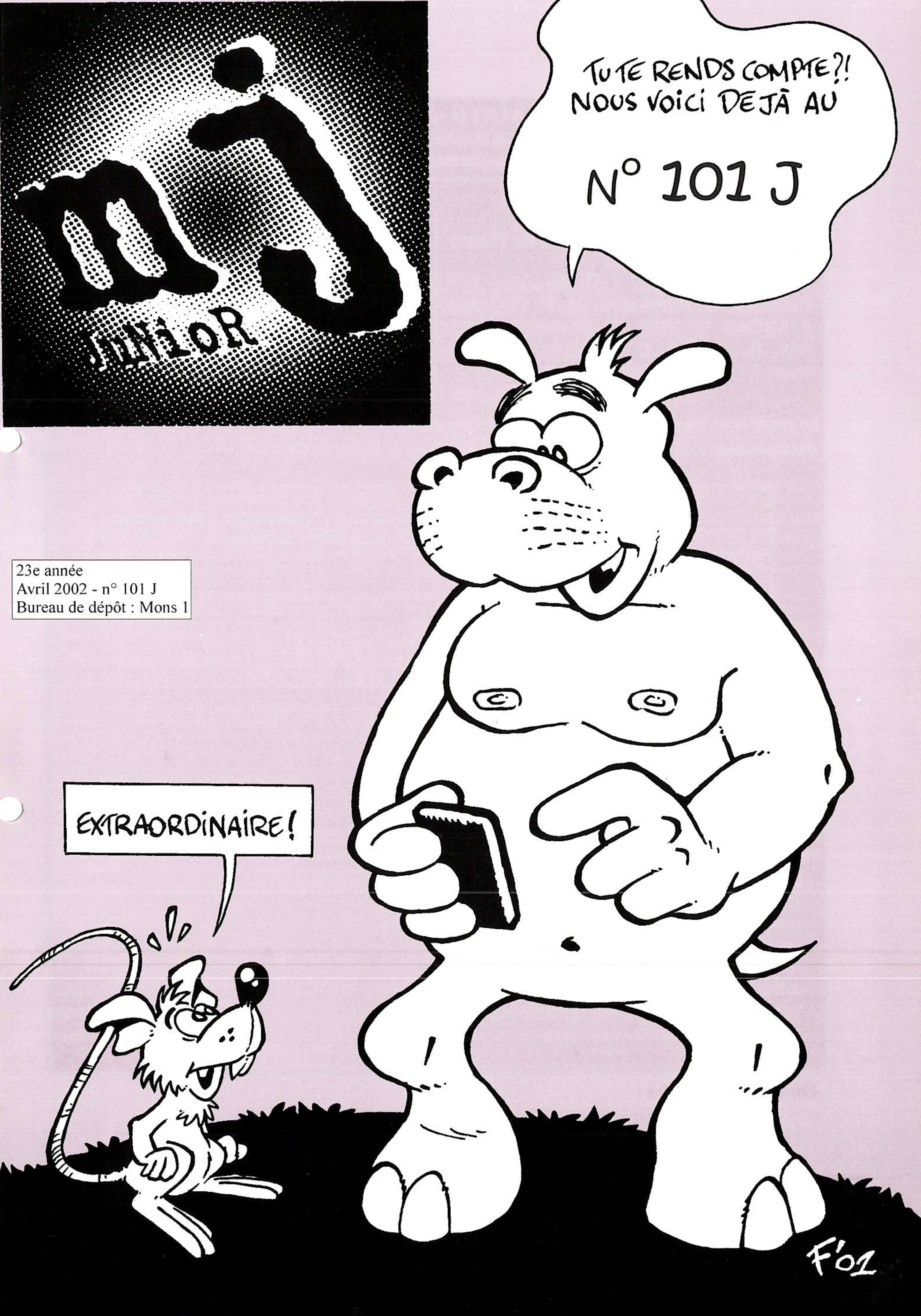
mj junior



23e année
Avril 2002 - n° 101 J
Bureau de dépôt : Mons 1

MATH-JEUNES

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. BALLIEU, J.-P. CAZZARO, C. FESTRAETS, M.-F. GUISSARD, J. MIÉWIS, G. NOËL, F. POURBAIX, G. SINON, R. GOSSEZ, C. RANDOUR, S. TROMPLER, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. FESTRAETS, G. LALOUX, G. NOËL, A. PATERNOTTRE, F. POURBAIX, N. VANDENABEELE, C. VANDERCAMMEN, C. VAN HOOSTE, C. VILLERS

Illustrations : F. POURBAIX

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes* (*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5) (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes* (*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 500 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. BALLIEU, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N° 101 J Vingt-troisième année 2002

Math-Jeunes junior

HuMoUr

Onézyme Farfelu, mathématicien à ses heures, affirme que :

> a et b étant deux nombres non nuls,
>
> $a = b \Rightarrow 1 = 2$

Il propose la démonstration suivante :

$$\begin{aligned} a &= b \\ &\Downarrow \\ a^2 &= ab \\ &\Downarrow \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ &\Downarrow \\ (a-b)\cdot(a+b) &= b\cdot(a-b) \\ &\Downarrow \\ a+b &= b \\ &\Downarrow \\ 2\cdot b &= b \\ &\Downarrow \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Il y a sûrement une erreur ! ! ! Où se trouve-t-elle ?

Un mathématicien décide de changer de métier et se présente à la caserne des pompiers pour y entamer une nouvelle carrière. Le chef des pompiers écoute ses motivations et les trouve très valables. Pourtant il décide de lui faire passer un petit test.

Voyons dit-il : « vous êtes dans un couloir où se trouve un enrouleur d'incendie et le feu prend dans une poubelle. Que faites-vous ? »

« Et bien », dit le matheux, « j'ouvre l'eau, je déroule le tuyau et j'éteins l'incendie. »

« Parfait », répond le pompier. « Seconde question plus difficile. Vous êtes dans un couloir où se trouve un enrouleur d'incendie et il n'y a pas de feu dans la poubelle. Que faites-vous ? »

Le matheux réfléchit un long moment, puis déclare : « je mets le feu à la poubelle. »

« Vous êtes fou », dit le pompier, « pourquoi faites-vous cela ? »

« Je ramène mon nouveau problème à un problème déjà résolu. » réplique le matheux...

Échos de la 27^{e} Olympiade Mathématique Belge

« **21 879** ». Tel était le nombre total des participants à la vingt-septième éliminatoire de l'OMB organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (SBP-Mef). Cette épreuve s'est déroulée le mercredi 16 janvier 2002 dans 535 écoles de Bruxelles, du Grand Duché de Luxembourg ainsi que des régions francophone et germanophone de notre pays.

Répartition des concurrents :

MINI :	1re année :	6019	2^{e} année :	4741
MIDI :	3^{e} année :	3695	4^{e} année :	2964
MAXI :	5^{e} année :	2477	6^{e} année :	1983

Voici un aperçu de l'ensemble des résultats :

Rappels :
- score maximum : 150
- 5 points par bonne réponse, 2 points par abstention, 0 point par réponse fausse.
- minimum obligatoire de 5 réponses
- épreuve MINI destinée aux élèves des 1reet 2^{e}années, MIDI pour les 3^{e}et 4^{e}années, MAXI pour les 5^{e}et 6^{e}années.

	Nombre de concurrents	Score modal (*)	Score médian (**)
MINI	10760	70	67
MIDI	6659	62	66
MAXI	4460	75	73

(*) Score modal (ou mode) : score le plus souvent observé. (243 fois en mini, 177 fois en midi, 136 fois en maxi)

(**) Score médian (ou médiane) : score en dessous duquel se situent 50% des concurrents et au dessus duquel se situent les 50 autres%

Quel que soit votre score, bravo pour votre participation. Bon succès aux demi-finalistes et finalistes. Soyez encore plus nombreux l'an prochain lors de la vingt-huitième olympiade. Vous avez tout à gagner et rien à perdre.

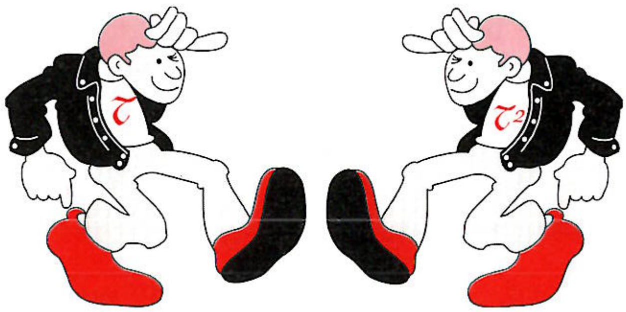
La rédaction.

Les frères Hick 5

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick

Recherches en tous genres



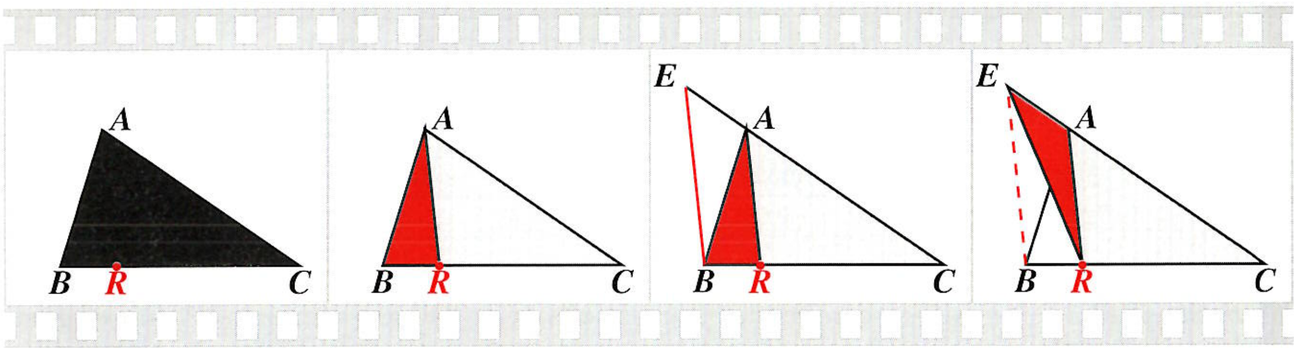
Ami lecteur,

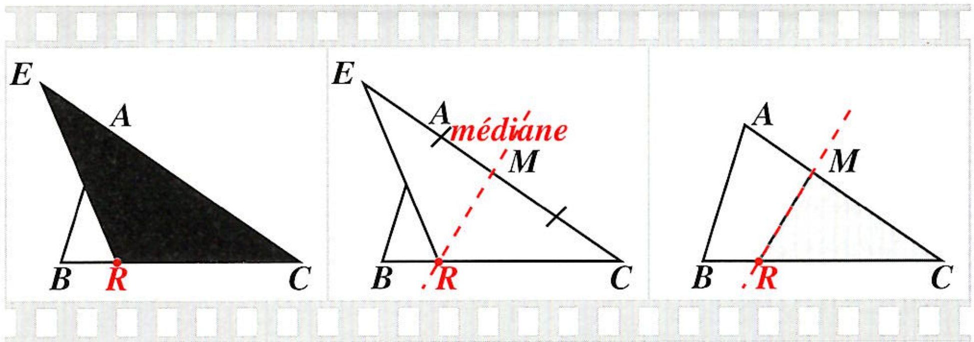
$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ vont te fournir la suite de leurs commentaires sur les partages du triangle et du quadrilatère en deux parties de même aire. Ils te proposeront *à la page 35 de ce numéro**, une (petite !) variante de l'énigme posée par la page 58 du Math-Jeunes n° 78 (février 1997). Bon courage et bon amusement.*

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ - « J'ai bien essayé pour couper le triangle en deux de me ramener aux cas simples, mais franchement je n'ai rien trouvé ! »

$\mathcal{T}$ (compatissant)- « Il y a pourtant beaucoup de façons de procéder ! Je vais t'en détailler une. C'est comme un film ! Regarde !





J'ai construit E sur AC et tel que EB est parallèle à AR.

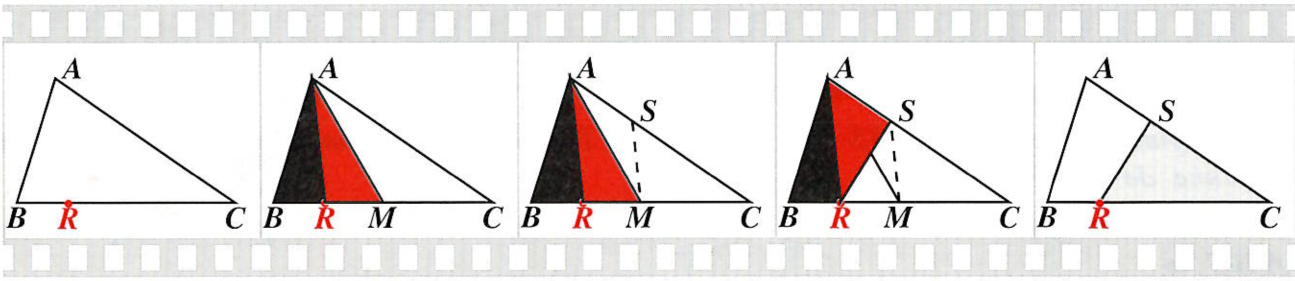
Les triangles BAR et EAR ont même aire, les triangles ABC et ERC ont donc même aire.

Math-Jeunes junior n°101 J,54–57, 2002

Les triangles EMR et MRC ont même aire, le triangle MRC est donc la moitié du triangle ABC.

Tu vois, j'ai ramené ce cas à celui où R est sommet du triangle et j'utilise la médiane !

Regarde cet autre film :

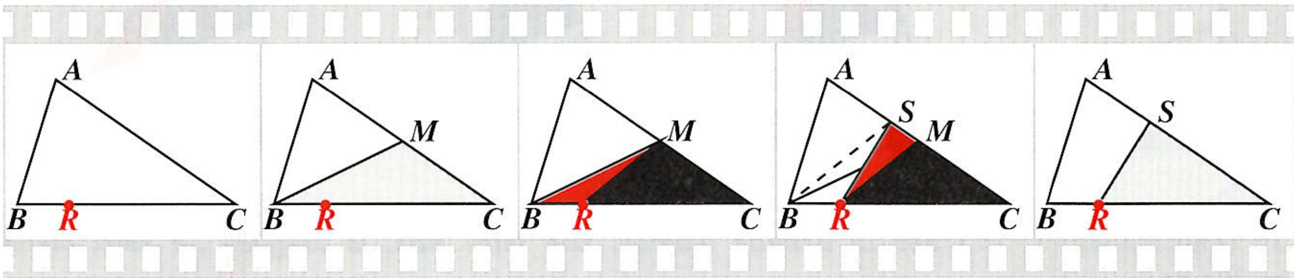


Ici, je coupe par la médiane AM et je remplace le triangle rouge ARM par ARS en traçant SM parallèle à AR (fiche 60).

L'aire du quadrilatère $ABRS$ vaut donc la moitié de l'aire du triangle ABC. »

$\mathcal{T}^2$ (assez fier) - « Je crois que j'ai compris, mais je pense qu'on aurait pu utiliser une autre médiane ...

Eh oui, regarde :



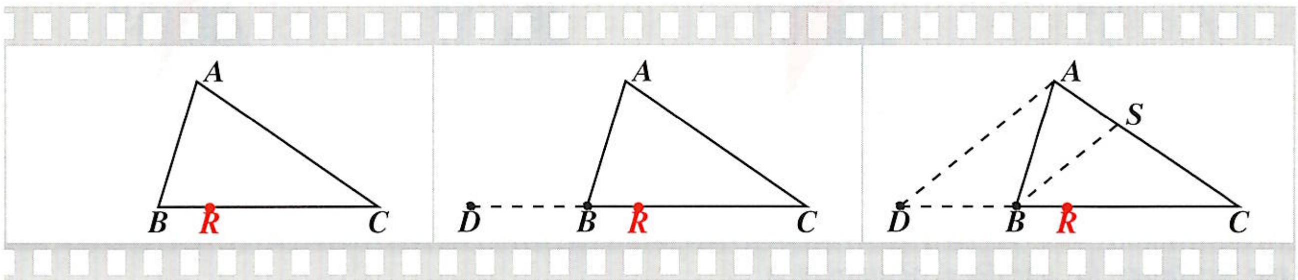
Moi aussi, je coupe par une médiane, mais c'est BM, et je remplace le triangle rouge BRM par SRM en traçant SB parallèle à MR.

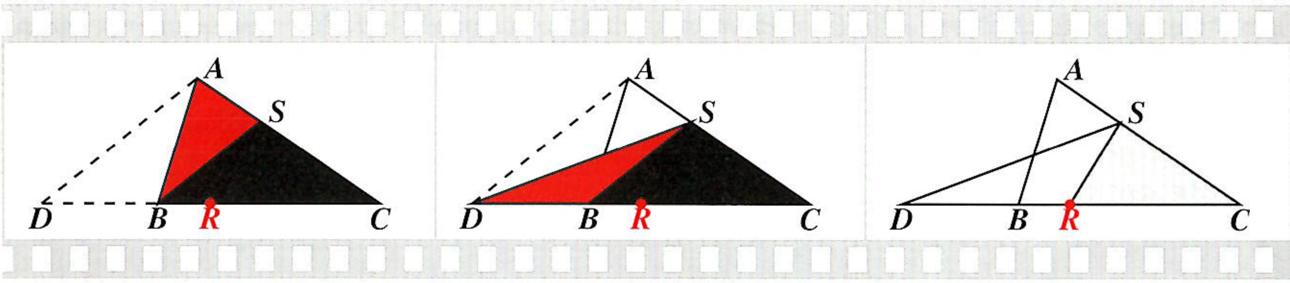
L'aire du triangle RSC vaut donc la moitié de l'aire du triangle ABC.

(il ajoute de manière perfide)

Dis-moi ! R milieu de côté, ce n'était pas aussi un cas simple ? »

$\mathcal{T}$ (très surpris) - « Tu sais que tu t'améliores ! Tu pensais me piéger ! Regarde plutôt :





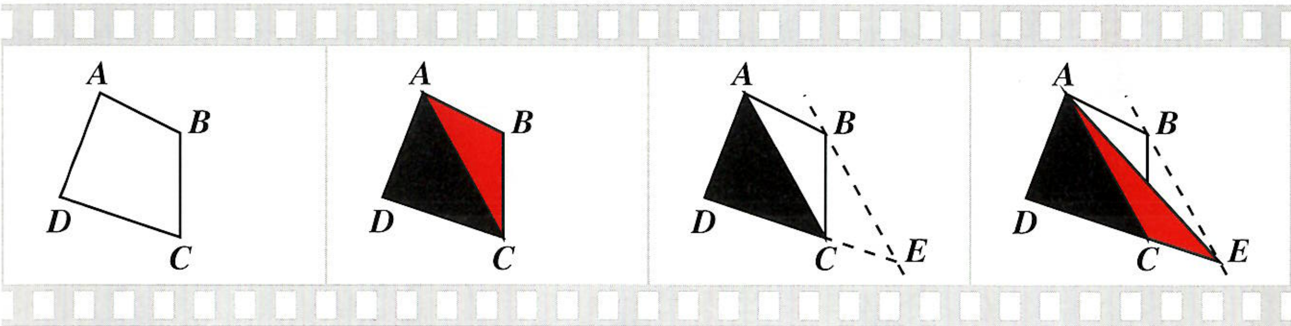
Je construis D pour que R soit milieu de $[DC]$ et BS parallèle à AD

Je remplace le triangle ABS par le triangle DBS (toujours la fiche 60) et SR est médiane de DBS.

L'aire du triangle SRC est donc la moitié de l'aire de DSC et par conséquent de ABC. »

$\mathcal{T}^2$ - « *En ce qui concerne ta deuxième question,* remplacer un quadrilatère par un triangle de même aire, *je n'ai sans doute pas l'étoffe d'un prestidigitateur ...* »

$\mathcal{T}$ (le coupant net) - « *C'est pourtant pratiquement toujours la même chose! Regarde cet autre film :*



... »

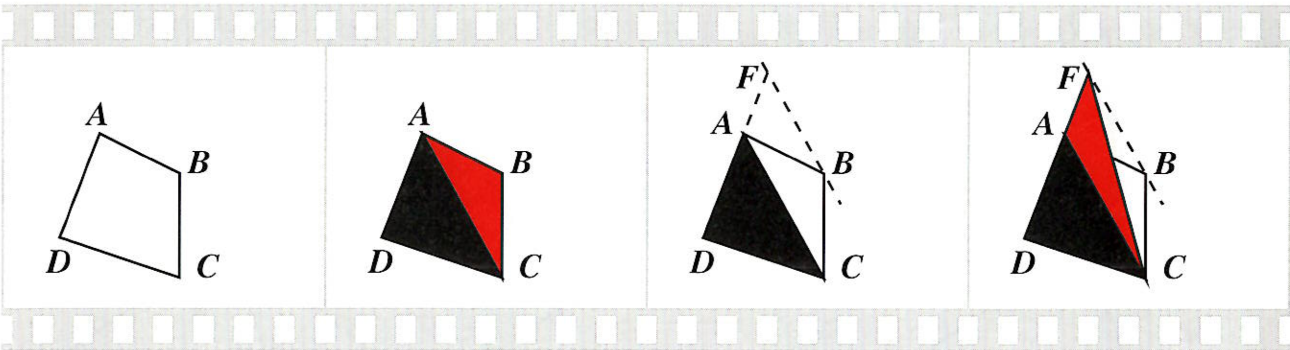
$\mathcal{T}^2$ (l'air ironique) - « *C'est la grande illusion, ton film! Non, je blague! Je peux même expliquer :*

scène 1 : partager le quadrilatère en deux triangles,

scène 2 : tracer BE parallèle à AC avec E sur DC,

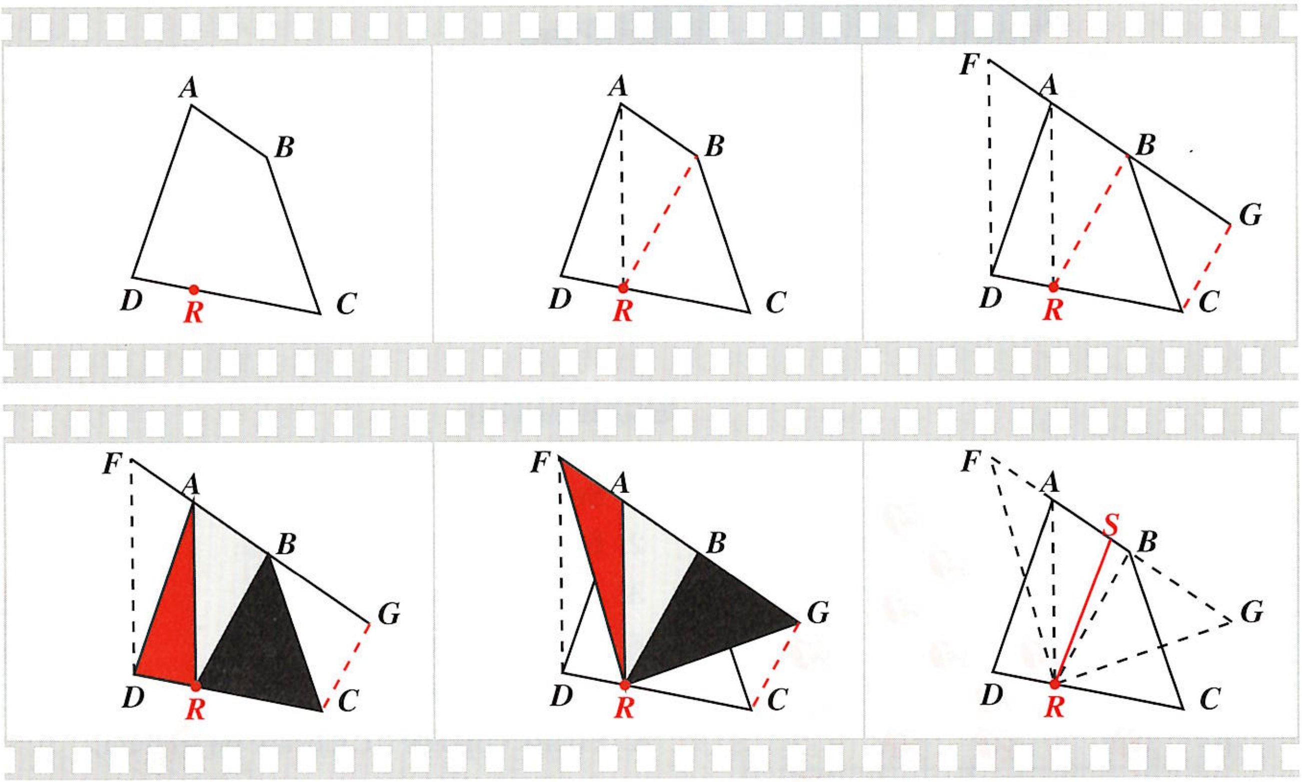
scène 3 : remplacer le triangle BAC par EAC, refiche 60!

Mais mieux encore, je peux modifier ton scénario :



Cela règle le cas où le point R coïncide avec le sommet D mais je pense que tu vas me projeter la dernière séquence »

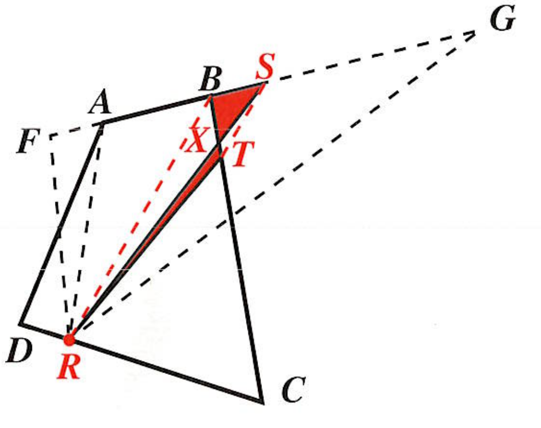
$\mathcal{T}$ (fier de son frère et c'est un fait tellement rare qu'il mérite d'être signalé !) - « *Je ne vais pas te décevoir si près du but ! Admire :*



Le triangle FRG et le quadrilatère $ABCD$ ont même aire (je ne t'explique plus !). Pour résoudre notre dernier problème, il ne reste plus qu'à tracer la médiane RS du triangle FRG. Elle partagera ces deux figures en deux parties de même aire. »

$\mathcal{T}^2$ (inquiet mais curieux) - « *C'est génial ! Mais tu es sûr que le milieu de $[FG]$ va toujours se trouver sur $[AB]$?* »

$\mathcal{T}$ (nullement désarçonné) - « *Il suffit d'ajuster un peu !*



Le petit triangle rouge BSX qui est à l'extérieur du quadrilatère se remplace par RXT en traçant ST parallèle à BR. Tu vois, c'est toujours la même technique ! C'est donc RT qui partage le quadrilatère en deux parties de même aire. »

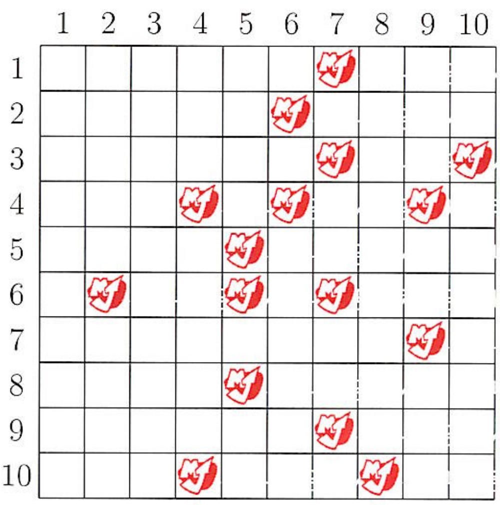
$\mathcal{T}^2$ (un peu moqueur)- « *J'espère que Salomon appréciera nos efforts ! Euh, pardon ! Tes efforts...* »

suite page 35

Jeux

A. Paternottre

Mots croisés à thème mathématique.



Horizontalement

1. Auteur d'un théorème célèbre. Coule en Suisse.
2. Rendu - Parfois souterrain.
3. Arrose Homs-Scandium.
4. Atome - 200 à Rome.
5. Transporte en France - Acteur français.
6. Points opposés - Chlorure de sodium.
7. Celles des jardiniers sont bien connues.
8. 1609 mètres - Grand violoniste récemment décédé.
9. Compositeur roumain - Mais latin.
10. A lui- Agence Européenne de l'Espace - Cube.

Verticalement

1. Suivent les secondes.
2. Auteur d'une célèbre formule relative au triangle - Ligne anglaise.
3. Amasses.
4. Fibre textile - Les gras sont appréciés.
5. Villa à Tivoli - Démonstratif.
6. Ils ne le sont pas nécessairement à cause des math !
7. Chlore - Conjonction.
8. Elles repèrent les points d'un axe gradué.
9. Portion de cercle - Touche de la calculette - Rouge anglais
10. Marré - Eire ou Erin.

Math-Jeunes junior n°101 J,58–59, 2002

Solution des mots croisés parus dans MJJ/100

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	R	A	P	E	Z	E	S		E
2	R	E	L	A	X		S	E	P	T
3	I		G		C	A	P	R	E	
4	A	B	E	C	E	D	A	I	R	E
5	N	O	B	E	L		C	E	I	N
6	G	A	R	E		A	E	U	M	S
7	L		I		O	R		X	E	U
8	E	S	Q	U	I	V	E		T	I
9		I	U	L	E		S	E	R	T
10	A	N	E		S	E		T	E	E

Suite de la page 30 : Les frères Hick te proposent l'énigme suivante :

Où il est question d'être magicien !

Un nombre de la grille tu entoureras

Sa ligne et sa colonne tu barreras

Jusqu'à épuisement tu le feras

Les quatre nombres tu observeras

Plusieurs fois tu recommenceras

Alors un sentiment de puissance t'envahira.

0,46	0,26	0,42	0,3
0,23	0,03	0,19	0,07
0,37	0,17	0,33	0,21
0,34	0,14	0,3	0,18

1. Recommencer sur cette grille !
2. Créer une autre grille et jouer le même jeu.

(à suivre)

A méditer

Les mathématiques sont l'alphabet de Dieu pour écrire l'Univers.

Galilée.

Les jeux et problèmes mathématiques de Tonton C.

1. Pile et face

Dix pièces sont alignées sur un support qui peut en porter 12. Les 5 premières sont tournées côté face (F) vers le haut et les 5 dernières côté pile (P) vers le haut.

F	F	F	F	F	P	P	P	P	P

Vous pouvez translater 2 pièces contiguës sans les permuter ni les retourner, de manière à leur faire occuper deux emplacements contigus libres. Trouvez le plus petit nombre de telles translations qui fournissent une suite de pièces alternant les côtés F et P.

2. Quelle est l'écriture correcte ? A ou B

1) A : Un équerre B : Une équerre
2) A : L'hypothénuse B : L'hypoténuse
3) A : Un hémisphère B : Une hémisphère
4) A : Un abaque B : Une abaque
5) A : Une absisse B : Une abscisse
6) A : Un algorythme B : Un algorithme
7) A : Une bissectrice B : Une bissextrice
8) A : Un cylindre B : Un cilyndre
9) A : Un paralélogramme B : Un parallélogramme
10) A : L'équipolence B : L'équipollence

3. Quelle famille ! !

Eric dit : « J'ai autant de soeurs que de frères ».
Solange, sa soeur, dit : « J'ai deux fois autant de frères que de soeurs ».
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

Solution des jeux de tonton C.

1. Voici une solution en 5 translations

F	F	F	F	F	P	P	P	P	P		
F			F	F	P	P	P	P	P	F	F
F	P	P	F	F	P	P			P	F	F
F	P	P	F			P	F	P	P	F	F
F	P	P	F	P	F	P	F	P			F
		P	F	P	F	P	F	P	F	P	F

Peut-être en avez-vous trouvé (au moins) une autre.

2. Les écritures correctes sont :
1-B, 2-B, 3-A, 4-B, 5-B, 6-B, 7-A, 8-A, 9-B, 10-B

3. Cette famille comporte 3 filles et 4 garçons soit un total de 7 enfants.

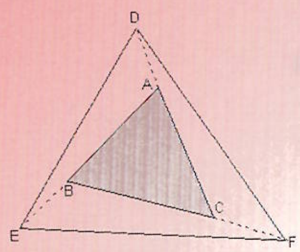
RALLYE problèmes

C. Festraets

Voici les cinq derniers problèmes de ce rallye. N'oubliez pas de présenter vos solutions sur des feuilles séparées pour chaque problème et d'y indiquer vos nom, prénom, âge, classe, école et adresse personnelle. Soignez votre présentation. Bon courage ! Vos solutions doivent parvenir à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 13 mai 2002 au plus tard.

11– Triangles

On prolonge les trois côtés d'un triangle ABC d'une longueur égale à la moitié de la longueur du côté prolongé et on forme ainsi un triangle DEF (comme sur la figure).



Quel est le rapport de l'aire du triangle DEF à l'aire du triangle ABC ?

12 – Anniversaire

A ce goûter d'anniversaire, un quart des invités ne sont pas venus. On avait prévu deux gâteaux pour chacun des invités. A cause des absents, il en restait pas mal, ce qui a permis de donner un gâteau supplémentaire à chacune des filles présentes. Les trois garçons présents n'ont pas protesté. Combien y avait-il d'invités à ce goûter ?

13 – L'âge du père

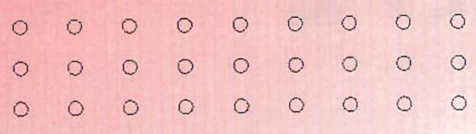
L'an dernier, mon père avait le double de mon âge. Cette année, nos deux âges sont des nombres de deux chiffres écrits avec les mêmes chiffres mais pas dans le même ordre. Quel est l'âge actuel de mon père ?

14 – Economies

Jean et Pierre ont tous deux fait des économies mais Jean possède plus d'argent que Pierre. Le montant des économies de Jean est un nombre de trois chiffres, multiple de 9 et dont le chiffre des unités est 8, tandis que le montant des économies de Pierre est aussi un nombre de trois chiffres, multiple de 3 et dont le chiffre des unités est 2. Quel est au maximum la différence entre les économies de Jean et de Pierre ?

15– Rouge et noir

27 points sont disposés aux sommets d'un quadrillage comme l'indique la figure.



Chaque point est colorié soit en noir, soit en blanc, mais de manière qu'aucun rectangle non carré n'ait ses quatre sommets blancs. Démontrer qu'alors il existe certainement un rectangle non carré dont les quatre sommets sont noirs

Solutions des problèmes 6 à 10 (*Math-Jeunes junior* n°100)

6. Jouons aux dés

a) La plus petite somme que l'on peut obtenir est $s = 1 + (1000 \times 1) + (1001 \times 2) = 3003//$
La plus grande somme que l'on peut obtenir est $s = 1 + (1000 \times 3) + (1001 \times 4) = 7005$

b) La somme s peut prendre toutes les valeurs entre 3003 et 7005. On procède comme suit :

$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 2 = 3003$

$1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 2 = 3004$

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 2 = 3005$

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \cdots + 1 + 2 = 3006$

$\vdots$

$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \cdots + 1 + 3 = 4004$

On recommence en transformant successivement les 3 en 4

$1 + 4 + 1 + 3 + 1 + 3 + \cdots + 1 + 3 = 4005$

$1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 3 + \cdots + 1 + 3 = 4006$

$\vdots$

$1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4 + \cdots + 1 + 4 = 5005$

puis on transforme successivement les 1 en 2, à partir du deuxième 1

$1 + 4 + 2 + 4 + 1 + 4 + \cdots + 1 + 4 = 5006$

$1 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + \cdots + 1 + 4 = 5007$

$\vdots$

$1 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + \cdots + 2 + 4 = 6005$

et enfin on transforme successivement les 2 en 3

$1 + 4 + 3 + 4 + 2 + 4 + \cdots + 2 + 4 = 6006$

$1 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + \cdots + 2 + 4 = 6007$

$\vdots$

$1 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + \ldots + 3 + 4 = 7005$

7. Factorielle

$n! = (2^{15}).(3^6).(5^3).(7^2).(11).(13)$

$n!$ comporte le facteur premier 13, mais pas le facteur premier 17. On a donc quatre possibilités : $n = 13$, $n = 14$, $n = 15$ ou $n = 16$.

$n!$ est multiple de 5^3, donc de 5, 10 et 15, ce qui ne laisse que deux possibilités : $n = 15$ ou $n = 16$.

Comptons le nombre de facteurs 2 dans 15!
$15! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 14 \times 15$.
Les multiples de 2 sont 2, $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2^3$, $10 = 2 \times 5$, $12 = 2^2 \times 3$, $14 = 2 \times 7$. Il n'y a que 11 facteurs 2, d'où $n = 16$.

8. Produit des chiffres

$2000 = 2^4 \times 5^3$. Dès lors trois des chiffres doivent être des 5 et les deux autres doivent avoir un produit égal à 2^4 ou 16. Ces deux autres chiffres peuvent donc être 4 et 4 ou 2 et 8.

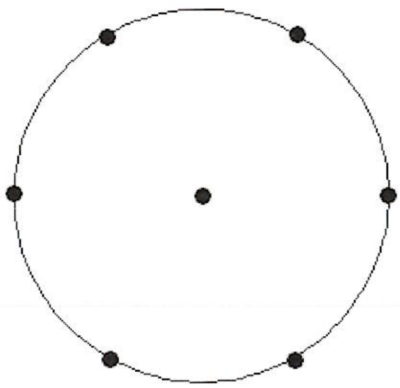
Ces nombres de cinq chiffres sont de la forme $555\star\star$, $55\star5\star$, $55\star\star5$, $5\star55\star$, $5\star5\star5$, $5\star\star55$, $\star555\star$, $\star5\star55$, $\star55\star5$, $\star\star555$ où les étoiles peuvent être remplacées soit par 4 suivi de 4, soit par 2 suivi de 8, soit par 8 suivi de 2.
Il y a donc trente nombres de cinq chiffres dont le produit des chiffres vaut 2000.

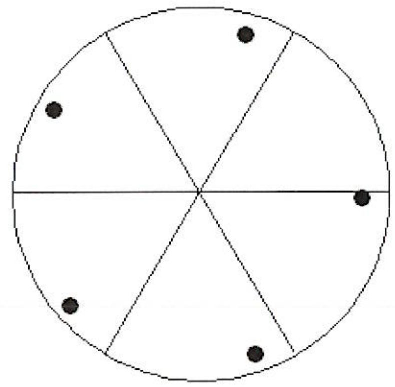
9. Distances

1) On peut placer 7 points : le centre du disque et les six sommets d'un hexagone régulier situés sur le bord du disque. Ces points sont bien à au moins 100 cm l'un de l'autre.

2) Dans un secteur d'angle 60°, deux points quelconques sont à une distance inférieure à 100 cm. Donc on ne peut placer que 5 points si on veut que leurs distances soient strictement supérieure à 100 cm.

Les figures ci-dessous montrent comment placer les 7 points et les 5 points.





10. Comptons les étoiles

Le nombre d'étoiles dans les 20 premières rangées est égal à la somme des 20 premiers nombres impairs : $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 37 + 39$.

Calculons cette somme :

$2S = (1 + 39) + (3 + 37) + (5 + 35) + ... + (37 + 3) + (39 + 1) = 20 \times 40 = 800$

D'où $S = 400$.

La mathématique au quotidien

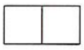
C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

Mono..., duo..., polyminos (3)

Dans la première partie de cette étude, nous nous sommes intéressés à la forme des polyminos ayant une certaine aire. Nous aurions pu aussi regarder de plus près ce qui se passe pour leurs périmètres et leurs aires. Voyons donc cela d'un peu plus près.

Le monomino ! 

Il n'y a qu'un seul type de monomino. C'est le carré unitaire. Son côté est de longueur 1u. Son aire A vaut $1u^2$. Son périmètre P vaut $4u$. Convenons d'écrire dans la suite : $\boldsymbol{A = 1}$ et $\boldsymbol{P = 4}$

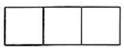
Le domino 

Il n'y a aussi qu'un seul type de domino. On a alors : $\boldsymbol{A = 2}$ et $\boldsymbol{P = 6}$

Le domino est la juxtaposition de 2 monominos de périmètres 4.
Son périmètre n'est cependant pas $\mathbf{2 \times 4}$ soit 8 car le segment intérieur ne fait pas partie du « pourtour » du domino. Cela nous oblige à décompter deux fois sa longueur. En effet, nous avons compté 1 en trop pour le carré de gauche et 1 en trop pour le carré de droite. Il faut donc retirer 2 du produit $\mathbf{2 \times 4}$.

Les triminos

Il y en a de deux types.

 $\boldsymbol{A = 3}$ et $\boldsymbol{P = 8}$

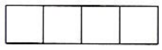
 $\boldsymbol{A = 3}$ et $\boldsymbol{P = 8}$

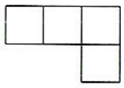
Il y a chaque fois deux segments intérieurs qui ne font pas partie du « pourtour ». Le périmètre des triminos est bien égal à $\mathbf{3 \times 4 - 2 \times 2}$ soit $\mathbf{12 - 4 = 8}$

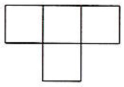
La tentation est évidemment forte d'affirmer que tous les polyminos qui ont la même aire ont aussi le même périmètre. La prudence et l'esprit critique nous invitent à observer d'autres cas.

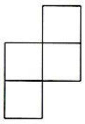
Les quadriminos.

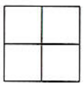
Nous avons vu qu'il y en a de cinq types. Calculons l'aire et le périmètres de chacun d'eux.

 $\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{P = 10}$

 $\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{P = 10}$

 $\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{P = 10}$

 $\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{P = 10}$

 $\boldsymbol{A = 4}$ et $\boldsymbol{P = 8}$

Voilà donc un cas qui montre que notre conjecture précédente est fausse. Un tel cas s'appelle un contre-exemple et il suffit, à lui seul, pour montrer qu'une propriété supposée est fausse. Nous devons donc aussi retenir que quelques exemples corrects ne suffisent pas à prouver qu'une propriété supposée soit vraie.

Dans les quatre premiers cas de figure, il y a 3 segments intérieurs et le calcul donnant le périmètre est $\mathbf{4 \times 4 - 3 \times 2}$ ou $\mathbf{16 - 6}$ soit $\mathbf{10}$. Dans le dernier cas de figure, il y a quatre segments intérieurs et la calcul est alors $\mathbf{4 \times 4 - 4 \times 2}$ ou $\mathbf{16 - 8}$ soit $\mathbf{8}$. Remarquons que le dernier quadrimino est celui qui possède le plus de segments intérieurs et est donc le plus « ramassé » sur lui-même. C'est donc un peu normal qu'il soit celui ayant le plus petit périmètre.

Et nos fameux pentaminos ?

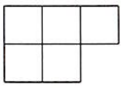
Nous avons vu qu'il y en avait de 12 types. Je vous laisse le soin de calculer le périmètre de chacun d'eux par comptage ou en utilisant la formule rencontrée (4 fois le nombre de carrés élémentaires moins deux fois le nombre de segments intérieurs).

Est ce réalisé ?

Math-Jeunes junior n°101 J,64–67, 2002

Si oui, vous avez obtenu $\boldsymbol{A = 5}$ et $\boldsymbol{P = 12}$ pour onze des 12 pentaminos

et $\boldsymbol{A = 5}$ et $\boldsymbol{P = 10}$ pour celui qui est le plus « ramassé » et que voici.



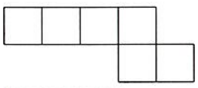
Les hexaminos

Ceux qui en ont encore le courage détermineront tous les types d'hexaminos et en calculeront les caractéristiques. Pour tous, l'aire est 6, c'est évident.

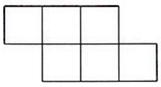
Donc $\boldsymbol{P = 6 \times 4 - 2\times}$(le nombre de segments intérieurs de l'hexamino considéré).

Sachez que $\boldsymbol{P}$ vaut **14**, **12** ou **10**.

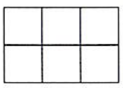
En voici des exemples.



$\boldsymbol{P = 14}$



$\boldsymbol{P = 12}$



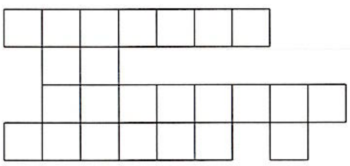
$\boldsymbol{P = 10}$

Remarquez, à nouveau, que plus l'hexamino est « ramassé » sur lui-même plus son périmètre est petit.

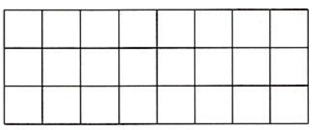
Si le coeur vous en dit, vous pouvez continuer avec les heptaminos, les octominos, etc.

A nouveau une conjecture s'offre à nous ! C'est celle qui consiste à penser qu'un polymino dont l'aire est fixée aura le plus petit périmètre si sa forme se rapproche le plus du carré.

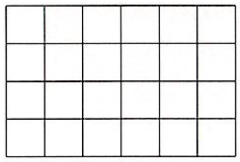
Voici quelques exemples pour lesquels $\boldsymbol{A = 24}$



$\boldsymbol{A = 24}$ et
$\boldsymbol{P = 24 \times 4 - 29 \times 2 = 96 - 58 = 38}$



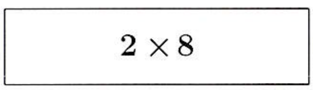
$\boldsymbol{A = 24}$
et $\boldsymbol{P = 24 \times 4 - 37 \times 2 = 96 - 74 = 22}$

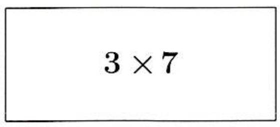


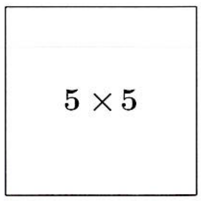
$\boldsymbol{A = 24}$
et $\boldsymbol{P = 24 \times 4 - 38 \times 2 = 96 - 76 = 20}$

La forme la plus ramassée est le rectangle $\boldsymbol{6 \times 4}$. C'est elle qui a probablement le plus petit périmètre. Sachez que cette conjecture est vraie. Mais encore faut-il la démontrer. Vous aurez certainement l'occasion de rencontrer cette propriété dans vos cours.

Notez encore que cela revient à dire que pour un périmètre donné, c'est le polymino le plus « ramassé » qui offre la plus grande aire. Par exemple : Si vous disposez d'une corde de $\boldsymbol{20m}$ pour entourer un espace ayant la forme d'un polymino alors c'est le carré de 5m de côté qui vous offrira la plus grande aire.







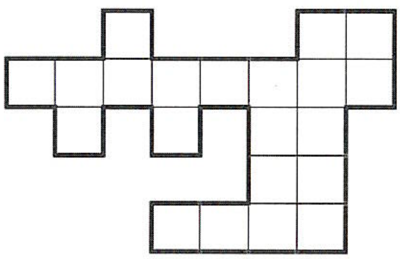
Tous les rectangles ci-dessus ont bien 20 pour périmètre. Mais c'est le carré qui a la plus grande aire. Vous trouverez , en annexe, une démonstration géométrique de cette propriété.

N.B. Il existe une théorie mathématique qui traite de ce genre de propriété. C'est la théorie des « maxima et minima absolus »Ċitons seulement deux des principes sur lesquels elle s'appuie :

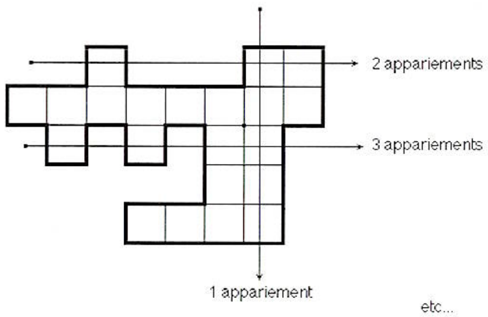
- Un produit de deux facteurs positifs variables dont la somme est constante, est maximum absolu quand ces facteurs sont égaux, s'ils peuvent le devenir.
- Une somme de deux termes positifs variables dont le produit est constant, est minimum absolu quand les deux termes sont égaux, s'ils peuvent le devenir. C'est bien ce que nous avons trouvé ci-avant.

Observons encore que le périmètre d'un polymino de n carrés élémentaires est toujours un nombre pair. En effet si i désigne le nombre de segments intérieurs, alors on a vu plus haut que $P = 4 \times n - 2 \times i = 2(2n - i)$. P est donc bien pair.

Voici une démonstration plus originale de cette propriété. **Voici un polymino**.



Les segments unitaires formant le pourtour du polymino appartiennent à une direction (par exemple la direction horizontale) ou à la direction perpendiculaire (la direction verticale). Ils peuvent être appariés c'est à dire associés par paires. Ceux de la direction verticale se correspondent deux par deux horizontalement et ceux de la direction horizontale se correspondentr deux par deux verticalement. (Ouf!) Imaginez en effet une droite horizontale qui « entre » dans le polymino, elle doit en « sortir ». Les deux segments ainsi coupés sont appariés. Le même raisonnement est valable pour des droites sécantes appartenant à la direction verticale.



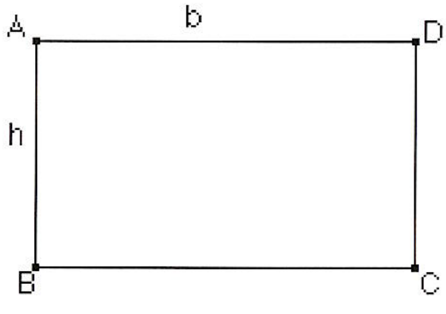
Il y a donc ainsi autant de segments unitaires coupés lors d'une entrée que de segments unitaires coupés lors d'une sortie du polymino. Son périmètre est donc toujours un nombre pair.

Comme déjà signalé dans le premier article, vous pouvez trouver d'autres informations en consultant le réseau Internet.

Bonnes visites.

Annexe : de tous les rectangles isopérimétriques(c'est à dire dont le périmètre est constant), c'est le carré qui a la plus grande aire.

Voici un rectangle $ABCD$ de base b et de hauteur h donc de périmètre $2p = 2b + 2h$. Désignons par S(ABCD) son aire.



Démonstration « algébrique ».

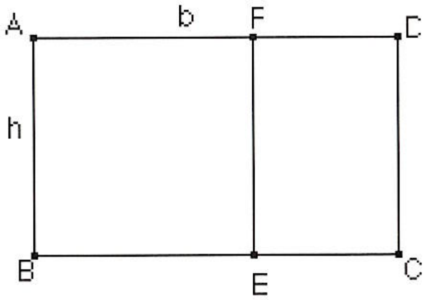
$$\begin{aligned} S(ABCD) &= bh \\ &= b(p-b) \\ &= pb - b^2 \\ &= p^2/4 + pb - b^2 - p^2/4 \\ &= p^2/4 - (b^2 - pb + p^2/4) \\ &= p^2/4 - (b - p/2)^2 \end{aligned}$$

$S(ABCD)$ est maximum quand l'expression entre parenthèses est minimale c'est à dire quand $b - p/2 = 0$ soit quand $b = h$

Démonstration « géométrique »

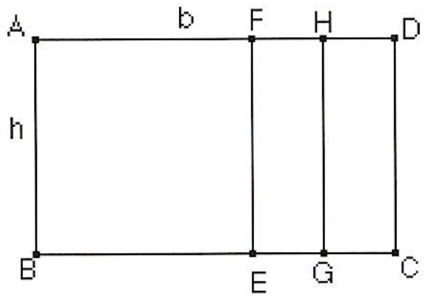
L'idée (toute simple) est de construire un carré qui a le même périmètre $2p$ et montrer qu'il a une plus grande aire que le rectangle initial.

Nous voulons un carré alors. . .construisons le carré $ABEF$ dans le rectangle.

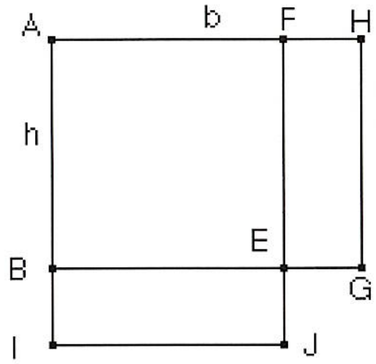


Le périmètre de $ABEF$ est inférieur à $2p$. Il faut agrandir ses côtés d'une même longueur dans les deux directions.

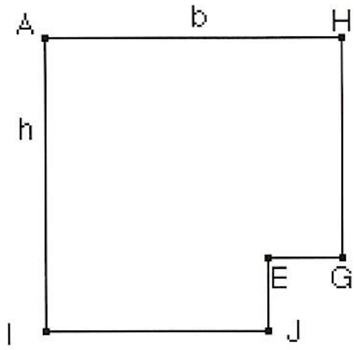
Utilisons donc deux moitiés de $FECD$ soit $FEGH$ et $HGCD$.



Déplaçons $HGCD$ en $EBIJ$.



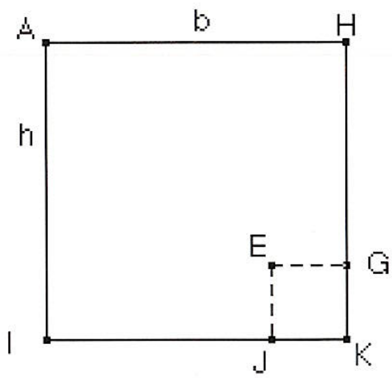
On obtient ainsi l'hexagone $AIJEGH$



dont le périmètre est $2p$ et dont l'aire est celle du rectangle initial.

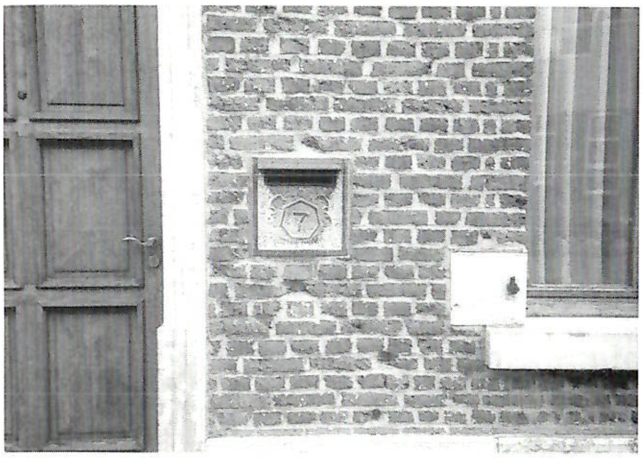
Soit K le point commun aux droites IJ et HG.

$AIKH$(fig 6) est un carré ayant même périmètre que l'hexagone et d'aire supérieure à celle de l'hexagone. $AIKH$ est donc un carré de périmètre $2p$ et son aire est supérieure à celle du rectangle initial.



L'heptagone était presque régulier

A. Paternottre, *I.T.C. Boussu*



Dans une rue de ma commune, le propriétaire de la maison portant le numéro sept est un tailleur de pierre. Pour se faire la publicité, il a eu l'idée de graver sur une pierre incrustée dans la façade, le chiffre 7 entouré d'un bel heptagone régulier (polygone régulier de sept côtés). C'est ce que vous pouvez voir sur la photo ci-contre.

Chaque fois que je passe devant cette maison, je me pose la question de savoir comment cet artisan a pu tracer son heptagone alors que, comme nous le verrons plus loin, il est impossible de tracer un heptagone régulier à l'aide des seuls règle et compas. C'est pourtant très simple, m'objecteras-tu : il a d'abord tracé un cercle puis sept rayons faisant entre eux un angle d'amplitude $\frac{360°}{7}$. Ceux-ci coupent le cercle en sept points qui sont autant de sommets d'un heptagone régulier. Elémentaire mon cher...! Fort bien mais il est peu commode de reporter sept fois $51^0 25' 43''$ (vérifie-le) avec un rapporteur sur une pierre de taille! Alors s'y est-il pris autrement ?

Un peu d'Histoire

Tu n'ignores pas que les mathématiciens grecs de l'Antiquité (Thalès, Pythagore, Euclide, Archimède...) étaient de remarquables géomètres. Comme les savants de toutes les époques, ils se posaient beaucoup de questions auxquelles ils répondaient souvent avec beaucoup de pertinence. Cependant ils ne purent jamais résoudre le problème suivant : quels sont les polygones réguliers qui peuvent être construits en utilisant seulement une règle non graduée et un compas ? A propos pourquoi ces deux instruments ? Probablement parce que la règle permet le tracé de la droite et le compas celui du cercle. Or on sait qu'avec le point, la droite et le cercle constituent les éléments de base de la géométrie plane. Mais revenons à notre problème. Il a quand même reçu une solution. Celle-ci a été élaborée en deux étapes mais...environ vingt siècles plus tard !

- **Première étape** : elle a lieu au 17esiècle.
  Le mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665), par ailleurs auteur d'un célèbre théorème qui n'a été démontré qu'en... 1995 par l'anglais Andrew Wiles, s'intéresse aux nombres de la forme $2^{(2^p)}+1$ ou encore $2\hat{}(2\hat{}p)+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Nous appellerons ceux-ci « nombres de Fermat » et les noterons f_0, f_1, f_2,... f_i .... Calculons les 6 premiers nombres de Fermat.

Math-Jeunes junior n°101 J,68–71, 2002

p	2^p	f_i(nombres de Fermat)
0	$2^0 = 1$	$f_0 = 2^1 + 1 = 3$
1	$2^1 = 2$	$f_1 = 2^2 + 1 = 5$
2	$2^2 = 4$	$f_2 = 2^4 + 1 = 17$
3	$2^3 = 8$	$f_3 = 2^8 + 1 = 257$
4	$2^4 = 16$	$f_4 = 2^{16} + 1 = 65537$
5	$2^5 = 32$	$f_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$

Tu constates que les six f_i du tableau sont impairs. Tous les suivants aussi d'ailleurs. Pourquoi ? Dans une lettre qu'il adressait à Pascal le 29 août 1634, Fermat affirmait que ses nombres f_i étaient tous premiers (nombre premier = nombre naturel admettant seulement 1 et lui-même comme diviseurs naturels).

Fermat avait raison jusqu'à f_4. Hélas pour lui, en 1732, le célèbre mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) établissait que $f_5 = 641 \times 6700417$. Dès lors f_5 n'était pas un nombre premier ! Mais les nombres de Fermat n'étaient pas perdus pour autant ainsi que tu le vas le voir dans la suite.

– **2e étape** :
  en 1796, l'allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), encore un grand nom des mathématiques, reprend à son compte les nombres de Fermat et démontre le théorème suivant :

> Un polygone régulier d'un nombre impair (n) de côtés peut être construit à l'aide des seuls instruments « règle et compas »
> si
> n est un nombre de Fermat qui est aussi premier
> ou encore si
> n est un produit de nombres de Fermat premiers et distincts.

Remarques :
1. La réciproque du théorème de Gauss est vraie et a été démontrée par le mathématicien Wantzel.
2. Dans la suite, on utilisera l'abréviation « $PRRC$ » pour désigner un « Polygone Régulier pouvant être construit à l'aide des seuls Règle et Compas ».

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, les polygones réguliers de 3, 5, 17 côtés sont des $PRRC$. Mais aussi ceux de 15, 51 et 85 côtés. Par contre ceux de 7, 9, 11, 13 côtés ne sont pas des $PRRC$ parce que 7, 11, 13 ne sont pas des nombres de Fermat et que $9 = 3 \times 3$ est un produit de deux nombres de Fermat premiers mais non distincts.

Enfin il faut joindre au théorème de Gauss les deux propositions suivantes que connaissaient déjà les grecs de l'Antiquité (et toi aussi je suppose) :

> 1. Le polygone régulier de 4 côtés (carré) est un $PRRC$.
> 2. Si un polygone régulier de n côtés est un $PRRC$, alors le polygone régulier de $2n$ côtés l'est aussi .

En effet pour construire un carré inscrit dans un cercle, il suffit joindre les extrémités de deux diamètres perpendiculaires. D'autre part la construction de la bissectrice de chacun des n angles au centre d'un *PRRC* de n côtés détermine directement les n sommets manquants du polygone régulier de $2n$ côtés. Et, comme tu le sais sans doute déjà, une bissectrice se construit à l'aide des seuls règle et compas. Nous sommes maintenant en mesure de dresser la liste des *PRRC* de n côtés pour $3 \leqslant n \leqslant 100$: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.

Pour ton information, sache encore que la ville allemande de Braunschweig (Brunswick) où est né F. Gauss, lui a érigé un monument sur lequel on a apposé un polygone régulier *étoilé* de 17 côtés. La ville de Göttingen (proche de la précédente et où mourut Gauss) a fait de même mais, contrairement à une légende qui circule, sa statue n'y repose pas sur un socle prismatique droit dont la base est un polygone régulier convexe de 17 côtés. (réf : J. Doyen, professeur à l'ULB)

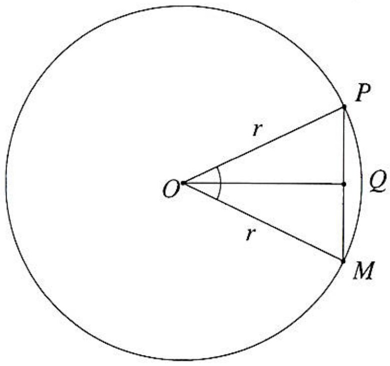
Revoici notre heptagone régulier

Tu sais maintenant que le polygone régulier de 7 côtés n'est pas un *PRRC*. Il est possible cependant de construire très approximativement le côté de l'heptagone régulier en utilisant seulement une règle et un compas.

Notons « c_7 » la longueur du côté de l'heptagone régulier inscrit au cercle de centre O et de rayon r. Désignons par M et P deux points de ce cercle tels que $\widehat{MOP} = \frac{360°}{7}$, on a alors $|MP| = c_7$.

Notons Q le milieu de $[MP]$. Le triangle MOP étant isocèle (car $|OM| = |OP| = r$), la demi-droite $[OQ$ est aussi bissectrice de $\widehat{MOP}$ et hauteur du triangle MOP.

Dans le triangle rectangle OQP on a :



$$\begin{aligned} |QP| &= |OP| \sin\left(\frac{\widehat{MOP}}{2}\right) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}c_7 &= r.\sin\left(\frac{360°}{14}\right) \\ &\Downarrow \\ c_7 &= 2r.\sin 25,714\ldots° \\ &\Downarrow \\ c_7 &= 0,8677675\ldots\ r \end{aligned}$$

Or $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254\ldots$

Dès lors $c_7 \cong r.\sin 60°$.

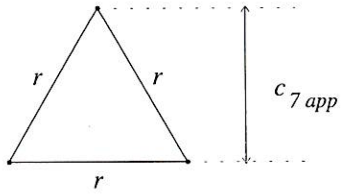
Posons $c_{7app} = r.\sin 60°$. On peut donc affirmer que c_{7app} est une approximation de c_7. De plus $c_{7app} < c_7$.

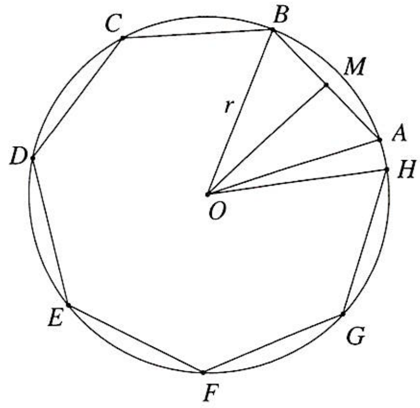
Calculons l'erreur (e) commise lorsqu'on remplace c_7 par c_{7app} :

$$e = c_7 - c_{7app} = r[2\sin\left(\frac{360°}{14}\right) - \sin 60°] = 0,001742\ldots r < 0,002.r$$

L'erreur sur le côté de l'heptagone régulier est donc inférieure aux deux millièmes du rayon de son cercle circonscrit. Par exemple si $r = 500$ mm alors $e < 1$ mm. L'erreur est donc minime.

Mais pourquoi vouloir remplacer c_7 par c_{7app} ? Tu l'as sûrement déjà deviné : on peut construire $c_{7app} = r.\sin 60^\circ$ avec les seuls règle et compas et donc aussi l'heptagone « presque » régulier. En effet $r.\sin 60^\circ$ n'est autre que la hauteur d'un triangle équilatéral dont le côté mesure r.





L'heptagone presque régulier $ABCDEFGH$ ne se ferme donc pas : $A \neq H$. La figure tracée ci-dessus est volontairement incorrecte : on a voulu faire apparaître l'angle $\widehat{AOH}$ dont nous voudrions calculer l'amplitude θ pour nous rendre compte de l'erreur angulaire cette fois. Pour cela calculons d'abord l'amplitude α de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptant c_{7app}.

Si M est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle isocèle AOB, on a dans le triangle rectangle AMO :

$$|MA| = r.\sin(\alpha/2) \Rightarrow \sin(\alpha/2) = \frac{|AB|}{2r} = 0,5\sin 60^\circ$$
$$\Downarrow$$
$$\sin(\alpha/2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ car } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = 51^\circ.3178\ldots$$

Dès lors $\theta = 360^\circ - 7\alpha = 0^\circ, 775312\ldots \approx 0^\circ 46' 31''$

Et si on assimile la petite corde $[AH]$ à l'arc $[AH]$, on a aussi $|AH| = \pi r\theta/180^\circ = 0.01353r < 14.10^{-3}r$ Notre heptagone régulier gravé sur la pierre (t'en souviens-tu ?) était inscrit dans un cercle de « 7 cm » de rayon ! Pour cet heptagone on a donc $|AH| = 0.01353\cdots \times 7cm < 1mm$.

Pas de doute, notre artisan connaissait l'astuce du c_{7app} : son heptagone est presque régulier... mais personne ne s'en rend compte.

Division par 11 et clavier de calculatrice...

G. Laloux, ***Institut Sainte Marie-Rêves***

Tous les « pavés » numériques des calculatrices et des claviers d'ordinateurs ont leurs chiffres disposés de la même façon. Les chiffres 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 7 – 8 – 9 sont disposés autour du 5, comme le montre la figure ci-contre. Dans ce qui suit, nous ne tenons pas compte du zéro.

Si l'on tourne autour du 5 en partant de n'importe lequel des autres chiffres, on forme un nombre de 8 chiffres → 14789632 ; 63214789 en tournant dans le sens horlogique ou 98741236 ; 23698741 en tournant dans le sens anti-horlogique. **La particularité des nombres ainsi formés est qu'ils sont tous divisibles par 11.**

Pour les besoins, ressortons des oubliettes le caractère de divisibilité par 11 qui dit ceci : « Un nombre est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair est un nombre divisible par 11 ».

Prenons un des exemples cités plus haut : 63214789

Rang n°	8	7	6	5	4	3	2	1
Nombre	6	3	2	1	4	7	8	9

Somme des chiffres de rang impair $= 9 + 7 + 1 + 3 = 20$
Somme des chiffres de rang pair $= 8 + 4 + 2 + 6 = 20$
Différence $= 20 - 20 = 0$ et 0 est divisible par $11 (0 : 11 = 0$; mais $11 : 0$ est impossible)

Ce caractère de divisibilité permet de comprendre que si un nombre formé selon les critères cités plus haut, est divisible par 11, alors tous les autres le sont aussi. En effet, la seule modification sera que les chiffres de rang pair deviennent les chiffres de rang impair ; la différence finale sera donc toujours la même, c'est-à-dire 0.

C'est peut-être aussi l'occasion de présenter une méthode peu connue pour vérifier qu'un nombre est divisible par 11 ; j'en ai pris connaissance lors d'une des conférences du congrès 2001 de la SBPMef (situations problèmes au premier degré par J.P.Mathieu). A l'époque des calculatrices graphiques et de l'informatique, cela peut paraître désuet, mais disons que cela peut faire partie d'une certaine forme de culture générale et peut parfois être plus rapide que « dégainer la calculatrice, l'allumer, etc, etc, ».

Pour vérifier qu'un nombre est divisible par 11, on le partage en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre. La somme des « tranches » doit être un nombre divisible par 11.

Exemples :

$$1331 \rightarrow 31 + 13 = 44$$
$$495 \rightarrow 95 + 4 = 99$$
$$36987412 \rightarrow 12 + 74 + 98 + 36 = 220 \rightarrow 20 + 2 = 22$$

Math-Jeunes junior n°101 J,72–72, 2002

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée