MATH JEUNES

22e année
Avril 2001 – n° 97
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, M.-F. GUISSARD, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LALOUX, R. MIDAVAINE, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POURBAIX, N. VANDENABEELE, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé		(*) 4 numéros (**) 7 numéros			
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)		(*) 4 numéros (**) 7 numéros			
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N° 97 S Vingt-deuxième année 2001

Math-Jeunes

Rallye problèmes

C. Festraets

Voici les cinq derniers problèmes de ce rallye. N'oubliez pas de présenter vos solutions sur des feuilles séparées pour chaque problème et d'y indiquer vos nom, prénom, âge, classe, école et adresse personnelle. Soignez votre présentation. Bon courage ! Vos solutions doivent parvenir à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 15 mai au plus tard.

11 – Carré

Calculer 67^2, 667^2, 6667^2. Quelle est la valeur du carré du nombre formé de 2001 chiffres 6 suivis d'un 7 ? Justifier la réponse que vous dicte l'intuition.

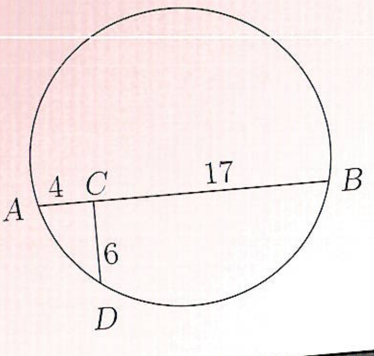
12 – Égalité

Démontrer que l'égalité suivante est correcte :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}=\frac{1}{234}+\frac{1}{235}+\frac{1}{236}+\cdots+\frac{1}{466}$$

13 – Dans un cercle

Dans la figure ci-dessous, AB est une corde du cercle et CD est perpendiculaire à AB. Sachant que $AC = 4$, $CB = 17$ et $CD = 6$, trouver le rayon du cercle.



Math-Jeunes n°97 S,50–53, 2001

14 – Le pari

Deux dés bien équilibrés sont jetés simultanément un certain nombre de fois et deux joueurs A et B parient sur la somme des points marqués par les deux dés. Le joueur A parie sur une somme de 12 et le joueur B sur deux sommes de 7 consécutives. Quelle est la probabilité que A gagne (c'est-à-dire que son pari se réalise avant celui de B) ?

15 – Histoire de cercles

Trois cercles de même rayon R passent par le point A et se coupent en trois autres points, B, C, D. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle BCD est aussi de rayon R.

Solutions

Solution du problème « Au tea room »

Soient respectivement a, b et c le prix d'une tasse de thé, d'une tasse de café et d'une tasse de cacao. On sait que :

$$\begin{aligned} 2a + 3b + 4c < 500 \\ 3a + 4b + 2c > 500 \end{aligned}$$

1. Multiplions les deux membres de la seconde inégalité par 2 et soustrayons lui la première inégalité :

$$\begin{array}{rcl} 6a + 8b + 4c & > & 1000 \\ -(2a + 3b + 4c & < & 500) \\ \hline 4a + 5b + 0c & > & 500 \end{array}$$

   Donc quatre tasses de thé et cinq tasses de cacao coûtent plus de 500F.

2. Multiplions les deux membres de la première inégalité par 3, les deux membres de la seconde inégalité par 2 et soustrayons :

$$\begin{array}{rcl} 6a + 9b + 12c & < & 1500 \\ -(6a + 8b + 4c & > & 1000) \\ \hline 0a + b + 8c & < & 500 \end{array}$$

   Donc une tasse de café et huit tasses de cacao coûtent moins de 500F.

3. Soustrayons la première inégalité de la deuxième :

$$\begin{array}{rcl} 3a + 4b + 2c & > & 500 \\ -(2a + 3b + 4c & < & 500) \\ \hline a + b - 2c & > & 0 \end{array}$$

   d'où $2c < a + b$

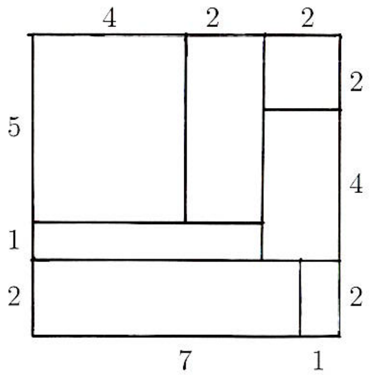
Donc deux tasses de cacao coûtent moins cher qu'une tasse de thé et une tasse de café.

Solution du problème « Échecs et math »

Chaque rectangle contient autant de cases blanches que de cases noires, donc sa surface (mesurée avec la surface d'une case comme unité) est un nombre pair. S'il y a n rectangles, la plus petite surface qu'ils peuvent recouvrir est $2+4+6+8+\ldots+2n$, puisque les surfaces des n rectangles sont toutes différentes.

Or $2+4+6+8+\cdots+2n = \frac{(2+2n)\times n}{2} = (n+1)\times n$

Pour $n=8$, $(n+1)\times n = 72$. L'échiquier n'ayant que 64 cases, $n=8$ ne convient pas. Pour $n=7$, on a la solution suivante :



Les sept rectangles satisfont bien les conditions de l'énoncé, ils sont d'aires 2, 4, 6, 8, 10, 14 et 20. Le plus grand n possible est donc 7.

Solution du problème « Pavage »

Désignons par a la longueur et par b la largeur du rectangle (exprimées en décimètres). Le nombre de carreaux situés le long des bords est $2a+2b-4$. Le nombre total de carreaux est ab. D'où

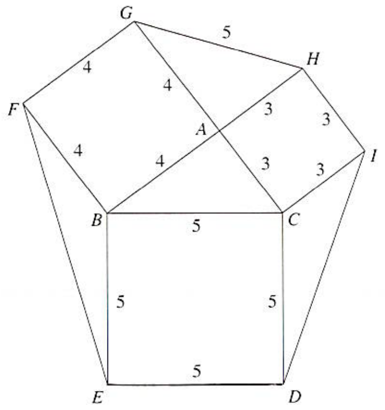
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ab &= 2a+2b-4\\
ab &= 4a+4b-8\\
a(b-4) &= 4b-8\\
a &= \frac{4b-8}{b-4}\\
&= \frac{4(b-4)+8}{b-4}\\
&= 4+\frac{8}{b-4}
\end{aligned}$$

$b-4$ est donc un diviseur de 8,
$b-4 \in \{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$

- Si $b-4=1$, alors $b=5$ et $a=12$;
- Si $b-4=-1$, alors $b=3$ et $a=-8$.
- Si $b-4=2$, alors $b=6$ et $a=8$.
- Si $b-4=-2$, alors $b=2$ et $a=0$.
- Si $b-4=4$, alors $b=8$ et $a=6$.
- Si $b-4=-4$, alors $b=0$ et $a=2$.
- Si $b-4=8$, alors $b=12$ et $a=5$.
- Si $b-4=-8$, alors $b=-4$ et $a=3$.

Comme a et b sont des nombres positifs non nuls et que la longueur a est supérieure à la largeur b, on obtient deux solutions $a=12$ et $b=5$ ou $a=8$ et $b=6$.

Solution du problème « Problème d'aire »



aire $ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$
aire $BEF = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin \widehat{EBF}$
aire $BEF = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin \widehat{ABC} =$ aire ABC (car les angles $\widehat{BEF}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires). De même, aire $DCI =$ aire ABC.
D'où aire $DEFGHI =$ aire $ABC +$ aire $BCDE +$ aire $ABFG +$ aire $CAHI +$ aire $AGH +$ aire $BEF +$ aire $DCI = 6 + 25 + 16 + 9 + 6 + 6 + 6 = 74$

Solution du problème « Palindrome »

Tout nombre palindrome de 6 chiffres peut s'écrire :

$$n = \overline{abccba} = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 c + 10b + a$$

Lorsqu'on divise 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 par 13, on obtient respectivement comme restes -3, -4, -1, 3 et 4 et lorsqu'on divise ces mêmes nombres par 7, on obtient respectivement comme restes 3, 2, -1, -3, -2.

Donc le reste de la division de n par 13 est égal :

$$4a + 3b - c - 4c - 3b + a = 5a - 5c$$

et le reste de la division de n par 7 est égal à :

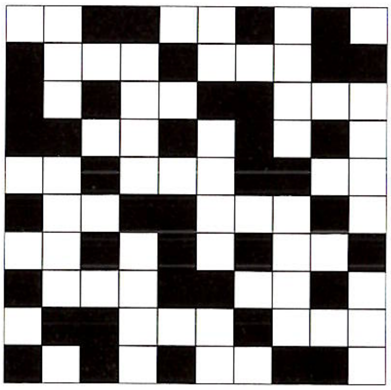
$$-2a - 3b - c + 2c + 3b + a = c - a$$

1. Si n est divisible par 13, alors le reste $5a - 5c$ est divisible par 13 et comme 5 n'est pas multiple de 13, $a - c = 0$. Dès lors le reste de la division de n par 7 est nul et n est bien divisible par 7.
2. Si n est divisible par 7, alors le reste $c - a$ est divisible par 7, par exemple $c = 8$ et $a = 1$. Dans ce cas, le reste de la division par 13 est égal à $5a - 5c = -35$ et n n'est pas divisible par 13. Exemple : 158851 est multiple de 7 et n'est pas multiple de 13.

Les nombres cachés 3

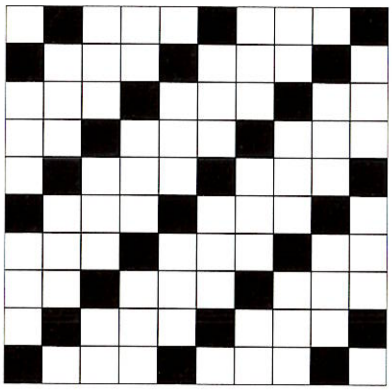
Y. Noël-Roch

1. Solutions



Fenêtre 7

Cette fenêtre proposée dans le numéro précédent de la revue est extraite d'un tableau initial de largeur 14. Les multiples de 4 et de 5 y ont été repérés et la fenêtre a été découpée en prenant la case occupée par le nombre 2 comme coin supérieur gauche.



Fenêtre 8

La fenêtre 8 est assez particulière : elle pourrait être obtenue en noircissant les cases contenant les multiples du seul nombre 4. Posons $a = 4$. Nous savons qu'un deuxième nombre $b \neq a$ a également été utilisé. Il faut donc que les cases contenant des multiples de b contiennent aussi des multiples de a.

En récapitulant, il faut : $\begin{cases} b\mathbb{N}^* \subset 4\mathbb{N}^* \ (^1) \\ b \neq a = 4 \\ 3 \leqslant b \leqslant 10 \end{cases}$

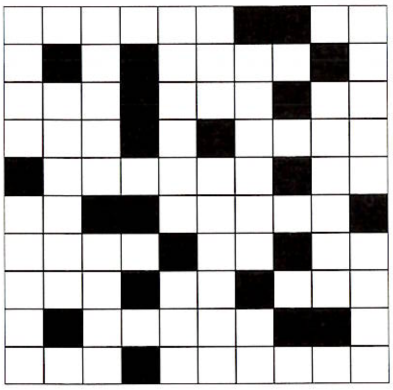
Ces conditions entraînent $b = 8$. Dès lors nous connaissons $a = 4$ et $b = 8$.

Enfin pour rechercher L, nous savons que $L \in 4\mathbb{N}^* + 1$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$. L peut donc valoir 13 ou 17.

(1) $X \subset Y$ signifie que tous les éléments de X sont des éléments de Y

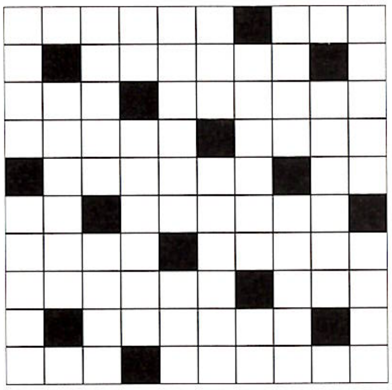
Math-Jeunes n°97 S,54–58, 2001

Tu peux contrôler que la fenêtre 8 a pu être construite avec
$a=4$, $b=8$, $L=13$, $csg=3$ (en partant de la 1re ligne)
$a=4$, $b=8$, $L=13$, $csg=15$ (2e ligne)
$a=4$, $b=8$, $L=17$, $csg=3$ (1re ligne)
$a=4$, $b=8$, $L=17$, $csg=7$ (1re ligne)
$a=4$, $b=8$, $L=17$, $csg=9$ (2e ligne)
$a=4$, $b=8$, $L=17$, $csg=23$ (2e ligne)

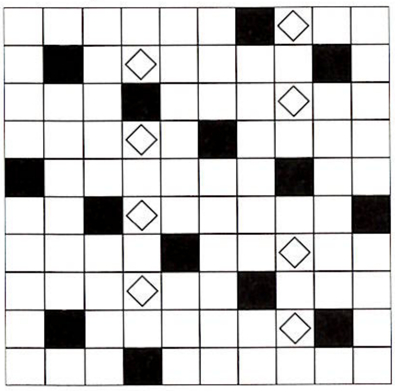


Les deux familles de multiples n'apparaissent guère ! La succession de beaucoup de carrés blancs en $\boxed{\quad 1 \quad}$ indique que a et b valent au moins 7. Dès lors, dans $\boxed{\quad 2 \quad}$, c_2^2 et c_9^9 sont nécessairement associés, donc $a=7$ et nous pouvons repérer les multiples de 7 dans la fenêtre, d'abord dans $\boxed{\quad 5 \quad}$, $\boxed{\quad 6 \quad}$ et puis dans toutes les lignes grâce à la périodicité.

Fenêtre 9



Le décalage d'une ligne à la suivante indique que la largeur L du tableau initial vaut 2 de moins qu'un multiple de 7. Ainsi, $L \in 7\mathbb{N}^* - 2$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$ entraînent que L vaut 12 ou 19. Continuons à exploiter les informations données par la fenêtre 9 :



La périodicité implique que toutes les cases $c_4^2, c_4^4, c_4^6, c_4^8, c_4^{10}, c_8^1, c_8^3, c_8^5, c_8^7, c_8^9$ sont occupées par des multiples de $b \geqslant 8$. Donc, on a $c_4^{10} \in 7\mathbb{N}^*$ et $c_4^{10} \in b\mathbb{N}^*$ et de même $c_8^5 \in 7\mathbb{N}^*$ et $c_8^5 \in b\mathbb{N}^*$.
Le décalage d'une ligne à la suivante impose $L \in b\mathbb{N}^* + 4$.

Les trois conditions : $\begin{cases} L \in \{12, 19\} \\ L \in b\mathbb{N}^* + 4 \\ 8 \leqslant b \leqslant 10 \end{cases}$ impliquent $\begin{cases} L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{12, 20, 28, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 8 \\ L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{13, 21, 29, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 9 \\ L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{14, 24, 34, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 10 \end{cases}$

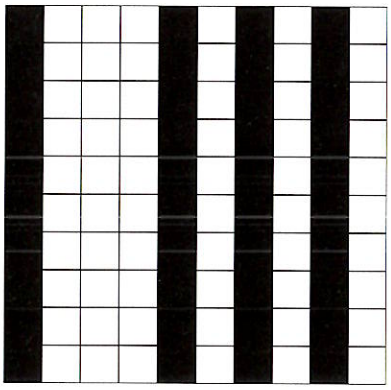
Toutes ces éventualités conduisent à une solution unique $L = 12$.

Nous connaissons donc $a = 7$, $b = 8$, et $L = 12$.

Si, de plus tu as recherché comment la fenêtre 9 a été découpée dans le tableau initial de largeur 12, tu as pu trouver 1 comme nombre caché dans le coin supérieur gauche.

2. Importance du triplet $\{a, b, L\}$

Observons une nouvelle fenêtre :



Fenêtre 10

Au premier coup d'œil, nous pouvons croire que $a = 4$ et $b = 6$. Une analyse approfondie montre que cela est incompatible avec l'ensemble des conditions connues. En effet, $a = 4$, et $b = 6$ entraînent $L \in 4\mathbb{N}^*$ et $L \in 6\mathbb{N}^*$. Comme nous savons que $10 \leqslant L \leqslant 20$, nous devrions avoir $L = 12$. Or, il est impossible de découper la fenêtre 10 dans un tableau initial (de largeur 12) suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Il faudrait en effet placer le coin supérieur gauche en 4 et nous ne disposerions pas de 10 colonnes vers la droite.

2.1. Analysons mieux le problème

- $\boxed{1}$ impose $a \geqslant 4$ et $b \geqslant 4$
- La disposition en colonnes imposent que a et b soient tous les deux diviseurs de L.
  ... et nous savons que $10 \leqslant L \leqslant 20$.
- Dressons un tableau des possibilités en tenant compte de toutes ces conditions :

L	Valeurs possibles pour a et b
10	–
11	–
12	4, 6 « solution » déjà exclue
13	–
14	–
15	–
16	4, 8
17	–
18	6, 9
19	–
20	4, 5, 10

L'éventualité $L = 16$, $a = 4$, et $b = 8$ est exclue par $\boxed{7}$.

L'éventualité $L = 18$, $a = 6$, et $b = 9$ est exclue parce qu'il faudrait associer $\boxed{1}$ à $\boxed{7}$, et par conséquent $\boxed{5}$ à $\boxed{9}$, ce qui entraînerait $a = 4$ ou $b = 4$.

- Reste enfin $L = 20$, $a \in \{4, 5, 10\}$ et $b \in \{4, 5, 10\}$.

Aucune colonne ne peut cacher des multiples de 5 car :

$\boxed{1}$ est noire et $\boxed{6}$ ne l'est pas

$\boxed{5}$ est noire et $\boxed{10}$ ne l'est pas

$\boxed{7}$ est noire et $\boxed{2}$ ne l'est pas

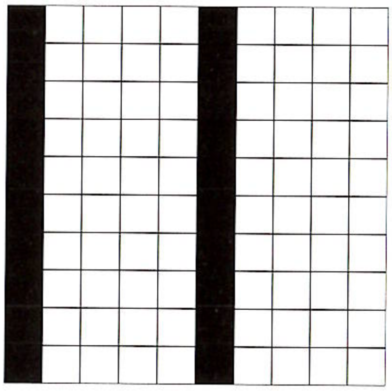
$\boxed{9}$ est noire et $\boxed{4}$ ne l'est pas

La seule possibilité est donc $L = 20$, $a = 4$ et $b = 10$.
Enfin, pour le découpage de fenêtre dans le tableau de largeur 20, le coin supérieur gauche est 4.

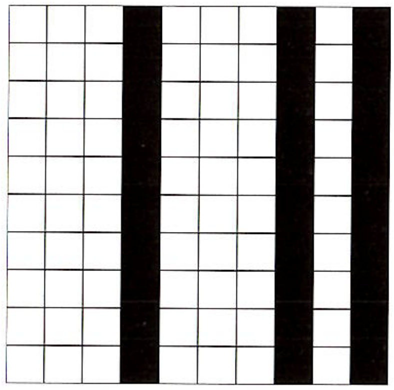
3. Astuces et particularités

- Le plus grand nombre de cases blanches consécutives visibles dans la fenêtre permet de réduire les possibilités pour a et b. Ainsi, dans la fenêtre 9, $\boxed{10}$ montre que $a \geqslant 7$ et $b \geqslant 7$.
- Les fenêtres 2 et 3 présentent à la fois des « colonnes » et des « escaliers ». La fenêtre 10 présente 4 colonnes et rien d'autre.
  Est-il possible, en respectant les conditions $3 \leqslant a \leqslant 10$, $3 \leqslant b \leqslant 10$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$, d'obtenir une fenêtre 10×10 présentant :
  - exactement 3 colonnes noires et rien d'autre ?
  - exactement 2 colonnes noires et rien d'autre ?
  - 1 colonne noire et rien d'autre ?
- Une fenêtre peut conduire à plusieurs solutions. Construis un exemple. Essaie de répondre à ces questions avant de trouver des solutions dans la suite du texte.

Voici quelques fenêtres que tu peux décrypter pour les confronter à tes résultats.



Fenêtre 11



Fenêtre 12

4. Le plus grand commun diviseur de a et de b

- Si deux cases consécutives sont noires, elles sont nécessairement occupées l'une par un multiple de a et l'autre par un multiple de b.
  Dans ce cas, il existe des naturels non nuls x et y tels que :

$$xa - yb = 1 \text{ ou } xb - ya = 1$$

  Dans la fenêtre 1 par exemple : $7 \times 7 - 8 \times 6 = 1$
  Cette situation se retrouve dans les fenêtres 1, 2, 3, 4, 7, et 9 dans lesquelles les paires $\{a, b\}$ valent respectivement $\{6, 7\}$, $\{5, 8\}$, $\{3, 4\}$, $\{7, 8\}$, $\{4, 5\}$ et $\{7, 8\}$.
- Au contraire, les fenêtres 5, 6, 8, 10, 11 et 12 ne présentent pas deux cases consécutives noires.
  Regardons les écarts les plus petits :

N° de fenêtre	$\{a,\ b\}$	d : écart minimum
5	$\{6,\ 9\}$	3
6	$\{6,\ 8\}$	2
8	$\{4,\ 8\}$	4
10	$\{4,\ 10\}$	2
11	$\{5,\ 10\}$	5
12	$\{4,\ 10\}$	2

Dans tous les cas, le nombre d est le plus grand commun diviseur de a et de b. Chaque fois, il existe un entier x et un entier y tels que :

$$\boldsymbol{xa + yb = d}$$

où $x, y \in \mathbb{Z}^*$ (2)

- Il est évident que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de d. Cette propriété caractérise le fait que d est le plus grand commun diviseur de a et de b.
  Si tu nous a suivi jusqu'ici, tu peux continuer à te documenter en recherchant des informations sur le **Théorème de Bézout**.

(2) $\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des entiers non nuls, c'est-à-dire $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Comment le résoudre ?

G. Troessaert, ***I.S.I. Arlon***

> *La résolution de problèmes est importante car c'est un processus qui permet de se rapprocher un peu de la mathématique du chercheur donc de percevoir la mathématique comme science active.*

G. POLYA.

> *I do believe that problems are the heart of mathematics.*

P.R. HALMOS.

> *The mind is at its best when at play.*

J.L. SYNGES.

Ces trois citations illustrent bien l'apport de la résolution de problèmes. C'est l'activité qui approche le mieux le travail du chercheur en mathématique, mais beaucoup y trouvent aussi une dimension ludique. Chaque problème est un défi à relever et chaque avancée vers la solution procure à l'amateur une grande joie.

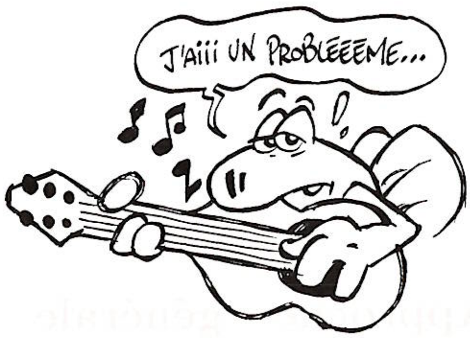
Ajoutons que la résolution de problèmes est un vecteur important du développement de l'imagination qui est sans doute la qualité la plus importante du scientifique et du mathématicien.

Il n'existe pas, et c'est heureux, de méthode générale pour résoudre des problèmes sinon il n'y aurait plus de problème. Par conséquent, il arrive fréquemment que l'on soit impuissant devant un énoncé.

Le but de ce petit article est de vous aider à résoudre plus facilement des problèmes, et à repousser vos limites, de retarder au maximum le moment du blocage voire de le supprimer.

Afin de ne pas noyer les idées importantes dans un texte continu, nous avons adopté une forme de « plan » qui met en évidence les différentes étapes de la méthode.

Bienvenue dans le monde des problèmes mathématiques.



1. Notion de problème

1. De quoi se compose un problème ?

   Tout problème est composé de trois types d'informations :

   • informations concernant les données, elles peuvent être explicites ou implicites (règles du jeu, théorèmes liés au problème, ...)

   • informations qui permettent de transformer des expressions en d'autres expressions, elles sont en général implicites

Math-Jeunes n°97 S,59–63, 2001

(règles de calcul algébrique, règles d'utilisation des théorèmes, ...)

• informations concernant le but à atteindre. Il y en a de deux sortes : but spécifié pour les problèmes de démonstration et but non spécifié pour les problèmes de découverte, les problèmes ouverts.

2. État d'un problème :

   C'est l'ensemble de toutes les expressions qui existent dans le monde du problème à un instant donné. L'état change uniquement en appliquant une opération à une ou plusieurs expressions de l'état précédent.

3. Solution d'un problème :

   Toute solution doit comporter quatre parties :

   • la spécification complète des données,

   • la description complète des opérations utilisées,

   • la description complète du résultat à obtenir,

   • une succession ordonnée et complète d'états, de l'état initial à l'état final, liés par des opérations admissibles.

2. Approche générale du problème et de sa solution

1. Etude de l'énoncé

   • Lire l'énoncé plusieurs fois pour être certain de l'avoir compris (et ne pas résoudre le problème incomplètement) ou chercher la solution d'un problème similaire au problème posé.

   • Repérer les mots importants, ceux qui ne peuvent absolument pas être changés, les nombres sont toujours importants.

   • Déterminer les éventuelles données implicites.

   Cette étude doit permettre d'avoir une expression très nette et très précise du but à atteindre.

2. Quelques méthodes de résolution

   Inférence ou transformation des données

Il s'agit d'écrire des inférences à partir des données explicites et implicites du problème. Elles doivent satisfaire un ou les deux critères suivants :

• ces inférences sont en rapport avec les propriétés qui apparaissent dans le but, les données ou d'autres inférences à partir des données ou du but,

• ces inférences ont été faites fréquemment pour le même type d'information.

Cette méthode nécessite des connaissances suffisantes dans le domaine, des lacunes peuvent être un obstacle insurmontable, même pour le meilleur. Il faut connaître les propriétés des objets intervenants dans le monde du problème. Elle est en général suffisante à l'école.

Notons qu'il est souvent utile d'avoir une représentation et une compréhension plus détaillée du but que celle proposée dans l'énoncé original du problème. Il peut être utile d'imaginer un instant qu'on a déjà résolu le problème et s'interroger sur la forme de la solution. Cette démarche permet d'augmenter la spécification du but, permet d'adopter une notation cohérente, d'introduire des concepts utiles pour la résolution du problème et permet de produire de nouvelles propriétés du but, ce qui peut rendre l'obtention de la solution plus facile.

Essais et erreurs

C'est une démarche courante. On applique au hasard des opérations aux données du problème dans l'espoir de progresser vers la solution. Il faut éviter de tourner en rond ou de répéter plusieurs fois la même opération, c'est pourquoi il faut classer les séquences d'actions possibles en classes de séquences équivalentes. Si une action à l'intérieur d'une classe permet de résoudre le problème, alors il est très probable que toutes les séquences de la classe conduiront à la solution. D'autre part, si une séquence d'actions s'avère inadéquate pour la résolution d'un problème, il est fort probable qu'aucune séquence de la classe ne conduira à la solution.

Le principe de base est que deux séquences d'actions sont équivalentes si et seulement si elles conduisent au même état du problème. En général on rencontre les types d'équivalences suivants :

- séquences différentes d'actions commutatives,
- même action sous plusieurs formes (dans des problèmes complexes),
- deux actions inverses l'une de l'autre combinées dans une séquence d'actions commutatives s'annulent.

Décomposition

Décomposition du problème en sous-problèmes plus simples dont la résolution permettra d'obtenir la solution du problème initial.

Contradiction

Permet de prouver qu'une solution ne peut être obtenue à partir des données du problème. Plusieurs cas peuvent se présenter :

- preuve indirecte : démonstration par l'absurde,
- choix multiple (nombre réduit de possibilités) : on essaie toutes les solutions possibles et on ne garde que celle(s) qui sont consistantes avec les données du problème (certains problèmes de logique peuvent être résolus de cette manière),
- choix multiple (grand nombre fini de possibilités) : il faut trouver des procédures, des propriétés qui permettent d'éliminer des classes entières de solutions,
- choix multiple (infinité de possibilités) : il faut mettre en contradiction des classes infinies de solutions sur base d'une propriété commune (exemple : résolution numérique d'une équation).

Travailler à reculons

On prend la solution comme point de départ plutôt que les données. Contrairement aux méthodes d'inférence ou de contradiction, la solution n'est pas considérée comme faisant partie des données. On part de la solution, mais au lieu d'écrire des inférences à partir de cette solution, on essaie de trouver un ou plusieurs faits qui, mis ensemble, impliqueront la solution.

Critères d'utilisation :

- le problème doit avoir une solution unique bien spécifiée,
- les opérations nécessaires à la résolution doivent être bijectives c'est-à-dire posséder un inverse bien déterminé.

En général, le travail à reculons n'est pas plus efficace que l'inférence simple, mais combiné avec celle-ci, il peut se révéler être d'une aide précieuse.

Étude de problèmes liés

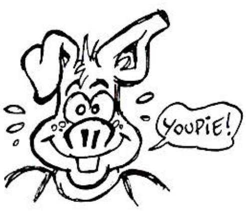
- résolution de cas particuliers,
- études de problèmes proches mais plus simples ou de difficulté comparable,
- parfois l'étude d'un problème lié plus compliqué ou plus général permet de trouver l'ouverture.

3. Quand tout va mal

Quand tout va mal, il reste encore de nombreuses pistes à explorer, en voici quelques-unes :

- tester des exemples,
- modifier la forme de l'énoncé, le remplacer par un énoncé équivalent,
- ne pas hésiter à utiliser du matériel : tables, graphes, modèles, diagrammes, calculatrices, ...
- faire un dessin, il faut qu'il soit grand et le plus général possible,
- exploiter les couleurs,
- faire des hypothèses et les confronter au problème,
- consulter la littérature et considérer les méthodes utilisées dans des problèmes similaires,
- en parler, le fait de devoir expliquer le problème peut mettre sur la voie de la solution,
- demander l'aide de quelqu'un de compétent,
- ...

4. La solution est trouvée



- confronter la solution avec l'énoncé pour voir si elle est complète et si elle répond bien au problème posé,
- rédiger la solution avec soin,
- tester la solution auprès de connaissances. Si la solution permet de rejeter toutes les objections, la garder. Sinon, il faut la réécrire. C'est à ce moment qu'on trouve une solution plus belle, plus élégante.

5. Généralisation

Le problème peut-il être généralisé facilement, la solution peut-elle l'être parallèlement ? Si non, vous avez créé un nouveau problème.

La seule lecture de cet article n'améliorera pas de façon significative votre force. Pour devenir fort dans la résolution de problèmes, il faut résoudre de nombreux problèmes et mémoriser non pas les solutions mais les méthodes, car seules les méthodes sont transposables d'un problème à l'autre.

De nombreux recueils de problèmes résolus ou non résolus sont en vente dans les librairies scientifiques, beaucoup sont en anglais. Pour en profiter pleinement, il faut :

- d'abord essayer de résoudre le problème, y consacrer jusqu'à plusieurs heures afin de bien le comprendre et d'en mesurer la difficulté.
- si après cette recherche vous avez la solution c'est très bien, vous pouvez envisager un autre problème. Si non, regarder la solution « officielle » et isolez la raison qui vous a empêché de trouver la solution. Il vous suffit maintenant de mémoriser l'argument de la solution, il pourra resservir plus tard.

Les problèmes du *Rallye Problèmes* vous tendent les bras. Essayez-les à la lumière de ce que vous venez de lire. Ne vous découragez pas, on ne gagne pas à tous les coups.

6. Références

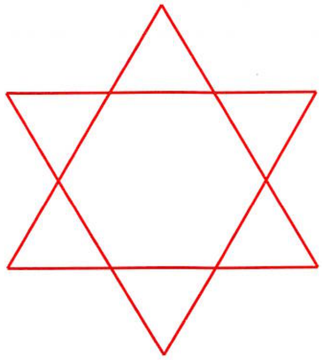
W. A. WICKELGREM, *How to solve problems*, Freeman.

D. HOLTON, *How to, Problem Solving Series*, University of Otago.

Introduction à PostScript (2)

M.Ballieu, *CREM, Nivelles*

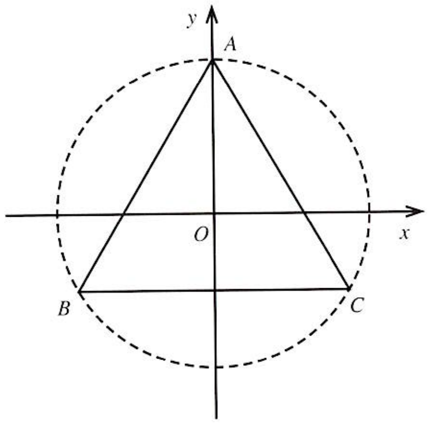
1. Une étoile à six branches



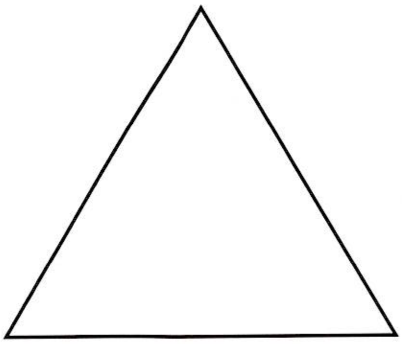
Dans le numéro 96 de la revue *Math-Jeunes*, nous avons proposé de dessiner l'étoile à six branches que l'on peut voir ci-contre.

Peut-être avez-vous pu la réaliser. Nous allons cependant indiquer plusieurs manières de procéder afin d'apprendre la syntaxe des opérations de la calculatrice de `PostScript`.

Dessinons tout d'abord le triangle équilatéral ABC, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 3, comme le montre la figure ci-contre. Pour tracer ce triangle, nous devons déterminer les coordonnées des trois sommets. On voit facilement que les coordonnées du point A sont $(0, 3)$. La trigonométrie nous fournit les coordonnées des deux autres points, à savoir B $(3\cos 210°, 3\sin 210°)$ et C $(3\cos 330°, 3\sin 330°)$.



La façon la plus élémentaire de procéder est d'utiliser une calculatrice pour obtenir ces coordonnées. On a alors le petit programme `PostScript` suivant :



```
28.34645669 28.34645669 scale

0.05 setlinewidth

10 15 translate

newpath
0 3 moveto
-2.598076211 -1.5 lineto
2.598076211 -1.5 lineto
closepath
stroke

showpage
```

Math-Jeunes n°97 S,63–67, 2001

On voit apparaître une nouvelle instruction `closepath` qui, comme son nom l'indique, ferme le *chemin* en retournant au point de départ. Dans ce cas, elle est équivalente à

`0 3 lineto.`

L'écriture du programme qui précède n'exploite pas toutes les possibilités qu'offre le langage `PostScript` qui possède en fait sa propre calculatrice. Ainsi, les instructions

```
newpath
0 3 moveto
-2.598076211 -1.5 lineto
2.598076211 -1.5 lineto
closepath
stroke
```

pourraient être remplacées par

```
newpath
0 3 moveto
210 cos 3 mul 210 sin 3 mul lineto
330 cos 3 mul 330 sin 3 mul lineto
closepath
stroke
```

Cette deuxième forme peut paraître troublante. L'ordre dans lequel on écrit les opérations n'est pas le même en `PostScript` que dans la notation mathématique usuelle. En fait `PostScript` utilise la « notation polonaise inverse » ou « Reverse Polish Notation » (RPN) qui présente l'avantage de n'utiliser aucune parenthèse. Elle s'appuie sur le concept de *pile*. Son fonctionnement peut être comparé à ce qui se passe dans une « pile d'assiettes ». Lorsqu'on range une assiette dans la pile, on la place au-dessus et ainsi, la dernière assiette rangée sera la première réutilisée.

Pour effectuer une opération en `PostScript`, par exemple $3 + 4$, on place d'abord 3, ensuite 4 dans la pile, on additionne les deux éléments de la pile au moyen de l'opérateur `add`. Lors de cette opération, le 3 et le 4 sont supprimés de la pile et le résultat du calcul (7) est placé au-dessus de cette même pile.

Pour la facilité de l'écriture, nous allons dessiner la pile à l'horizontale, l'élément le plus à droite représentant celui qui est au-dessus. L'opération décrite précédemment se schématise alors ainsi :

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
4	$\boxed{3}\boxed{4}$
add	$\boxed{7}$

2. Les opérateurs du langage

Outre l'opérateur arithmétique `add`, on rencontre les opérateurs suivants :

`sub` effectue la soustraction des deux éléments supérieurs de la pile et les remplace par leur différence.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
4	$\boxed{3}\boxed{4}$
sub	$\boxed{-1}$

`neg` change le signe de l'élément supérieur de la pile.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
neg	$\boxed{-3}$

`mul` multiplie les deux éléments supérieurs de la pile et les remplace par leur produit.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
4	$\boxed{3}\boxed{4}$
mul	$\boxed{12}$

`div` effectue la division des deux éléments supérieurs de la pile et les remplace par leur quotient.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
4	$\boxed{3}\boxed{4}$
div	$\boxed{0.75}$

`sqrt` remplace l'élément supérieur de la pile par sa racine carrée.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
sqrt	$\boxed{1.732050808}$

À ces opérateurs arithmétiques viennent s'ajouter des opérateurs trigonométriques dont les arguments sont exprimés en degrés (décimaux).

`cos` remplace l'élément supérieur de la pile par son cosinus.

États successifs de la pile	
30	$\boxed{30}$
cos	$\boxed{0.866025403}$

`sin` remplace l'élément supérieur de la pile par son sinus.

États successifs de la pile	
30	$\boxed{30}$
sin	$\boxed{0.5}$

`atan` sort les deux derniers éléments de la pile, effectue leur quotient et place au sommet de la pile l'angle (en degrés) dont la tangente vaut ce quotient.

États successifs de la pile	
3	$\boxed{3}$
sqrt	$\boxed{1.732050808}$
3	$\boxed{1.732050808}\boxed{3}$
atan	$\boxed{30}$

On rencontre également des opérateurs de gestion de la pile :

`exch` échange les deux derniers éléments de la pile.

États successifs de la pile	
3	3
4	3 4
5	3 4 5
exch	3 5 4

`dup` recopie au sommet de la pile le dernier élément de cette pile.

États successifs de la pile	
3	3
4	3 4
5	3 4 5
dup	3 4 5 5

3. Le dessin de l'étoile

En `PostScript`, il est possible d'attribuer une valeur à un symbole, comme en mathématiques, lorsque par exemple, on dit : « posons $s = \dfrac{72}{2.54}$ ». Cela se fait avec la même syntaxe qui sert à définir les macros (voir *Math-Jeunes* n° 96). Le facteur d'échelle (pour travailler en centimètres) peut donc être défini de la manière suivante :

```
/s {72 2.54 div} def
```

et ainsi,

```
s dup scale
```

pourra remplacer

```
28.34645669 28.34645669 scale
```

Les définitions qui précèdent vous permettront d'expliquer pourquoi la macro ci-dessous dessine également le triangle équilatéral dont il est question dans cet article.

```
/triangleequilateral
{
newpath
0 3 moveto
3 dup mul 3 2 div dup mul sub sqrt neg 3 2 div neg lineto
3 dup mul 3 2 div dup mul sub sqrt 3 2 div neg lineto
closepath
stroke
} def
```

Pour terminer, voici le programme qui dessine l'étoile de David :

```
/s {72 2.54 div} def

/triangleequilateral
{
newpath
0 3 moveto
3 dup mul 3 2 div dup mul sub sqrt neg 3 2 div neg lineto
3 dup mul 3 2 div dup mul sub sqrt 3 2 div neg lineto
closepath
stroke
} def

s dup scale

0.05 setlinewidth

10 15 translate

triangleequilateral
180 rotate
triangleequilateral

showpage
```

Que se passe-t-il si on remplace, dans la macro `triangleequilateral` partout le nombre 3 par un autre nombre ?

Remarquons qu'il est également possible d'écrire la macro `triangleequilateral` en utilisant les valeurs trigonométriques, comme il a été dit plus haut.

La rédaction vous souhaite bon courage ! Pour ceux qui voudraient dessiner un cercle, voici la syntaxe pour un cercle de centre $(3, 5)$ et de rayon 4 :

```
newpath
3 5 4 0 360 arc stroke
```

Nous vous engageons à mettre d'autres valeurs « raisonnables » à la place de 0 et 360, puis également à remplacer `stroke` par `fill`... Qu'arrive-t-il ?

Bibliographie

[1] Eminet, Bernard-Paul, *Le Livre de PostScript*, P.S.I. Micro Édition, 1987.
ISBN 2-86595-462-5

[2] Lismont, Luc, *Dessins en PostScript et géométrie analytique*, in *PRATIQUER LA GÉOMÉTRIE – Développement d'outils pédagogiques pour un enseignement de la géométrie accessible à tous*, CREM, 2000 (à paraître).

[3] Smith, Ross A., *Learning PostScript : A Visual Approach*, Peachpit Press, Berkeley, California, 1990.
ISBN 0-938-151-12-6

Discomathèque

Hector Dujacquier

1. Le bruit

Pour qu'un bruit « chatouille » notre oreille, il faut que notre pavillon réussisse à en capter une puissance suffisante. Il y a un seuil en dessous duquel nous sommes sourds : c'est **le seuil d'audibilité**. Il varie avec les individus et avec l'âge, mais on peut évaluer **une puissance minimum audible** (P.M.A.) moyenne.

À l'opposé, quand le bruit devient trop intense, on approche un nouveau seuil, le seuil de la douleur. On l'évalue à mille milliards de P.M.A. (mille milliards de fois la puissance minimum audible).

Notre oreille accepte donc des puissances qui varient de 1 P.M.A. à mille milliards de P.M.A. Cette échelle très étendue de puissances est difficile à manier avec des nombres ordinaires. Pourquoi ne pas s'envoler vers un autre univers de nombres ?

On va donc parler de « niveau sonore ». Celui-ci se mesure en « bels [1] », et plus couramment en *décibels* (dB) (1 bel = 10 décibels, 1 B = 10 dB).

À un bel correspond une puissance sonore (émise par la source) de dix P.M.A. (puissance minimum audible).

$$x \text{ bel} \xrightarrow{10^x} 10^x \text{ P.M.A.}$$
$$\log x \text{ bel} \xleftarrow{\log x} x \text{ P.M.A.}$$

Ce passage dans l'univers des niveaux ne se justifie pas seulement par notre réticence à manier des chiffres énormes ; en fait, notre oreille est sensible aux niveaux sonores et non aux puissances sonores.

Remarquons qu'un bruit de niveau 100 dB est 10 000 fois plus puissant qu'un bruit de 60 dB (car $10^{10} = 10^4 \times 10^6$) et qu'un bruit de niveau de 50 dB est 1 000 fois moins puissant qu'un bruit de 80 dB.

2. Un outil mathématique bien pratique : *le logarithme*

Grâce au logarithme décimal, nous pourrons facilement calculer le niveau sonore recherché.

$\log x = t \Leftrightarrow 10^t = x$ où x appartient à $\mathbb{R}_0^+$

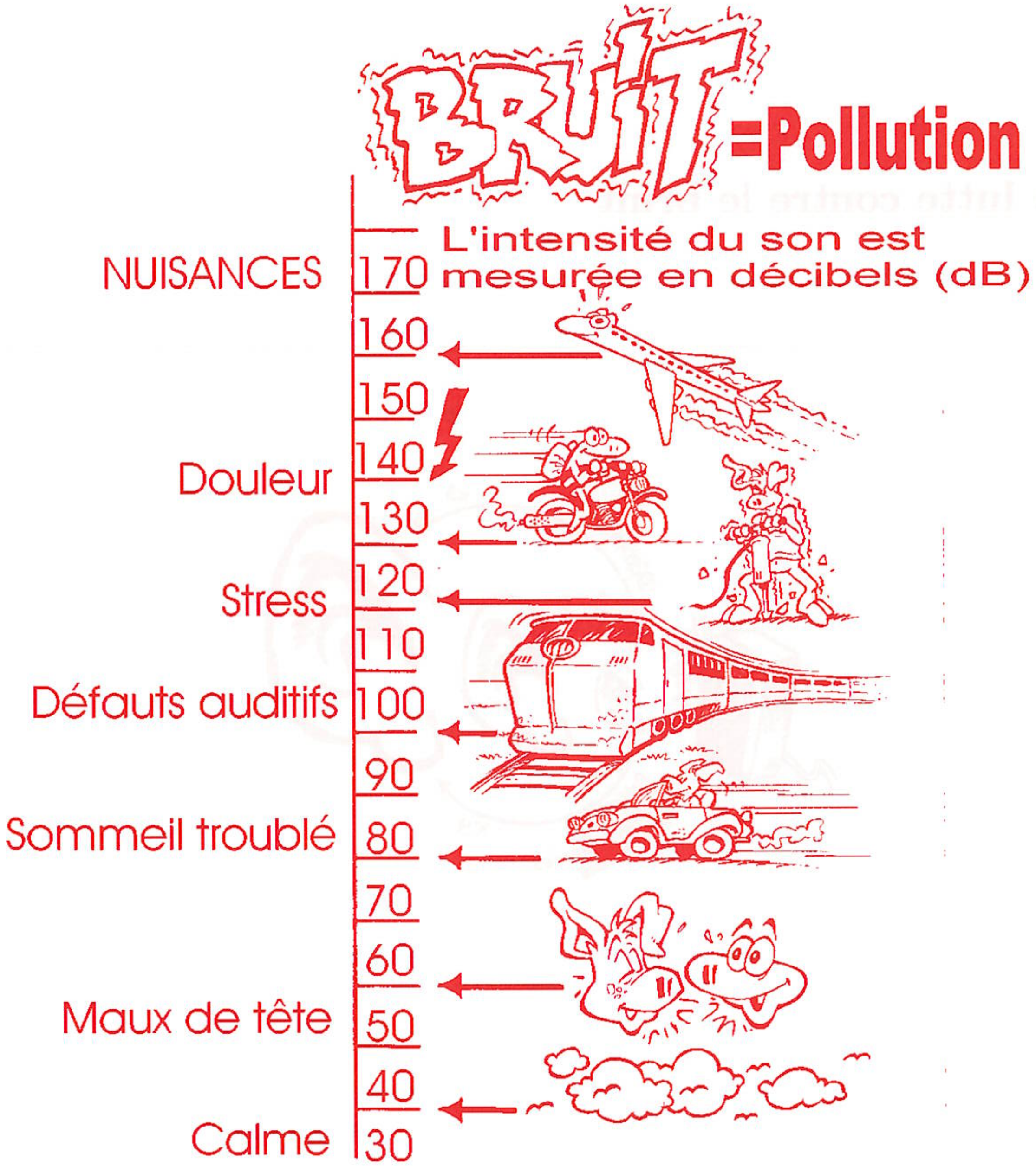
Le logarithme décimal du nombre strictement positif x est l'exposant de la puissance de 10 équivalent (ou égale) à x. Ainsi, $\log 100 = 2$ car $100 = 10^2$. De même $\log 0,001 = -3$.

Citons les règles de calcul (ou propriétés) fondamentales :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : \log(a \cdot b) = \log a + \log b \qquad \log a^n = n \cdot \log a \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

[1] de Graham Bell

Math-Jeunes n°97 S,68–70, 2001



3. À la discothèque ...

Une discothèque possède une sono de 90 dB. Elle projette d'un acheter une seconde identique. Les voisins protestent tout de suite :

« Ils sont fous ces jeunes, 180 dB !! »

Qu'en penser ?

puissance sonore		**niveau sonore**
1 sono : 10^9	$\leftarrow$	$90 \text{ dB} = 9 \text{ B}$
2 sonos : 2×10^9	$\rightarrow$	$\log(2 \times 10^9) = \log 2 + 9 \log 10 = 9{,}3 = 93 \text{ dB}$

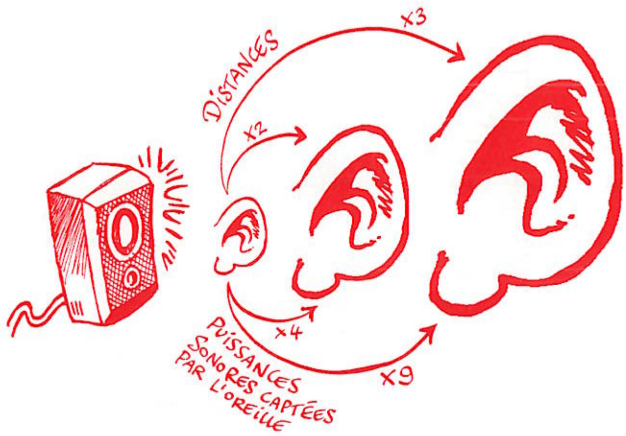
Le niveau sonore n'a donc augmenté que de 3 dB, ouf !! Et rassurons les récalcitrants en leur signalant qu'un niveau sonore de 180 dB correspond à 1 milliard de sonos (puisque $10^{18} = 10^9 \times 10^9$)

4. La lutte contre le bruit

Le meilleur moyen de se protéger du bruit est de s'en éloigner ...

En plein air, en effet, l'énergie sonore se disperse dans l'espace par vagues successives comme les vagues d'un pavé jeté dans une mare.

À mesure qu'elle s'éloigne du bruit, l'oreille capte une proportion de plus en plus faible de la puissance sonore.



Distance de la source sonore		Puissance captée par l'oreille
x	$\longrightarrow$	x^2
$\sqrt{y}$	$\longleftarrow$	y

Pour fêter l'an 2000, une ville a décidé d'installer une sono sur la Grand-Place. À l'arrivée des jeunes, la sono donne à plein régime : 110 dB sur la piste de danse située à 10 m du disc-jockey. Combien de dB mesure-t-on près du bureau de police distant de 500 m ?

$$\log \frac{10^{11}}{50^2} = 11 \log 10 - 2 \log 50 = 7,6 \text{ B } = 76 \text{ dB} .$$

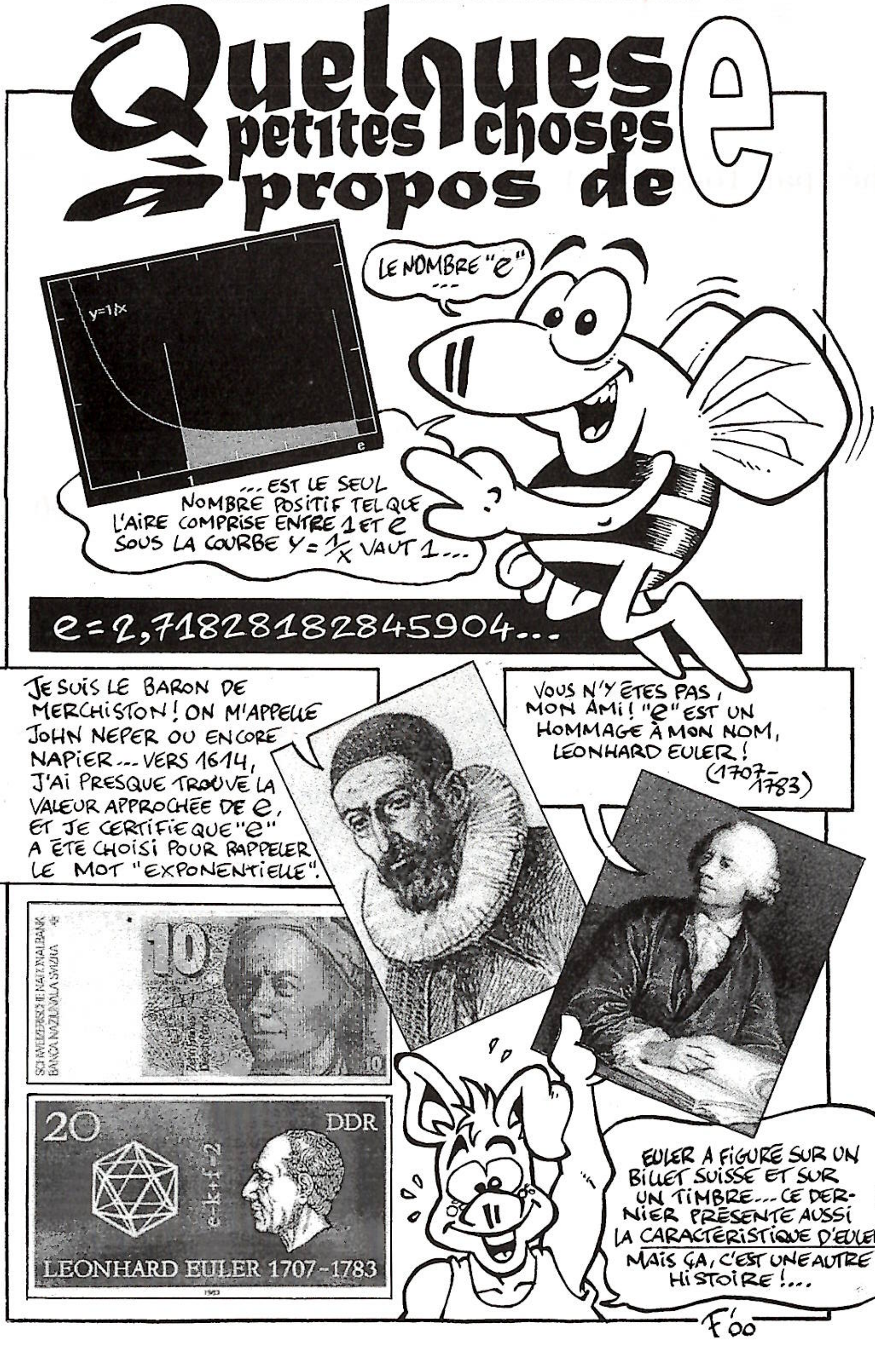
Et de quelle distance faut-il s'éloigner pour que le niveau sonore tombe à 60 dB ?
Puisque :

$$10^6 = \frac{10^{11}}{10^5} = \frac{10^{11}}{\left(\sqrt{10^5}\right)^2}$$

Il faudra se trouver à : $\sqrt{10^5} \times 10 \approx 3162$ m.

Dans le dernier numéro de *Math-Jeunes* nous avons malencontreusement oublié la bande dessinée illustrant la constante **e** présentée en couverture.

La voici . . . avec les excuses de la rédaction.



Jeux

Mot caché (par Tonton C.)

Ce jeu consiste à retrouver dans la grille et à biffer les mots soulignés dans le texte qui vous est proposé. À cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres qui resteront vous donneront alors le mot caché. Sachez que c'est le nom d'un illustre mathématicien. Quel est ce nom ?

Voici maintenant la phrase qui est proposée à votre sagacité et la grille qui lui correspond. Bonne recherche.

« *Né à Londres … fut actuaire puis avocat avant de devenir Professeur dans une école militaire, puis à Oxford. Ses travaux en théorie des diviseurs ont contribué à créer les principes et le vocabulaire de la théorie des invariants.* »

V	I	D	T	U	N	D	R	U	O	C	E	P
I	S	E	A	F	O	S	E	N	L	E	I	U
U	E	N	C	T	L	A	C	E	A	E	S	T
R	N	O	C	U	A	B	O	I	N	I	R	H
S	T	R	E	R	I	U	V	R	E	V	O	E
U	B	I	V	N	A	L	E	I	R	E	D	N
E	I	R	A	I	I	R	E	E	O	C	O	E
N	A	A	V	S	T	A	◇	H	T	A	V	A
T	X	U	A	E	E	A	I	R	E	P	R	E
S	E	E	R	V	R	T	N	A	I	S	I	D
C	R	R	T	L	L	I	S	D	U	C	N	D
N	A	E	D	Y	I	M	R	T	P	I	P	R
T	V	S	P	S	S	E	U	E	T	S	E	O
A	A	D	R	E	S	S	E	L	N	O	X	F
L	S	E	O	F	S	E	E	D	O	S	E	L

Le mur des nombres

Chaque brique contient un nombre qui représente la somme des nombres contenus dans les briques sur lesquelles elle repose.

61		66		
12			20	11

La muraille des nombres

À partir de la deuxième rangée en commençant par le bas, le nombre inscrit dans chaque brique est égal au triple du nombre incrit dans la brique inférieure gauche diminué du double du nombre figurant dans la brique inférieure droite.

	43			
70				
	7			
12				7

Les solutions paraîtront dans le prochain numéro !

Math-Jeunes n°97 S,72–72, 2001


Quelques petites choses sur Φ
ALIAS "LE NOMBRE D'OR"
GRÈCE, 5e SIÈCLE AVANT J.-C... LE SCULPTEUR PHIDIAS (LE PARTHÉNON, C'EST LUI !) SE PROMÈNE ...
HÉ TOI !
?!
DÉSIGNE UN POINT SUR CE BÂTON DE MANIÈRE À LE COUPER EN DEUX DE FAÇON HARMONIEUSE !
BEUUUH... ICI !!
HAHA ! ENCORE UN ! JE LE SAVAIS, JE LE SAVAIS !!!
CE QUI REND PHIDIAS HEUREUX, C'EST QUE LA PLUPART DES GENS MONTRAIENT UN POINT F DU BÂTON AB TEL QU'ON AIT LE RAPPORT $\frac{AB}{AF}$ ÉGAL À $\frac{AF}{FB}$
A F B
... ET DEPUIS LORS(*) EN HOMMAGE À PHIDIAS, LE RAPPORT DONT NOUS PARLONS EST DÉSIGNÉ PAR LA LETTRE GRECQUE PHI (NOTÉE φ OU ENCORE Φ EN MAJUSCULE !)
MAIS QUE VAUT-IL, CE RAPPORT ? CALCULONS !
$\frac{AB}{AF} = \frac{AF + FB}{AF}$
ÇA, C'EST NOTRE Φ !!
$= 1 + \frac{FB}{AF}$
OUI, MAIS $\frac{AB}{AF} = \frac{AF}{FB}$ DONC $\frac{FB}{AF} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{\Phi}$
$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$
$\times \Phi$
$\Phi^2 = \Phi + 1$
HOOO ! LA BELLE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ !!
LA RACINE POSITIVE EST $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
F'2001
(*) : OU PLUTÔT "DEPUIS L'OR" ! MAIS CETTE NOTATION N'EST PAS AUSSI ANCIENNE QUE LE PRÉTEND NOTRE AMI...

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée