

$$11x < t < 6x + 12 \tag{2}$$

et donc $11x < 6x + 12$ ou $x < 12/5$.

La seule valeur entière de x satisfaisant $x > 5/3$ et $x < 12/5$ est $x = 2$. Dans ce cas, les inégalités 1 et 2 deviennent $22 < t < 24$, ce qui donne $t = 23$. Il y a deux ans, il y avait $10 \times 23 = 230$ élèves ; l'an dernier, il y avait $12(23 - 2) = 252$ élèves et cette année, il y a de nouveau 230 élèves.





Tonton C

Jeu d'argent

Dix pièces sont alignées sur un support qui peut en porter 12. Les 5 premières sont tournées côté face (F) vers le haut et les 5 dernières côté pile (P) vers le haut.

F | F | F | F | F | P | P | P | P | P |

Vous pouvez **amener** 2 pièces contiguës, sans les permuter ni les retourner, dans deux emplacements libres.

Trouvez le plus petit nombre de telles opérations qui fournisse une suite de pièces alternant les côté F et P.

Le coin du bon langage

Quelle est l'écriture correcte ? A ou B ?

	A	B
1	Un équerre	Une équerre
2	L'hypothénuse	L'hypoténuse
3	Un hémisphère	Une hémisphère
4	Un abaque	Une abaque
5	Une absisse	Une abscisse
6	Un algorythme	Un algorithme
7	Une bissectrice	Une bissextrice
8	Un cylindre	Un cilyndre
9	Un paraléllogramme	Un parallélogramme
10	L'équipotence	L'équipollence

Un problème familial

Eric dit : « J'ai autant de sœurs que de frères ».

Solange, sa sœur, dit : « J'ai deux fois plus de frères que de sœurs ».

Combien y a t-il d'enfants dans cette famille ?

Le mot caché

Retrouvez les mots donnés, dans la grille, en serpentant horizontalement ou verticalement en tous sens mais pas en oblique. Chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le mot caché. Quel est-il ?

Mots à composer : CATEGORIE, CHANCE, CONDITIONNEL, EPREUVE, EVENEMENT, IMPOSSIBLE, INCERTITUDE, LANCER, PERMUTATION, REUSSITE.

B	I	C	E	C	N	C	N	A	L
A	L	O	N	D	A	H	C	I	M
B	I	T	E	I	T	I	E	R	P
O	R	P	I	T	E	O	S	S	O
R	I	S	S	E	V	N	I	B	L
O	E	U	E	N	E	N	E	L	E
G	R	E	D	E	M	E	P	E	R
E	T	A	U	T	I	N	T	U	M
P	E	C	E	R	T	I	A	T	N
R	E	U	V	E	C	N	T	I	O



Nadine Joelants, Athénée Royal de Mons I, Université de Mons-Hainaut

Vous avez dit « .be » ?

Eh oui, hissez les drapeaux tricolores, nous allons parler d'un site belge !

Rendez-vous à l'adresse suivante :

<http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/>

Xavier HUBAUT, le concepteur, est professeur à l'Université Libre de Bruxelles et, si l'on en croit sa dédicace en début de site, père d'une famille nombreuse. C'est dire s'il a à cœur de donner le goût des mathématiques aux jeunes. Le titre du site est d'ailleurs évocateur : « Mathématique du secondaire ».

Pour la présentation, la sobriété est de rigueur, l'accent étant plutôt mis sur des articulations simples et efficaces. La table des matières ne dépaysera personne, elle se calque sur celle du célèbre explorateur conçu par les collaborateurs de ce bon vieux Bill, je veux parler de l'explorateur Windows.

Voici le menu principal :

Voici le détail du sous-menu « Polyèdres » :

Table des matières

- [Introduction](#)
- [Note technique](#)
- [Mathématique linéaire](#)
- [Second degré](#)
- [Complexes](#)
- [Polyèdres](#)
- [Analyse](#)
- [Statistique](#)
- [Varia](#)
- [Applications](#)
- [Vie courante](#)
- [En 3 dimensions](#)
- [Biographies](#)
- [Sites extérieurs](#)
- [Citations](#)
- [À domicile](#)
- [Envoyez-nous vos suggestions](#)

© Xavier Hubaut 1995-2000

Polyèdres

- [Polyèdres réguliers](#)
- [Polyèdres archimédiens](#)
- ["Snub" polyèdres](#)
- [Kaléidoscope plan](#)
- [Kaléidoscope sphérique](#)
- [Pavages réguliers du plan](#)
- [Pavages de la sphère](#)
- [M.C. Escher](#)
- [Polyèdres coordonnés](#)

[Retour à la table des matières](#)

[Envoyez-nous vos suggestions](#)

© Xavier Hubaut 1995-2000

Les items précédés d'une case << + >> donnent lieu à un sous-menu et en cliquant sur le nom de l'item, on obtient une description sommaire du chapitre concerné.

Quant au contenu, il y en a pour tous les goûts, des thèmes académiques aux variations exotiques. Xavier HUBAUT nous donne de précieux conseils culinaires, très justifiés puisque démontrés et s'attarde quelque peu sur le lancement du poids. Très cohérent tout cela ! Musique, art, cartographie, photographie, ... voisinent avec les chapitres les plus classiques des programmes scolaires dans la plus parfaite harmonie, de quoi meubler agréablement et << instructivement >> (tiens, c'est français ça ?) tes heures d'étude dans les locaux du Centre Cybérmédia de ton école.

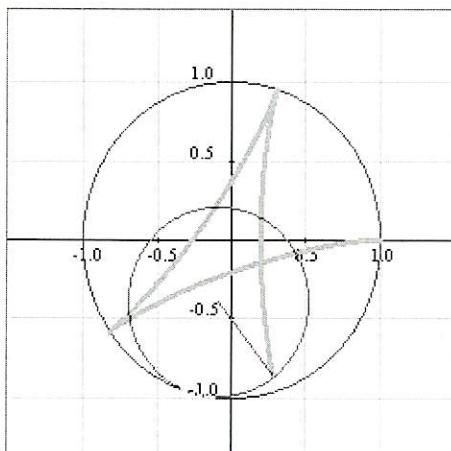
Encore un pour la route

Rendez-vous à l'adresse suivante :

<http://www.saliege.com/dynamique/projet/cbparam/arcparam.html>

Une page bien agréable pour les nostalgiques du spirographe.

Tu te souviens sans doute de ce jeu. C'est une histoire de roues qui tournent et de courbes qui se tracent. Je sais, le plus difficile, c'est de ne pas déraper. Enfin bref, un dessin réalisé au spirographe, c'est un lieu géométrique. Le lieu décrit par la pointe du bic lorsque la roue tourne à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle ou autour d'une figure plane de type polygone. Mais plus tu compliques et plus tu as de chances de déraper.



Sur ce site, pas de problème de soin. Tu trouveras une dizaine de lieux géométriques qui se construisent sous tes yeux, sans bavure ni dérapage, avec en prime le code du programme qui sert à les engendrer.

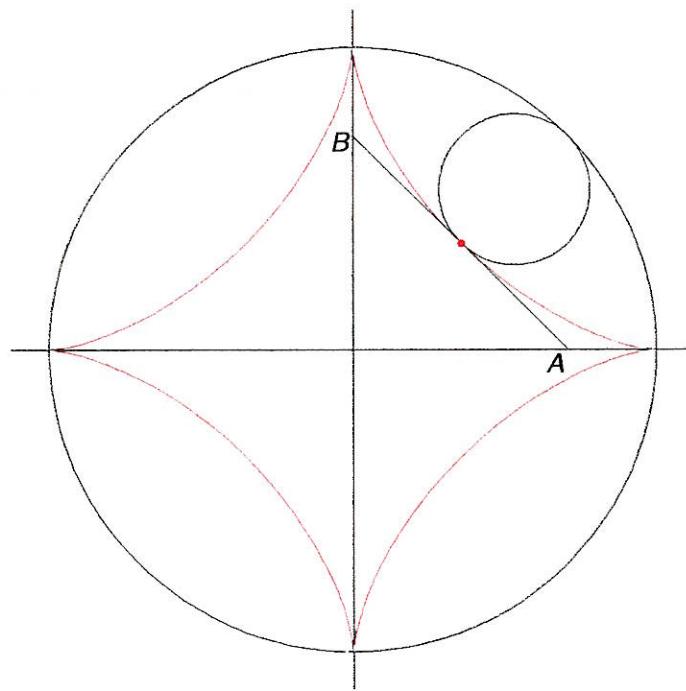
Amuse-toi bien et n'oublie pas de consulter aussi le site de la SBPMef (la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, qui édite la présente revue). Tu y trouveras d'autres liens vers des sites mathématiques intéressants.

D'accord, certains sont en anglais mais il n'y a pas que les maths dans la vie et puis ... il faut bien que les cours de langues soient utiles!!!

<http://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm/sbpm.htm>

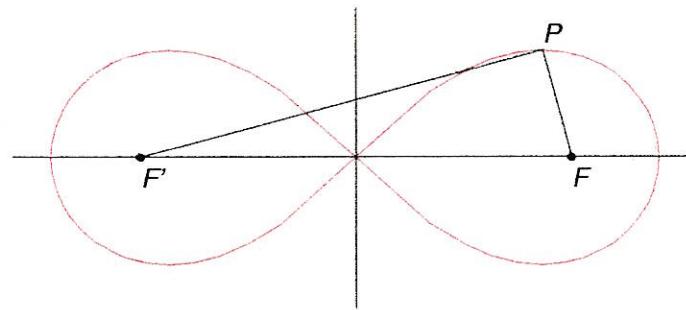


Dans ce numéro, tu as pu lire une petite note concernant Daniel BERNOULLI. Voici deux courbes parmi celles que la famille BERNOULLI a étudiées.



L'ASTROÏDE

L'astroïde est générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon quatre fois plus grand. Le segment AB de longueur égale au rayon du grand cercle et dont les extrémités appartiennent aux deux axes de symétrie de la courbe, est tangent à l'astroïde.



LA LEMNISCATE DE BERNOULLI

C'est l'ensemble des points P tels que $|PF| \times |PF'|$ est une constante, F et F' étant des points fixes.

Math-Jeunes

Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BAILLIEU
Rue A. Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - Belgique
P.P.
7000 Mons 1
5. 124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Inconnu	Réservé à la poste
Refusé	
Décédé	
Adresse insuffisante	
M'habite plus à l'adresse indiquée	