MATH JEUNES & mj JuNioR

21^{e} année
Mai 2000 - N° 94
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes
Rédaction, administration : Rue A. Moitroux 22, 7100 La Louvière.
Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Math-Jeunes junior
Rédaction, administration : Ch. de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour.
Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LALOUX, R. MIDAVAINE, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POURBAIX, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :
- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière
- pour *Math-Jeunes junior* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour

N° 94 Vingt et unième année 2000

Math-Jeunes

Ce numéro « spécial Olympiades » est commun à *Math-Jeunes* et à *Math-Jeunes junior*. Les abonnés aux deux revues ne s'étonneront donc pas de ne recevoir qu'un seul exemplaire.

Bonnes vacances!

Rallye problèmes

C. Festraets

Vous trouverez ci-dessous les solutions des problèmes numéros 11 à 15 publiés dans les *Math-Jeunes junior* n° 93 J et *Math-Jeunes* n° 93 dans l'ordre suivant :

1. La Bible (*Math-Jeunes junior* 93, problème 11)
2. Cinq chaises (*Math-Jeunes junior* 93, problème 12)
3. Trois cercles(*Math-Jeunes junior* 93, problème 15)
4. Les bougies (*Math-Jeunes junior* 93, problème 13 et *Math-Jeunes* 93, problème 12)
5. Des triples pythagoriciens (*Math-Jeunes junior* 93, problème 14 et *Math-Jeunes* 93, problème 15)
6. Le multimilliardaire (*Math-Jeunes* 93, problème 11)
7. Des sommes (*Math-Jeunes* 93, problème 13)
8. Un curieux pays (*Math-Jeunes* 93, problème 14)

Solution du problème « **La Bible** »

Soit a le nombre des dizaines et b le nombre des unités de x. On a les égalités :

$$x = 10a + b, \quad y = ab \quad \text{et} \quad x + y = 66$$

d'où :

$$\begin{aligned} 10a + b + ab &= 66 \\ b(1+a) &= 66 - 10a \\ b &= \frac{66 - 10a}{1+a} \\ &= 66 - \frac{76a}{1+a} \end{aligned}$$

Deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux, donc a et $1 + a$ n'ont pas de diviseurs communs. Pour que b soit entier, il faut que $1+a$ soit diviseur de 76. Les diviseurs de 76 sont 1, 2, 4, 19, 38, 76. Remarquons que a et b sont des nombres d'un seul chiffre et que a est différent de 0.

La seule valeur possible est $1 + a = 4$ donc $a = 3$ et $b = 66 - 57 = 9$.

Et de là $x = 39$ et $y = 3 \times 9 = 27$.

Solution du problème « **Cinq chaises** »

Si vous êtes assis sur une chaise de numéro impair et que vous faites un déplacement, vous êtes alors assis sur une chaise de numéro pair ; si vous faites un nombre impair de déplacements vous serez assis sur une chaise de numéro pair. Donc après 25 déplacements, à partir de la chaise 1, vous vous trouvez soit sur la chaise 2, soit sur la chaise 4 et quand vous aurez enlevé les chaises 1 et 5, vous pourrez reprendre votre place. Vous êtes maintenant

Math-Jeunes n°94,74–78, 2000

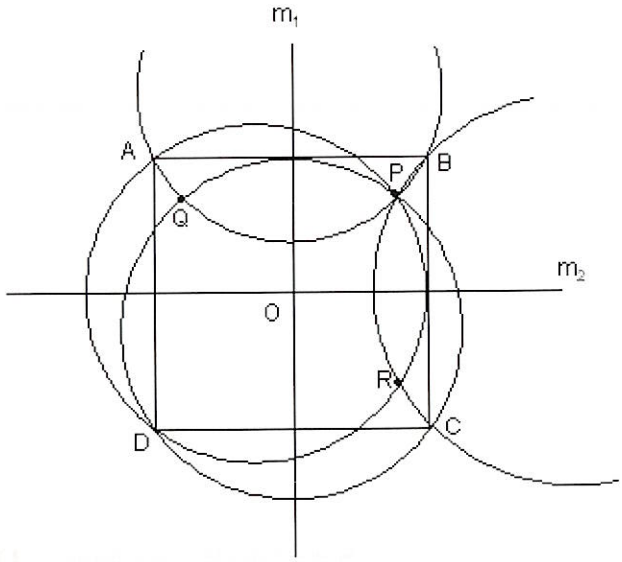
sur une chaise de numéro pair et vous faites 75 déplacements, c'est à dire un nombre impair de déplacements, cela vous amène sur une chaise de numéro impair et la seule qui reste est la chaise 3.

Solution du problème « **Trois cercles** »

La médiatrice m_1 de $[AB]$ est aussi celle de $[CD]$ et passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles PAB et PCD. Cette droite est aussi la médiatrice de la corde $[PQ]$ commune aux deux cercles.

La médiatrice m_2 de $[BC]$ est aussi celle de $[AD]$ et passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles PBC et PAD. Cette droite est aussi la médiatrice de la corde $[PR]$ commune aux deux cercles.

m_1 et m_2 se coupent en O et $m_1 \perp m_2$. La symétrie orthogonale d'axe m_1 applique Q sur P, la symétrie orthogonale d'axe m_2 applique P sur R. La composée de ces deux symétries est la symétrie centrale de centre O, elle applique Q sur R et donc $|QR| = 2|OQ| = 2|OR| = 2|OP|$.



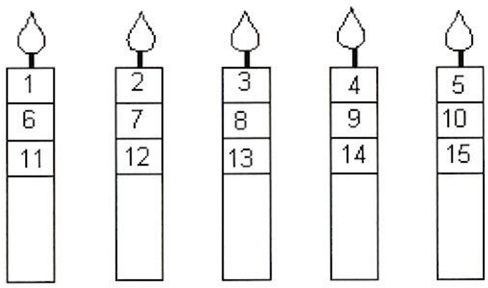
Solution du problème « **Les bougies** »

Appelons P la partie d'une bougie qui brûle en une heure.

1. Au bout de 5 jours, le nombre total de parties P qui auront brûlé successivement est :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 5 \times 3$$

Si on veut qu'après 5 jours, les 5 bougies soient consumées de manière identique, il faut que sur chacune on fasse brûler 3 parties P.



Numérotons ces parties P comme indiqué sur le dessin. Le 1er jour, on brûle la partie 1, le 2^{e} jour, les parties 2 et 3, le 3^{e} jour, les parties 4, 5 et 6, le 4^{e} jour, les parties 7, 8, 9 et 10 et le 5^{e} jour, les parties 11, 12, 13, 14 et 15.

2. S'il y a 6 bougies, le nombre total de parties P qui auront brûlé successivement en 6 jours est :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

21 n'est pas un multiple de 6, donc il est impossible de faire brûler sur chacune des 6 bougies le même nombre de parties P.

3. S'il y a n bougies, le nombre total de parties P qui auront brûlé successivement en n jours est :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Calculons cette somme :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+\cdots+& (n-2) &+& (n-1) &+& n \\ S &=& n &+& (n-1) &+& (n-2) &+\cdots+& 3 &+& 2 &+& 1 \\ \hline 2S &=& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) &+\cdots+& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) \\ &=& n(n+1) \end{array}$$

d'où :

$$S = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Il faut que S soit un multiple de n et dans ce cas, sur chacune des n bougies, on brûle $\frac{(n+1)}{2}$ parties P en utilisant le même procédé de numérotation que celui de la figure ci-dessus. Ceci n'est possible que dans le cas où n est un entier impair.

Solution du problème « **Des triples pythagoriciens** »

On a $a^2 + b^2 = c^2$

donc $a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$

b et c sont premiers entre eux, donc $c-b$ et $c+b$ le sont aussi. En effet, si $c-b$ et $c+b$ avaient un diviseur commun d différent de 1, alors d diviserait la somme $(c-b)+(c+b) = 2c$, la différence $(c-b)-(c+b) = -2b$ et le produit $(c+b)(c-b) = a^2$. Or a est impair, donc $d \neq 2$ et dans ce cas d diviserait a, b et c, ce qui est impossible dans un triple primitif.

1. $15^2 = (c+b)(c-b)$
   Puisque $c+b$ et $c-b$ sont premiers entre eux et que d'autre part $c+b > c-b$, on n'a que deux possibilités :

   $$\begin{cases} c+b = 15^2 = 225 \\ c-b = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} c+b = 5^2 = 25 \\ c-b = 3^2 = 9 \end{cases}$$

   ce qui nous donne
   $b = 112$, $c = 113$ ou $b = 8$, $c = 17$. Les deux triples pythagoriciens primitifs sont $(15, 112, 113)$ et $(15, 8, 17)$.

2. $1155^2 = (c+b)(c-b) = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121$. Ce tableau nous fournit les seules possibilités pour $c+b$ et $c-b$.

$c+b$	$c-b$
$9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121$	1
$25 \cdot 49 \cdot 121$	9
$9 \cdot 49 \cdot 121$	25
$9 \cdot 25 \cdot 121$	49
$9 \cdot 25 \cdot 49$	121
$49 \cdot 121$	$9 \cdot 25$
$25 \cdot 121$	$9 \cdot 49$
$9 \cdot 121$	$25 \cdot 49$

3. Soit N impair et admettant k diviseurs premiers $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Chacun de ces facteurs a deux possibilités, soit figurer dans $c+b$, soit figurer dans $c-b$. Ce qui nous donne au total 2^k possibilités. Mais comme il faut que $c+b > c-b$, ce nombre est divisé par 2, d'où 2^{k-1} triples pythagoriciens primitifs commençant par N.

Solution du problème « **Le multimilliardaire** »

Traitons un exemple avec un petit nombre $N = 983\,327 = 7 + 2 \times 10 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 9 \times 10^5$. Cherchons le reste de sa division par 11, il est le même que celui de :

$$7 + 2 \times (-1) + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^3 + 8 \times (-1)^4 + 9 \times (-1)^5 = 7 - 2 + 3 - 3 + 8 - 9$$

c'est à dire le chiffre des unités moins celui des dizaines plus celui des centaines etc. Mais on peut aussi écrire $N = (7 + 2 \times 10) + 10^2(3 + 3 \times 10) + 10^4(8 + 9 \times 10)$.

Le reste de la division par 11 d'une puissance paire de 10 est 1, donc le reste de la division par 11 de N est le même que celui de la division par 11 de $(7+2\times 10)+(3+3\times 10)+(8+9\times 10) = 27 + 33 + 98$, c'est à dire de la somme des tranches de deux chiffres prises à partir de la droite. Dans le problème proposé, la somme des tranches de deux chiffres est obtenue par l'un des frères et est $2\,000$; le reste de la division par 11 de $2\,000$ est 9, c'est le même reste que l'on obtient lorsqu'on divise par 11 le nombre obtenu par l'autre frère, c'est à dire le premier chiffre à droite moins le deuxième plus le troisième moins le quatrième, ... Or on sait que le second frère trouve un nombre positif d'un seul chiffre, ce nombre est donc 9.

Solution du problème « **Des sommes** »

Nous utiliserons la notation suivante $a \equiv b \pmod n$ signifiant que a et b ont le même reste dans la division par n. Par exemple

$25 \equiv 5 \equiv 1 \pmod 4$
$9^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 2$

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ n'est pas divisible par 6
   $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ est divisible par 6
   $1^4 + 2^4 + 3^4 = 98$ n'est pas divisible par 6
   $1^5 + 2^5 + 3^5 = 276$ est divisible par 6
   Quand l'exposant est pair
   $$1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} = 1 + 4^n + 9^n \equiv 1 + 1 + 0 \equiv 2 \pmod 3$$
   donc cette somme n'est pas divisible par 6.
   Quand l'exposant est impair
   $$\begin{aligned} 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 1 + 2 \times 4^n + 3 \times 9^n &\equiv 1 + 0 + 1 \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2 \\ &\equiv 1 + 2 + 0 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$
   cette somme est divisible par 2 et par 3, donc par 6.
2. Quand l'exposant est pair
   $$\begin{aligned} 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} &= 1 + 4^n + 9^n + 16^n \\ &\equiv 1 + 0 + 1 + 0 \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2 \\ &\equiv 1 + (-1)^n + (-1)^n + 1 \equiv 2 + 2 \times (-1)^n \pmod 5 \end{aligned}$$

cette somme est divisible par 2, mais elle n'est divisible par 5 que si n est impair, donc elle n'est divisible par 10 que si n est impair.

Quand l'exposant est impair

$$\begin{aligned}
1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1} &= 1+2\times 4^n+3\times 9^n+4\times 16^n \\
&\equiv 1+0+1+0\equiv 2\equiv 0 \pmod 2 \\
&\equiv 1+2(-1)^n+3(-1)^n+4\times 1^n\equiv 5+5\times(-1)^n \pmod 5 \\
&\equiv 0 \pmod 5
\end{aligned}$$

cette somme est divisible par 2 et par 5, donc par 10.

Solution du problème « **Un curieux pays** »

Si x et y ne sont pas premiers entre eux, ils ont un diviseur commun d. Il n'y a alors pas de plus grand montant qui ne peut être réalisé avec x et y, puisque c'est le cas pour tout montant qui n'est pas multiple de d. Comme on a l'information que 2 000 est le plus grand montant qui ne peut être réalisé avec x et y, c'est que x et y sont premiers entre eux et on a dans ce cas $x > 30$, donc, on a ainsi $29 < y-1 < 69$ et $y-1$ divise 2 000. Les diviseurs de 2 000 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1 000 et 2 000 ; les seuls qui conviennent pour $y-1$ sont 40 et 50. Si $y-1=40$, alors $x=1+50=51$ et $y=41$ et si $y-1=50$, alors $x=1+40=41$ et $y=51$. Les deux billets sont donc de 41 et 51 pesas. Curieux pays !

♣ ♣
♣

Le 26ème congrès de mathèmatiques de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française

Il se tiendra les mardi, mercredi et jeudi 22, 23 et 24 Août 2000 à l'Athénée Royal « Air Pur » de Seraing.

Participation gratuite - Possibilité de loger sur place.

Il est loisible à chacun, étudiant, membre ou non-membre, d'y assister en tout ou en partie comme il le souhaite.

Au programme :

Conférences plénières, exposés et ateliers, débats, forums d'idées, expositions à caractère mathématique, exposition « Math'artistes », présence d'éditeurs, de groupes pédagogiques, activités de détente, banquet, etc.

Le thème principal cette année est

2000 : année des mathématiques
2000 années de mathématiques

Un programme détaillé, des indications sur les contenus des interventions et une fiche d'inscription seront disponibles dès le 1er juin 2000 dans le périodique SBPM-Infor n° 117. Les non-membres peuvent l'obtenir en le réservant auprès de la SBPMef, rue de la Halle 15 B-7000 Mons, Tél/Fax : (0032)(0)65373729.

Invitation cordiale à tous !

Olympiades

Christian Van Hooste

Quelques mots

L'Olympiade Mathématique Belge de l'an 2000 vient de s'achever ce mercredi 26 avril avec les finales. Une fois de plus, ce fut un immense succès puisque vous étiez 21 720 à participer aux éliminatoires du 19 janvier. Le 1er mars, 2 217 d'entre vous ont été invités aux demi-finales et, enfin, vous étiez encore 110 à lutter pour la gloire au dernier stade de cette compétition.

Les rédactions de *Math-Jeunes* et de *Math-Jeunes junior* se réjouissent de constater qu'un si grand nombre de jeunes peuvent consacrer un, deux ou trois mercredis après-midi à résoudre des problèmes de math (pas toujours faciles), pour le plaisir, sans véritable arrière-pensée de profit autre qu'intellectuel. Elles vous en félicitent vivement et vous souhaitent de poursuivre aussi loin que possible votre rapport privilégié avec les mathématiques.

Ami lecteur, tu trouveras ci-après, dans l'ordre suivant, les grilles de correction des éliminatoires de janvier, quelques problèmes résolus tirés parmi les questions les moins bien réussies en demi-finale, les grilles de correction des demi-finales, les questions des finales et leurs solutions pour la moitié d'entre elles et enfin le palmarès de la vingt-cinquième Olympiade Mathématique Belge.

Éliminatoires

Grilles des réponses correctes

Questionnaire MINI

1	2	3	4	5
C	B	E	D	50
6	**7**	**8**	**9**	**10**
B	5	E	A	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**
D	E	A	A	C
16	**17**	**18**	**19**	**20**
12	725	C	B	B
21	**22**	**23**	**24**	**25**
B	D	E	C	C
26	**27**	**28**	**29**	**30**
D	D	D	C	B

Questionnaire MIDI

1	2	3	4	5
E	D	E	D	C
6	**7**	**8**	**9**	**10**
A	725	B	B	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**
E	E	D	D	B
16	**17**	**18**	**19**	**20**
C	A	A	A	C
21	**22**	**23**	**24**	**25**
50	C	B	A	C
26	**27**	**28**	**29**	**30**
B	36	C	B	15

Questionnaire MAXI

1	2	3	4	5
E	D	D	A	E
6	**7**	**8**	**9**	**10**
C	D	D	B	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**
A	144	C	B	50
16	**17**	**18**	**19**	**20**
B	B	C	B	D
21	**22**	**23**	**24**	**25**
B	E	D	E	150
26	**27**	**28**	**29**	**30**
A	E	64	C	A

Math-Jeunes n°94, 79–104, 2000

MINI Demi Finale

Question 13

Dans un parallélogramme, les longueurs de deux côtés consécutifs sont 3 et 5. Lequel des nombres suivants ne peut pas être son aire ?

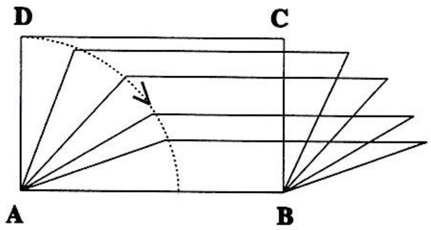
(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) 15 (E) 16

Base théorique

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la longueur d'un des côtés par la longueur de la hauteur correspondante, ce que l'on résume par la formule aire = base × hauteur.

Solution

Considérons un rectangle $ABCD$. Déformons-le en modifiant uniquement les angles comme s'il s'agissait d'un quadrilatère articulé (cf. figure). La longueur des côtés reste inchangée ; mais la hauteur correspondant à la base $[AB]$ varie : elle diminue au fur et à mesure que l'angle $\widehat{BAD}$ va de 90° vers 0°.



L'aire du parallélogramme $ABCD$ diminue avec la hauteur ; en fait, elle est proportionnelle à la hauteur puisque la base reste inchangée. Son aire est donc maximum lorsque ce parallélogramme est rectangle ; elle vaut alors 15.

En conséquence, l'aire du parallélogramme ne peut être égale à 16.

Réponse correcte : E.

Question 14 (sans réponse préformulée)

Additionnons deux nombres naturels premiers entre eux dont le plus petit commun multiple est 60. Quelle est la plus petite somme possible ?

Solution

La décomposition de 60 en facteurs premiers est $2^2 \times 3 \times 5$.

Deux naturels répondant aux conditions de l'énoncé ne peuvent avoir aucun facteur commun et leur produit doit être égal à 60. Dès lors, les seules paires possibles sont

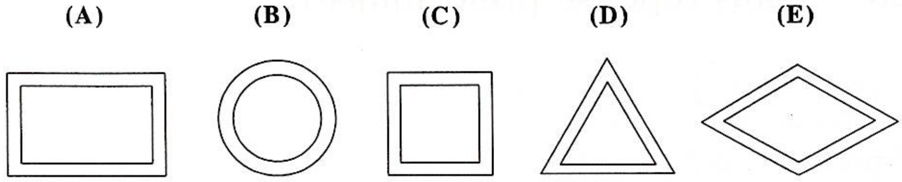
1 et 60, 3 et 20, 4 et 15, 5 et 12.

La paire 5 et 12 donne la plus petite somme, soit 17.

Réponse correcte : 17.

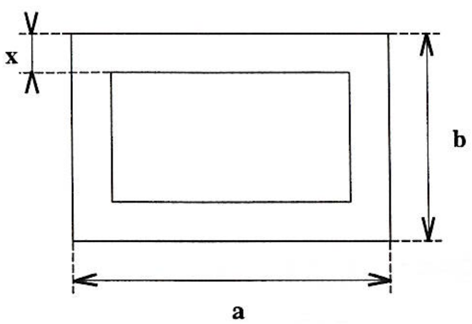
Question 25

Dans chacune des figures ci-dessous, la ligne intérieure est tracée à distance constante de la ligne extérieure. Dans quel cas la ligne intérieure n'est-elle pas une reproduction à l'échelle de la ligne extérieure ?



Solution

Le rectangle (figure **A**) se « déforme » lorsqu'on passe de la ligne extérieure à la ligne intérieure. Plus précisément, le rapport entre la longueur et la largeur change, ce qui permet d'affirmer que la ligne intérieure n'est pas une reproduction à l'échelle de la ligne extérieure.



En effet, notons respectivement a et b la longueur et la largeur du rectangle extérieur et x la distance entre les lignes extérieure et intérieure (cf. figure ci-dessus). Le rapport de la longueur à la largeur du grand rectangle et du petit rectangle sont respectivement $\frac{a}{b}$ et $\frac{a-2x}{b-2x}$. Pour que ces rapports soient égaux, il faut que

$$a(b-2x) = b(a-2x)$$

$$-2ax = -2bx$$

$$a = b$$

en supposant x non nul. Autrement dit, le carré est le seul rectangle qui conserve le même rapport '« longueur sur largeur ».

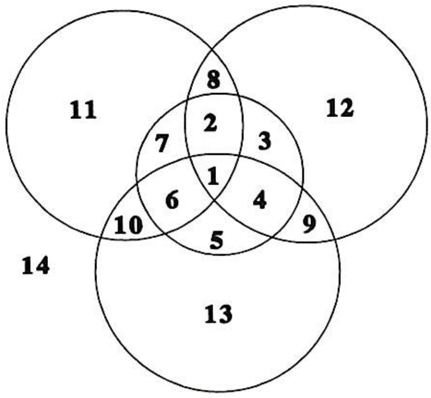
Nous te laissons le soin, cher lecteur, de vérifier que les autres figures (cercle, carré, triangle équilatéral, losange), du fait de leur « régularité », restent « semblablesb » à elles-mêmes lors du passage de la ligne extérieure à la ligne intérieure.

Réponse correcte : A.

Question 27 (sans réponse préformulée)

Quatre cercles d'un plan se coupent deux à deux en 2 points distincts. Trois de ces cercles n'ont jamais de point commun. En combien de régions partagent-ils le plan ?

Solution



La figure ci-dessus représente quatre cercles satisfaisant aux conditions de l'énoncé : chaque cercle coupe chacun des autres en deux points distincts et aucun point n'est commun à trois de ces cercles.

Ces cercles découpent le plan en 14 régions.

Réponse correcte : 14.

Question 28 (sans réponse préformulée)

Stéphane fait son jogging. Pour l'instant, il lui reste à parcourir la moitié de ce qu'elle a déjà couru. Un kilomètre plus tôt, il lui restait à courir le double de ce qu'elle avait déjà couru. Quelle est, en kilomètres, la longueur de son entraînement ?

Solution

Soit x la distance déjà parcourue à l'instant présent par Stéphane.

En exprimant de deux manières différentes (traduction mathématique des affirmations données) la longueur de l'entraînement de Stéphane, nous obtenons l'équation

$$x + \frac{x}{2} = 3(x-1)$$

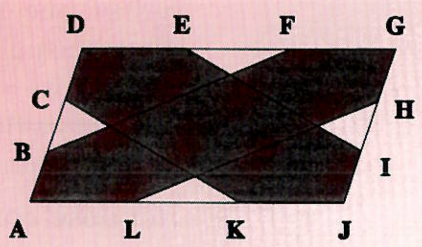
Cette équation est successivement équivalente à

$$\frac{3x}{2} = 3(x-1)$$
$$x = 2(x-1)$$
$$x = 2$$

La longueur de l'entraînement de Stéphane est donc de 3 km.

Réponse correcte : 3.

Question 30



Dans la figure ci-dessus, $ADGJ$ est un parallélogramme dont chaque côté est partagé en trois segments de même longueur par les points intermédiaires B, C, E, ... , L. Si l'aire du parallélogramme vaut 54, quelle est celle de la zone ombrée ?

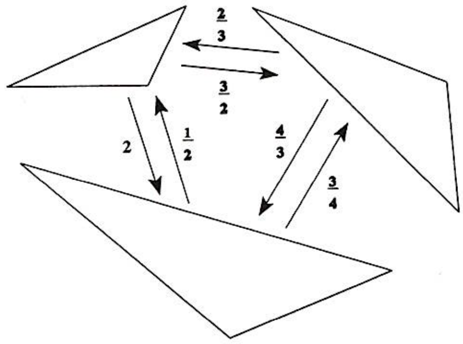
(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51
(E) Les données ne permettent pas de le déterminer.

Base théorique

Lorsqu'on multiplie toutes les dimensions d'une figure plane par un même nombre réel strictement positif k, l'aire de cette figure est multipliée par k^2.

De manière plus précise, si deux figures sont telles que toutes les dimensions de l'une peuvent être obtenues en multipliant toutes celles de l'autre par un même nombre réel strictement positif k, alors ces figures sont dites **semblables.** Le nombre k est appelé le **rapport de similitude.**

Par exemple, une reproduction à l'échelle d'une figure fournit deux figures semblables : l'original et son image. Le facteur d'agrandissement (ou de réduction) est le rapport de similitude. Les triangles représentés ci-dessous sont semblables ; le rapport de similitude y est indiqué.

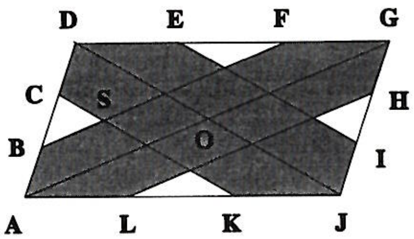


Si le rapport de similitude de deux figures semblables est égal à k, alors le rapport de leurs aires vaut k^2.

Solution

Appelons O le point commun aux diagonales AG et AJ du parallélogramme $ADGJ$ et S le troisième sommet du triangle laissé blanc de base $[BC]$ (cf. figure ci-dessous). Le triangle SBC est semblable au triangle OAD, la rapport de similitude valant $\frac{1}{3}$. Dès lors,

$$\text{aire } SBC = \frac{1}{9} \text{ aire } OAD = \frac{1}{36} \text{ aire } ADGJ.$$



Il en est de même pour tous les triangles non ombrés, de sorte que

$$\text{aire zone non ombrée } = 4 \text{ aire } SBC = \frac{1}{9} \text{ aire } ADGJ.$$

et

$$\text{aire zone ombrée } = \frac{8}{9} \text{ aire } ADGJ = \frac{8}{9} \times 54 = 48.$$

Réponse correcte : A.

MIDI Demi Finale

Question 13

La grandeur x est directement proportionnelle à y et inversement proportionnelle à z. Lorsque x vaut 5 et que z vaut 4, y est égal à 10. Que vaut y lorsque $x = 15$ et $z = 6$?

(A) 45 **(B)** 20 **(C)** 10 **(D)** 5 **(E)** $\frac{20}{9}$

Solution

Dire que la grandeur x est directement proportionnelle à y et inversement proportionnelle à z revient à dire qu'il existe un réel k tel que

$$x = k\,\frac{y}{z}.$$

Lorsque $x = 5$ et $z = 4$, alors $y = 10$. Cela donne

$$5 = k\,\frac{10}{4}\,;$$

d'où, nous tirons $k = 2$. Nous pouvons ainsi préciser le lien entre les variables x, y et z :

$$x = \frac{2y}{z}\,.$$

Cela étant, pour $x = 15$ et $z = 6$, nous avons

$$15 = \frac{2y}{6}$$

et, de là, $y = 45$.

Réponse correcte : A.

Question 19

Le nombre $2^{48} - 1$ possède exactement deux diviseurs compris entre 60 et 70. Quels sont-ils ?

(A) 61 et 63 **(B)** 61 et 65 **(C)** 63 et 65 **(D)** 61 et 67 **(E)** 63 et 69

Solution

En utilisant le produit remarquable bien connu

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

nous avons

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^{24}-1)(2^{24}+1) \\ &= (2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1) \\ &= (2^{6}-1)(2^{6}+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1) \\ &= 63 \times 65 \times (2^{12}+1)(2^{24}+1) \end{aligned}$$

Réponse correcte : C.

Question 24

Si, pour tout x, $f(x) = 4^x$, alors $f(x+1) - f(x) =$

(A) $f(x)$ **(B)** $2\,f(x)$ **(C)** $3\,f(x)$ **(D)** 4 **(E)** 1

Solution

Nous avons

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 4^{x+1} - 4^x \\ &= 4^x(4-1) \\ &= 3 \times 4^x \\ &= 3\,f(x) \end{aligned}$$

Réponse correcte : C.

Question 25

Les pêches coûtent 15 F chacune, les ananas 40 F et les melons 35 F. Mathilde a acheté 20 fruits pour 500 F, au moins un de chaque sorte. Combien de pêches a-t-elle achetées ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

Solution

Désignons respectivement par p, a et m le nombre de pêches, d'ananas et de melons achetés par Mathilde. Les conditions du problème donnent

$$\begin{cases} p + a + m = 20 \\ 15\,p + 40\,a + 35\,m = 500 \\ p \geq 1, \quad a \geq 1, \quad m \geq 1 \end{cases}$$

Dans la première équation, explicitons m et substituons dans la seconde équation après l'avoir simplifiée :

$$3\,p + 8\,a + 7(20 - p - a) = 100\ .$$

De manière plus simple, cette équation s'écrit

$$4\,p - a = 40$$

Pour $p = 10$, nous avons $a = 0$, ce qui n'est pas autorisé puisque on doit avoir $a \geq 1$.

Pour $p = 11$, nous obtenons $a = 4$ et $m = 20 - (a + p) = 5$.

Pour $p = 12$, nous avons $a = 8$ et $m = 0$, ce qui n'est pas permis.

La seule valeur possible de p est donc 11.

Réponse correcte : D.

Question 26 (sans réponse préformulée)

Un automobiliste se rend de Bruxelles à Paris. A la moitié du chemin, il réalise que sa vitesse moyenne est exactement de 120 km/h. Si sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet a été de 96 km/h, quelle a été, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne sur la seconde moitié du trajet ?

Base théorique

La vitesse moyenne v sur un parcours s'obtient en divisant la distance parcourue Δx par la durée Δt du trajet :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ .$$

Solution

Soit D la distance parcourue (exprimée en km) par l'automobiliste (entre Bruxelles et Paris), Δt_1 et Δt_2 respectivement les durées (exprimées en heures) de la première moitié et de la seconde moitié du trajet.

D'après les données fournies dans l'énoncé, nous avons

$$120 = \frac{D}{2\Delta t_1} \qquad \text{et} \qquad 96 = \frac{D}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\ .$$

De là, nous tirons

$$\Delta t_1 = \frac{D}{240} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{D}{96}$$

$$\Delta t_2 = \frac{D}{96} - \frac{D}{240} = \frac{3\,D}{480} = \frac{D}{160}$$

La vitesse moyenne (exprimée en km/h) sur la seconde moitié du parcours est donc

$$v = \frac{D}{2\Delta t_2} = \frac{D}{\frac{D}{80}} = 80\ .$$

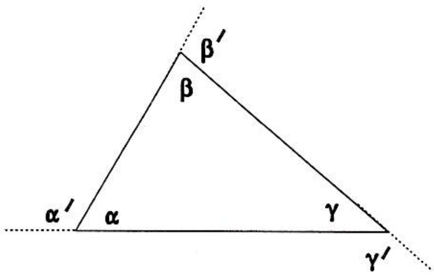
Réponse correcte : 80.

Question 27

Si les angles extérieurs α', β' et γ' d'un triangle sont proportionnels à 4, 5 et 6, alors les angles intérieurs correspondants sont proportionnels à

(A) 3, 2 et 1 **(B)** 4, 2 et 1 **(C)** 4, 3 et 1 **(D)** 7, 5 et 3 **(E)** 20, 15 et 8.

Solution



Traduisons mathématiquement le fait que les angles extérieurs α', β' et γ' du triangle sont proportionnels à 4, 5 et 6 :

$$\frac{\alpha'}{4} = \frac{\beta'}{5} = \frac{\gamma'}{6} \ .$$

De ces égalités, nous déduisons qu'il existe un angle ω tel que

$$\alpha' = 4\,\omega \ , \quad \beta' = 5\,\omega \quad \text{et} \quad \gamma' = 6\,\omega \ .$$

Par ailleurs, la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut 180°. Par conséquent, nous avons

$$(180° - \alpha') + (180° - \beta') + (180° - \gamma') = 180°$$

ou

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

De là, nous tirons

$$4\,\omega + 5\,\omega + 6\,\omega = 360°$$

et

$$\omega = 24° \ .$$

Les angles extérieurs du triangle sont donc

$$\alpha' = 96°, \quad \beta' = 120° \quad \text{et} \quad \gamma' = 144° \ .$$

Il s'ensuit que les angles intérieurs correspondants du triangle sont $\alpha = 180° - \alpha' = 84°$, $\beta = 180° - \beta' = 60°$ et $\gamma = 180° - \gamma' = 36°$.

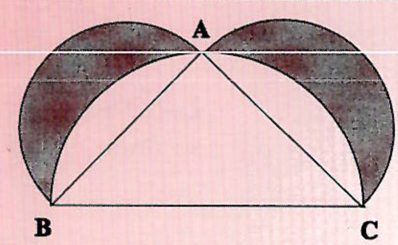
Le plus grand commun diviseur de 84, 60 et 36 étant 12, nous avons

$$\frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{3} = 12°$$

Ainsi, les angles intérieurs du triangle sont proportionnels à 7, 5 et 3.

Réponse correcte : D.

Question 28



Dans la figure ci-dessus, ABC est un triangle rectangle isocèle et $\|AB\| = 1$. Chacun des côtés de ce triangle est le diamètre d'un demi-cercle. Que vaut l'aire ombrée ?

(A) $\frac{1}{4}\pi$ **(B)** $\frac{1}{4}(\pi - 1)$ **(C)** $\frac{1}{4}(\pi + 1)$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** 1

Solution

Comme le triangle est isocèle, nous avons $\|AC\| = \|AB\| = 1$.

Par le théorème de Pythagore, il vient

$$\|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AC\|^2 = 2$$

donc

$$\|BC\| = \sqrt{2}\ .$$

L'aire ombrée est égale à l'aire du triangle augmentée des aires des demi-cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$ et diminuée de l'aire du demi-cercle de diamètre $[BC]$, soit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ .$$

Réponse correcte : D.

Question 29 (sans réponse préformulée)

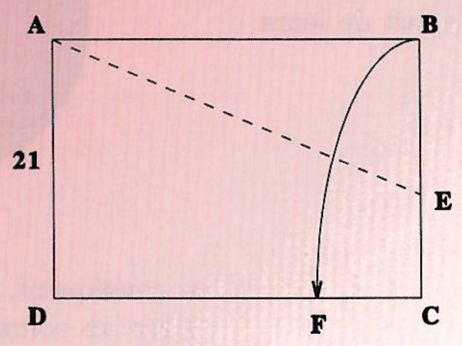
Dans un plan, deux polygones convexes ont l'un 21 côtés et l'autre 45. Combien ont-ils, au maximum, de points d'intersection ?
N.D.L.R. : on suppose que le nombre de points d'intersection est fini.

Solution

Il est assez aisé de comprendre que chaque côté du polygone convexe à 21 côtés pourrait être coupé par deux côtés consécutifs du polygone convexe à 45 côtés. Cela fait 42 points d'intersection. C'est un maximum. En effet, vu la convexité des polygones, un côté de l'un ne peut couper plus de deux côtés de l'autre.

Réponse correcte : 42.

Question 30

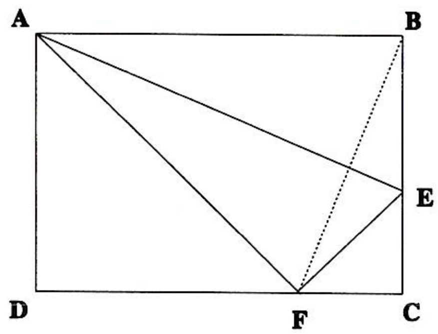


Ci-dessus est représentée une feuille de papier rectangulaire de largeur 21, qui a été pliée selon AE pour amener le coin B en F sur le côté $[CD]$. Si $\|CE\| = \|CF\|$, quelle est la longueur $\|AB\|$ de la feuille ?

(A) 29, 7 **(B)** 30 **(C)** $21\sqrt{2}$ **(D)** $21\sqrt{3}$ **(E)** $\sqrt{2000}$

Solution

Le fait de plier une feuille de papier fournit une concrétisation physique de la symétrie orthogonale dont l'axe est situé sur le pli (cf. figure ci-dessous). Ainsi, F est l'image de B par le symétrie d'axe AE. Il s'ensuit que $\|AF\| = \|AB\|$ et que $\widehat{AFE} = 90°$.



Par ailleurs, puisque $\|CE\| = \|CF\|$, le triangle rectangle CFE est isocèle. De là, $\widehat{CFE} = 45°$. Cela étant,

$$\widehat{AFD} = 180° - \widehat{AFE} - \widehat{CFE} = 45°.$$

À son tour, le triangle rectangle DAF est isocèle. En conséquence, $\|DF\| = \|AD\| = 21$ et, par le théorème de Pythogore

$$\|AF\|^2 = 2 \times 21^2.$$

Finalement, nous avons

$$\|AB\| = \|AF\| = 21\sqrt{2}\ .$$

Réponse correcte : C.

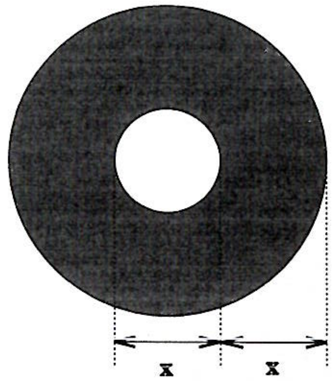
MAXI Demi Finale

Question 15 (sans réponse préformulée)

Une praline sphérique est constituée d'une couche de chocolat noir entourant une boule de chocolat blanc. Le diamètre de celle-ci est égal à l'épaisseur de la couche de chocolat noir. Quel est le rapport du volume du chocalat noir à celui du chocolat blanc.

Base théorique

Si le rapport de similitude de deux solides semblables est égal à k, alors le rapport de leurs volumes est égal à k^3.



Solution

Soit x le diamètre de la boule de chocolat blanc et l'épaisseur de la couche de chocolat noir (cf. figure). Le diamètre de la praline est ainsi égal à $3\,x$, de sorte que le rapport de similitude de la praline par rapport à la boule de chocolat blanc est égal à 3.

Par conséquent, le rapport du volume V de la praline au volume v de la boule de chocolat blanc est

$$\frac{V}{v} = 27$$

et le rapport du volume de chocolat noir au volume de chocolat blanc est

$$\frac{V - v}{v} = \frac{V}{v} - 1 = 26\ .$$

Réponse correcte : 26.

Question 21

Comme d'habitude, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $k \leq x$. Combien l'équation $x^2 + \lfloor x \rfloor - 2 = 0$, d'inconnue réelle x, admet-elle de solutions ?

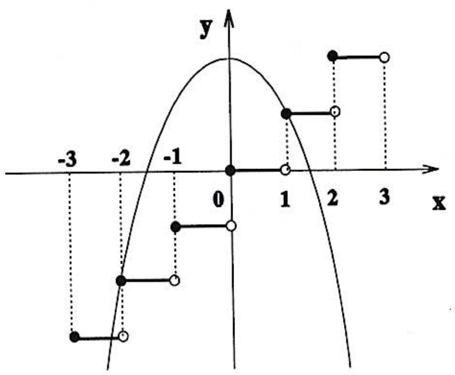
(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1 **(E)** 0

Solution

L'équation peut s'écrire

$$\lfloor x \rfloor = 2 - x^2 .$$

Ses solutions sont les abscisses des points communs aux graphiques des fonctions $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $g(x) = 2 - x^2$. Sur la figure ci-dessous, il est aisé de constater que ces deux graphiques ont exactement trois points communs. L'équation admet donc exactement trois solutions.



Nous pouvons même préciser celles-ci. En effet, deux d'entre elles sont -2 et 1 ; elles correspondent à deux points d'intersection évidents des graphiques. La troisième solution est comprise entre -3 et -2 . Pour cette solution, nous avons alors $\lfloor x \rfloor = -3$. Cela étant, l'équation donne $x^2 = 5$. Ainsi, la troisième solution est nécessairement $-\sqrt{5}$.

Réponse correcte : B.

Question 24 (sans réponse préformulée)

Parmi les paires de nombres dont le plus petit commun multiple est 720 et le plus grand commun diviseur 12, choisissons celle dont la somme est minimale. Que vaut alors cette somme ?

Solution

La décomposition de 720 en facteurs premiers est $2^4 \times 3^2 \times 5$.

Cela étant, déterminons les paires de nombres répondant aux conditions de l'énoncé.

Le PGCD des deux nombres étant égal à 12, ceux-ci ne peuvent avoir comme seuls facteurs communs que $2^2 \times 3$. Leur PPCM étant égal à 720, ils doivent se partager les autres facteurs premiers de 720, à savoir $2^2 \times 3 \times 5$. Les seules paires possibles sont donc

$$2^2 \times 3 = 12 \quad \text{et} \quad 2^2 \times 3 \times 2^2 \times 3 \times 5 = 720$$

$$2^2 \times 3 \times 2^2 = 48 \quad \text{et} \quad 2^2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$$

$$2^2 \times 3 \times 3 = 36 \quad \text{et} \quad 2^2 \times 3 \times 2^2 \times 5 = 240$$

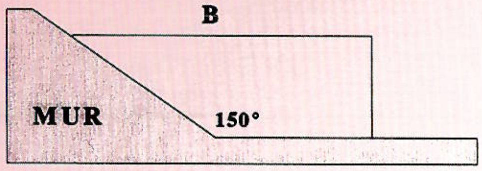
$$2^2 \times 3 \times 5 = 60 \quad \text{et} \quad 2^2 \times 3 \times 2^2 \times 3 = 144$$

La paire formée des nombres 60 et 144 est celle qui offre la plus petite somme, soit 204.

Réponse correcte : 204.

Question 26

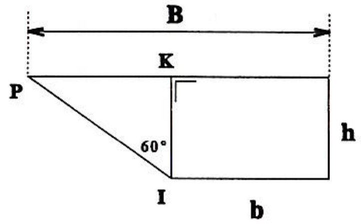
Un des coins d'une cour de ferme est formé par deux pans de mur dont l'angle est de 150°. Le fermier décide d'y placer un enclos pour ses poules, en forme de trapèze rectangle. S'il dispose de 10 m de treillis (et ne compte pas en placer le long des murs), quelle doit être, en mètres, la grande base B de ce trapèze, pour que son aire soit maximale ?



(A) 7 (B) 10 (C) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ (D) $10\,(2-\sqrt{3})$ (E) $10\,(\sqrt{3}-1)$

Solution

Appelons b la petite base du trapèze et h sa hauteur.



Dans le triangle KIP (cf. figure), rectangle en K, nous avons

$$\|PK\| = \|KI\| \text{ tg } 60°\,;$$

d'où

$$b = B - h\sqrt{3}\,.$$

Ainsi, l'aire du trapèze est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,h\,(B+b) = \frac{1}{2}\,h\,(2\,B - h\sqrt{3})\,.$$

De plus, la longueur du treillis étant de 10 m, nous avons

$$B + h = 10\,.$$

Ceci nous permet d'exprimer l'aire du trapèze en fonction de la seule variable B :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,(10-B)\left((2+\sqrt{3})\,B - 10\sqrt{3}\right)\,.$$

Comme cette expression est un polynôme du second degré, sa valeur maximale (le coefficient de B^2 étant négatif) se produit lorsque B est égal à la moyenne des racines, donc lorsque

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\left(10 + \frac{10\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) \\ &= 5\left(1+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\right) \\ &= 10\left(\sqrt{3}-1\right) \end{aligned}$$

Réponse correcte : E.

Question 27

Un fil de longueur L est coupé en deux, le point de section étant choisi au hasard, uniformément. Etant donné un réel $x \geq 1$, quelle est la probabilité que l'un des morceaux soit au moins x fois plus long que l'autre ?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{x}$ **(C)** $\frac{1}{1+x}$ **(D)** $\frac{2}{1+x}$ **(E)** Elle dépend de L .

Solution

Représentons le fil par le segment $[AB]$ (cf. figure).

Marquons alors sur ce segment les points C et D tels que

$$\|AC\| = x\,\|CB\| \quad \text{et} \quad \|BD\| = x\,\|AD\| .$$

Un point P choisi sur $[AB]$ au hasard (uniformément) est tel que $\|AP\| \geq x\,\|PB\|$ si et seulement si P appartient à $[CB]$ ou à $[AD]$. Dès lors, la probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$p = \frac{\|CB\| + \|AD\|}{\|AB\|} = \frac{2\,\|AD\|}{\|AB\|} .$$

Mais, de $\|BD\| = x\,\|AD\|$, nous tirons

$$\|AB\| - \|AD\| = x\,\|AD\|$$

ou

$$\|AD\| = \frac{1}{1+x}\,\|AB\| .$$

Par conséquent, la probabilité demandée est

$$p = \frac{2}{1+x} .$$

Réponse correcte : D.

Question 28 (sans réponse préformulée)

Soit n, b et $p \in \mathbf{N}$. Appelons *logarithme de n en base b modulo p* un naturel $l < p$ tel que $b^l - n$ est multiple de p . Quel est le logarithme de 3 en base 5 modulo 7 ?

Solution

Appliquons la définition donnée : le logarithme de 3 en base 5 modulo 7 est un naturel $l < 7$ tel que $5^l - 3$ est multiple de 7. Donc, 5^l doit être un multiple de 7, plus 3.

Or,

$$5^0 \equiv 1 \pmod 7$$
$$5^1 \equiv 5 \pmod 7$$
$$5^2 \equiv 4 \pmod 7$$
$$5^3 \equiv 6 \pmod 7$$
$$5^4 \equiv 2 \pmod 7$$
$$5^5 \equiv 3 \pmod 7$$

Ainsi, le logarithme de 3 en base 5 modulo 7 est égal à 5.

Réponse correcte : 5.

Question 29

Laquelle des doubles inégalités suivantes est vraie pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$?

(A) $x < x^x < x^{(x^x)}$ **(B)** $x^x < x < x^{(x^x)}$ **(C)** $x^{(x^x)} < x^x < x$

(D) $x^x < x^{(x^x)} < x$ **(E)** $x < x^{(x^x)} < x^x$

Base théorique

Une fonction exponentielle dont la base est strictement inférieure à 1 est strictement décroissante. Ainsi, si $x \in]0, 1[$, alors

$$y < z \iff x^y > x^z.$$

Solution

Pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} x^x > x &\iff x^{x-1} > x^0 \\ &\iff x - 1 < 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi.

De plus,

$$x^{(x^x)} < x^x \iff x^x > x.$$

Comme l'inégalité $x^x > x$ est vraie dans $]\frac{1}{2}, 1[$, nous en déduisons que l'inégalité

$$x^{(x^x)} < x^x$$

y est également vraie. Il nous reste à comparer x et $x^{(x^x)}$.

Pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} x^{(x^x)} > x &\iff x^{(x^x - 1)} > x^0 \\ &\iff x^x - 1 < 0 \\ &\iff x^x < x^0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première est vraie aussi.

En rassemblant les résultats ci-dessus, nous avons, pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$,

$$x < x^{(x^x)} < x^x.$$

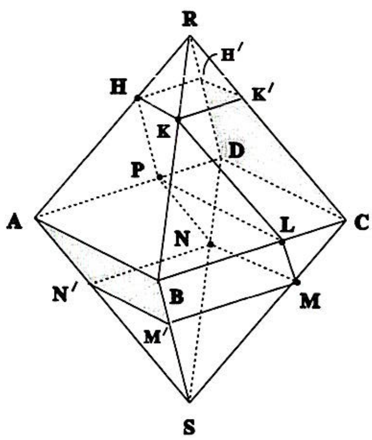
Réponse correcte : E.

Question 30

Un octaèdre régulier d'arête 6 est coupé par un plan parallèle à deux de ses faces. Chaque arête coupée par ce plan l'est au tiers de sa longueur. Quelle est l'aire de l'hexagone que l'octaèdre découpe dans le plan ?

(A) $12\sqrt{3}$ **(B)** $13\sqrt{3}$ **(C)** $48\sqrt{3}$ **(D)** $12 + 24\sqrt{3}$ **(E)** $18 + 36\sqrt{3}$

Solution



Soit $ABCDRS$ l'octaèdre régulier.

Supposons le plan parallèle aux faces ABS et CDR ; supposons encore qu'il coupe l'arête $[RA]$ au point H, situé au tiers de $[RA]$ à partir de R.

L'hexagone $HKLMNP$ que l'octaèdre découpe alors dans ce plan est tel que $\|RK\| = \frac{1}{3}\|RB\|$, $\|CL\| = \frac{1}{3}\|CB\|$, $\|CM\| = \frac{1}{3}\|CS\|$, $\|DN\| = \frac{1}{3}\|DS\|$ et $\|DP\| = \frac{1}{3}\|DA\|$.

De plus, les triangles RHK, BKL, CLM, SMN, DNP et APH créés par cette découpe sont tous équilatéraux. Ainsi,

$$\|HK\| = \|LM\| = \|NP\| = \frac{1}{3}\|AB\| = 2$$

et

$$\|KL\| = \|MN\| = \|PH\| = \frac{2}{3}\|RC\| = 4 .$$

Par ailleurs, la diagonale $[PL]$ de l'hexagone $HKLMNP$ est parallèle aux côtés $[HK]$ et $[NM]$ de sorte que $[PL]$ découpe l'hexagone en deux trapèzes isocèles. Parallèlement à l'arête $[BC]$ de l'octaèdre, le trapèze $HKLP$ se projette sur $H'K'CD$ dans la face RCD et le trapèze $NMLP$ se projette sur $N'M'BA$ dans la face SBA .

Comme les triangles $RH'K'$ et RDC d'une part et les triangles $SN'M'$ et SAB d'autre part sont semblables, nous avons

$$\text{aire } RH'K' = \frac{1}{9} \text{ aire } RDC$$

et

$$\text{aire } SN'M' = \frac{4}{9} \text{ aire } SAB$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\text{aire } HKLMNP &= \text{aire } PLKH + \text{aire } PLMN \\
&= \frac{8}{9} \text{ aire } RDC + \frac{5}{9} \text{ aire } SAB \\
&= \frac{13}{9} \text{ aire } SAB \\
&= \frac{13}{9} \times \frac{1}{2} \times \|SA\|^2 \times \sin 60^\circ \\
&= 13\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Réponse correcte : B.

Grilles des réponses correctes

Questionnaire MINI

1	2	3	4	5
E	D	A	D	E
6	7	8	9	10
4	D	B	E	A
11	12	13	14	15
B	18	E	17	C
16	17	18	19	20
15	A	30	C	B
21	22	23	24	25
A	B	E	D	A
26	27	28	29	30
5	14	3	C	A

Questionnaire MIDI

1	2	3	4	5
C	E	D	18	17
6	7	8	9	10
C	D	B	E	E
11	12	13	14	15
2	12	A	E	A
16	17	18	19	20
5	3	B	C	B
21	22	23	24	25
C	B et E	A	C	D
26	27	28	29	30
80	D	D	42	C

Questionnaire MAXI

1	2	3	4	5
E	D	C	2	A
6	7	8	9	10
14	3	648	E	D
11	12	13	14	15
B	C	A	D	26
16	17	18	19	20
A	C	D	B	A
21	22	23	24	25
B	42	C	204	D
26	27	28	29	30
E	D	5	E	B

N.B. Pour raison d'imprécision dans la rédaction de la question 22 MIDI, le jury national a décidé d'accepter les réponses B et E.

MINI Finale

Question 1

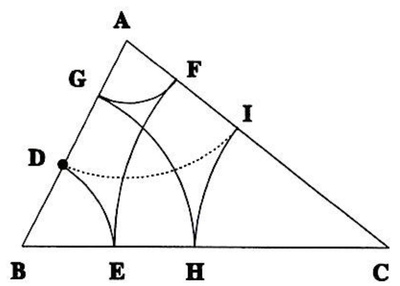
Alix, Bénédicte et Claude disposent chacune d'une plaque en bois de forme carrée, dont l'épaisseur vaut 1 cm. Les mesures en centimètres des côtés de ces plaques sont des nombres entiers impairs. Ces trois plaques sont découpées en petits cubes d'arête 1 cm par des traits de scie parallèles à leurs côtés. Ces cubes sont alors assemblés en un seul tas et les amies les utilisent pour former un maximum de cubes de 2 cm d'arête. Ce travail terminé, il reste trois petits unitaires qui n'ont pas servi. Expliquer que ceci était prévisible.

Question 2

Un triangle quelconque ABC a tous ses angles aigus. Soit D un point de $]AB[$. Le cercle $\mathcal{B}_1$ de centre B passant par D coupe $]BC[$ en E. le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre C passant par E coupe $]CA[$ en F. Le cercle $\mathcal{A}_1$ de centre A passant par F coupe $]AB[$ en G. Le cercle $\mathcal{B}_2$ de centre B passant par G coupe $]BC[$ en H. Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre C passant par C passant par H coupe $]CA[$ en I. (a) Montrer que le cercle $\mathcal{A}_2$ de centre A passant par I coupe $]AB[$ en D. (b) Dans quel(s) cas $\mathcal{A}_1$ passe-t-il par D ?

Solution

(a) Nous avons



$$\begin{aligned}
|AD| &= |AB| - |BD| \\
&= |AB| - |BE| \\
&= |AB| - (|CB| - |CE|) \\
&= |AB| - |CB| + |CF| \\
&= |AB| - |CB| + (|AC| - |AF|) \\
&= (|AB| - |AG|) - |CB| + |AC| \\
&= |BG| - |CB| + |AC| \\
&= |BH| - |CB| + |AC| \\
&= |AC| - (|CB| - |BH|) \\
&= |AC| - |CH| \\
&= |AC| - |CI| \\
&= |AI|
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que D appartient au cercle $\mathcal{A}_2$.

(b) Le cercle $\mathcal{A}_1$ passe par D si et seulement si $|AD| = |AG|$, donc (cf. la sixième ligne du calcul ci-dessus) si et seulement si

$$|AD| = |AB| - |CB| + |AC| - |AD|$$

ou

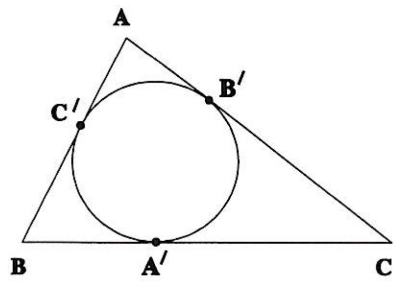
$$|AD| = \frac{|AB| + |AC| - |CB|}{2}$$

En posant $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$, cette condition s'écrit

$$|AD| = \frac{c+b-a}{2}$$

ou

$$|AD| = p - a$$



Considérons le cercle inscrit dans le triangle ABC (cf. fig. 14). Appelons respectivement C', B' et A' les points de contact de ce cercle avec les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Nous avons

$$|AC'| = |AB'|, \qquad |BA'| = |BC'|$$

et

$$|CA'| = |CB'|$$

de sorte que

$$2\,|AC'| + 2\,|BA'| + 2\,|CA'| = 2p$$

$$|AC'| + |BC| = p$$

$$|AC'| = p - a$$

Cela étant, nous pouvons exprimer de manière plus intéressante la condition à laquelle doit satisfaire D : le cercle $\mathcal{A}_1$ passe par D si et seulement si D est le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec le côté $[AB]$.

La démonstration ci-dessus est entièrement basée sur des manipulations de longueurs. Pour augmenter ton potentiel démonstratif, nous t'en proposons une autre, faisant appel aux transformations du plan. Elle est certes moins aisée à comprendre mais elle utilise des concepts plus riches. Libre à toi, si tu ne la saisis pas entièrement aujourd'hui, d'y revenir plus tard.

(a) Considérons (cf. fig. 9)

- la rotation r_A de centre A qui applique G sur F, donc la droite AB sur la droite AC,
- la rotation r_C de centre C qui applique F sur E, donc la droite CA sur la droite CB
- la rotation r_B de centre B qui applique E sur D, donc la droite BC sur la droite BA.

L'isométrie $i = r_B \circ r_C \circ r_A$ applique la droite AB sur elle-même. De plus, la somme des angles des rotations r_A, r_B et r_C valant 180°, i est nécessairement une symétrie centrale.

Plus précisément, l'isométrie i applique G sur D.

Appelons provisoirement K le point de AB dont l'image par r_A est I. Alors, i applique K sur G ou, réciproquement, G sur K. Comme G ne peut avoir qu'une seule image par i, les points K et D coïncident et, de ce fait, l'image de D par r_A est I. Par conséquent, D appartient au cercle $\mathcal{A}_2$.

(b) Le cercle $\mathcal{A}_1$ passe par D si et seulement si D et G coïncident, donc si et seulement si D est le centre de la symétrie centrale $i = r_B \circ r_C \circ r_A$.

Le centre d'une symétrie centrale est le seul point fixe de celle-ci. Or, reprenant les mêmes notations que dans la démonstration précédente en ce qui concerne les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec les côtés, nous déterminons aisément que i applique C' sur lui-même.

En conséquence, le cercle $\mathcal{A}_1$ passe par D si et seulement si D et C' coïncident, donc si et seulement si D est le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec le côté $[AB]$.

Question 3

Dans un hexagone convexe $ABCDEF$, $AB \parallel CF$, $CD \parallel BE$ et $EF \parallel AD$. Montrer que les triangles ACE et BDF ont la même aire.

Question 4

Avec trois chiffres distincts non nuls, il est possible de former six nombres de deux chiffres distincts. Quels sont ces six nombres si leur somme vaut 484 ? Ce problème admet-il une solution unique ?

Solution

Désignons par a, b, c les trois chiffres distincts.

Avec ces trois chiffres, nous pouvons former les six nombres suivants [1] :

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{ac} = 10a + c$$

$$\overline{ba} = 10b + a$$

$$\overline{bc} = 10b + c$$

$$\overline{ca} = 10c + a$$

$$\overline{cb} = 10c + b$$

Leur somme valant 484, nous avons

$$10(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c) = 484$$

ou

$$22(a + b + c) = 484$$

$$a + b + c = 22$$

De cette égalité, nous déduisons qu'au moins un des nombres a, b, c est strictement supérieur à 7. Le plus grand d'entre eux est donc égal à 8 ou à 9.

Supposons-le d'abord égal à 8. Alors, la somme des deux autres vaut 14. Dans ce cas, nous n'avons pas de solution (puisque les nombres a, b, c doivent être distincts).

Supposons à présent le plus grand des trois nombres a, b, c égal à 9. La somme des deux autres est alors égale à 13 ; ces derniers peuvent donc être 8 et 5 ou 7 et 6. Nous obtenons deux solutions pour lesquelles les six nombres de deux chiffres sont

58, 59, 85, 89, 95, 98 ou 67, 68, 76, 78, 86, 87.

MIDI Finale

Question 1

Sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ d'un parallélogramme $ABCD$, sont construits, extérieurement, les triangles équilatéraux ABF et ADE. Le triangle CEF est-il toujours équilatéral ?

Question 2

Trois nombres réels ont la propriété que chacun d'eux est égal au carré de la somme des deux autres. Quels sont ces trois nombres ?

Solution

[1] Nous utilisons a,b,c en tant que chiffres (c-à-d symboles typographiques) dans le membre de gauche et en qualité de nombre dans le membre de droite.

Appelons x, y et z les trois nombres.

Nous devons avoir

$$\left\{\begin{array}{l} x=(y+z)^2 \\ y=(x+z)^2 \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

En soustrayons membre à membre ces équations, nous obtenons le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=(y+z)^2-(x+z)^2 \\ y-z=(x+z)^2-(x+y)^2 \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=(y-x)(x+y+2z) \\ y-z=(z-y)(y+z+2x) \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \quad \text{ou} \quad x+y+2z=-1 \\ y-z=0 \quad \text{ou} \quad y+z+2x=-1 \\ \qquad\qquad z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

Il y a quatre façons de satisfaire ce dernier système.

Première possibilité.

$$\left\{\begin{array}{r} x=y \\ y=z \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

Dans ce cas, la troisième équation donne

$$z=4z^2$$

donc $z=0$ ou $z=\frac{1}{4}$. Nous obtenons ainsi deux solutions :

$$x=y=z=0 \quad \text{et} \quad x=y=z=\frac{1}{4}.$$

Deuxième possibilité.

$$\left\{\begin{array}{r} x=y \\ y+z+2x=-1 \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

Ici, les deuxième et troisième équations donnent

$$\left\{\begin{array}{r} 3x+z=-1 \\ z=4x^2 \end{array}\right.$$

D'où, il vient

$$4x^2+3x+1=0$$

Cette équation n'a pas de solution réelle car son discriminant Δ est strictement négatif. La deuxième possibilité n'amène donc pas de solution supplémentaire.

Troisième possibilité.

$$\left\{\begin{array}{r} y=z \\ x+y+2z=-1 \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

Comme dans le cas précédent, cette possibilité n'offre aucune solution.

Quatrième possibilité.

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+2z=-1 \\ y+z+2x=-1 \\ z=(x+y)^2 \end{array}\right.$$

Comme dans les deux cas précédents, aucune solution ne se dégage de cette possibilité.

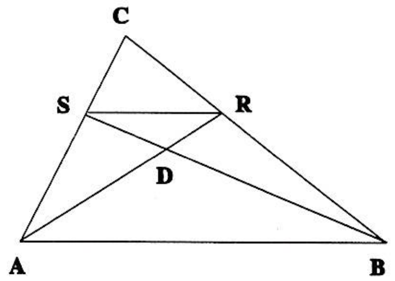
En définitive, le problème admet deux solutions : les nombres cherchés sont tous les trois égaux à 0 ou tous les trois égaux à $\frac{1}{4}$.

Question 3

Par les sommets A et B d'un triangle ABC, deux droites sont tracées de manière à partager l'intérieur du triangle en quatre régions : trois triangles et un quadrilatère. Si trois de ces régions ont la même aire, montrer que le quadrilatère est l'une d'entre elles.

Solution

Désignons par D le point commun aux droites issues de A et de B, décrites dans l'énoncé. Notons encore R le point d'intersection de AD et de BC et S le point d'intersection de BD et de AC (cf. figure).



Supposons que les triangles ADB, ADS et BDR ont la même aire.

Alors, les triangles ABR et ABS ont aussi la même aire. Par suite, les points R et S sont à la même "hauteur" par rapport au côté $[AB]$; autrement dit, la droite RS est parallèle à la droite AB. Ainsi, $ABRS$ est un trapèze (non parallélogramme).

Par ailleurs, comme les triangles BAD et BDR ont la même aire, D est le milieu de $[AR]$. De même, comme les triangles ABD et ADS ont la même aire, D est le milieu de $[BS]$. Dès lors, les diagonales du quadrilatère $ABRS$ se coupent en leur milieu . De ce fait, $ABRS$ est un parallélogramme. Ceci est contraire à ce que nous avons démontré plus haut, à savoir que $ABRS$ est un trapèze non parallélogramme.

Notre hypothèse de travail (ADB, ADS et BDR de même aire) ne peut donc être maintenue. En conséquence, si parmi les quatre régions déterminées par les droites AR et BS à l'intérieur du triangle ABC, trois d'entre elles ont la même aire, il ne peut s'agir des trois triangles ; donc, nécessairement, le quadrilatère $CRDS$ est l'une d'elles.

Question 4

Déterminer tous les entiers $u \leq v \leq w \leq x \leq y \leq z$ tels que

$$2^u + 2^v + 2^w + 2^x + 2^y + 2^z = 2000.$$

MAXI Finale

Question 1

Montrer que, si a, b et c sont trois nombres naturels distincts strictement supérieurs à 1, alors

$$\frac{a^2-1}{a^2} \cdot \frac{b^2-1}{b^2} \cdot \frac{c^2-1}{c^2} \geq \frac{5}{8}.$$

Question 2

Déterminer tous les réels a tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} : \sin(ax) = a \sin x \cos x.$$

Solution

Pour $x = \pi$, nous obtenons l'égalité

$$\sin(a\pi) = 0.$$

Dès lors, a doit être un entier pair.

D'autre part, pour $x = \frac{\pi}{4}$, nous avons

$$\sin(\frac{a\pi}{4}) = \frac{a}{2}.$$

Mais, comme la valeur d'un sinus doit être comprise entre -1 et 1, nous avons

$$-2 \leq a \leq 2.$$

Ainsi, les seules valeurs possibles pour a sont -2, 0 et 2. Ces trois réels conviennent car ils vérifient la condition imposée :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\sin(0x) = 0 = 0\sin x \cdot \cos x$$
$$\sin(-2x) = -\sin(2x) = -2\sin x \cdot \cos x$$

Question 3

Le polynôme

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2000) - 1$$

est-il divisible par un polynôme à coefficients entiers, non constant et différent d'un multiple réel de P ?

Question 4

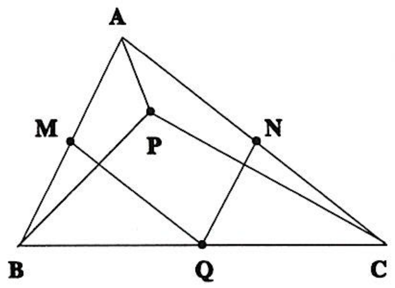
Montrer que, pour tout point P intérieur au triangle ABC,

$$\min\{\|PA\|, \|PB\|, \|PC\|\} + \|PA\| + \|PB\| + \|PC\| < \|AB\| + \|BC\| + \|CA\|.$$

Solution

Pour fixer les idées (cf. figure), supposons que

$$\min\{\|PA\|, \|PB\|, \|PC\|\} = \|PA\|.$$



Il s'agit alors de démontrer que

$$2\|PA\| + \|PB\| + \|PC\| < \|AB\| + \|BC\| + \|CA\|.$$

Désignons respectivement par M, N et Q les milieux des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Comme P est plus proche du sommet A que des deux autres sommets du triangle ABC, P est nécessairement situé à l'intérieur des trapèzes $ANQB$ et $AMQC$. Or, une ligne polygonale convexe est toujours moins longue de toute autre ligne polygonale qui l'enveloppe et qui les mêmes extrémités (2). Ainsi, nous avons

$$\|AP\| + \|PB\| < \|AN\| + \|NQ\| + \|QB\|$$
$$\|AP\| + \|PC\| < \|AM\| + \|MQ\| + \|QC\|$$

Mais,

$$\|AN\| = \|MQ\| = \frac{1}{2}\|AC\| \ , \ \ \|AM\| = \|NQ\| = \frac{1}{2}\|AB\| \ \text{ et } \ \|QB\| + \|QC\| = \|BC\|$$

de sorte qu'en additionnant membre à membre les deux inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$2\|AP\| + \|BP\| + \|PC\| < \|AB\| + \|AC\| + \|BC\|.$$

Palmarès de la vingt-cinquième Olympiade Mathématique Belge

Lauréats de la Mini Olympiade

Ont obtenu un premier prix

PONSELET Lise	2e Collège Saint Joseph	6460 Chimay
VOLKOVA Hélène	2e Athénée Robert Catteau	1000 Bruxelles

Ont obtenu un deuxième prix

FRIESEWINKEL Pierre	2e Ath. Royal Cromelynck	1150 Bruxelles
VAN DER WIELEN Audrey	2e Collège Saint François Xavier I	4800 Verviers

Ont obtenu un troisième prix

DE COSTER Nicolas	2e Inst. Saint Boniface Parnasse	1050 Bruxelles
INNOCENTI Nicolas	2e Athénée Royal Ch. Rogier	4000 Liège
PAUWELS Christophe	2e Athénée Robert Catteau	1000 Bruxelles

(2) Si tu ne connais pas cette propriété, je t'invite à consulter un ouvrage classique de géométrie plane, par exemple : *Géométrie plane*, DAELE et DE WAELE, De Boeck.

Ont obtenu un quatrième prix

ABRAMOWICZ Cécile	2e Athénée Ganenou	1180 Bruxelles
FUKUDA Chihiro	1e Lycée Français de Belgique	1180 Bruxelles
DE MOT Laurane	2e Lycée Emile Jacqmain	1040 Bruxelles
TSURUKAWA Nicolas	2e Athénée des Pagodes	1120 Bruxelles
BRUNIEAU Guillaume	2e Collège Saint Stanislas	7000 Mons
MASSONNET François	2e Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
SALMON Jessica	2e Collège St Barthélémy	4000 Liège

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 1ère année

BOUDRON Boris	1e Athénée Royal	4900 Spa
FUKUDA Chihiro	1e Lycée Français de Belgique	1180 Bruxelles

Ont également participé à la finale

AUBECQ Cécile	1e Collège Saint Stanislas	7000 Mons
BARBASON Mathieu	2e C.S.Saint Servais-Saint Benoît	4000 Liège
BRUAUX Anthony	1e Institut Saint Joseph	5620 Florennes
COPPE Julien	2e Institut Jean XXIII	5580 Jemelle
COUTELIER Marie	1e Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
DE GREEF Gregory	1e Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
DELANGHE Alan	1e Institut Saint Henri	7780 Comines
DUBOIS Rémi	2e Lycée Charles Plisnier	7330 Saint Ghislain
DUMONT Audrey	1e Institut Saint André	1050 Bruxelles
FLAWINNE Sébastien	2e C.S.Saint Servais-Saint Benoît	4000 Liège
HASHEMI Mir Amid	2e Lycée Emile Jacqmain	1040 Bruxelles
HOU Anmo	1e Athénée Royal Bervoets	7000 Mons
LEFEBVRE Maxime	1e Collège Saint Stanislas	7000 Mons
MARQUIS Thimothée	2e Institut des Dames de Marie	1200 Bruxelles
MASSON Quentin	1e Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
MILLER Laurence	1e Collège Saint Pierre	1180 Bruxelles
MOLLET Yves	1e Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
NAHANT Michaël	2e Athénée Royal	6810 Izel
SCHRYNEMACKERS Marie	2e Collège du Sartay	4053 Embourg
THIRY Arnaud	1e Institut Notre Dame du Sacré Cœur	5570 Beauraing
TOOTH Anne-Flore	2e Collège Sainte Croix	4280 Hannut
VAN CRAENENBROECK Pauline	1e Athénée Royal	7370 Dour
VAN SWIETEN Benoît	2e Institut de l'Enfant Jésus	1400 Nivelles
WALLERAND Simon	2e Collège Notre-Dame	7500 Tournai

Lauréats de la Midi Olympiade

A obtenu le premier prix

MALMEDY Vincent	4e	Institut Notre Dame du Sacré Cœur	5570 Beauraing

Ont obtenu un deuxième prix

LEFEBVRE Etienne	4e	Collège Saint Hubert	1170 Bruxelles
MOUTHUY Sébastien	4e	Collège Cardinal Mercier	1420 Braine l'Alleud
SUDJANA Jimmy	4e	C E Notre Dame des Champs	1180 Bruxelles

Ont obtenu un troisième prix

LECLERCQ Guillaume	4e	Institut Notre Dame du Sacré Cœur	5570 Beauraing
NYSSEN Baudouin	4e	Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
FATZAUN Grégory	4e	Collège Marie Thérèse	4650 Herve

Ont obtenu un quatrième prix

COPPE Sébastien	4e	Institut Jean XXIII	5580 Jemelle
JACKERS Laurence	3e	C.S.Saint Servais-Saint Benoît	4000 Liège
TRINH Antony	3e	Athénée Robert Catteau	1000 Bruxelles
VLIEGHE Maxime	4e	Athénée Royal Jules Bara	7500 Tournai
CHANG Chia-Tche	3e	Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
MYSORE Sid	3e	Lycée de Garçons	Luxembourg
TROESSART Cédric	3e	Institut Centre Ardenne	6800 Libramont
BONJEAN François	3e	Athénée Royal F.Bovesse	5000 Namur
DI PIETRO David	4e	Athénée Royal	6700 Arlon
HERPOEL Guillaume	4e	Collège Sainte Marie	7700 Mouscron

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 3ème année

BONJEAN François	3e	Athénée Royal F.Bovesse	5000 Namur
CHANG Chia-Tche	3e	Centre Scolaire Saint Michel	1040 Bruxelles
JACKERS Laurence	3e	C.S.Saint Servais-Saint Benoît	4000 Liège
MYSORE Sid	3e	Lycée de Garçons	Luxembourg
TRINH Antony	3e	Athénée Robert Catteau	1000 Bruxelles
TROESSART Cédric	3e	Institut Centre Ardenne	6800 Libramont

Ont également participé à la finale

ANASTASI Liz	3e Lycée de Garçons	Esch-sur-Alzette
BOURGIGNON Mathieu	3e Institut de l'Enfant Jésus	1400 Nivelles
DANDOY Adrien	3e Collège Don Bosco	1200 Bruxelles
DE WILDE Max	3e Collège Saint Pierre	1180 Bruxelles
DENUIT Nicolas	4e Athénée Royal Liège I	4000 Liège
DRUGMAN Thomas	4e Athénée Provincial Warocqué	7140 Morlanwelz
DUPUIS Julien	3e Lycée Martin V	1348 Louvain la Neuve
HARDENNE Christophe	4e Institut Jean XXIII	5580 Jemelle
JAMSIN Ella	4e Athénée Royal Mons I	7000 Mons
LEINER Yves	4e Lycée de Garçons	Esch-sur-Alzette
LEROY Philippe	4e Saint François Xavier	4800 Verviers
MALGARINI Frederico	4e Ecole Européenne	Luxembourg
NOEL Audrey	3e Collège Saint Hubert	1170 Bruxelles
THIRION Pierre	3e Collège Saint Louis	4300 Waremme
WEI Wen Zhu	3e Athénée Royal	6700 Arlon
WORONOFF Dimitri	3e Collège Saint Hubert	1170 Bruxelles

A obtenu le Prix Willy Vanhamme

Ce prix récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues. Ce prix a été attribué à

MALMEDY Vincent	4e Institut Notre Dame du Sacré Cœur	5570 Beauraing

Lauréats de la Maxi Olympiade

A obtenu le premier prix

FOUCART François	6e Athénée E Bockstael	1020 Bruxelles

Ont obtenu un deuxième prix

GRAMME Pierre	6e Institut St François Xavier	4800 Verviers
PETIT Christophe	6e Institut du Sacré Cœur	6980 Laroche
PIERARD Maxime	6e Athénée Royal Liège I	4000 Liège

Ont obtenu un troisième prix

DE COSTRE Adrien	6e Collège Saint Stanislas	7000 Mons
JARADIN Yves	6e Institut Sainte Marie	6210 Reves
MEYER Bob	6e Lycée Français	Luxembourg
DEBONGNIE Géry	6e Collège du Christ Roi	1340 Ottignies
MAHON Lucie	5e Lycée Français	Luxembourg

Ont obtenu un quatrième prix

ALPAN Ali	5e Athénée Royal Pierre Paulus	6200 Châtelet
COMBLEN Richard	5e Athénée Prince Baudouin	4570 Marchin
MILLER Sandrine	5e Collège Saint Pierre	1180 Bruxelles
TRIGALLEZ Quentin	5e Collège Sainte Marie	7330 Saint Ghislain
FARINI Gianni	5e Collège Saint Vincent	7060 Soignies
HASHEMI Mir Emad	6e Lycée E Jacqmain	1040 Bruxelles
REGHABI GHOL AMI Jahanguir	6e Lycée E Jacqmain	1040 Bruxelles

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élèves de 5ème année

ALPAN Ali	5e Athénée Royal Pierre Paulus	6200 Châtelet
COMBLEN Richard	5e Athénée Prince Baudouin	4570 Marchin
FARINI Gianni	5e Collège Saint Vincent	7060 Soignies
KUYPERS Xavier	5e Institut Sainte Marie	7100 La Louvière
MAHON Lucie	5e Lycée Français	Luxembourg
MILLER Sandrine	5e Collège Saint Pierre	1180 Bruxelles
TRIGALLEZ Quentin	5e Collège Sainte Marie	7330 Saint Ghislain

Ont également participé à la finale

DE CORTE Vincent	6e Athénée Royal Bervoets	7000 Mons
DELAHAUT Benoît	6e Collège Notre Dame	1300 Wavre
DRUCK Cédric	6e Collège Sainte Gertrude	1400 Nivelles
EECKHAUTE Laurent	5e Athénée Royal d'Uccle I	1180 Bruxelles
FABRY Stéphane	6e Petit Séminaire Saint Roch	4190 Ferrières
FIZ PONTIVEROS Gonzalo	5e Ecole Européenne	Luxembourg
FONTAINE Gaëlle	6e Institut Notre-Dame	6700 Arlon
FRANCO Nicolas	5e Institut Saint Joseph	5590 Ciney
GOSSET François	5e Collège St Vincent	7060 Soignies
HANSEEUW Bernard	6e Collège Notre Dame	1300 Wavre
JACOB Olivier	6e Com. Educative Sainte Marie	5000 Namur
KIRTLEY Adam	5e British School	3080 Tervuren
MONETTE Jean-Noël	6e Collège du Sacré Cœur	6000 Charleroi
SCHOONBROODT Nicolas	5e Athénée Royal d'Eupen	4700 Eupen
VANAERDE Benjamin	5e Collège Sainte Marie	7700 Mouscron
VANQUAETHEM Sébastien	6e Collège Bonne Espérance	7120 Vellereilles-Brayeux

La rédaction te souhaite de très

agréables vacances ensoleillées.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: M. BAILLIEU
Rue A . Moitroux 22 – 7100 La Louvière

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée