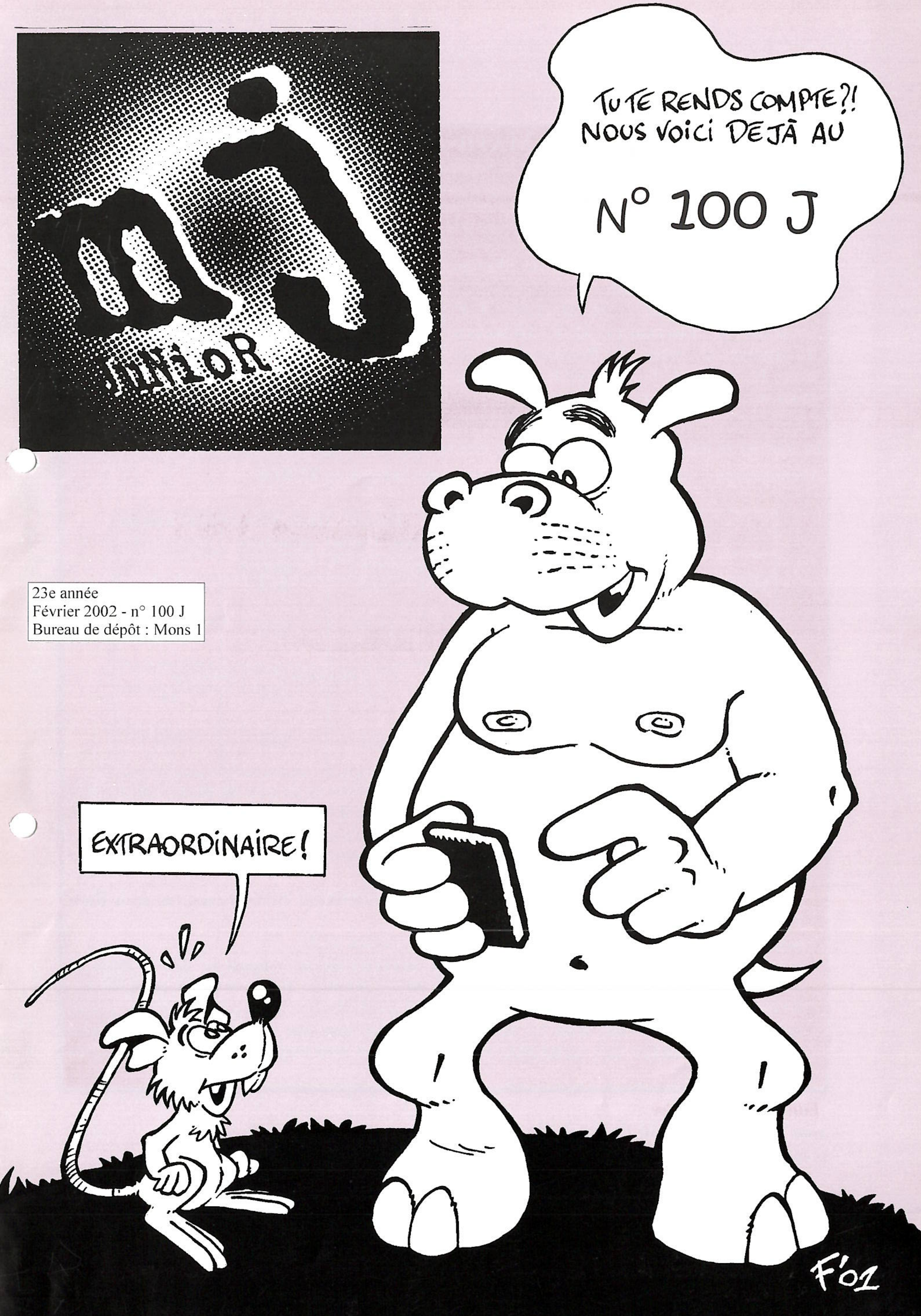
MJ JUNIOR

23e année
Février 2002 - n° 100 J
Bureau de dépôt : Mons 1



MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, M.-F. GUISSARD, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, R. GOSSEZ, C. RANDOUR, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LALOUX, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POURBAIX, N. VANDENABEELE, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 500 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

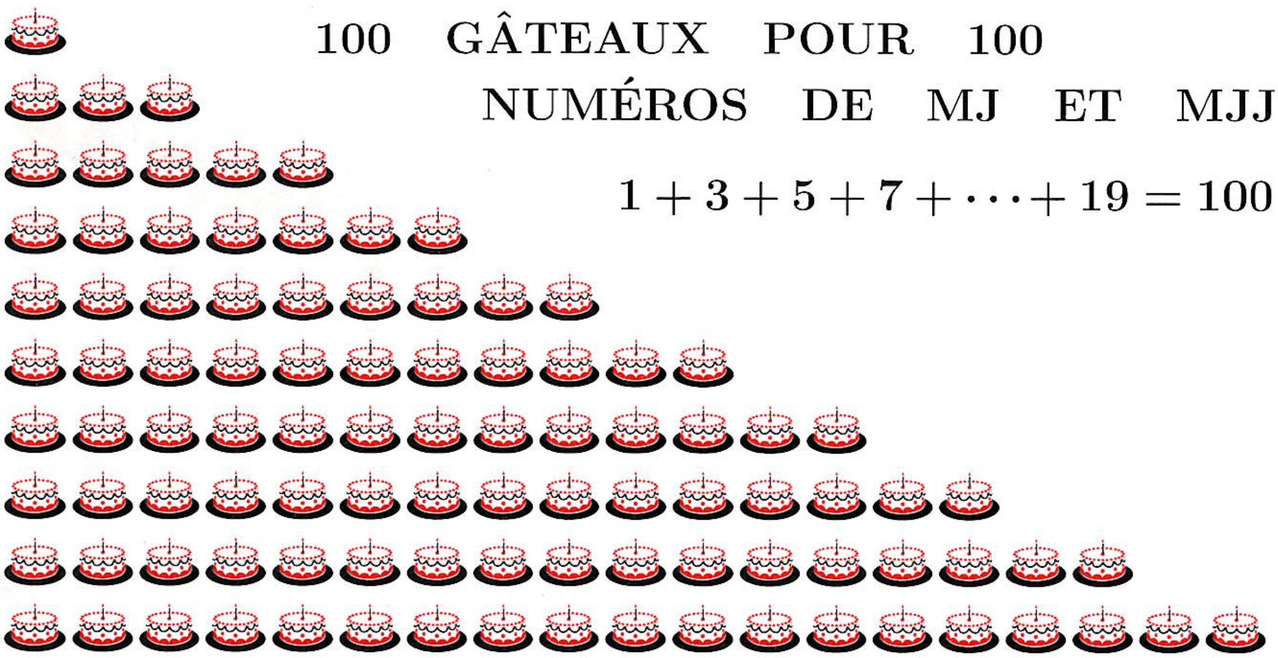
N° 100 J Vingt-troisième année 2002

Math-Jeunes junior

Bonne fête MJ et MJJ

100 GÂTEAUX POUR 100 NUMÉROS DE MJ ET MJJ

$$1+3+5+7+\cdots+19=100$$



Si ce *Math-Jeunes junior* porte le numéro 100, c'est parce que son grand frère « *Math-Jeunes* » beaucoup plus âgé que lui, sort effectivement aujourd'hui son centième numéro.

La rédaction de *Math-Jeunes junior* veut marquer l'événement en proposant à ses jeunes lecteurs (et pourquoi pas aussi à leurs professeurs) deux activités amusantes et enrichissantes :

1. Réaliser des pavages de différents rectangles à l'aide des 12 pentaminos dont il est largement question dans nos colonnes depuis le début de cette année scolaire. Des instructions vous sont fournies plus loin pour construire vous-même votre « Pentamino-puzzle ». On vous dit aussi comment colorier celui-ci... à l'économie ! Vous ne saisissez pas ? Ce n'est pas grave mais consultez vite les pages 6 et 7 de ce centième numéro.
2. L'année 2002, en plus qu'elle aura été celle de l'arrivée de l'euro en numéraire, est aussi une année palindrome. Le nombre 2002 se lit en effet de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche. Nous vous posons une seule question et vous laissons la plus grande liberté pour y répondre :

   Que peut-on affirmer à propos des années palindromes survenues depuis l'an 1000 ?

Nous attendons à la rédaction (15, rue de la Halle à 7000-Mons) vos propositions de pavages et/ou de réponse à la question ci-dessus.

Nous publierons dans un prochain numéro de *Math-Jeunes junior* le courrier que nous recevrons. Celui-ci devrait nous parvenir au plus tard le 15/04/02. N'oubliez pas de mentionner vos nom, prénom, âge, adresse, école, classe.

Des prix récompenseront les meilleurs travaux.

Bonnes recherches, bon amusement et... vive MATH JEUNES-junior !

Math-Jeunes junior n°100 J.26–26, 2002

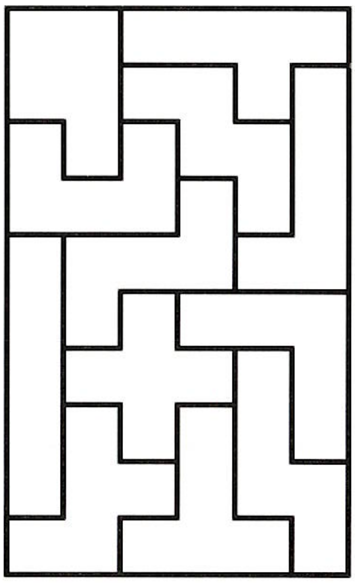
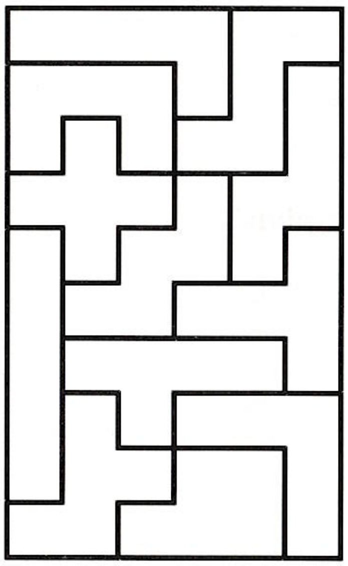
La mathématique au quotidien

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

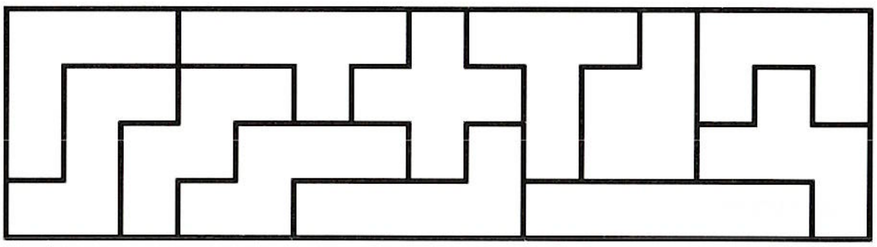
Mono…, duo…, polyminos (2)

A la fin du précédent article sur ce sujet, nous vous demandions de réaliser des pavages de différents rectangles à l'aide de pentaminos. Il y a un très grand nombre (des milliers) de solutions pour les pavages du rectangle 10x6 où tous les pentaminos sont utilisés.

En voici encore deux.

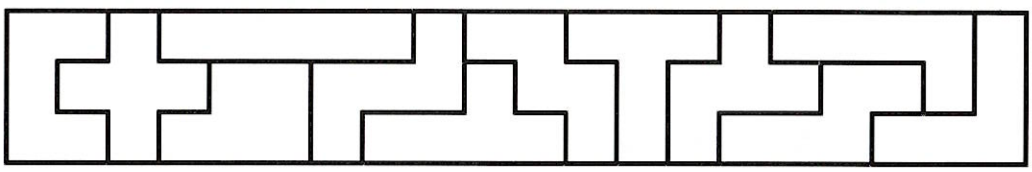



Ci-dessous vous pouvez voir une solution pour le rectangle 15x4.



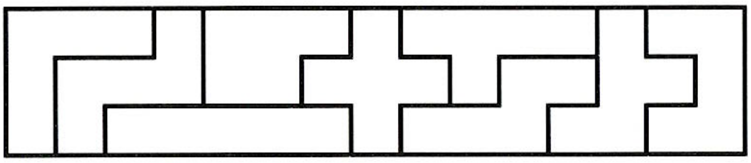
Agnès, une élève de 2e année, nous a proposé les pavages suivants :

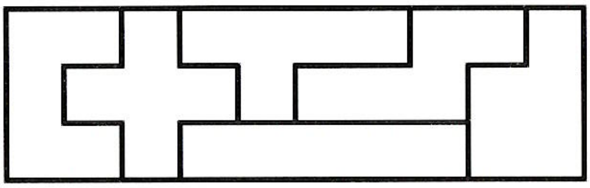
Pour le 20×3

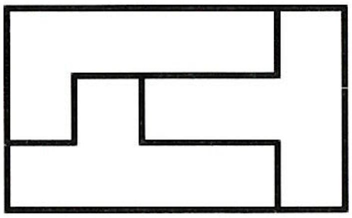


Math-Jeunes junior n°100 J,27–31, 2002

Pour le 15 × 3, le 10 × 3 et même le 5×3 (en n'utilisant qu'une partie des 12 pentaminos)





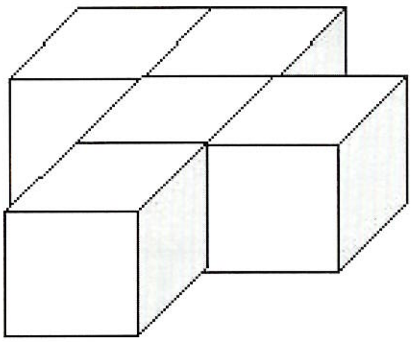


Vous pouvez encore essayer de paver un carré 8 × 8 d'où vous enlevez 4 carrés élémentaires. Ou encore réaliser des figures suggérant des objets ou des êtres. Bon amusement et. . .n'oubliez pas que nous attendons vos propositions de dessins avec grande impatience.

Et si on sortait du plan ?

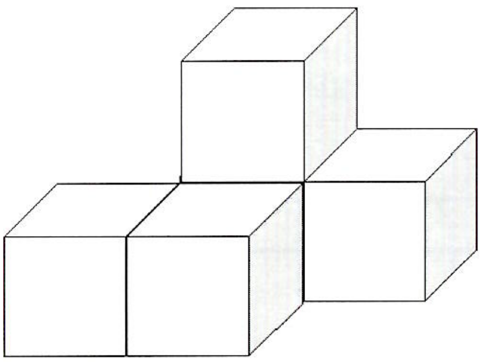
Il est possible de construire les polyminos en leur donnant une certaine « épaisseur ». Et ce qui est relativement immédiat, c'est de leur donner une épaisseur unitaire. Chaque carré composant le polymino devient alors face d'un cube. Les douze pentaminos auxquels nous accordons de l'intérêt deviennent alors des objets de l'espace.

En voici un :



Mais attention, toutes les configurations de cinq cubes connexes ne sont pas représentées.

En voici une d'entre elles.



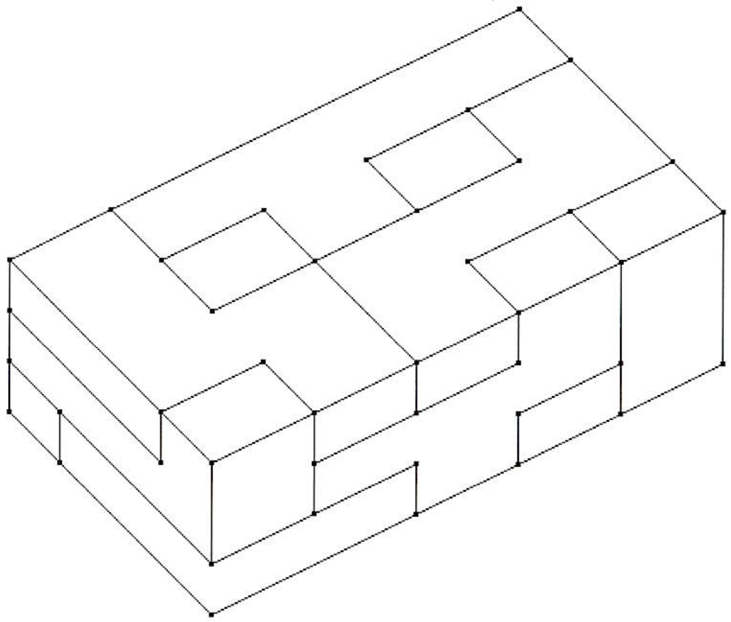
Les douze pentaminos, affectés d'une épaisseur 1, acquièrent ainsi un volume valant $5u^3$ chacun.

Il est donc possible de tenter de construire des parallélipipèdes rectangles de volume $12 \times 5u^3$ soit de $60u^3$.

Vous êtes maintenant amenés à factoriser 60 en produits de 3 facteurs (et non plus de deux comme précédemment).

Si vous avez l'occasion de vous procurer ou de faire construire ces 12 pentaminos d'épaisseur unitaire alors essayez de les assembler pour constituer un parallélipipède $3 \times 4 \times 5$ (il paraît qu'il y a 3940 solutions), un parallélipipède $2 \times 5 \times 6$ (264 solutions) et un parallèlipipède $2 \times 3 \times 10$ (12 solutions).

Voici une exemple de solution pour le premier de ces cas.



Cherchez en d'autres et bon courage. A vous de jouer maintenant !

Complément :

Les pentaminos ont fait l'objet de nombreuses études et recherches parfois très avancées.

Vous pouvez obtenir de très nombreux renseignements à leur sujet, en consultant des sites Internet.

Vous y trouverez des programmes de construction, téléchargeables (j'en ai découvert un, relativement court (57K)).

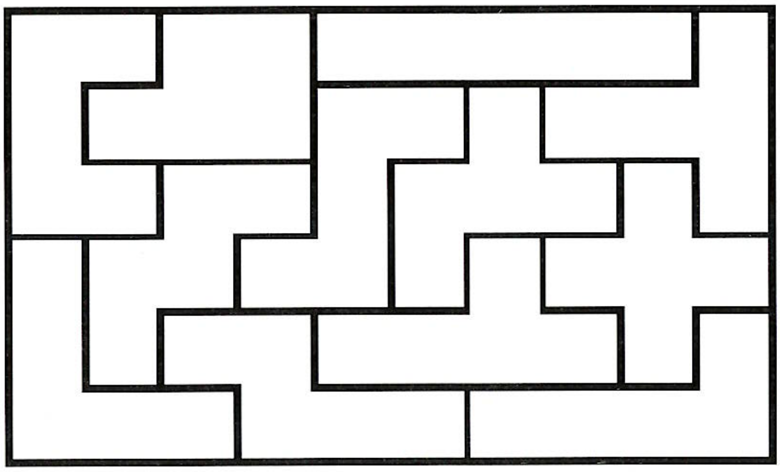
Utilisez un moteur de recherche sur le thème « Pentaminos » ou « Polyminos ».

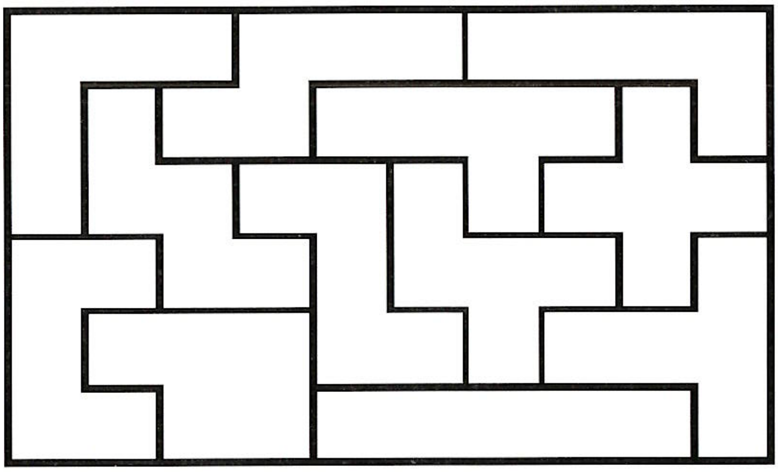
Et si vous avez des remarques ou des compléments sur le sujet traité, nous les attendons à la rédaction. Et toujours avec grande impatience.

Pour marquer particulièrement la parution du n°100 de notre revue *Math-Jeunes Junior*, nous vous offrons un jeu : le Pentamino-Puzzle.

Voici la marche à suivre pour disposer facilement de ses 12 pièces.

1. *Photocopiez les deux exemplaires ci-dessous. Cela vous permet de ne pas massacrer votre revue et de pouvoir recommencer la procédure en cas d'accident de manipulation. Ces deux exemplaires, symétriques l'un de l'autre par une symétrie orthogonale, mesurent 10cm sur 6cm et sont destinés à former les deux faces des pentaminos.*
2. *Découpez avec soin les deux rectangles comportant les 12 pentaminos et collez-les sur les deux faces d'un morceau de carton ou de bristol. Cela donne de la rigidité à l'ensemble. Veillez surtout à ce que les pièces de même forme coïncident bien sur chacune des deux faces.*
3. *Découpez chacune des 12 pièces à l'aide d'un cutter ou de bons ciseaux.*





Vous êtes ainsi en possession des 12 pentaminos. Peut-être pensez-vous qu'il est simple de les assembler puisqu'ils sont en un si petit nombre.

Alors allez-y. Escrimez-vous à paver des rectangles 10cm x 6cm, 12cm x 5cm, 15cm x 4cm, ... que vous dessinez préalablement sur du papier quadrillé.

Bon amusement.

Le théorème des quatre couleurs.

Pour enjoliver le Pentamino-Puzzle, il vous est bien entendu loisible de colorer ses différentes pièces. Puisqu'il y a 12 pentaminos à assembler, vous pouvez évidemment utiliser diverses couleurs avec de tons différents. Et à votre choix, cela va de soi. Mais est-il bien nécessaire d'employer autant de tons? Si vous observez chacun des rectangles proposés, vous pouvez admettre qu'ils sont comparables à une représentation d'un espace composé de douze parties dont les frontières sont des segments.

Si vous voulez colorier l'une ou l'autre de ces cartes (ou les deux) de manière à ce que deux pièces contiguës (c'est à dire ayant au moins un segment frontière en commun) ne soient pas de la même couleur, vous n'avez plus besoin de douze tons différents.

Considérons, par exemple, la pièce en forme de Z. Observez la! Elle est ici contiguës à six autres pièces. Pour ces 7 pièces, il suffit de trois couleurs pour réaliser un coloriage qui les distingue toutes. (p. ex. rouge pour le Z puis jaune ou noir qui alternent pour les six pièces qui l'entourent).

Ce qui précède est valable pour les sept pièces considérées mais ne l'est plus nécessairement pour l'ensemble des douze pièces du Pentamino-Puzzle. Une théorie mathématique montre qu'il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte plane.C'est le théorème des quatre couleurs qui nous l'affirme. C'est un des plus célèbres résultats des mathématiques combinatoires. L'énoncé est simple mais le théorème est resté une simple conjecture pendant plus d'un siècle. Les plus grands mathématiciens s'y sont frottés mais ce n'est qu'en 1976 que sa véracité a été prouvée.

Comment tout cela a-t-il commencé?

C'est un cartographe anglais, Françis Guthrie, qui remarque en 1852 qu'il suffit de quatre couleurs pour colorer une carte géographique des cantons d'Angleterre.

Comme il a un frère mathématicien (Frédérick), il lui propose d'étudier cette propriété dans le but de voir si elle est générale pour toute carte plane.

La conjecture est communiquée à De Morgan (Connaissez-vous les lois de De Morgan? Non? Parlez-en à votre Professeur) et à Cayley (Connaissez-vous les tables de Cayley? Non? Parlez-en à votre Professeur) qui la publie en 1872.

Après de multiples tentatives de démonstration, cette conjecture est finalement vaincue en 1976 par Appel et Haken qui utilisent un ordinateur (plusieurs dizaines de milliers de figures et plus de 1 200 heures de calcul par la machine).

Pour des informations complémentaires, visitez des sites Internet en utilisant un moteur de recherche (Google par exemple) sur le thème « Couleurs + Théorèmes ».

Bonnes visites.

Somme magique (3)

Y. Noël-Roch

Nous reprenons ci-dessous un problème posé dans *Math-Jeunes junior* n° 95 :

Obtenir une addition correcte en plaçant les nombres de 1 à 9 (chacun utilisé une seule fois) à la place des neuf étoiles dans la disposition usuelle donnée ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc} & \star & \star & \star \\ + & \star & \star & \star \\ \hline = & \star & \star & \star \end{array}$$

Plusieurs solutions ont été données dans *Math-Jeunes junior* n° 96 pour aider à élaborer des conjectures.

Écrivons une lettre à la place de chacun des nombres.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & r & s & t \\ \hline = & x & y & z \end{array}$$

Deux lettres différentes représentent donc deux nombres différents.

1. La somme peut-elle se calculer sans report ?

Nous aurions alors $\begin{cases} c+t=z \\ b+s=y \\ a+r=x \end{cases}$ donc

$$a+b+c+r+s+t=x+y+z$$

Comme nous savons que $a+b+c+r+s+t+x+y+z=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, nous obtenons

$$a+b+c+r+s+t=x+y+z=\frac{45}{2}$$

... ce qui est impossible puisque chaque terme de ces sommes est un entier !

Conclusion : Il y a donc au moins un report

2. Les reports éventuels : combien ? où ?

$\boxed{1.}$ Aucun report ne peut se faire au niveau des centaines puisque la somme s'écrit avec **trois** chiffres. En d'autres termes, nous savons que $3 \leqslant a+r \leqslant 9$.

$\boxed{2.}$ Peut-on avoir deux reports : à la fois des unités aux dizaines et des dizaines aux centaines ?

Nous aurions alors

$$\begin{cases} c+t=z+10 \\ 1+b+s=y+10 \\ 1+a+r=x \end{cases}$$

Et par conséquent, tenant compte de

$$a+b+c+r+s+t+x+y+z=45$$

et

$$2+a+b+c+r+s+t=x+y+z+20$$

nous obtenons

$$2+a+b+c+r+s+t+x+y+z+20=67$$

et

$$2+a+b+c+r+s+t=x+y+z+20=\frac{67}{2}$$

... situation tout aussi bizarre que dans le calcul sans report !

Conclusion : le calcul fait nécessairement apparaître un seul report. Cela se passe soit au niveau des unités, soit au niveau des dizaines.

Observe le phénomène sur deux exemples :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 7 \\ + & 3 & 6 & 8 \\ \hline = & 4 & 9 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 1 & 9 & 3 \\ + & 4 & 8 & 2 \\ \hline = & 6 & 7 & 5 \end{array}$$

Math-Jeunes junior n° 100 J,32–34, 2002

3. Deux sommes partielles intéressantes

Nous savons que deux situations sont possibles et qu'elles s'excluent mutuellement :

$$\begin{cases} c+t=z+10 \\ 1+b+s=y \\ a+r=x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c+t=z \\ b+s=y+10 \\ 1+a+r=x \end{cases}$$

Dans les deux cas, nous en déduisons

$$\begin{cases} a+b+c+r+s+t+1=x+y+z+10 \\ a+b+c+r+s+t+x+y+z=45 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} a+b+c+r+s+t+1 &= x+y+z+10 \\ &= \frac{45+11}{2}=28 \end{aligned}$$

et

$$\boxed{a+b+c+r+s+t=27 \text{ et } x+y+z=18}$$

Nous savons maintenant que les nombres 987 et 123 ne peuvent être obtenus comme sommes dans notre jeu puisque $9+8+7 \neq 18$ et $1+2+3 \neq 18$. Par contre, nous avons par exemple $729=146+583$, $954=718+236$, $981=354+627$ et $459=176+283$.

4. Quelles sont les valeurs extrêmes de la somme ?

$\boxed{1.}$ Le chiffre des centaines vaut au moins 4. En effet, pour obtenir

$$\begin{array}{r} a \star \star \\ + \; r \star \star \\ \hline = 3 \star \star \end{array}$$

il faut que a soit 1 ou 2, de même que r. Il reste alors 4, 5, 6, 7, 8 et 9 pour b, c, s et t mais comme il faut un report unique, nous devons nécessairement associer 4 et 5 soit à b et s , soit à c et t.

Cela nous donne

$$\begin{array}{r} a \; 4 \star \\ + \; r \; 5 \star \\ \hline = 3 \star \star \end{array}$$

et le report nécessaire amène un zéro en y, ce qui est exclu.

ou

$$\begin{array}{r} a \star 4 \\ + \; r \star 5 \\ \hline = 3 \star 9 \end{array}$$

et le report nécessaire détruit 3 au niveau des centaines pour le remplacer par 4.

$\boxed{2.}$ La plus petite somme que nous pouvons espérer trouver est donc "$4yz$" avec $4+y+z=18$, c'est-à-dire 459, somme déjà trouvée.

$\boxed{3.}$ Tenant compte de ce que $x+y+z=18$, la plus grande somme possible est 981, somme déjà trouvée également.

Conclusion : la plus petite somme possible est 459, la plus grande est 981.

5. Quelles sont les sommes possibles ?

En exploitant la condition $x+y+z=18$ et ce qui précède, dressons un premier tableau :

981	891	792	693	594	495
972	873	783	684	576	486
963	864	765	675	567	468
954	846	756	657	549	459
945	837	738	648		
936	819	729	639		
927					
918					

6. Un grand nombre de solutions

Comme le montrent les exemples déjà donnés, une même somme peut être obtenue d'au moins quatre façons. A partir de deux nombres "abc" et "rst" des permutations entre parties de lignes ou colonnes entraînent — ou n'entraînent pas — une nouvelle somme. Assez curieusement, quelques nombres notés dans la liste ci-dessus ne peuvent s'obtenir en respectant les règles : ce sont 765, 756 et 684. **Tous** les autres peuvent être construits. Cela montre que le problème admet **beaucoup** de solutions. Nous te laissons le plaisir, soit de prouver une impossibilité, soit de t'acharner sur les cas possibles. Bon amusement !

Les binômes sympa

A. Paternottre, ***I.T.C. Boussu***

Une expression algébrique comme $7x+2$ t'est déjà (ou te sera bien vite) familière, on la nomme *binôme du 1erdegré en x*.

Ses *coefficients* sont 7 et 2 (ils ne doivent pas nécessairement être des nombres entiers).

Sa *variable* est x, on peut lui donner n'importe quelle valeur numérique.

Le nombre $y' = 7x' + 2$ est la *valeur numérique* du binôme $7x + 2$ pour $x = x'$. Dans un repère cartésien xOy (ou encore dans un système d'axes gradués Ox et Oy), l'ensemble des points de coordonnées (x', y') sont tous situés sur une *droite* dont on dit qu'elle est *le graphique de la fonction* $f : x \to y = 7x + 2$.

Tout ce qui précède est fondamental pour la suite de ton cours de mathématique, ton professeur te le dira.

Cet article traite de binômes du premier degré en x un peu particuliers que j'ai nommés *binômes sympa*.

Reprenons le binôme $7x+2$. Sa valeur numérique pour $x = 1$ est 9 ou 3^2. En effet $7{\cdot}1+2 = 9 = 3^2$.

De même la valeur numérique du binôme $-13x-1$ pour $x = -2$ est 25 ou 5^2 car $(-13){\cdot}(-2)-1 = 25 = 5^2$.

Je dis que les deux binômes précédents sont *sympa*.

Adoptons la définition suivante :

> Le binôme $ax + b$ est ***sympa***
> si et seulement si
> ses coefficients a et b sont deux nombres entiers ($a \neq 0$)
> et
> s'il existe au moins une valeur entière de x pour laquelle la valeur numérique de $ax + b$ est le carré d'un nombre entier.

Deux questions se posent à ce stade :

1. Si un binôme est sympa, l'est-il seulement pour une seule valeur entière de x ou pour une infinité de valeurs entières de x ?
2. Comment peut-on savoir si un binôme donné est sympa ?

Réponse à la première question

Soit encore le binôme $7x + 2$ dont nous savons qu'il est sympa puisque ses coefficients sont entiers et que sa valeur numérique est 3^2 pour $x = 1$.

Retenons les nombres entiers 7, 3, 1 et posons

$$x = \mathbf{7} \cdot z^2 + 2 \cdot \mathbf{3} \cdot z + \mathbf{1} = 7 \cdot z^2 + 6 \cdot z + 1$$

où z représente un nombre entier quelconque.

Math-Jeunes junior n°100 J,34–36, 2002

Dès lors x est aussi un nombre entier et on a

$$\begin{aligned} 7x+2 &= 7(7z^2+6z+1)+2 \\ &= 49z^2+42z+9 \\ &= (7z+3)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

si on pose ...	on a ...	et ...
$z=0$	$x=1$	$7x+2=7\cdot 1+2=(7\cdot 0+3)^2=3^2$
$z=-2$	$x=17$	$7x+2=7\cdot 17+2=(7\cdot(-2)+3)^2=11^2$
$z=88$	$x=54\,737$	$7x+2=7\cdot 54\,737+2=(7\cdot 88+3)^2=619^2$

On en conclut que si le binôme $7x+2$ est sympa pour une valeur entière de x (ici 1), il l'est aussi pour une infinité d'autres valeurs entières de x données par $x=7z^2+6z+1$ avec $z\in\mathbb{Z}$.

Généralisons :

Soit le binôme sympa $ax+b$ pour lequel on a décelé deux entiers p et q tels que $ap+b=q^2$.
Si on pose $x=az^2+2qz+p$ avec $z\in\mathbb{Z}$ alors $ax+b=(az+q)^2$

En effet,

$$\begin{aligned} ax+b &= a(az^2+2qz+p)+b \\ &= a^2z^2+2aqz+ap+b \\ &= a^2z^2+2aqz+q^2-q^2+ap+b \\ &= (az+q)^2 \text{ car } -q^2+ap+b=0 \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Réponse à la deuxième question

Nous supposons, dans la suite de cet article, que $a\in\mathbb{Z}_0$ et $b\in\mathbb{Z}$. Nous ne le préciserons plus.

Proposition 1 : Si b est le carré d'un nombre entier alors le binôme $ax+b$ est sympa.

En effet si $b=n^2$ avec $n\in\mathbb{N}$ alors $a\cdot 0+b=n^2$ donc le binôme $ax+b$ est sympa.

Ainsi les binômes $2x+16$, $3x+4$, $-17x+25$, $-85x+289,\ldots$ sont tous sympa. De plus $ax+b=(az+n)^2$ si $x=az^2+2nz$ avec $z\in\mathbb{Z}$.

En particulier, le monôme ax est toujours sympa car $ax=ax+0^2$.

Proposition 2
Le binôme $ax+b$ est sympa si et seulement si $ax+b+ka$ $(k\in\mathbb{Z})$ est sympa.

Ainsi $7x+2$ est sympa si et seulement si $7x+2+(-3)\cdot 7=7x-19$ est sympa. On a choisi ici $k=-3$.

À titre indicatif, voici une démonstration de cette proposition. Tu peux la passer si tu le veux.

$$ax+b \text{ est sympa}$$
$$\text{ssi}$$
$$\exists p,q \in \mathbb{Z} : ap+b=q^2 \ (^1)$$
$$\text{ssi}$$
$$\exists p,q \in \mathbb{Z} : a(p-k+k)+b=q^2 \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\text{ssi}$$
$$\exists p,q \in \mathbb{Z} : a(p-k)+b+ka=q^2 \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\text{ssi}$$
$$ax+b+k\times a \text{ est sympa } (k \in \mathbb{Z})$$

(une valeur de x qui rend $ax+b+ka$ sympa étant $p-k$).

Une application intéressante de la proposition 2 est de pouvoir *réduire* un binôme $ax+b$ pour lequel on aurait $|b| \geqslant |a|$ à un binôme « équivalent » $ax+b'$ pour lequel $0 \leqslant b' \leqslant |a|$

Ainsi, en matière de « sympathie » le binôme $6x-29=6x+1-5\cdot 6$ est équivalent au binôme $6x+1$.

Comme $6x+1$ est sympa, $6x-29$ l'est aussi.

Proposition 3

Le binôme réduit $ax+b$ (c'est-à-dire tel que $0 \leqslant b < |a|$) est sympa
si et seulement si
b est l'un des restes de la division par a de $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (|a|-1)^2$.

Rappelons que lorsqu'on divise un nombre entier D (dividende) par un nombre entier non nul d (diviseur), le quotient q et le reste r sont des nombres entiers tels que $D=d\cdot q+r$ et $0 \leqslant r < |d|$

Démontrons la proposition 3.

$$ax+b \text{ est sympa et } 0 \leqslant b < |a| \text{ (hypothèse)}$$
$$\text{ssi}$$
$$\exists p,q \in \mathbb{Z} : ap+b=q^2 \text{ et } 0 \leqslant b < |a|$$
$$\text{ssi}$$
$$b \text{ est le reste de la division de } q^2 \text{ par } a.$$

Appliquons la proposition 3 :

- Soit le binôme $7x+b$. Quelles valeurs entières peut-on donner à b pour que $7x+b$ soit sympa ?
  Les restes des divisions par 7 de 0,1,4,9,16,25,36 sont respectivement 0,1,4,2,2,4,1. Dès lors seuls les binômes $7x$, $7x+1$, $7x+2$, $7x+4$ sont sympa. La proposition 2 affirme que chacun de ceux-ci augmenté d'un multiple de 7 est aussi sympa. Par contre les binômes $7x+3$, $7x+5$, $7x+6$ ne sont pas sympa. Les binômes $7x+3+7k$, $7x+5+7k$, $7x+6+7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ne sont donc pas sympa non plus.
  Remarquons que la proposition 1 (beaucoup plus facile à appliquer que la proposition 3), indiquait directement que les binômes $7x$, $7x+1$, $7x+4$ étaient sympa. L'application de la proposition 3 n'a ajouté que le binôme $7x+2$ comme binôme sympa supplémentaire.
- Peux-tu démontrer que, quel que soit le nombre entier b, le binôme $2x+b$ est toujours sympa ?
- Le binôme $17x-106$ est-il ou non sympa ?
  Appliquons d'abord la proposition 2 afin de réduire ce binôme de façon que $0 \leqslant b < 17$: $17x-106=17x+13-7\cdot 17$. Le binôme réduit est donc $17x+13$. Avec un peu de « flair », on découvre assez vite que $17\cdot 3+13=64=8^2$. On peut en conclure de suite que $17x-106$ est un binôme sympa.
  Si on applique la proposition 3, on verra que le reste de la division de 8^2 par 17 donne effectivement 13 pour reste.
- Peux-tu démontrer que, quel que soit le nombre entier k, le binôme $3x+2+3k$ n'est jamais sympa ?

(1) le symbole mathématique $\exists$ signifie « il existe »

Rallye problèmes

C. Festraets

Voici les cinq problèmes suivants de ce rallye 2001–2002 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent.

Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de *Math-Jeunes junior*. N'oubliez pas d'affranchir suffisamment vos lettres et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 15/04/2002.

6 – Jouons aux dés

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur une table, face"1" contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le "1" initial. a) Donner la valeur minimale et la valeur maximale que l'on peut obtenir pour s. b) La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

7 – Factorielle

La factorielle d'un nombre n est désignée par le symbole $n!$ et est égale au produit de tous les entiers de 1 jusque n : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1) \times n$. Quelle est la valeur de n pour laquelle on a $n! = (2^{15}).(3^6).(5^3).(7^2).(11).(13)$? Expliquez soigneusement votre réponse.

8 – Produit des chiffres

Combien y a-t-il d'entiers positifs de cinq chiffres dont le produit des chiffres est égal à 2000 ?

9 – Distances

Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer sur un disque (à l'intérieur ou sur le bord) de rayon 100 cm de telle sorte 1) que deux quelconques de ces points soient éloignés d'au moins 100 cm ? 2) que deux quelconques de ces points soient éloignés de plus de 100 cm ?

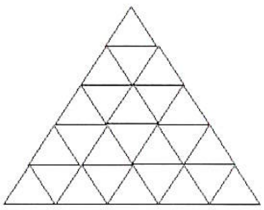
10. Comptons les étoiles

Dans la figure ci-dessous, chaque rangée d'étoiles comporte deux étoiles de plus que la rangée immédiatement au-dessus.

Au total, combien y a-t-il d'étoiles dans les 20 premières rangées ?

Solutions des problèmes 1 à 5 (*Math-Jeunes junior* n°99)

1. Mosaïque - solution



Examinons un triangle équilatéral de côté n cm, pavé de petits triangles équilatéraux de côté 1 cm.

Comptons d'abord le nombre de petits triangles dont la pointe est en haut, en partant de la base du grand triangle équilatéral : il y a une première rangée qui comporte n triangles, puis $n-1$ dans la deuxième rangée, $n-2$ dans la troisième rangée, et ainsi de suite jusqu'au sommet où il y a un triangle, soit en tout $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Comptons ensuite le nombre de petits triangles dont la pointe est en bas, en partant de la base du grand triangle équilatéral : il y en a $n-1$ dans la première rangée, $n-2$ dans la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière rangée où il y en a 1, soit en tout $(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\dfrac{(n-1)n}{2}$.

Le nombre total de petits triangles équilatéraux est égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2+n+n^2-n}{2}=n^2$.

Nous disposons de 15878 petits triangles ; le plus grand carré contenu dans 15878 est $15876=126^2$. Nous pouvons donc construire une mosaïque de côté 126 cm et il restera 2 pièces après cette construction.

2. Découpage - solution

1) Dans la feuille de dimensions 256 cm et 96 cm, on découpe d'abord deux carrés de coté 96 cm ; reste un rectangle de dimensions 96 cm et $(256-96-96)=64$ cm où l'on peut découper un carré de côté 64 cm ; reste un rectangle de dimensions 64 cm et $(96-64)=32$ cm et dans ce

dernier rectangle, on peut découper deux carrés de côté 32 cm. La longueur du côté du dernier carré est donc 32 cm.

Ce découpage peut se résumer par les calculs suivants :

$256 = 2.96 + 64$

$96 = 1.64 + 32$

$64 = 2.32$

ce qui nous montre que 32 est le pgcd de 256 et 96.

2) Cherchons le pgcd de 96 et 15 :

$96 = 6.15 + 6$

$15 = 2.6 + 3$

$6 = 2.3$

Ce pgcd est 3 ; la longueur du côté du dernier carré est donc 3 cm.

3) La longueur du côté du dernier carré est le pgcd de a et b.

3. Produits pairs - solution

Il y a huit nombres impairs de 1 à 15 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Quand on les multiplie deux à deux, on obtient 64 produits impairs. Comme il y a 225 produits en tout, cela nous donne $225 - 64 = 161$ produits pairs.

4. Héritage - solution

Soit x le montant de la fortune d'Harpagon.

Le premier enfant reçoit $100000 + \dfrac{x - 100000}{10} = 90000 + \dfrac{x}{10}$.

Il reste alors $x - 90000 - \dfrac{x}{10} = \dfrac{9x}{10} - 90000$.

Le deuxième enfant reçoit $200000 + \dfrac{\frac{9x}{10} - 90000 - 200000}{10} = 171000 + \dfrac{9x}{100}$.

Ils ont reçu tous les deux la même somme, donc $90000 + \dfrac{x}{10} = 171000 + \dfrac{9x}{100}$.

Multiplions les deux membres par 100 : $9000000 + 10x = 17100000 + 9x$.

D'où $x = 17100000 - 9000000 = 8100000$.

La fortune d'Harpagon s'élève à 8100000 francs et on vérifie aisément que chaque enfant reçoit 900000 francs. Harpagon a donc 9 enfants.

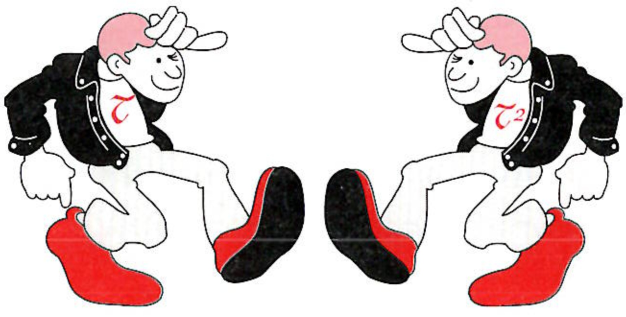
5. Des multiples de 9 - solution

Remarquons que la somme des deux premiers termes est 9, la somme des troisième et quatrième termes est 9, la somme des cinquième et sixième termes est 9, et ainsi de suite. Pour obtenir une somme de 180, observons que $180 = 20.9$, donc on a dû additionner les 40 premiers termes de cette suite.

Les frères Hick 4

B. Honclaire

> **Agence de détectives privés**
> **Les frères Hick**
>
> **Recherches en tous genres**



Ami lecteur,

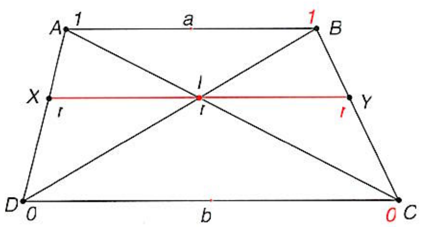
$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ vont te fournir la suite de leurs commentaires sur les moyennes dans des figures géométriques et leurs réflexions sur l'énigme du numéro précédent que je t'invite à relire.

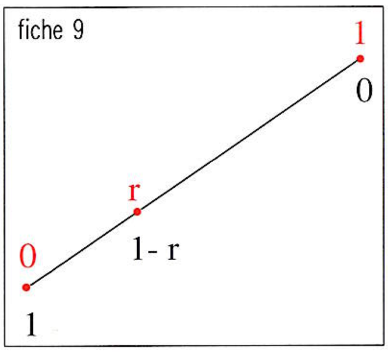
Bon courage et bon amusement.

$\mathcal{T}^2$ - « Alors, ces moyennes dans le trapèze et le demi-cercle ? »

$\mathcal{T}$ (l'air absent) - « Euh ! C'est à dire que ! Enfin pour la moyenne harmonique j'ai relu tes explications dans Math-Jeunes Junior n°97 et je t'avoue qu'à la deuxième lecture, j'ai vraiment apprécié ton fameux Thalès ! Mais à part ça ! »

Extrait de *Math-Jeunes junior* n°97 ([1]) :





Dans ADB : $|XI| = ra$

et dans ACB : $|YI| = ra$

X, Y et I étant alignés, on peut donc affirmer que I est le milieu de $[XY]$.

J'utilise également la fiche 9 :

dans ADC : $|XI| = (1-r)b$

donc $ra = (1-r)b$

$$ra = b - rb$$

$$r(a+b) = b$$

$$r = \frac{b}{a+b}$$

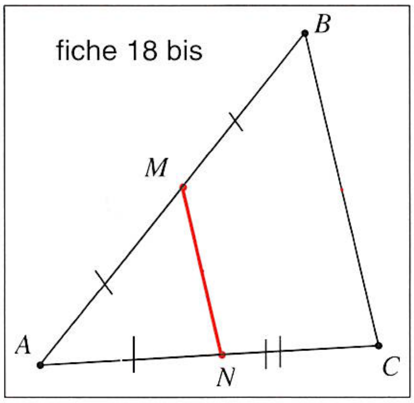
$$|XI| = \frac{ab}{a+b}$$

et enfin $|XY| = \dfrac{2ab}{a+b}$.

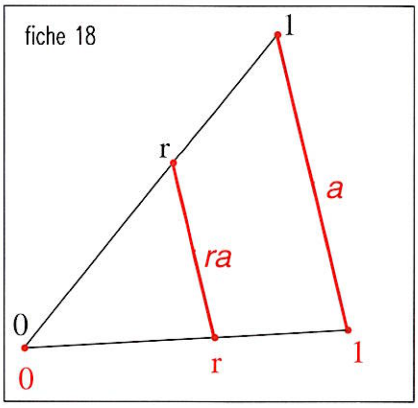
$\mathcal{T}^2$ (un peu embêté) - « Tu me fais penser, en parlant de Thalès, que j'ai retrouvé une autre fiche. Mais (presque méprisant) ce n'est qu'un cas particulier de la fiche 18, tu aurais pu t'en passer ! »

([1]) Ami lecteur, tu peux encore te procurer ce numéro de *Math-Jeunes junior* (voir page de couverture).

Math-Jeunes junior n°100 J,40–43, 2002

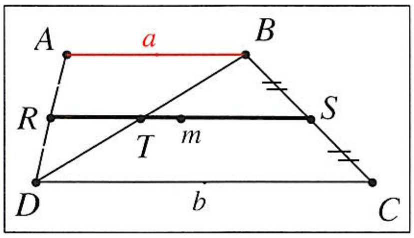


M est le milieu de $[AB]$
N est le milieu de $[AC]$
MN est parallèle à BC
$|MN| = \frac{1}{2}|BC|$



$\mathcal{T}^2$ - « *Tu peux maintenant suivre mon raisonnement :*

R est le milieu de $[AD]$ et S est le milieu de $[BC]$, donc RS est parallèle aux bases du trapèze

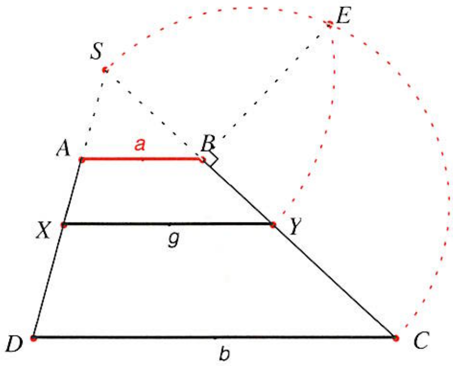


dans le triangle ABD : $|RT| = \frac{1}{2}|AB|$

dans le triangle BDC : $|TS| = \frac{1}{2}|DC|$ (fiche 18 bis)

$$m = |RS| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$$

Et voilà ! Il ne reste plus que la moyenne géométrique à examiner.



Dans le triangle rectangle (fiche 21) SEC :

$$|SE|^2 = |SY|^2 = |SB| \cdot |SC| \quad \text{(fiche 20)}$$

ou

$$\frac{|SY|}{|SB|} = \frac{|SC|}{|SY|}$$

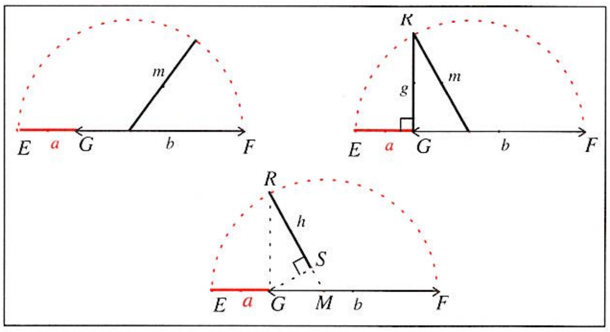
Dans le triangle SYX :

$$\frac{|SY|}{|SB|} = \frac{g}{a} \quad \text{(fiche 19)}$$

Dans le triangle SCD : $\dfrac{|SC|}{|SY|} = \dfrac{b}{g}$ (fiche 19), d'où $\dfrac{g}{a} = \dfrac{b}{g}$ ou $g^2 = ab$ ou $g = \sqrt{ab}$. »

$\mathcal{T}$ (l'air impatient)- « *Ouf, on en a fini avec les moyennes dans le trapèze. Mais je n'oublie pas les moyennes dans le demi-cercle !* (fièrement et en haussant le ton) *<u>Rayon = demi-diamètre</u> et voilà pourquoi $m = \frac{a+b}{2}$!*

Mais ne crois surtout pas que je veux prendre ta place, je n'ai rien trouvé d'autre ! »



$\mathcal{T}^2$ - « *C'était pourtant simple !*

Dans le triangle rectangle ERF — je ne t'explique plus pourquoi ! —
$|RG|^2 = |EG| \cdot |GF|$ donc $g^2 = ab$ et $g = \sqrt{ab}$.

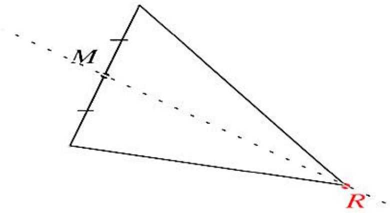
Dans le triangle rectangle RMG : $|RG|^2 = |RS| \cdot |RM|$ et $g^2 = hm$.

Donc $h = \dfrac{g^2}{m}$, $\qquad h = \dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}$, $\qquad h = \dfrac{2ab}{a+b}$. Tu ... »

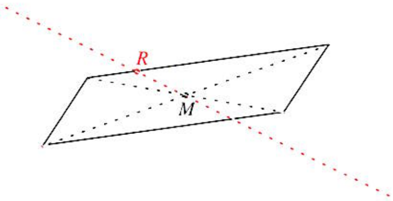
$\mathcal{T}$ (coupant la parole à son frère) - « *C.Q.F.D. comme ils disaient ! Et mon prof de math, lui aussi, il prétendait que c'était simple ! Dis-moi au fait, Salomon, ton coupeur de figures en deux, il était aussi prof de maths ?* »

$\mathcal{T}^2$ - « *Il est temps d'en parler !* »

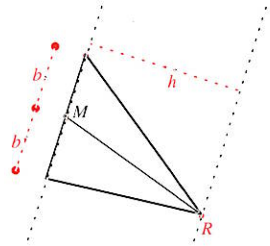
$\mathcal{T}$ (pas très sûr de lui) - « *Je pense que ce n'est pas toujours possible !? J'ai trouvé deux cas simples* : (il insiste un peu ironiquement) *le cas du triangle quand R est un sommet et le cas du parallélogramme. Regarde ce que j'ai trouvé :*



la droite qui passe par R et le milieu M partage le grand triangle en deux triangles de même aire bien qu'ils n'aient pas tout à fait même air (le regard pétillant de malice).



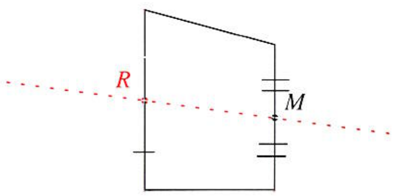
C'est pareil, la droite qui passe par R et le milieu M partage le parallélogramme en deux parties de même aire et, cette fois, de même air, bien qu'à l'envers ! (le regard hilarant, guettant les réactions de son frère) »



$\mathcal{T}^2$ (légèrement amusé) - « *Pas mal !* (ajoutant majestueusement) *la médiane MR du triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire, étant donné qu'ils ont même base et même hauteur, (h) tout en n'étant pas superposables* (2) *dans ce cas !*

Dans le cas du parallélogramme, comme pour toute figure admettant un centre de symétrie, toute droite passant par ce centre partage la figure en deux parties superposables par demi-tour et donc de même aire !

J'ai été un peu plus loin que toi ! Il y a encore un cas simple, celui du trapèze quand R est milieu d'une base :



la droite passant par R et par M milieu de l'autre base du trapèze partage celui-ci en deux trapèzes de mêmes bases et de même hauteur qui ont donc même aire. »

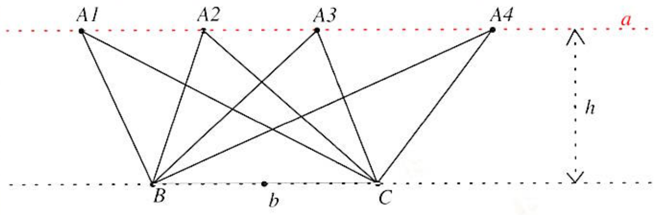
$\mathcal{T}$ (fier de lui) - « *Et pas nécessairement de même air ! Tu vois, j'ai compris !* »

(2) Ami lecteur, quand sont-ils superposables ? Tu utilises peut-être le mot isométriques !

$\mathcal{T}^2$ (légèrement agacé) - « *Il est vrai que pour les autres cas c'est moins simple!* »

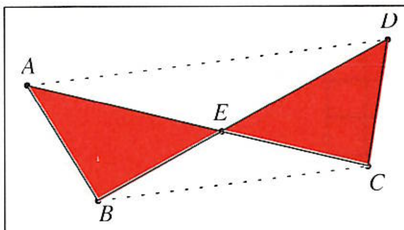
$\mathcal{T}$ (très agacé) - « *Tu ne connais pas le mot compliqué!* »

$\mathcal{T}^2$ (ignorant cette remarque) - « *J'ai cherché avec Cabri (mes fichiers sont disponibles sur* `www.sbpm.be`*) et je suis convaincu qu'une solution existe. J'ai rassemblé quelques fiches sur les aires et analysé un peu plus ces problèmes. Nous devrions terminer pour la prochaine fois!* »



fiche 60

$a//BC$
A_1BC, A_2BC, A_3BC, ...
sont des triangles de même base b et de même hauteur h donc de même aire.



fiche 60 bis

Application de la fiche 60.

$AD//BC$

Les triangles ACB et DBC ont même aire.
Les triangles AEB et EDC ont même aire.

$\mathcal{T}$ (admiratif) - « *On dirait un papillon!* »

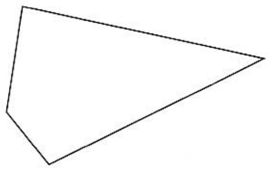
$\mathcal{T}^2$ - « *C'est Jean Michel* (3) *qui va être heureux!*

Tu vois ces fiches devraient nous permettre de remplacer un triangle par un autre de même aire!

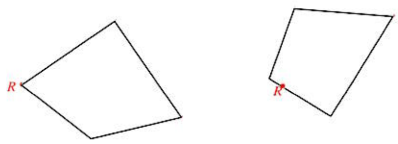
Et si on pouvait ramener les figures compliquées à un cas simple, le tour serait joué!

Séparons le problème en deux difficultés.

1. *Comment transformer un quadrilatère en un triangle de même aire?*



2. *Et si le point R pouvait être sommet de ce triangle, ce serait parfait! On pourrait alors couper le triangle en deux et ... résoudre totalement l'énigme!* »



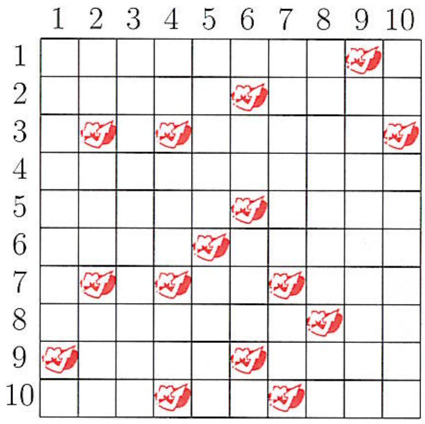
$\mathcal{T}$ (inquiet) - « *Si tu le dis!* »

à suivre ...

(3) Jean Michel Slowik, voir *Math-Jeunes* n°64

Jeux

Mots croisés à thème mathématique.



Horizontalement

1. Parfois isocèles.
2. A l'aise. Nombre premier.
3. Condiment.
4. Servait autrefois pour apprendre à lire.
5. Son prix n'existe pas en mathématique. Entouré à 80%
6. Range son véhicule. Sigle pour « Association des Etudiants Universitaires Montois ».
7. Se dit d'un nombre valant environ 1.62. Symbole du défunt écu.
8. Evite adroitement le coup. Titane.
9. Mille-pattes. Met la balle en jeu.
10. Con dans un sens mais pas dans l'autre. Sélénium. Supplanté par le TGV.

Verticalement

1. Parfois rectangle.
2. Ile. Gros serpent. Symbole en trigonométrie.
3. Qualifie une équation du type $P(x) = 0$ dans laquelle $P(x)$ est un polynôme en x.
4. Unité de pression. Notre pays en fait partie. Lu à l'envers.
5. Tableur. Celles du Capitole sont bien connues.
6. Vers latin. Département français en désordre.
7. Géométrie à trois dimensions. Existes.
8. Qualifie un élève appliqué. Conjonction.
9. Mesure du contour d'un polygone fermé.
10. ...cetera. Après.

Math-Jeunes junior n°100 J,44–44, 2002

Olympiades

C.Festraets

Après l'éliminatoire

Le 16 janvier 2002 a eu lieu la vingt-septième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis cinq ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur.

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer à la demi-finale

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « préformulée » elles sont notées « srp ».

Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser. S'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demandent seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a tout de même un minimum de connaissance à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout

Math-Jeunes junior n°100 J,45–48, 2002

à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé.

Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans les tomes 1 et 2 de OMB reprenant toutes les questions posées de 1976 à 1981. Malheureusement, ces tomes ne sont plus en vente, ils sont épuisés. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir le tome 4 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela

Olympiades Mathématiques Belges

Tome 4 (1994-1998) : prix 5,50 €

Ajouter 1,36 € de port pour un exemplaire et 2,48 € de port pour deux ou trois exemplaires.

Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1.Inégalités [1977]

Si a, b, c, d sont des nombres réels et si $0 < a \leqslant b$ et $0 \leqslant c < d$, laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(A) $0 \leqslant ac < bd$ **(B)** $0 \leqslant ac \leqslant bd$ **(C)** $0 < ac < bd$ **(D)** $0 = ac < bd$ **(E)** $0 < ac \leqslant bd$

2.Construction d'un triangle [1979]

Il est possible de construire un triangle (dont les sommets ne sont pas alignés) tel que

(A) les côtés mesurent respectivement 1m, 2m, 3m ;

(B) les trois hauteurs se coupent en dehors du triangle ;

(C) deux des angles sont obtus ;

(D) les angles mesurent respectivement 90°, 72°, 8° ;

(E) le point commun aux trois médianes est en dehors du triangle.

3. Disque et carré [1980]

Quel est le plus petit disque, dont le rayon est choisi parmi les nombres ci-dessous, qui a une aire supérieure à celle d'un carré dont le côté mesure 1,5 cm ?

(A) 0,7 cm **(B)** 0,8 cm **(C)** 0,9 cm **(D)** 1cm **(E)** 1,1 cm

4. Polyèdre [1977]

Le polyèdre convexe (solide à faces planes) dont les sommets sont les centres des 6 faces d'un cube comporte

(A) 8 sommets,12 arêtes, 6 faces ;

(B) 6 sommets, 10 arêtes, 8 faces ;

(C) 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces ;

(D) 8 sommets, 12 arêtes, 8 faces ;

(E) 6 sommets, 10 arêtes, 6 faces.

5. Longueur d'un côté [1978]

Dans tout triangle ayant un périmètre de 12 mètres, si l désigne la longueur (exprimée en mètres) d'un quelconque des trois côtés, on peut affirmer que

(A) $l = 4$ **(B)** $l \leqslant 4$ **(C)** $l \leqslant 6$ **(D)** $1 \leqslant l \leqslant 12$ **(E)** $l > 4$

6. Division [1984]

Lequel des nombres suivants n'est pas un entier ?

(A) 926 :2 **(B)** 420 :7 **(C)** 609 :5 **(D)** 350 :25 **(E)** 280 :20

7. Longue addition [1987]

La somme $(\frac{1}{8}+\frac{6}{7})+(\frac{1}{7}+\frac{5}{6})+(\frac{1}{6}+\frac{4}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})$ vaut

(A) $5+\frac{183}{840}$ **(B)** 5,375 **(C)** 5,3781... **(D)** 5,625 **(E)** $\frac{53}{8}$

8. Fractions [1986]

Quels que soient les entiers naturels non nuls a, b, c, l'expression $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}$ est égale à :

(A) $\dfrac{c}{b}$ **(B)** $\dfrac{a}{bc}$ **(C)** $\dfrac{a+c}{ab}$ **(D)** $\dfrac{a+c}{a+b}$ **(E)** $\dfrac{a^2+bc}{ab}$

9. Nombres premiers [1982]

Combien y a-t-il de nombres premiers compris entre 24 et 46 ?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 11

10. Effeuillons la marguerite [1984]

Un amoureux effeuille une marguerite à 29 pétales en chantant : "Elle m'aime un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout, un peu, beaucoup, ...". S'il enlève le premier pétale en prononçant le premier "un peu", il va arriver à la conclusion qu'il est aimé

(A) un peu **(B)** beaucoup **(C)** passionnément **(D)** à la folie **(E)** pas du tout

11. Prisme [1985]

Un élève utilise entièrement 1,20 m de fil de fer pour y découper les arêtes d'un prisme à base carrée. Si les arêtes latérales du prisme ont une longueur triple de celle des côtés de la base, une arête latérale mesure en cm :

(A) 16 **(B)** 18 **(C)** 22,5 **(D)** 24 **(E)** 27

12. La planète du Petit Prince [1987]

Le Petit Prince, qui mesure 1,2 mètre, se promène le long de l'équateur de sa planète. Sa tête décrit donc un cercle plus grand que celui décrit par ses pieds. Quelle est approximativement la différence de longueur (en mètres) entre ces deux cercles ?

(A) $1,2 \times 3,14$ **(B)** $(1,2)^2 \times 3,14$ **(C)** $1,2 \times 6,28$ **(D)** $(1,2)^2 \times 6,28$

(E) Il manque le rayon de la planète pour pouvoir répondre.

13. Cercles concentriques [1985]

On donne deux cercles concentriques. Le quotient du rayon du petit cercle par le rayon du grand vaut $\frac{2}{3}$. Que vaut le quotient de l'aire du petit cercle par l'aire de la couronne ?

(A) $\frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{4}{5}$ **(E)** 1

14. Sur un banc [1986]

Deux couples, assis sur un même banc, posent pour une photo. Aucun des couples ne veut être séparé. De combien de manières peut-on placer ces quatre personnes sur le banc ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

15. Jouons à la balle [1984]

Une balle de caoutchouc rebondit aux $\frac{2}{3}$ de sa hauteur de chute. Si elle rebondit à 72 cm, de quelle hauteur était-elle tombée ?

srp

16. Combien de maisons ? [1986]

Dans la rue de la Gare, du côté des numéros impairs, une maison porte le numéro 87. Si la numérotation commençait à l'autre extrémité de la rue, elle aurait le numéro 69. Quel est le nombre de maisons du côté impair ?

srp

17. Couples de naturels [1984]

Combien y a-t-il de couples (x,y) de nombres naturels tels que $x \leqslant y$ et $x + y = 168$, le pgcd de x et y étant égal à 21 ?

srp

Voici les réponses :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	C	C	C	C	D	E
10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	D	B	C	D	E	108	78	2

Math-Jeunes

vous offre une page de carrés parfaits.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484,
529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521,
1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916,
3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761,
4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056,
7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801,
10000, 10201, 10404, 10609, 10816, 11025, 11236, 11449, 11664, 11881, 12100, 12321, 12544,
12769, 12996, 13225, 13456, 13689, 13924, 14161, 14400, 14641, 14884, 15129, 15376, 15625,
15876, 16129, 16384, 16641, 16900, 17161, 17424, 17689, 17956, 18225, 18496, 18769, 19044,
19321, 19600, 19881, 20164, 20449, 20736, 21025, 21316, 21609, 21904, 22201, 22500, 22801,
23104, 23409, 23716, 24025, 24336, 24649, 24964, 25281, 25600, 25921, 26244, 26569, 26896,
27225, 27556, 27889, 28224, 28561, 28900, 29241, 29584, 29929, 30276, 30625, 30976, 31329,
31684, 32041, 32400, 32761, 33124, 33489, 33856, 34225, 34596, 34969, 35344, 35721, 36100,
36481, 36864, 37249, 37636, 38025, 38416, 38809, 39204, 39601, 40000, 40401, 40804, 41209,
41616, 42025, 42436, 42849, 43264, 43681, 44100, 44521, 44944, 45369, 45796, 46225, 46656,
47089, 47524, 47961, 48400, 48841, 49284, 49729, 50176, 50625, 51076, 51529, 51984, 52441,
52900, 53361, 53824, 54289, 54756, 55225, 55696, 56169, 56644, 57121, 57600, 58081, 58564,
59049, 59536, 60025, 60516, 61009, 61504, 62001, 62500, 63001, 63504, 64009, 64516, 65025,
65536, 66049, 66564, 67081, 67600, 68121, 68644, 69169, 69696, 70225, 70756, 71289, 71824,
72361, 72900, 73441, 73984, 74529, 75076, 75625, 76176, 76729, 77284, 77841, 78400, 78961,
79524, 80089, 80656, 81225, 81796, 82369, 82944, 83521, 84100, 84681, 85264, 85849, 86436,
87025, 87616, 88209, 88804, 89401, 90000, 90601, 91204, 91809, 92416, 93025, 93636, 94249,
94864, 95481, 96100, 96721, 97344, 97969, 98596, 99225, 99856, 100489, 101124, 101761,
102400, 103041, 103684, 104329, 104976, 105625, 106276, 106929, 107584, 108241, 108900,
109561, 110224, 110889, 111556, 112225, 112896, 113569, 114244, 114921, 115600, 116281,
116964, 117649, 118336, 119025, 119716, 120409, 121104, 121801, 122500, 123201, 123904,
124609, 125316, 126025, 126736, 127449, 128164, 128881, 129600, 130321, 131044, 131769,
132496, 133225, 133956, 134689, 135424, 136161, 136900, 137641, 138384, 139129, 139876,
140625, 141376, 142129, 142884, 143641, 144400, 145161, 145924, 146689, 147456, 148225,
148996, 149769, 150544, 151321, 152100, 152881, 153664, 154449, 155236, 156025, 156816,
157609, 158404, 159201, 160000, 160801, 161604, 162409, 163216, 164025, 164836, 165649,
166464, 167281, 168100, 168921, 169744, 170569, 171396, 172225, 173056, 173889, 174724,
175561, 176400, 177241, 178084, 178929, 179776, 180625, 181476, 182329, 183184, 184041,
184900, 185761, 186624, 187489, 188356, 189225, 190096, 190969, 191844, 192721, 193600,
194481, 195364, 196249, 197136, 198025, 198916, 199809, 200704, 201601, 202500, 203401,
204304, 205209, 206116, 207025, 207936, 208849, 209764, 210681, 211600, 212521, 213444,
214369, 215296, 216225, 217156, 218089, 219024, 219961, 220900, 221841, 222784, 223729,
224676, 225625, 226576, 227529, 228484, 229441, 230400, 231361, 232324, 233289, 234256,
235225, 236196, 237169, 238144, 239121, 240100, 241081, 242064, 243049, 244036, 245025,
246016, 247009, 248004, 249001, 250000, 251001, 252004, 253009, 254016, 255025, 256036,
257049, 258064, 259081, 260100, 261121, 262144, 263169, 264196, 265225, 266256, 267289,
268324, 269361, 270400, 271441, 272484, 273529, 274576, 275625, 276676, 277729, 278784.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée