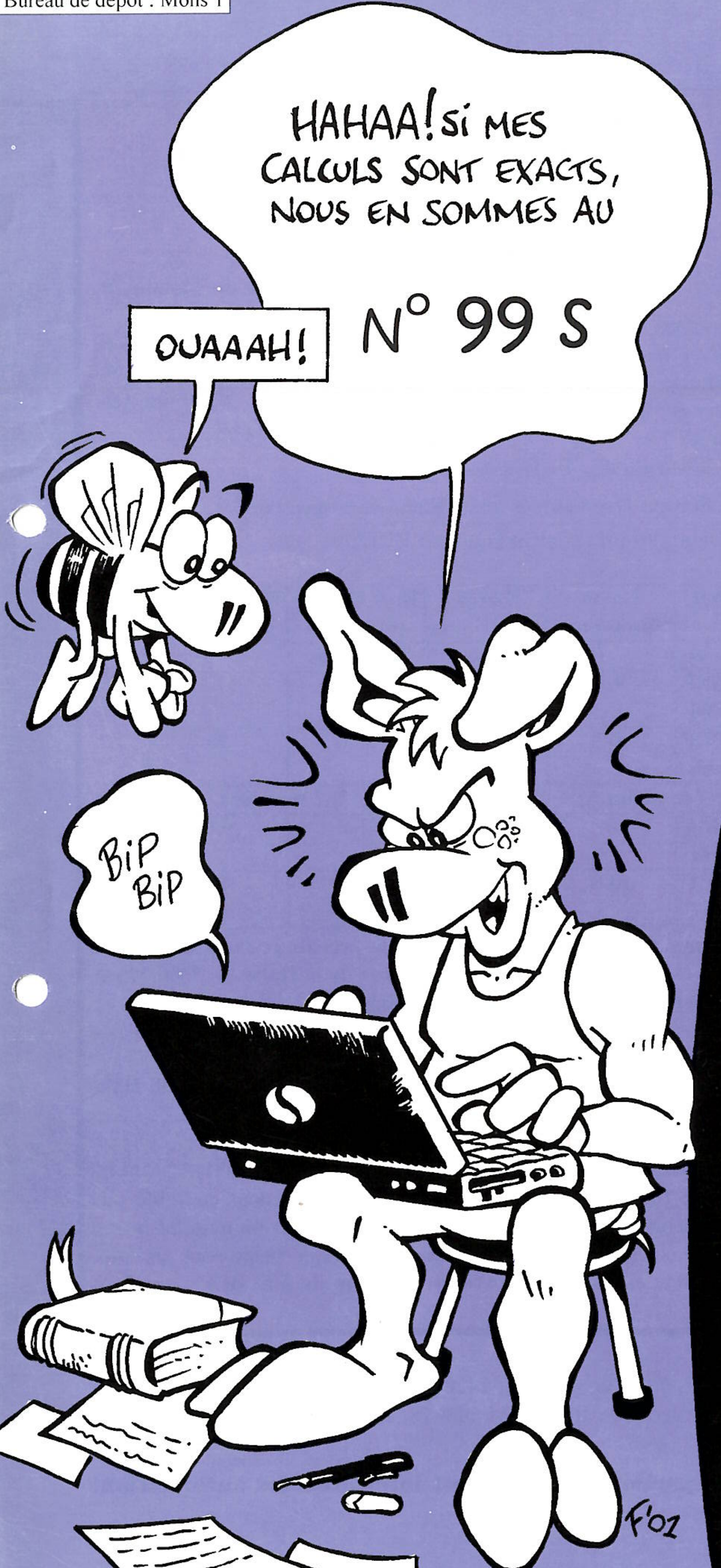
23e année
Novembre 2001 - n° 99 S
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH JEUNES



MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé		(*) 4 numéros (**) 7 numéros			
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)			(*) 4 numéros (**) 7 numéros		
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 500 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N° 99 S Vingt-troisième année 2001

Math-Jeunes

ANNIVERSAIRE

S. Trompler

Pierre de Fermat (1601-1665)

Pierre de FERMAT est né à Beaumont-de-Lomagne, près de Montauban, dans une famille bourgeoise aisée. Il apprend le latin, le grec, l'italien et l'espagnol et acquiert une grande culture littéraire. Il étudie le droit à Toulouse, fréquente les milieux scientifiques de Bordeaux, où on pense qu'il prend connaissance des travaux de François VIÈTE. Bachelier en droit civil de l'université d'Orléans, il devient en 1631 conseiller au parlement de Toulouse et commissaire aux requêtes. Il siège à la chambre de l'Édit de Castres, chambre formée de parlementaires catholiques et protestants. Il se marie, a cinq enfants, et mène une vie sans histoire. Il meurt en 1665 à Castres.

À l'abri des soucis financiers, grâce à sa situation de magistrat, il peut se consacrer à ce qui le passionne et passe ainsi beaucoup de son temps libre à faire des mathématiques. Il est un des tout grands mathématiciens du dix-septième siècle et a contribué à l'avancement de nombreux domaines : théorie des nombres, algèbre, calcul différentiel et intégral, géométrie analytique, calcul des probabilités... De son vivant, sa célébrité, quoique très grande, est restée limitée aux milieux scientifiques : il n'a pas rédigé d'ouvrage complet. Ses travaux circulaient parmi ses amis et ses nombreux correspondants, qui les transmettaient de la même manière et ainsi de suite. Un personnage d'importance majeure dans la diffusion des nouveautés scientifiques à cette époque est le père MERSENNE. Il était en relation épistolaire avec tous les grands mathématiciens et physiciens et les tenait au courant des travaux les uns des autres. N'oublions pas qu'il n'existait pas de revues scientifiques !

FERMAT aimait défier les autres mathématiciens en leur proposant des problèmes dont il avait trouvé la solution. Malheureusement, il ne se souciait pas de publier et il ne notait jamais que des indications et des idées générales sur ses démonstrations, par exemple dans la marge d'un livre qu'il étudiait. À la fin de sa vie, il s'est inquiété de la perte de ses découvertes, mais ce n'est qu'après sa

Math-Jeunes n°99 S,2–4, 2001

mort que son fils Samuel a publié une partie de ses œuvres dans « Varia opera mathematica » ; ce dernier n'était pas mathématicien et le résultat s'en ressent.

Il est difficile de résumer l'œuvre étendue et variée de FERMAT, aussi cet article se contentera-t-il de choisir quelques points accessibles à votre niveau de connaissances mathématiques.

FERMAT a beaucoup apporté à la théorie des nombres, notamment en inventant la méthode de descente infinie. Elle permet de démontrer que certaines propriétés ou relations sont impossibles pour des nombres entiers positifs par le raisonnement suivant : on prouve tout d'abord que, si une relation est possible pour certains nombres, elle est possible aussi pour d'autres nombres plus petits ; ensuite, par le même argument, elle sera possible pour des nombres encore plus petits et ainsi de suite, à l'infini. On arrive ainsi à une contradiction puisque la suite des nombres entiers positifs ne peut diminuer indéfiniment et on en déduit que la relation est impossible dans les entiers positifs.

FERMAT s'est beaucoup intéressé aux nombres entiers et, en particulier aux nombres premiers. L'énoncé suivant est appellé « petit théorème de FERMAT » :

Si p est un nombre premier et a un nombre naturel, premier avec p , alors $a^p - 1$ est divisible par p.

Sa démonstration ne présente pas de difficulté. Le cas du « grand théorème de FERMAT », appelé aussi « dernier théorème de FERMAT » est tout autre. Il dit ceci :

Pour les entiers n supérieurs à 2 , il n'y a pas d'entiers positifs non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$.

FERMAT a lui-même démontré cette propriété pour $n = 4$ par la méthode de descente infinie. Il prouve que s'il existe des nombres entiers positifs x, y et z qui satisfont à la relation $x^4+y^4 = z^4$, il en existe d'autres plus petits, et ainsi de suite indéfiniment. Comme il est impossible de produire indéfiniment des nombres entiers positifs de plus en plus petits, on peut conclure que l'équation $x^4+y^4 = z^4$ ne possède pas de solution en nombres entiers positifs.

FERMAT affirme qu'il a démontré la propriété dans le cas général, mais qu'il manque de place pour l'écrire (une fois de plus dans la marge d'un livre). Malheureusement on n'a jamais trouvé trace de cette démonstration qui a résisté à plus de trois siècles de tentatives incroyablement nombreuses dans le monde et toutes fausses ! Enfin, en 1993, Andrew WILES a annoncé l'avoir trouvée, par une méthode qui met en jeu de multiples aspects des mathématiques, totalement inconnus du temps de FERMAT. Il a fallu encore un an pour qu'elle soit parachevée. Il semble bien cette fois que l'aventure de ce théorème soit heureusement terminée !

FERMAT fut un des précurseurs du calcul différentiel : il élabora la notion de minimum et maximum d'une fonction et en déduisit une méthode de détermination analytique des tangentes aux courbes planes. Il fonda la géométrie analytique au moins un an avant DESCARTES, en utilisant les coordonnées des points, mais perdit le bénéfice de sa découverte par manque de publication. De plus, il avait adopté les symboles mathématiques de VIÈTE, plus lourds que ceux de DESCARTES, et c'est ce dernier que l'on considère comme le fondateur de cette théorie.

FERMAT a également montré que la lumière prend toujours le chemin qui demande le moins de temps, d'un point à un autre, quels que soient les milieux traversés. Il aboutit ainsi à la loi dite « de DESCARTES » sur la réfraction, ce qui fera une polémique de plus entre les deux hommes.

On peut considérer que la théorie des probabilités prend naissance avec les problèmes que le Chevalier DE MÉRÉ, philosophe et homme de lettres , a posés à Blaise PASCAL :

1. Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un

dé ou obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? Combien de lancers sont-ils nécessaires pour obtenir un double-six avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$?

2. On lance une pièce plusieurs fois. Pour chaque pile obtenu, A reçoit 1 point et pour chaque face que A obtient, B reçoit 1 point. Le premier qui a 5 points remporte la mise. Au bout de sept coups, A possède 4 points et B 3 points. Le jeu est alors interrompu. Comment partager la mise de la façon la plus équitable : proportionnellement aux résultats déjà obtenus, soit $\frac{3}{4}$ ou proportionnellement aux points non encore distribués soit $\frac{1}{2}$?

Ces problèmes étaient posés depuis longtemps, mais toutes les solutions données étaient fausses. Une correspondance fournie s'engagea entre PASCAL et FERMAT et ils jetèrent ainsi conjointement les bases du calcul des probabilités.

La maison natale de FERMAT à Beaumont-de-Lomagne.

Bibliographie

[1] IREM groupe Epistémologie et Histoire, *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars

[2] EVES H., *Great Moments in Mathematics*, The Mathematical Association of America.

[3] IFRAH G., *Histoire Universelle des Chiffres*, Robert Laffont.

[4] *Encyclopaedia Universalis*

[5] *Encyclopaedia Britannica*

[6] DEDRON P. et ITARD J. *Mathématiques et Mathématiciens*, Magnard

[7] *The Columbia Electronic Encyclopedia*

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fermat.html
http://www.geocities.com/CollegePark/2072/Fermat.html
http://fr.encyclopedia.yahoo.com/articles/kh/kh-1784-po.html

Rallye problèmes

C. Festraets

Les lauréats du rallye 2000-2001 de *Math-Jeunes* sont Ali ALPAN, élève de 6^e à l'Athénée Pierre Paulus à Châtelet et Jimmy SUDJANA, élève de 5^e à l'Institut Notre-Dame des Champs à Uccle.

Toutes nos félicitations à ces lecteurs sagaces.

Le rallye problèmes 2001-2002 comportera trois étapes publiées dans les numéros 99, 100, 101 de cette revue. À chaque étape, cinq problèmes seront proposés à votre sagacité ; la plupart des problèmes posés ne nécessitent guère que des connaissances mathématiques élémentaires, en outre, il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement. Évidemment, ce n'est pas toujours facile, mais vous pouvez envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu que la première partie d'un problème et estimez que la suite est trop difficile pour votre âge ou encore, si vous aboutissez à une équation dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seront hélas pas pris en considération. Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu correctement de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.
Les solutions doivent être envoyées à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 18 janvier 2002 au plus tard.

1 – Mosaïque

Un homme dispose de 15 878 pièces de mosaïque toutes en forme de triangle équilatéral dont la longueur du côté est 1 cm. Avec ces pièces, il construit la plus grande mosaïque possible en forme de triangle équilatéral.

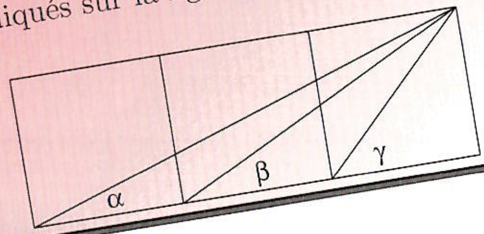
a) Quelle est la longueur du côté de cette mosaïque ?

b) Combien de pièces lui reste-t-il après cette construction ?

Math-Jeunes n°99 S,5–6, 2001

2 – Trois carrés

Trois carrés égaux sont alignés. Que vaut la somme des angles α, β et γ indiqués sur la figure ?



3 – Multiple de 3

On choisit au hasard trois chiffres parmi les chiffres 1, 2, 3, 6 et 9. Quelle est la probabilité pour que les trois chiffres choisis forment un nombre de trois chiffres qui est multiple de 3 ?

4 – Héritage

Harpagon laisse à sa mort un capital à partager entre tous ses enfants. Le testament précise que l'aîné doit être servi en premier et recevra 100000 F plus un dixième du reste ; le second enfant recevra ensuite 200000 F plus un dixième du reste ; puis le troisième recevra 300000 F plus un dixième du reste et ainsi de suite. Il se fait que chacun des enfants reçoit la même somme.

Combien Harpagon avait-il d'enfants et quel est le montant de sa fortune ?

5 – Un grand tableau

On écrit les entiers de 1 à n^2 dans un tableau carré de dimensions $n \times n$. La première ligne contient les nombres de 1 à n, dans l'ordre. La deuxième ligne contient les nombres de $n+1$ à $2n$, dans l'ordre, et ainsi de suite. On choisit alors n entiers dans le tableau de manière qu'aucune paire de nombres choisis ne paraissent dans la même ligne ou dans la même colonne. Démontrer que, quels que soient les nombres choisis, leur somme est constante. Que vaut cette somme ?

Intérêts bancaires : $2,2 + 1,8 \neq 3 + 1$!

Didier Cremer, *Athénée royal de Binche*

MY_BANK

Je suis titulaire d'un compte à vue et d'un compte épargne à la banque MY_BANK. J'utilise le compte à vue pour mes opérations courantes (payement des factures régulières du ménage, retrait au Mister Cash, ...) tandis que sur mon compte d'épargne, j'accumule mes économies en vue d'achats plus importants (voiture, vacances, ...).

Mon compte à vue ne me rapporte aucun intérêt, mon compte épargne est assorti d'un intérêt de $2\% + 0,5\%$ par an (soit, en première approximation, $2,5\%$ an).

Sur mon compte à vue, une somme de 100 000 F placée pendant un an reste égale à 100 000 F, tandis que la même somme placée sur mon compte d'épargne devient, après un an, 102 500 F, si on ne tient pas compte des « modalités d'application ».

On comprend dès lors pourquoi il est préférable de laisser un minimum d'argent sur le compte à vue et de transférer aussi vite que possible les sommes non utilisées sur le compte épargne (1).

Récemment, je me suis rendu compte que l'inflation annuelle était supérieure aux intérêts octroyés par MY_BANK. Le mécanisme de l'inflation est un peu plus compliqué à comprendre, mais en résumé, dans cette situation, je perds de l'argent chaque jour ... à la limite, dans plusieurs années, l'argent économisé ne me permettra même plus de m'acheter une tablette de chocolat !

Je me suis donc décidé dernièrement à chercher une autre banque pour y placer mes économies. Intéressé par quelques publicités, j'ai consulté deux autres organismes bancaires (YOUR_BANK et OUR_BANK). Voici ce que j'y ai découvert.

YOUR_BANK ($2,2\% + 1,8\% = 4\%$)

Information au téléphone

Je téléphone à YOUR_BANK où un préposé me répond que le compte épargne est assorti de 2,2% d'intérêt, augmentés de 1,8% d'accroissement pour les 6 premiers mois suivant le dépôt, augmentés encore de 1,8% pour les six mois restants de l'année, augmentés enfin de 1,8% si la somme reste bloquée encore six mois sur le compte !

Cela donne, à en croire le préposé, un total de $2,2\% + 1,8\% + 1,8\% + 1,8\% = 7,6\%$ (pour 18 mois) !

Dans les conditions actuelles du marché, c'est beaucoup... et même beaucoup trop ! Il est certain que cette présentation est volontairement trompeuse en vue d'attirer le client. Toutefois, je demande quand même qu'on m'envoie la documentation complète.

Le contrat

Une semaine plus tard, je reçois la documentation et une invitation à signer le contrat. La documentation est accrocheuse mais c'est le contrat qui compte !

Il fourmille de petits caractères et de notes de bas de page (2) et est rédigé dans un style technique rébarbatif. Cette lecture demande de vouloir comprendre tous les mots, saisir les subtilités (et les pièges éventuels), décortiquer les détails, avoir la volonté d'y arriver. Rien de bien difficile en somme !

(1) Dans ces conditions, pourquoi encore utiliser le compte à vue et ne pas se servir uniquement du compte épargne ? La question n'est pas idiote, ... mais le règlement interne de MY_BANK ne permet pas d'effectuer des « virements » au départ du compte épargne.

(2) Cet article est aussi un apprentissage de la lecture des notes de bas de page.

Math-Jeunes n°99 S,7–10, 2001

En clair, voici les intérêts octroyés sur un compte d'épargne de YOUR_BANK :

- $2,2\%$ (sur base annuelle) de taux de base toujours garanti,
- $1,8\%$ (sur base annuelle) de prime d'accroissement pour les 6 premiers mois ([3]),
- $1,8\%$ (sur base annuelle) de prime de fidélité pour les 6 mois suivants,
- $1,8\%$ de prime de fidélité pour chaque période de 12 mois suivante.

Les primes d'accroissement et de fidélité ne sont octroyées que si les sommes restent bloquées pendant les périodes de 6 mois et 12 mois mentionnées.

C'est déjà un peu plus clair, mais un exemple pratique est plus explicite. Supposons un capital de 100 000 F déposé le 01/01/2001 sur le compte épargne.

Date	Durée du placement	Prime de base	Prime d'accrois.	Prime de fidélité	Valeur du compte si on retire l'argent	Explications
01/01/2001					100 000 F	On dépose l'argent le 01/01/2001
01/03/2001	3 mois	550 F	0 F	0 F	100 550 F	Seule la prime de base de 2.2% est accordée car la somme n'est pas restée bloquée 6 mois. De plus, l'argent est resté 3 mois, donc un quart seulement des intérêts de la prime de base est obtenu.
01/06/2001	6 mois	1 100 F	900 F	0 F	102 000 F	La somme est restée bloquée durant 6 mois donc la prime d'accroissement est accordée. Mais la prime est calculée sur base annuelle, donc la moitié seulement de cette prime est accordée.
01/09/2001	9 mois	1 650 F	900 F	0 F	102 550 F	Seule la prime de base de 2, 2% est accordée car la somme n'est pas restée bloquée pendant six mois. Il n'y a plus de prime d'accroissement et pas encore de prime de fidélité.
01/12/2001	12 mois	2 200 F	900 F	900 F	104 000 F	La prime de fidélité est enfin accordée mais toujours sur base annuelle.
Cela fait maintenant un an que l'argent est sur le compte, il y a mise à jour du compte et capitalisation automatique des intérêts (toutes les primes sont calculées sur base annuelle).						
01/06/2002	18 mois	1 144 F	0 F	0 F	105 144 F	La prime de fidélité n'est accordée que pour des période de 1 an à partir de la pemière année.
01/12/2002	24 mois	2 288 F	0 F	1 872 F	108 160 F	La prime de fidélité est enfin accordée.

([3]) Prudence, il y a un piège ici.

OUR_BANK ($3\% + 1\% = 4\%$)

Dans l'agence OUR_BANK, je suis reçu par le gérant qui m'explique les conditions :

- 3% de taux de base,
- 1% (sur base annuelle) de prime d'accroissement pour les 6 premiers mois,
- 1% (sur base annuelle) de prime de fidélité pour les 6 mois suivants,
- 1% (sur base annuelle) de prime de fidélité chaque période de 12 mois suivante.

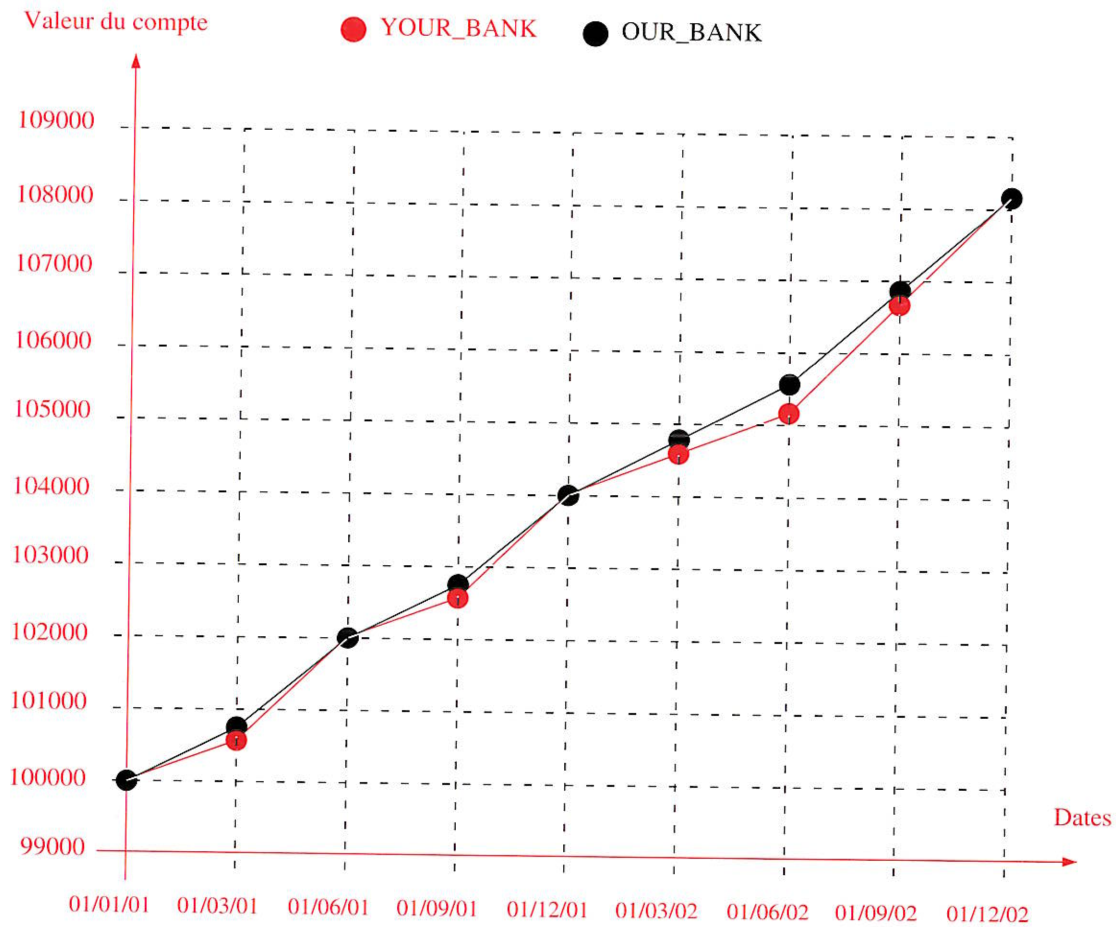
Les primes d'accroissement et de fidélité ne sont octroyées que si les sommes restent bloquées pendant les périodes de 6 mois et 12 mois mentionnées.

Examinons ce que cela donne sur l'exemple pratique de 100 000 F déposés le 01/01/2001 sur le compte épargne.

Date	Durée du placement	Prime de base	Prime d'accrois.	Prime de fidélité	Valeur du compte si on retire l'argent	Explications
01/01/2001					100 000 F	On dépose l'argent le 01/01/2001.
01/03/2001	3 mois	750 F	0 F	0 F	100 750 F	Seule la prime de base de 3% est accordée car la somme n'est pas restée bloquée pendant 6 mois. De plus, l'argent est resté en banque 3 mois, donc un quart seulement des intérêts de la prime de base sont obtenus.
01/06/2001	6 mois	1 500 F	500 F	0 F	102 000 F	La somme est restée bloquée six mois donc la prime d'accroissement est accordée. Mais la prime est sur base annuelle, donc la moitié seulement de cette prime est accordée.
01/09/2001	9 mois	2 250 F	500 F	0 F	102 750 F	Seule la prime de base de 3% est accordée car la somme n'est pas restée bloquée six mois. Il n'y a plus de prime d'accroissement et pas encore de prime de fidélité.
01/12/2001	12 mois	3 000 F	500 F	500 F	104 000 F	La prime de fidélité est enfin accordée mais toujours sur base annuelle.
Cela fait maintenant un an que l'argent est sur le compte, il y a mise à jour du compte et capitalisation automatique des intérêts (toutes les primes sont sur base annuelle).						
01/06/2002	18 mois	1 560 F	0 F	0 F	105 560 F	La prime de fidélité n'est accordée que pour des périodes de 1 an à partir de la première année.
01/12/2002	24 mois	3 120 F	0 F	1 040 F	108 160 F	La prime de fidélité est enfin accordée.

Conclusions

Le graphique suivant permet de comparer rapidement l'évolution de la valeur du compte dans les deux banques.



Lors d'un retrait effectué après 12 ou 24 mois, il n'y a pas de différence entre ces deux banques. Mais si on effectue un retrait avant la capitalisation de fin d'année, l'intérêt proposé par OUR_BANK est toujours supérieur à l'intérêt de YOUR_BANK, voilà pourquoi

$$\text{« } 3\% + 1\% \geqslant 2,2\% + 1,8\% \text{ »!}$$

Avant de choisir définitivement entre ces deux banques, il vous faudra encore comparer les frais de gestion, les dates valeurs prises en compte pour les opérations, le service rendu, la disponibilité de votre argent, ... (4)

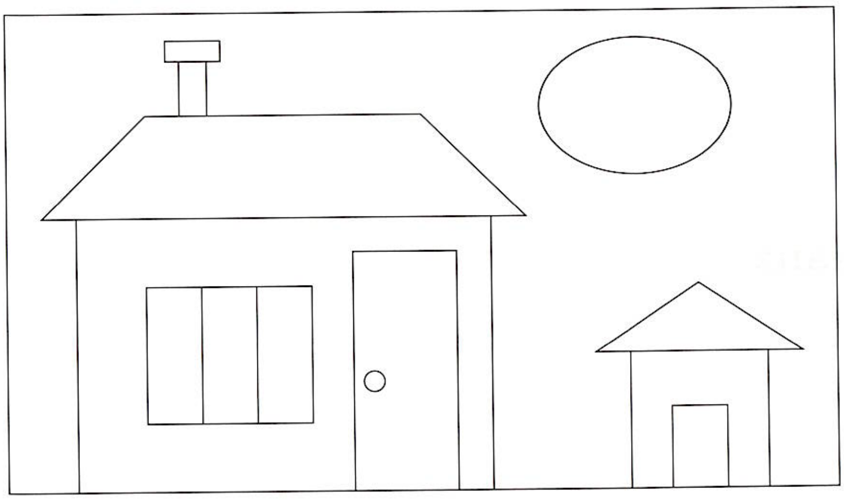
(4) Les modalités d'utilisation d'un compte de YOUR_BANK sont telles que pour vous acheter une voiture de 500 000 F, il vous faudra commencer à retirer l'argent de votre compte 150 jours avant le payement.

M. Ballieu

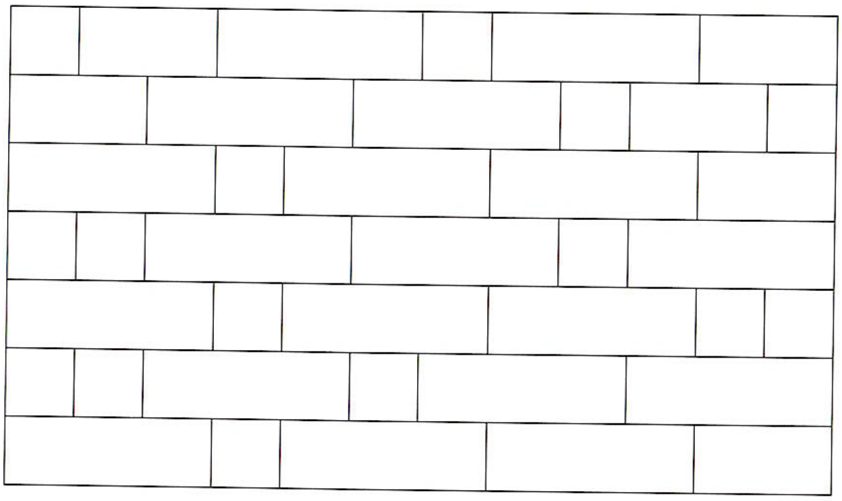
1. Le problème des quatre couleurs

La conjecture des quatre couleurs est vraisemblablement née vers le milieu du dix-neuvième siècle de l'imagination de Francis GUTHRIE. Cet avocat, botaniste et mathématicien anglais avait remarqué, un jour où il colorait une carte d'Angleterre, qu'il était possible de le réaliser au moyen de quatre couleurs seulement, tout en imposant que deux régions ayant une **frontière commune** soient colorées différemment (un seul point commun à deux régions n'est évidemment pas considéré comme une **frontière commune**). La démonstration de cette conjecture, pour n'importe quelle carte, a pris pas mal de temps – moins que le grand théorème de FERMAT cependant ! Elle est contestée par certains car sa partie finale requiert l'utilisation d'un ordinateur. Elle date du courant des années 1990 et est le fruit d'une collaboration entre de nombreux mathématiciens dont *Math-Jeunes* te parlera peut-être un jour.

Nous te proposons donc d'essayer de colorier les deux dessins ci-dessous au moyen d'au plus quatre couleurs, en tenant compte du fait que deux régions ayant une frontière commune doivent être colorées différemment.



Math-Jeunes n°99 S,11–12, 2001



2. L'horloge frileuse

Une certaine horloge, sous l'effet des changements de température, avance de 30 secondes durant le jour et retarde de 20 secondes durant la nuit. Si on la met à l'heure exacte le matin du 1er mai, à quel moment sera-t-elle en avance de 5 minutes ?

3. Nombres parfaits

On appelle *nombre parfait* tout nombre entier qui est égal à la somme de ses diviseurs propres (c'est-à-dire tous les diviseurs sauf lui-même). Ainsi, 6 est parfait, puisque $6 = 1 + 2 + 3$. La théorie des nombres parfaits est loin d'être une théorie achevée ; on en connaît quelques-uns autres que 6. *Math-Jeunes* te propose de rechercher les deux nombres parfaits suivants (qui sont inférieurs à 500).

4. Les brebis

Un berger, interrogé sur le nombre de brebis de son troupeau répond : « Je ne sais pas exactement combien j'en possède, mais si je les range par deux, il en reste une, par trois, il en reste une également et de même par quatre, cinq ou six. Mais si je les range par sept, cela tombe juste... »

Combien le berger possède-t-il de brebis ?

5. Les oiseaux

Un homme a acheté trente oiseaux pour trente deniers. Ces oiseaux sont de trois espèces. Il y a des perdrix qui valent trois deniers la pièce, des colombes à deux deniers et on acquiert deux moineaux pour un denier.

Combien l'homme a-t-il acheté d'oiseaux de chaque espèce ?

Olympiades

C. Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-septième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis cinq ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La MINI-OLYMPIADE accueille les élèves de première et de deuxième années ; la MIDI-OLYMPIADE est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la MAXI-OLYMPIADE est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur.

Le calendrier de la vingt-septième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

Éliminatoire : le mercredi 16 janvier 2002.
Demi-finale : le mercredi 20 février 2002.
Finale : le mercredi 24 avril 2002.
Proclamation : le samedi 11 mai 2002.

Évidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « préformulée », elles sont notées « srp ».

Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[0, 999]$, autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser, s'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a tout de même un minimum de connaissances à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là, tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Math-Jeunes n°99 S,13–15, 2001

Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé.

Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans les tomes 1 et 2 de OMB reprenant toutes les questions posées de 1976 à 1981. Malheureusement, ces tomes ne sont plus en vente, ils sont épuisés. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir le tome 4 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela

Olympiades Mathématiques Belges
Tome 4 (1994-1998) : prix 220 F.

Ajouter 50 F de port pour un exemplaire et 100 F de port pour deux ou trois exemplaires.

Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons
Compte : 000-0728014-29
Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. Inégalités [1977]

Si a, b, c, d sont des nombres réels et si $0 < a \leqslant b$ et $0 \leqslant c < d$, laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) $0 \leqslant ac < bd$ **(B)** $0 \leqslant ac \leqslant bd$
(C) $0 < ac < bd$ **(D)** $0 = ac < bd$
(E) $0 < ac \leqslant bd$

2. PGCD [1979]

Quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, le pgcd de $n(n+1)(n+2)$ et $(n+1)(n+2)(n+3)$ est

(A) égal à $(n+1)(n+2)$
(B) égal à 6
(C) égal à 12
(D) au moins égal à 6
(E) au moins égal à 24

3. Division de polynômes [1976]

Le reste de la division du polynôme $5x^{19} - 3x^{13} + 3x^2 - 2$ par le polynôme $x + 1$ vaut

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** -1 **(D)** -2 **(E)** 3

4. Fractions [1976]

$$\frac{1}{3-\frac{1}{3-\frac{1}{3-\frac{1}{3}}}} =$$

(A) $\frac{21}{55}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{8}{3}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

5. Polyèdre [1977]

Le polyèdre convexe (volume à faces planes) dont les sommets sont les centres des faces d'un cube comporte

(A) 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces ;
(B) 6 sommets, 10 arêtes, 8 faces ;
(C) 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces ;
(D) 8 sommets, 12 arêtes, 8 faces ;
(E) 6 sommets, 10 arêtes, 6 faces.

6. Reste de la division [1979]

2^{1979} divisé par 17 livre un reste égal à

(A) 1 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 13

7. Somme de chiffres [1976]

La somme des chiffres (en base 10) du nombre $(10^{4n^2+8}+1)^2$ où n est un entier positif, est égale à

(A) 4 **(B)** $4n$ **(C)** $4n^2$ **(D)** $4n^2+8$ **(E)** n

8. Produit de sommes [1981]

$(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)(1+3^{16})(1+3^{32}) =$

(A) $\frac{3^{64}-1}{2}$ **(B)** $\frac{3^{63}-1}{2}$ **(C)** $\frac{3^{62}+3^{32}-4}{2}$
(D) $\frac{3^{62}+3^{32}+4}{2}$ **(E)** $1+3^{64}$

9. Fonction et dérivée [1979]

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, partout définie, admet pour dérivée la fonction

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{-x^2}.$$

On peut en déduire que

(A) f est croissante
(B) f est décroissante
(C) f est constante
(D) f admet un maximum en $x = 0$
(E) f admet un minimum en $x = 0$

10. Continuité [1978]

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

(A) est continue partout
(B) est continue sur $\mathbb{R}_0$
(C) est continue en 0
(D) est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$
(E) est continue sur $\mathbb{R}_0^+$, mais pas sur $\mathbb{R}_0^-$

11. Régions du plan [1977]

n droites distinctes d'un même plan se coupent deux à deux en des points distincts. Elles partagent ce plan en p régions disjointes. On a

(A) $p = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ **(B)** $p = 2n$ **(C)** $p = 2n + 1$
(D) $p = 4n - 5$ **(E)** $p = n^2$

14. Tétraèdre régulier [1980]

$abcd$ est un tétraèdre régulier, m est le milieu de $[ab]$ et n est le milieu de $[cd]$. Quelle est la forme de la section du tétraèdre par le plan médiateur de $[mn]$?

(A) un triangle
(B) un carré
(C) un rectangle non carré
(D) un parallélogramme non carré
(E) un losange non carré

13. La planète du Petit Prince [1987]

Le Petit Prince, qui mesure 1,2 mètre, se promène le long de l'équateur de sa planète. Sa tête décrit donc un cercle plus grand que celui décrit par ses pieds. Quelle est approximativement la différence de longueur (en mètres) entre ces deux cercles ?

(A) $1,2 \times 3,14$ **(B)** $(1,2)^2 \times 3,14$
(C) $1,2 \times 6,28$ **(D)** $(1,2)^2 \times 6,28$
(E) Il manque le rayon de la planète pour pouvoir répondre

14. Bissectrice [1983]

Le point D se trouve sur le côté CB du triangle ABC. Si $\widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60°$, si $AC = 3$ et $AB = 6$, alors la longueur de AD est

(A) 2 **(B)** 2,5 **(C)** 3 **(D)** 3,5 **(E)** 4

15. Longueur d'un côté (srp) [1985]

Dans le triangle abc, l'angle en c est obtus et vaut trois fois l'angle en a, la longueur de $[bc]$ vaut 27 et la longueur de $[ab]$ vaut 48. que vaut la longueur de $[ac]$?

16. Celsius et Fahrenheit (srp) [1987]

Pour convertir en degrés Fahrenheit une température T donnée en degrés Celsius, on multiplie T par $\frac{9}{5}$, puis on ajoute 32. Quelle est, en valeur absolue, la température qui s'exprime de la même manière dans les deux systèmes ?

17. Combien de maisons ? (srp) [1986]

Dans la rue de la Gare, du côté des numéros impairs, une maison porte le numéro 87. Si la numérotation commençait à l'autre extrémité de la rue, elle aurait le numéro 69. Quel est le nombre de maisons du côté impair ?

18. Vacances [1982]

Un petit garçon est parti en vacances pendant n jours. À son retour voici ce qu'il raconte :

« Il y a eu 7 demi-journées avec de la pluie »

« Quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi »

« Il y a eu 5 matinées sans pluie »

« Il y a eu 6 après-midi sans pluie »

Que vaut n ?

(A) 7 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

Voici les solutions de ces 18 petits problèmes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	D	C	A	C	B	A	A	A
10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	B	C	A	35	40	78	B

Sur la non-rigidité d'un quadrilatère

Arslanova Julia Khanifovna, *Lyceum N1*

Traduction et adaptation : Claude Villers et Michel Ballieu.

Note : Le texte qui suit est le résumé d'une recherche présentée à l'occasion de « The Seventh All-Russian Conference of Young Researchers "Step into Future" » with international participation - Russia, Moscow, April 24-28, 2000.

Scientific Supervisor : E. N. Mikhailovich, Astrakhan State Technical Univ., Russia, Astrakhan

Introduction

La géométrie élémentaire permet d'établir qu'un triangle est effectivement une figure « rigide », alors qu'un quadrilatère ne l'est pas. Si nous prenons trois baguettes et les attachons par leurs extrémités, nous obtenons un triangle et aucun de ses côtés ne peut être déplacé ; autrement dit, il est impossible de modifier un quelconque angle. Cela signifie que la structure est rigide. Si, de la même façon, nous construisons un quadrilatère en attachant les extrémités successives des baguettes, la structure est non-rigide c'est-à-dire que, par déplacement des baguettes nous nous pouvons modifier leurs angles.

Cette propriété mécanique peut être exprimée mathématiquement : il est possible de démontrer l'isométrie de deux triangles grâce à celle des côtés correspondants mais l'isométrie de deux quadrilatères ne peut être justifiée par l'isométrie des quatre côtés correspondants ; en d'autres termes, il n'y a qu'un seul triangle dont on donne les trois côtés mais il existe une infinité de quadrilatères dont les quatre côtés sont donnés.

Le présent texte constitue un essai de description d'une famille de quadrilatères dont les quatre côtés sont donnés dans un ordre précis, c'est-à-dire qu'il tente de répondre à la question « Comment des quadrilatères donnés peuvent-ils être transformés "mécaniquement" en modifiant seulement leurs angles ? »

En outre, il arrive que certaines « grandeurs géométriques » ne subissent aucun changement à l'occasion de cette transformation, donc qu'elles sont invariantes. Par exemple, un produit scalaire de diagonales, l'angle des diagonales s'il est droit, etc. Le paragraphe 1 traite de ces invariants.

1. Les invariants par transformation

1.1. Définition

Nous dirons que le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ est obtenu « par transformation » du quadrilatère $ABCD$ si (NDT : en termes de longueurs)

$$\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ BC = B_1C_1 \\ CD = C_1D_1 \\ AD = A_1D_1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} AB = B_1C_1 \\ BC = C_1D_1 \\ CD = A_1D_1 \\ AD = A_1B_1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} AB = C_1D_1 \\ BC = A_1D_1 \\ CD = A_1B_1 \\ AD = B_1C_1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} AB = A_1D_1 \\ BC = A_1B_1 \\ CD = B_1C_1 \\ AD = C_1D_1 \end{cases},$$

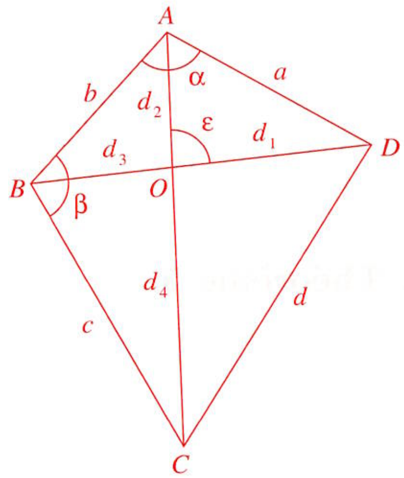
Math-Jeunes n°99 S,16–22, 2001

c'est-à-dire si un quadrilatère peut être obtenu à partir d'un autre dont on modifie seulement les angles sans changer les longueurs des côtés.

Si nous fabriquons un quadrilatère à l'aide de baguettes articulées en leurs extrémités, alors nous obtiendrons un nouveau quadrilatère dont les angles aux sommets sont différents en faisant bouger simplement les côtés. Pour simplifier, nous désignerons dorénavant les longueurs et les côtés du quadrilatères successivement par a, b, c et d. Cela signifie que les longueurs citées dans cette séquence sont celles de côtés contigus et qu'en conséquence $a < b + c + d$, $b < a + c + d$, $c < a + b + d$, $d < a + b + c$.

Soit donc :

- α l'angle formé par les côtés a et b,
- β l'angle formé par les côtés b et c,
- γ l'angle formé par les côtés c et d,
- δ l'angle formé par les côtés d et a,
- ε l'angle formé par les diagonales et opposé au côté a,
- D_1 la diagonale joignant les sommets des angles β et δ,
- D_2 la diagonale joignant les sommets des angles α et γ.



Puisque l'égalité de quatre côtés ne suffit pas pour assurer l'isométrie des quadrilatères, des cas d'isométrie de quadrilatères ne peuvent être formulés et démontrés qu'en utilisant cinq éléments. En particulier, la démonstration de ce qui suit est immédiate.

1.2. Théorème 1

Si quatre côtés et une diagonale d'un quadrilatère sont respectivement égales aux quatre côtés et à la diagonale correspondante d'un autre quadrilatère alors ces deux quadrilatères sont isométriques. Par exemple si $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$; $d = d'$; $D1 = D1'$.

1.3. Théorème 2

Si les quatre côtés et l'angle en un sommet de deux quadrilatères sont respectivement égaux, alors les quadrilatères sont isométriques. Par exemple si $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$; $d = d'$; $\alpha = \alpha'$.

1.4. Théorème 3

Si trois côtés d'un quadrilatère sont respectivement égaux à trois côtés d'un autre quadrilatère et si les deux angles entre ces côtés sont respectivement égaux aux deux angles correspondants, alors ces quadrilatères sont isométriques. Par exemple, si $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$; $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$.

1.5. Théorème 4

Si deux côtés et les trois angles qui leur sont adjacents sont respectivement égaux dans deux quadrilatères, alors ces quadrilatères sont isométriques. Par exemple si $a = a'$; $b = b'$; $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\delta = \delta'$.

Cette liste de cas d'isométrie peut être poursuivie en choisissant cinq autres éléments des quadrilatères. Les théorèmes 1 et 2 sont les plus intéressants pour ce qui va suivre. En relation avec notre recherche, cela signifie que nous pouvons choisir la longueur D_1 d'une diagonale ou la valeur de l'angle α entre les côtés d'un quadrilatère comme paramètre caractérisant la famille des quadrilatères obtenus par transformations d'un quadrilatère donné. Autrement dit, on peut établir une correspondance biunivoque entre les quadrilatères résultant des transformations d'un quadrilatère donné par transformations et la longueur D_1 d'une diagonale ou la valeur d'un angle α entre des côtés. Pour la suite de notre analyse, nous aurons besoin d'un certain nombre d'invariants par la transformation du quadrilatère ce qui, en l'occurrence, présente un intérêt propre.

1.6. Théorème 5

Le produit scalaire des diagonales d'un quadrilatère ([1]) (produit scalaire défini comme le produit des longueurs des diagonales par le cosinus de leur angle orienté) ne change pas par les transformations de ce quadrilatère.

Preuve : Soit $abcd$ un quadrilatère et O le point commun aux diagonales. Ce point O partage les diagonales en segments dont les longueurs sont notées d_1, d_2, d_3, d_4, avec $D_1 = d_1 + d_3$, $D_2 = d_2 + d_4$.

Le théorème du cosinus appliqué au triangle AOD puis au triangle AOB donne :

$$\begin{cases} a^2 &= d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\varepsilon \\ b^2 &= d_2^2 + d_3^2 + 2d_2 \cdot d_3 \cdot \cos\varepsilon \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, la deuxième égalité de la première nous obtenons :

$$d_1^2 - d_3^2 - 2d_2(d_1 + d_3) \cdot \cos\varepsilon = a^2 - b^2 \tag{1}$$

De la même manière, le théorème du cosinus appliqué au triangle DOC et au triangle COB donne :

$$\begin{cases} d^2 &= d_4^2 + d_1^2 + 2d_4 \cdot d_1 \cdot \cos\varepsilon \\ c^2 &= d_3^2 + d_4^2 - 2d_3 \cdot d_4 \cdot \cos\varepsilon \end{cases}$$

Par soustraction nous obtenons :

$$d_1^2 - d_3^2 + 2d_4(d_1 + d_3) \cdot \cos\varepsilon = d^2 - c^2 \tag{2}$$

De la même façon, le triangle AOD et le triangle DOC donnent :

$$d_2^2 - d_4^2 - 2d_1(d_2 + d_4) \cdot \cos\varepsilon = a^2 - d^2 \tag{3}$$

([1]) Par exemple, le produit scalaire de $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{BD}$.

Et les triangles AOB et BOC :

$$d_2^2 - d_4^2 + 2d_3(d_2 + d_4) \cdot \cos\varepsilon = b^2 - c^2 \tag{4}$$

En conséquence, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(d_1 - d_3)(d_1 + d_3) - 2d_2(d_1 + d_3) \cdot \cos\varepsilon &= a^2 - b^2\\(d_1 - d_3)(d_1 + d_3) + 2d_4(d_1 + d_3) \cdot \cos\varepsilon &= d^2 - c^2\\(d_2 - d_4)(d_2 + d_4) - 2d_1(d_2 + d_4) \cdot \cos\varepsilon &= a^2 - d^2\\(d_2 - d_4)(d_2 + d_4) + 2d_3(d_2 + d_4) \cdot \cos\varepsilon &= b^2 - c^2\end{aligned}$$

Comme $d_1 + d_3 = D_1$ et $d_2 + d_4 = D_2$, il vient :

$$\begin{aligned}D_1(d_1 - d_3 - 2d_2 \cdot \cos\varepsilon) &= a^2 - b^2 \qquad & D_2(d_2 - d_4 - 2d_1 \cdot \cos\varepsilon) &= a^2 - d^2\\D_1(d_1 - d_3 + 2d_4 \cdot \cos\varepsilon) &= d^2 - c^2 \qquad & D_2(d_2 - d_4 + 2d_3 \cdot \cos\varepsilon) &= b^2 - c^2\end{aligned}$$

Ainsi, $2D_1 \cdot D_2 \cdot \cos\varepsilon = -a^2 + b^2 - c^2 + d^2$ ou encore

$$D_1 \cdot D_2 \cdot \cos\varepsilon = \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2}.$$

Il est évident que le produit scalaire des diagonales D_1 et D_2 est le membre de gauche de la dernière équation et que le membre de droite représente une valeur qui ne change pas sous l'effet des transformations du quadrilatère. Le produit scalaire des diagonales est donc un invariant par ces transformations qui vaut

$$\frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2}.$$

1.7. Corollaire 1

Si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, elles restent perpendiculaires par les transformations de ce quadrilatère.

Preuve : Si, dans un quadrilatère de côtés a, b, c, d, les diagonales sont perpendiculaires, c'est-à-dire que $\varepsilon = 0$, alors leur produit scalaire est nul. Par application du théorème 5, ce produit scalaire reste nul lors des transformations du quadrilatère et donc, les diagonales restent perpendiculaires.

1.8. Corollaire 2

Le produit de l'aire (S) du quadrilatère par la cotangente de l'angle de ses diagonales est invariant par les transformations et

$$S \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{4}.$$

Preuve : Par le théorème 5, on a :

$$D_1 \cdot D_2 \cos\varepsilon = \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2}.$$

D'autre part, l'aire du quadrilatère est égale à $\frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot D_2 \sin\varepsilon$ (pourquoi ?). En combinant ces deux égalités et en se rappelant que $0 < \varepsilon < \pi$, donc que $\sin\varepsilon \neq 0$, nous obtenons :

$$S \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

1.9. Corollaire 3

L'expression

$$(D_1 \cdot D_2)^2 - 4S^2 = \frac{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{4}$$

est également un invariant des transformations.

Preuve : Le théorème 5 donne

$$D_1 \cdot D_2 \cdot \cos\varepsilon = \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2}.$$

De plus, en accord avec une formule déjà citée, on a :

$$D_1 \cdot D_2 \cdot \sin\varepsilon = 2S.$$

Élevons ces deux égalités au carré. Nous obtenons :

$$(D_1 \cdot D_2)^2 \cdot \cos^2\varepsilon = \left(\frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2}\right)^2 \tag{5}$$

$$(D_1 \cdot D_2)^2 \cdot \sin^2\varepsilon = 4S^2 \tag{6}$$

Additionnons (5) et (6) membre à membre et nous obtenons :

$$(D_1 \cdot D_2)^2 - 4S^2 = \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Transformations et valeurs extrêmes

Il est naturel de rechercher quels quadrilatères possédant des valeurs extrêmes (l'aire maximale, le plus grand angle entre les diagonales, etc.) peuvent être obtenus par les transformations d'un quadrilatère donné.

Le texte qui suit montre effectivement comment quatre segments donnés peuvent être positionnés, dans un ordre déterminé, de manière à délimiter la plus grande aire.

2.1. Théorème 6

Le quadrilatère dont le paramètre α (angle entre les côtés a et b) vérifiant la relation

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

possède l'aire maximale parmi tous les quadrilatères obtenus par transformations d'un quadrilatère donné. Il est inscriptible.

Preuve : Soit donc un quadrilatère de côtés a, b, c, d et d'angle α formé par a et b. Montrons d'abord que

$$-1 < \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} < 1.$$

Cela revient à montrer que

$$-2(ab+cd) < a^2+b^2-c^2-d^2 < 2(ab+cd),$$

ou encore que

$$\begin{cases} (a+b)^2 > (c-d)^2 \\ (a-b)^2 < (c+d)^2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a+b > |c-d| \\ |a-b| < c+d \end{cases} \text{ou} \begin{cases} -a-b < c-d < a+b \\ -c-d < a-b < c+d \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a < b+c+d \\ b < a+c+d \\ c < a+b+d \\ d < a+b+c. \end{cases}$$

Or, au début de la section 1, nous avons mentionné que nous ne considérions que les quadrilatères satisfaisant les égalités du système précédent. Dès lors

$$\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \text{ est bien dans l'intervalle } [-1,1].$$

Définissons

$$\alpha = \arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

d'où $0<\alpha<\pi$ et il existe un triangle de côtés a, b et d'angle compris α. On peut obtenir son troisième côté D_1 par la formule :

$$D_1^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha = \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}.$$

Considérons un autre triangle de côtés c et d et d'angle $\gamma=\pi-\alpha$ compris. Son troisième côtéD_1' satisfait la relation

$$D_1'^2 = c^2+d^2-2cd\cos\gamma = \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}.$$

Il est évident que $D_1 = D_1'$. Si nous juxtaposons les deux triangles par leur côté de même longueur, de part et d'autre de ce côté, nous pouvons obtenir un quadrilatère de côtés consécutifs a, b, c, d avec un angle α compris entre les côtés a et b. L'angle compris entre les côtés c et d est alors égal à $\pi-\alpha$, donc la somme de ces deux angles opposés est π. Ce quadrilatère est donc inscriptible. Par conséquent, tout quadrilatère peut être transformé en un quadrilatère inscriptible avec

$$\alpha = \arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Le théorème 5 et le corollaire 1 affirment que l'angle des diagonales d'un quadrilatère n'est conservé que si c'est un angle droit. Dès lors dans tous les autres cas, cet angle varie lors des transformations du quadrilatère.

Si l'angle ε des diagonales est un angle aigu, il le reste par toute transformation et il acquiert donc une valeur minimale pour un certain quadrilatère.

Le théorème suivant étudie le cas où cette valeur de l'angle ε est extrémale.

2.2. Théorème 7

Si $a^2+b^2 \neq c^2+d^2$, alors la valeur extrême de l'angle ε des diagonales au cours des transformations du quadrilatère donné est atteinte lorsque le paramètre α vérifie la condition :

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

c'est-à-dire pour un quadrilatère inscriptible. De plus,

$$\operatorname{tg}_{\text{extr}} = \frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{a^2-b^2+c^2-d^2}, \text{ où } p = 0,5(a+b+c+d).$$

Preuve : Le corollaire 3 affirme que

$$S \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{4}.$$

Puisque $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \neq 0$, on a $\operatorname{tg}_{\text{extr}} = \frac{4S}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$.

Le second membre de l'égalité est une fraction. Son dénominateur est invariant. Dès lors, il est immédiat que si $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, alors la valeur maximale de l'angle est obtenue quand l'aire S est maximale c'est-à-dire pour le quadrilatère inscriptible.

D'un autre côté, si $\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi$ et $\operatorname{tg}_{\text{extr}} = \frac{4S}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$, l'angle atteint sa valeur minimale lorsque le quadrilatère de côtés a, b, c, d possède une aire maximale, ce qu'il fallait démontrer.

Ce qui suit donne des indications sur une autre situation d'extremum obtenue par transformation, à savoir un trapèze, ce qui se produit lorsque l'angle de deux côtés opposés est minimal c'est-à-dire nul.

2.3. Théorème 8

Tout quadrilatère peut-être transformé en un trapèze.

Preuve : Démontrons que $-1 \leqslant \cos\beta = \frac{a^2-c^2-(b-d)^2}{2c(b-d)} \leqslant 1$.

Donc que

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2bd \leqslant 2bc - 2cd \\ a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2bd \geqslant 2cd - 2bc \end{cases} \text{ ou encore que}$$

$$\begin{cases} a^2 - (b^2 + c^2 + d^2 - 2bd + 2bc - 2cd) \leqslant 0 \\ a^2 - (b^2 + c^2 + d^2 - 2bd - 2bc + 2cd) \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} a^2 - (b + c - d)^2 \leqslant 0 \\ a^2 - (-b + c + d)^2 \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (a - b - c + d)(a + b + c - d) \leqslant 0 \\ (a + b - c - d)(a - b + c + d) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Il est évident que $a + b + c > d$ et $a + c + d > b$ pour tout quadrilatère (Définition 1).

Par conséquent, $\begin{cases} a + d \leqslant b + c \\ a + b) \geqslant c + d \end{cases}$ sont les conditions pour que le quadrilatère puisse devenir un trapèze.

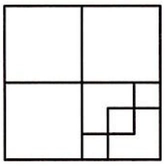
Soit le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ obtenu par une transformation du quadrilatère $ABCD$, et $A_1B_1 = a$, $B_1C_1 = b$, $C_1D_1 = c$, $A_1D_1 = d$. Conformément à la définition adoptée, une des quatre possibilités d'égalité des longueurs respectives des côtés est possible. En envisageant toutes les manières d'ordonner les côtés, on peut montrer que pour l'une d'elles, le système d'inégalités qui précède est établi et, par conséquent, que, pour un certain ordre d'énumération des côtés (pour faire simple nous dirons a, b, c, d, comme précédemment) $-1 \leqslant \frac{a^2 - c^2 - (b-d)^2}{2c(b-d)} \leqslant 1$ est établi. Dès lors, si nous considérons le quadrilatère pour lequel l'angle β formé par les côtés b et c vaut $\arccos \frac{a^2 - c^2 - (b-d)^2}{2c(b-d)}$, il sera aisé de démontrer que ce quadrilatère de côtés a, b, c, d et d'angle β formé par b et c est un trapèze.

Ainsi donc, nous avons établi un certain nombre de caractères géométriques qui sont invariants sous l'effet des transformations appliquées à un quadrilatère donné et nous avons montré que la famille des quadrilatères obtenus par ces transformations peut être décrite paramétriquement soit au moyen de l'angle α des côtés a et b, soit par la longueur de la diagonale D_1.

16 ème Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques
1 / 4 de finale individuels

DÉBUT CATÉGORIE CE

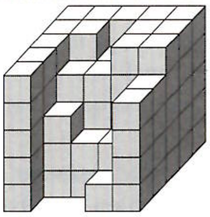
1 - LES CARRÉS (coefficient 1)
Comptez tous les carrés de la figure ci-contre.



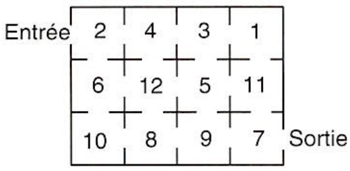
2 - LE CARREFOUR (coefficient 2)
Audrey arrive à un carrefour où elle peut lire les deux indications suivantes : « Mathville 88 km » et « Calculcity 40 km ». **Quelle est la distance entre Mathville et Calculcity, au maximum ?**

DÉBUT CATÉGORIE CM

3 - LE CUBE INCOMPLET (coef. 3)
Mathias voulait construire un grand cube de 5x5x5 petits cubes (sans trous). Il n'a pas pu le terminer. **Combien de petits cubes lui manquait-il ?**

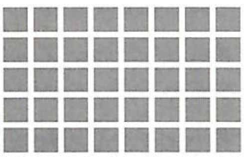


4 - VISITE ÉCLAIR AU MUSÉE (coefficient 4)
Le plan de ce musée indique le nombre de tableaux exposés dans chacune des douze salles. Mathias n'a le temps de visiter que six salles et il veut voir le plus grand nombre possible de tableaux. **Dessinez son trajet.**



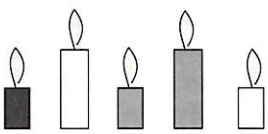
DÉBUT CATÉGORIE C1

5 - LA TABLETTE DE MATHILDE (coefficient 5)
Mathilde a une tablette de chocolat constituée de 5 x 8 carrés. À chaque fois qu'elle rencontre une amie, elle lui offre du chocolat en cassant une rangée horizontale ou verticale du reste de la tablette. **À combien d'amies, au maximum, peut-elle offrir du chocolat, si elle se garde le dernier carré ?**



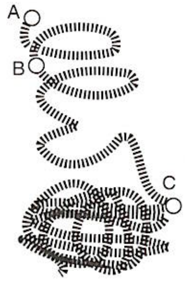
FIN CATÉGORIE CE

6 - LES BOUGIES (coef. 6)
Les bougies d'Alain et de Béatrice ont la même taille. Celles de Béatrice et de Claire ont la même couleur. Celles de Claire et Daniel n'ont pas la même taille. Enfin, celles de Daniel et d'Alain n'ont pas la même couleur. **Quelle est la bougie d'Elodie ?**

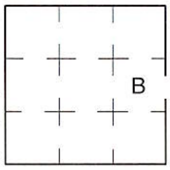


DÉBUT CATÉGORIES C2, L1, L2, GP, HC

7 - LA FICELLE DE LUDO (coef. 7)
Ludo a une ficelle sur laquelle il a fait trois noeuds A, B et C. Le morceau de ficelle AB correspond à un quinzième de la longueur totale de la ficelle et AC à un sixième. S'il enroule le morceau AB autour d'un tronc d'arbre, Ludo fait exactement deux tours. **Combien de tours Ludo peut-il effectuer sur le même tronc avec BC ?**



8 - LE PLAN DU MUSÉE (coefficient 8)
Ce musée expose dans neuf salles. La salle Braque (B) est indiquée. On trouve des cartes postales dans la salle Ernst (E). De la salle Van Gogh (V), on peut se rendre directement dans les salles Picasso (P), Cézanne (C) et Kandinski (K). De la salle Kandinski, on peut se rendre directement dans les salles Braque, Matisse (M) et Renoir (R). De la salle Dali (D), on ne peut pas se rendre directement dans la salle Braque. De la salle Matisse, on peut se rendre directement dans les salles Picasso et Dali. **Complétez le plan à l'aide des initiales des peintres.**



FIN CATÉGORIE CM

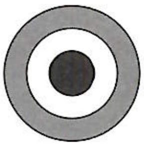
9 - FÉVRIER PALINDROME (coefficient 9)
On écrit les dates sous la forme "jjmmaaaa" (par exemple 01092001 pour le 1er septembre 2001). Le 20 février 2002 s'écrira 20022002. Un tel nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, est un nombre palindrome. **Quelle sera la date palindrome suivante ?**

10 - LES MAISONS AMIES (coefficient 10)
Ma rue comprend exactement 99 maisons numérotées de 1 à 99, les numéros pairs étant situés d'un côté et les impairs de l'autre. Il se trouve que lorsque deux maisons sont numérotées à l'aide de numéros à deux chiffres utilisant les deux mêmes chiffres dans un ordre différent, et que la différence entre les deux numéros (le plus grand moins le plus petit) est égale à 45, alors les familles qui habitent ces maisons sont amies. **Combien y a-t-il de paires de familles amies dans ma rue, au minimum ?**

11 - BON POUR UN 421 (coefficient 11)
Mathias et Mathilde jouent au jeu suivant. Ils ont écrit, dans cet ordre, les neuf chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 et ils essaient, en intercalant entre certains chiffres, une ou plusieurs fois, un ou plusieurs de symboles +, –, x et /, d'obtenir 421. Mathilde a écrit 1+2x3–45+6x78–9 = 421, tandis que Mathias a trouvé 12x34–56+78–9 = 421.
Proposez-leur une autre solution.

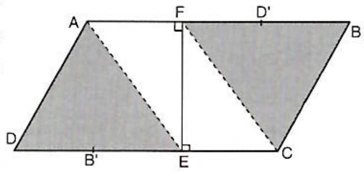
FIN CATÉGORIE C1

12 - LA CIBLE (coefficient 12)



Dans cette cible, le cercle moyen a un rayon double de celui du petit et le grand cercle a un rayon triple de celui du petit cercle. La cible a une aire totale égale à 1113 cm². **Quelle est l'aire de la zone blanche ?** On pourra prendre 22/7 pour π.

13 - LE PARALLÉLOGRAMME (coefficient 13)



Mathias a devant lui un parallélogramme de papier. Il le plie selon un segment [AE] de telle sorte que D vienne en D', puis le déplie et le plie à nouveau selon [CF] de telle sorte que B vienne en B'. On constate alors que (EF) est perpendiculaire aux côtés [AB] et [DC]. De plus, on sait que AD = 10 cm et AF = 5 cm. **Quelle est l'aire du parallélogramme ?** On pourra prendre, si besoin est, 1,414 pour $\sqrt{2}$;1,732 pour $\sqrt{3}$ et 3,14 pour π, et on arrondira si besoin est au cm² le plus proche.

FIN CATÉGORIE C2

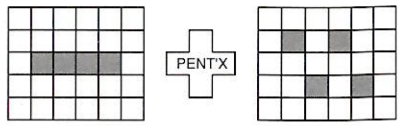
14 - RECTANGLE DE HASARD (coefficient 14)

Je lance deux dés à six faces, numérotées de 1 à 6. Les deux nombres obtenus sont la longueur et la largeur (en cm) d'un rectangle que je construis. Je m'aperçois alors qu'en augmentant d'un même nombre entier de cm la longueur et la largeur de ce rectangle, son aire double. **Quelle est l'aire, en cm², du rectangle doublé ?**

15 - LE VÉLO SANS CHAINE (coefficient 15)

Léa a trouvé un petit vélo auquel il manque la chaîne. Le grand pédalier denté a un rayon de 21 cm et la petite roue dentée un rayon de 3 cm, la distance entre les deux centres étant de 36 cm. **Quelle est, au minimum, la longueur de la chaîne que Léa doit acheter ?** On prendra 3,1416 pour π et 1,732 pour $\sqrt{3}$. On arrondira au mm le plus proche.

16 - LE RETOUR DE PENT'X (coefficient 16)



Pour que Pent'X puisse loger dans une maison, on doit pouvoir l'y poser de telle façon que ses contours coïncident avec les contours des petits carrés de la maison, sans qu'il recouvre un petit carré grisé.

Il suffit de griser 4 cases d'une grille à 5 lignes et 6 colonnes pour qu'elle devienne « inhabitable » par Pent'X, comme le rappellent les deux exemples ci-dessus.

Mais combien existe-t-il de façons différentes (y compris les deux précédentes) de griser ainsi 4 cases pour qu'elle devienne inhabitable par Pent'X ? Des grilles identiques par symétrie ou retournement seront comptées pour une seule.

FIN CATÉGORIES L1 GP

17 - LE POLYGONE MYSTÉRIEUX (coefficient 17)

Ludo vient de calculer le côté d'un polygone régulier à douze côtés (un dodécagone) inscrit dans un cercle de rayon 1. Il a trouvé $\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ cm. Papy Georges, qui passait par là, lui indique qu'un polygone régulier inscrit dans le même cercle a un côté mesurant, en cm : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$.

Combien ce polygone compte-t-il de côtés ?

18 - LE TERRAIN DU PÈRE C. CUSSION (coefficient 18)

Charles Cussion possède un terrain triangulaire sur lequel se trouve une mare parfaitement circulaire et tangente aux trois côtés du terrain, de diamètre 42 m. Charles clôt entièrement son terrain et remarque qu'un des points de tangence de la mare partage le côté correspondant du triangle en deux segments de longueurs respectives 23 m et 27 m. **Quelle est la longueur totale de la clôture du terrain du père C. Cussion ?** On donnera une réponse éventuellement arrondie au cm le plus proche.

FIN CATÉGORIES L2 HC

Les catégories sont les suivantes :

Les **catégories** sont les suivantes :

CE : Elèves de 3e année primaire
Résoudre les problèmes n°1 à n°5

CM : Elèves de 4e et 5e année primaire
Résoudre les problèmes n°3 à n°8

C1 : Elèves de 6e primaire et de 1er secondaire
Résoudre les problèmes n°5 à n°11

C2 : Elèves de 2e et 3e secondairre
Résoudre les problèmes n°7 à n°13

L1 : Elèves de 4e, 5e et 6e secondaire
Résoudre les problèmes n°7 à n° 16

L2 : Etudiants des candidatures universitaires
Résoudre les problèmes n°7 à n°18

GP : Grand public (adultes)
Résoudre les problèmes n°7 à n°16

HC : Haute compétition (adultes)
Résoudre les problèmes n°7 à n°18

Les différentes étapes :

Phase 1 : les quarts de finale - octobre à fin janvier 2002
Phase 2 : les demi-finales - le 16 mars 2002
Phase 3 : la finale belge - le 11 mai 2002 à Mouscron
Phase 4 : la finale internationale - fin août 2002 à Paris

Epreuves individuelles

Elles sont diffusées par la presse associée au championnat :
MATH-JEUNES, LE SOIR, TANGENTE,
LA CLASSE, HYPERCUBE, LA RECHERCHE.
A la 1re phase de l'épreuve la participation est entièrement gratuite, et il n'est pas nécessaire de répondre correctement à toutes les questions pour espérer se qualifier.

Epreuves collectives dans les établissements scolaires

L'instituteur, le professeur de mathématique peut organiser une épreuve collective en classe. Il lui suffit de demander un dossier de participation comportant les explications, le questionnaire, les solutions.

POUR TOUTE INFORMATION
FFJM - BP 157 - 7700 MOUSCRON

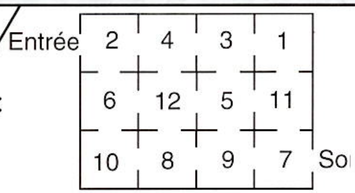
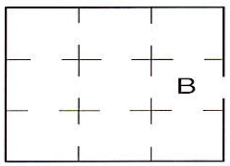
Télécopie : 056.33.14.53
Courriel : andre.parent@pi.be
Internet : http://www.ping.be/ffjm

BULLETIN REPONSE

à retourner **au plus tard le 31/1/2002**
à FFJM – B.P. 157 – 7700 Mouscron
MATH-JEUNES

Report du total

Nom : .... Prénom : ....
Adresse complète : ....
....
E-mail:: .... Tél : ....
CATEGORIE (impératif) **CE** ☐ **CM** ☐ **C1** ☐ **C2** ☐ **L1** ☐ **GP** ☐ **L2** ☐ **HC** ☐
☐ Adhérent FFJM en 2001 : n° FFJM ....
☐ J'adhère pour 2002 et je vire la somme de 5 € (CE et CM), 8 € (C1 et C2), 10 € (L1), 12 € (L2), 16 € (GP et HC) au compte 001-2215663-65 de FFJM – BP 157 – 7700 Mouscron

N° du Pb	Votre solution	Points (1-0)	Coef (0 à 6)
	catégorie : CE		
1	nombre de carrés :		
2	distance : km		
	catégories : CE CM		
3	n^bre^ de petits cubes :		
4	dessinez le trajet de Mathias : 		
	catégories : CE CM C1		
5	nombre d'amies :		
	catégories : CM C1		
6	numéro de la bougie d'Elodie :		
	catégories : CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
7	nombre de tours :		
8	indiquez l'initiale dans chaque salle : 		
	TOTAL		

BULLETIN REPONSE

(toutes catégories *sauf* **CM - Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !**)

N° du Pb	Nbre de solutions	Votre ou vos solutions	Points (1-0)	Coef. (0 à 16)
	catégories : C1 C2 L1 GP L2 HC			
9	**1 solution**	date suivante :		
10	**1 solution**	paires de familles		
11	**1 solution demandée**	....		
	catégories : C2 L1 GP L2 HC			
12	**1 solution**	aire de la zone blanche : .... cm^2		
13	**.... solution(s)**	1) .... cm^2 2) .... cm^2		
	catégories : L1 GP L2 HC			
14	**.... solution(s)**	1) aire du rect^gle^ : .... cm^2 2) aire du recyangle : .... cm^2		
15	**1 solution**	longueur de la chaîne : ....cm		
16	**1 solution**	n^bre^ de façons :		
	catégories : L2 HC			
17	**1 solution**	nombre de côtés :		
18	**.... solution(s)**	1) .... m 2) .... m		
		TOTAL		

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BALLIEU
Boulevard de l'Europe 36/1 – 1420 Braine-l'Alleud

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée