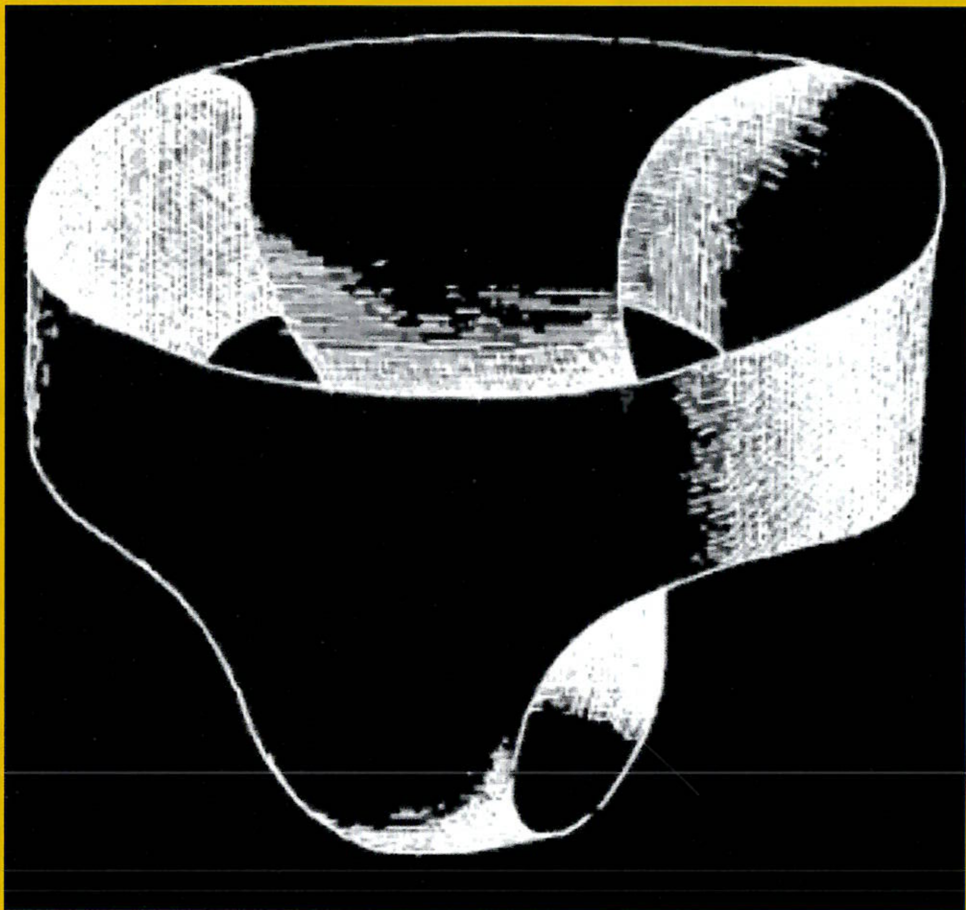
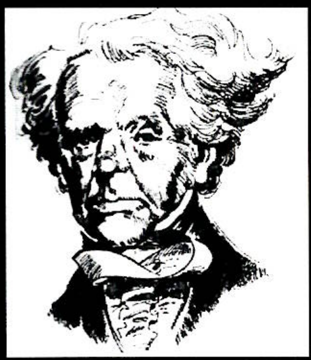
MJ junior!



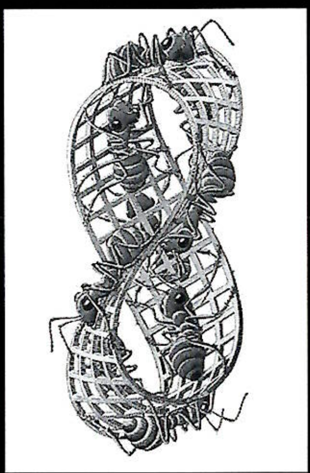
24e année
Octobre 2002 – n°103 J
Bureau de dépôt : Mons I

Le Slip de Möbius

Le Slip de Möbius !

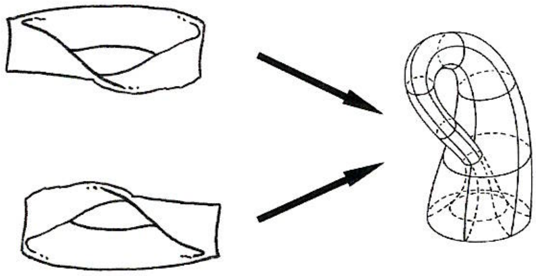


Auguste Ferdinand Möbius est un mathématicien allemand ayant vécu entre 1790 et 1868.
Son célèbre ruban a inspiré beaucoup d'artistes : admirez la trajectoire des fourmis du peintre Suisse M. C. Escher ci-dessous et observez bien le nœud papillon sur le portrait de Möbius qu'a réalisé le dessinateur André Franquin ci-dessus ! Etonnant, non ?

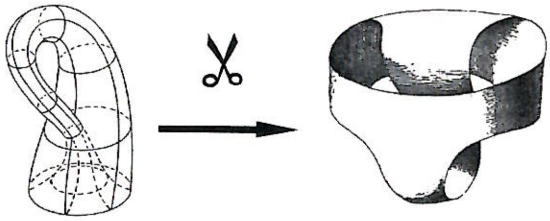


Lorsque vous prenez une bande de papier – comme sur le dessin suivant – et que vous collez les bords de sorte que les points de même nom se touchent, vous obtenez une bande tordue appelée *ruban de Möbius*.

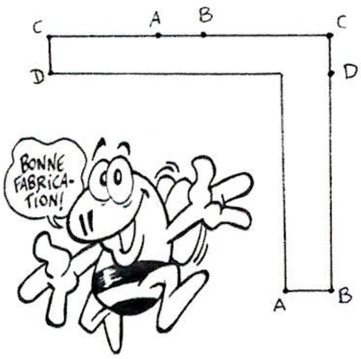
Les fidèles lecteurs savent déjà que ce ruban n'a qu'un seul bord et qu'une seule face : on dit qu'il est *non-orientable* !
Allons plus loin et collons bord à bord deux rubans de Möbius : on obtient ce que l'on appelle une *bouteille de Klein*.



En perçant une bouteille de Klein – car nous sommes d'affreux sadiques – on obtient finalement une surface non-orientable appelée *slip de Möbius* (pour une raison qui saute aux yeux !) ...



Il n'est pourtant pas nécessaire de passer par ces étapes pour en *construire* un : il suffit de relier les points de même nom sur le patron suivant, qu'il est utile de photocopier (pour ne pas abimer votre exemplaire de *Math-Jeunes !*) d'agrandir (pour obtenir une taille raisonnable de slip !) et de découper ...



POUR EN SAVOIR PLUS

- Stella Baruk & Co, *Doubles Jeux*, Seuil 2000.
- http ://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/surfaces/klein/klein.shtml

N°103 J Vingt-quatrième année 2002

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

Éditorial

Comme tu peux le constater, pour mieux te servir, *Math-Jeunes Junior* fait peau neuve. La couverture a été « rajeunie », plus adaptée au contenu ; la couleur verte, moins agressive que le rouge, a été adoptée comme seconde couleur pour l'ensemble des articles. Mais la principale nouveauté réside dans le fait que *Math-Jeunes Junior* se déclinera dorénavant en trois numéros annuels de 32 pages au lieu de quatre de vingt-quatre pages. Si tu es un peu doué en calcul, le compte est vite fait : 96 pages avant, 96 pages maintenant. Tu ne perds donc rien. Cette redistribution fait ainsi disparaître le quatrième numéro qui était entièrement consacré aux Olympiades, mais qui, il faut bien le dire, arrivait trop tard dans l'année scolaire. Avec trois numéros programmés plus tôt, tu pourras ainsi mieux profiter de ton *Math-Jeunes Junior* ; en outre, celui-ci contiendra plus d'articles de fond et de jeux. De la sorte tu seras mieux documenté en sujets mathématiques et tu trouveras plus d'amusement à lire ta revue scientifique préférée.

Voici le calendrier de parution tel que nous l'avons prévu :

MJJ 103	7 novembre 2002
MJJ 104	16 janvier 2003
MJJ 105	20 mars 2003

Peut-être ne le sais-tu pas ? Mais *Math-Jeunes Junior* a un grand frère : *Math-Jeunes* (souvent appelé *Math-Jeunes Senior*). Celui-ci est destiné aux élèves du cycle supérieur (de la 4^{e} à la 6^{e} année). Dès lors, lorsque tu quitteras la troisième année, tu pourras continuer d'être ... à la page mathématiquement en t'abonnant à *Math-Jeunes*. Néanmoins, si tes finances te le permettent, bien sûr, tu pourrais en quatrième année t'abonner à la fois à *Math-Jeunes Junior* et à *Math-Jeunes*. La première revue deviendrait alors très facile à lire, tandis que la seconde te plongerait petit à petit dans des textes mathématiques plus avancés.

Pour tirer le meilleur profit de ton *Math-Jeunes Junior* (ou *Math-Jeunes* plus tard), tu dois t'efforcer de le lire et pas simplement le ranger sagement dans ta bibliothèque. *Math-Jeunes Junior* n'est pas un objet de collection (quoique ...) mais un réservoir de savoirs, de problèmes et de jeux tournés vers la mathématique.

Si certains articles, ou certains passages d'article, échappent à ta compréhension, parles-en à ton professeur et discutes-en avec tes ami(e)s. L'idéal serait peut-être de demander à ton professeur d'en faire un sujet à traiter collectivement en classe ; je suis certain qu'il ne refuserait pas.

Par ailleurs, si tu apprécies *Math-Jeunes Junior* (ou *Math-Jeunes*), essaie de convaincre tous tes copains ou copines de s'abonner (le prix est vraiment démocratique). Plus il y aura d'abonnés, plus les équipes rédactionnelles seront motivées pour te fournir de bons articles. Enfin, sache que tu peux participer à la rédaction. Si tu trouves un sujet que tu estimes intéressant à publier, à transmettre aux autres via notre revue, n'hésite pas à contacter le rédacteur en chef (voir page 3 de couverture). Il t'aidera très certainement dans ton entreprise.

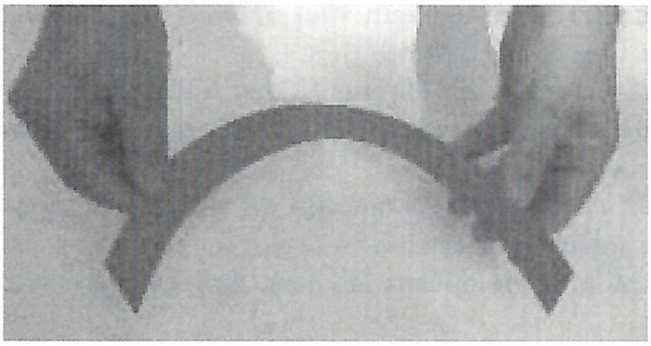
Bonne lecture

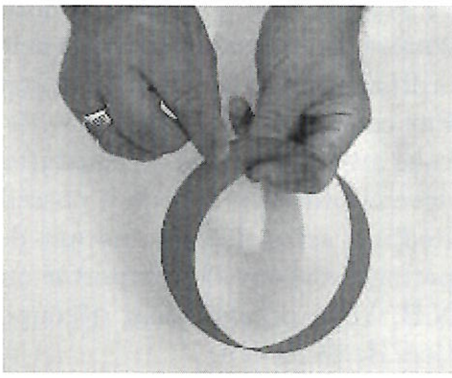
La mathématique au quotidien ...

C. Villers

Le ruban de Möbius

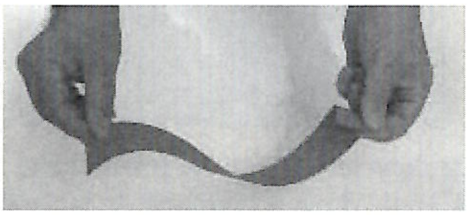
Si vous découpez une bande de papier et que vous collez l'une à l'autre ses deux extrémités comme indiqué sur l'illustration, vous obtenez une sorte d'anneau que nous appellerons un ruban et qui possède deux faces comme l'objet initial et aussi deux bords.

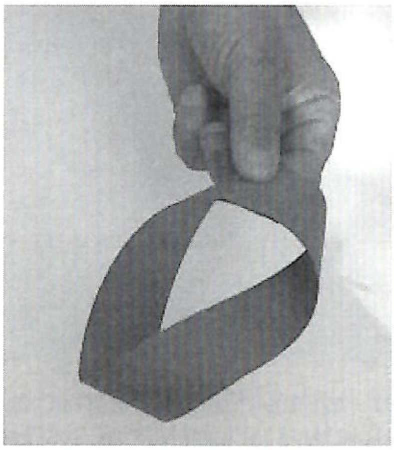




La preuve en est qu'il n'est pas possible de colorier la totalité du ruban à l'aide d'une même couleur, sans passer par un bord.

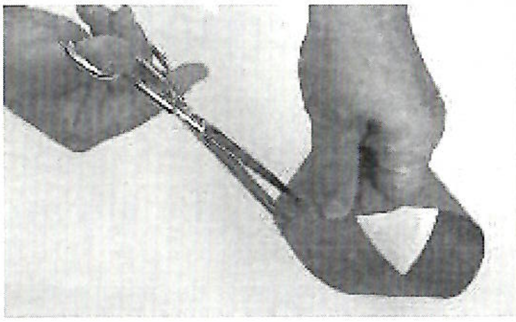
Par contre, si vous commencez par tordre la bande de papier d'un demi-tour de manière à placer une face dans le prolongement de l'autre face, vous obtenez alors un ruban qui **n'a plus qu'une seule face.**





Vous pouvez facilement vous en convaincre en coloriant tout le ruban à l'aide d'une même couleur et en constatant que cela est possible sans plus passer par le bord. Remarquez également au passage que ce dernier ruban ne possède plus qu'un seul bord alors que le ruban ordinaire en possède deux. Si vous êtes sceptique, essayez donc de suivre le bord avec le bout d'un de vos doigts ! Ce ruban que vous pouvez construire et donc manipuler facilement, est connu sous le nom de **RUBAN DE MÖBIUS** (Möbius Augustus Ferdinand, allemand, 1790–1868)

Mais le ruban de Möbius peut encore vous réserver d'autres surprises, susceptibles d'épater vos amis. En voici une assez spectaculaire pour les non-initiés ! Alors, rien de tel que de passer soi-même à la réalisation. Vous disposez de papier, de ciseaux et de colle. Allons-y. Construisez un ruban ordinaire et un ruban de Möbius. Puis, invitez quelqu'un à les découper (ou découpez-les vous-même) « dans le sens de la longueur », c'est à dire en suivant au mieux la ligne médiane du ruban.



Que croyez-vous qu'il va se passer ? Ne lisez la suite que lorsque vous aurez réalisé l'expérience. Je suppose que vous avez maintenant réalisé l'expérience et découvert ce qui se passe. Si vous coupez un ruban ordinaire (à deux faces) dans le sens de la longueur, vous obtenez deux rubans ordinaires (à deux faces) eux aussi. Cela semble tout à fait naturel.

Par contre, si vous découpez, de la même façon, un ruban de Möbius (à une seule face) alors vous avez la surprise de constater que vous n'obtenez toujours qu'un seul ruban, plus long mais devenu ordinaire puisqu'il possède alors deux faces.

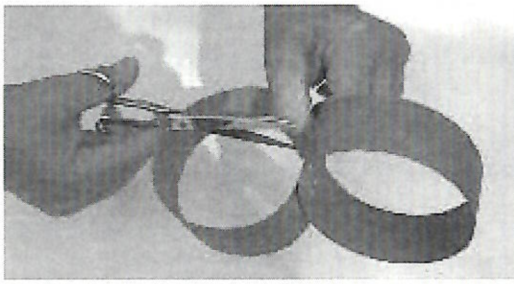
Réaliser cette découpe devant des personnes qui ne sont pas au courant du phénomène vous permet toujours de remporter un joli succès, au moins de curiosité.

N.B. Vous pouvez aussi découper le ruban de Möbius en suivant les deux lignes situées aux tiers de sa largeur.

Voici encore d'autres manipulations qui donnent aussi de curieux résultats.

Construisez deux rubans ordinaires et assemblez-les par collage, le « plan » de l'un étant perpendiculaire au « plan » de l'autre, comme l'indique l'illustration ci-dessous.

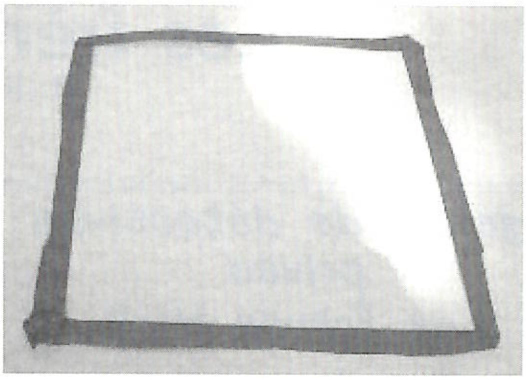
Découpez chacun d'eux dans le sens de la longueur donc en suivant au mieux l'axe longitudinal de chacun d'eux et surtout en veillant à tourner à angle droit à l'endroit de la jonction dans le but de passer d'un ruban à l'autre. Découpez ainsi jusqu'à rejoindre votre point de départ.



Qu'obtenez-vous ?

A nouveau, je vous invite a réaliser réellement l'expérience et je vous assure que vous serez surpris.

Voici ce que vous allez obtenir :



Après avoir découpé convenablement les deux rubans, vous vous retrouverez en présence d'un quadrilatère particulier : un rectangle ou ? ? ?.

Ne trouvez-vous pas un peu étrange d'obtenir un rectangle (ou ? ? ?) au départ de deux objets courbes ?

Auriez-vous donc réalisé une sorte de quadrature des cercles (? ? ?).

Non, bien entendu car ce problème connu sous le nom de « quadrature du cercle » et qui consiste à construire un carré de même aire qu'un cercle donné est un problème impossible à résoudre.

Mais, en réfléchissant un peu, vous trouverez comment réaliser chacun des deux rubans et comment les assembler pour obtenir un parallélogramme, un rectangle, un carré, un losange. Est-il possible d'obtenir un trapèze ?

Maintenant, je vous propose de recommencer la même manipulation mais en utilisant cette fois deux rubans de Möbius à la place des deux rubans ordinaires.

Si, à nouveau, vous avez travaillé avec soin, vous aurez cette fois obtenu deux morceaux. Et en plus, chacun d'eux possède deux faces mais aucun des deux ne peut être complètement mis à plat sans devoir être « déchiré ».

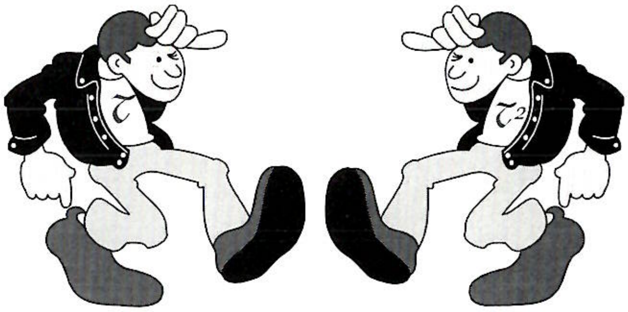
Si vous avez fait des découvertes au cours de vos manipulations, vous pouvez nous en faire part. C'est avec grand plaisir que nous en ferons part dans *Math-Jeunes*, au plus grand profit de tous.

N'hésitez pas à nous écrire à ce sujet à l'adresse « *Math-Jeunes Junior* », rue de la Halle 15 à B-7000 Mons. Merci.

Les frères Hick 6

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

*$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ espèrent que tu as passé d'excellentes vacances et que tu es en super forme pour les aider dans leurs futures enquêtes. Ils vont te rappeler l'énigme publiée dans Hick 5 (*Math-Jeunes Junior *n°101J, page 59) et te livreront ensuite leurs commentaires. Bon courage et bon amusement.*

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}$ (l'air inquiet) - « ***J'espère que tu n'as pas profité de tes vacances pour oublier notre dernière enquête ! Je la rappelle cependant pour nos nouveaux lecteurs !*** »

Où il est question d'être magicien !

Un nombre de la grille tu entoureras

Sa ligne et sa colonne tu barreras

Jusqu'à épuisement tu le feras

Les quatre nombres tu observeras

Plusieurs fois tu recommenceras

Alors un sentiment de puissance t'envahira.

Entoure un nombre de la grille, barre sa ligne et sa colonne.
Recommence jusqu'à épuisement de la grille.
Tu as entouré quatre nombres.
Recommence plusieurs fois. Observe et profite de cette aubaine pour jouer au magicien !

0,46	0,26	0,42	0,3
0,23	0,03	0,19	0,07
0,37	0,17	0,33	0,21
0,34	0,14	0,3	0,18

$\mathcal{T}^2$ - « *Jusqu'à épuisement, c'est bien la première fois que j'ai apprécié les mots d'une de tes énigmes; c'est sans doute cela que l'on appelle utiliser le terme propre!* »

$\mathcal{T}$ (légèrement irrité) - « *Avoue que c'est quand même étonnant! Moi, quand j'ai découvert cette idée dans* Math-Jeunes *(n° 78 - février 1997), j'ai absolument voulu comprendre comment fabriquer de telles grilles!* »

$\mathcal{T}^2$ (assez fier) - « *Tu n'es pas le seul à avoir été intrigué! J'ai fait de nombreux essais et je peux t'assurer que la somme des quatre nombres vaut toujours 1. Ensuite, j'ai passé pas mal de temps à essayer de fabriquer une autre grille. J'ai d'abord mis des nombres au hasard et, c'était prévisible, cela ne marche pas! Mais, si je multiplie les nombres de la grille, elle reste magique. Regarde par exemple quand je multiplie les nombres par 100,*

46	26	42	30
23	3	19	7
37	17	33	21
34	14	30	18

la somme des quatre nombres est encore constante, mais au lieu de faire 1 comme dans la grille donnée, elle vaut 100! Et je peux recommencer avec d'autres nombres! »

$\mathcal{T}$ (très surpris) - « *Tu m'épates!...* »

$\mathcal{T}^2$ (le coupant net) - « *Attends, tu peux aussi ajouter un même nombre à tous ceux de la grille et cela fonctionne.* »

48	28	44	32
25	5	21	9
39	19	35	23
36	16	32	20

$\mathcal{T}^2$ (ajoute, hilare) - « *Et la somme des quatre mousquetaires est augmentée de quatre fois le nombre ajouté!* »

$\mathcal{T}$ - « *Restons sérieux! Je dirais que Si G est une grille magique de somme s, nG est une grille magique de somme ns et $G+m$ est une grille magique de somme $s+4m$.* »

$\mathcal{T}^2$ (un peu moqueur) - « *Tu me rappelles mon ancien prof de maths!* »

$\mathcal{T}$ (ignorant superbement la remarque de son frère) - « *Tu peux aussi n'agir que sur une ligne ou une colonne. Mais encore plus fort, regarde : je prends deux grilles magiques, la deuxième est celle du n° 78 de* Math-Jeunes.

46	26	42	30
23	3	19	7
37	17	33	21
34	14	30	18

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

et je les ajoute case par case, j'obtiens encore une grille magique. »

47	28	45	34
28	9	26	15
46	27	44	33
47	28	45	34

$\mathcal{T}^2$ (imitant son frère) - «*Ecoute bien ! Je crois que je m'améliore à ton contact ! Si* G *et* H *sont des grilles magiques de sommes* s *et* t, $G+H$ *est une grille magique de somme* $s+t$.»

$\mathcal{T}$ - « *Je dirais même plus : Si* G *et* H *sont des grilles magiques de sommes* s *et* t, $nG+mH$ *est une grille magique de somme* $ns+mt$. *Tu pourras facilement le vérifier !* »

$\mathcal{T}^2$ (impatient) - « *Oui, tout cela c'est très bien ! Tu me donnes des grilles magiques et je peux en fabriquer autant que je veux ! Mais, moi, ce que je veux pouvoir faire c'est fabriquer une grille, sans utiliser d'autres grilles connues.* »

$\mathcal{T}$ - « *Tu viens de poser le vrai problème !* »

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ à résoudre ce problème ?

à suivre

Jeux

Décrypte l'addition suivante :

$$\begin{array}{r} \text{S E L} \\ \text{S E L} \\ \text{S E L} \\ \text{S E L} \\ +\ \text{S E L} \\ \hline \text{E X E L} \end{array}$$

Décrypte la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r} 3\ *\ 9 \\ \times \quad *\ * \\ \hline *\ *\ *\ 2 \\ *\ *\ *\ 3\ \ \\ \hline 2\ *\ *\ 2\ * \end{array}$$

Recherche l'intrus

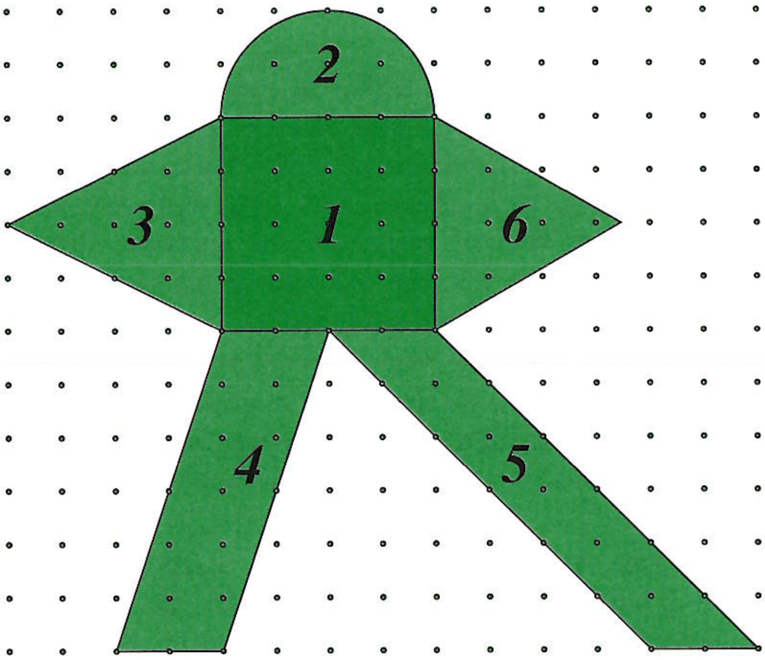
①			
1	5	11	17
3	7	13	21
4	9	15	23

②			
1	4	9	16
25	36	49	72
81	100	400	900

③			
2	3	5	7
11	13	15	17
19	23	29	31

④			
0	3	8	15
24	35	50	63
80	99	120	143

Un drôle de bonhomme



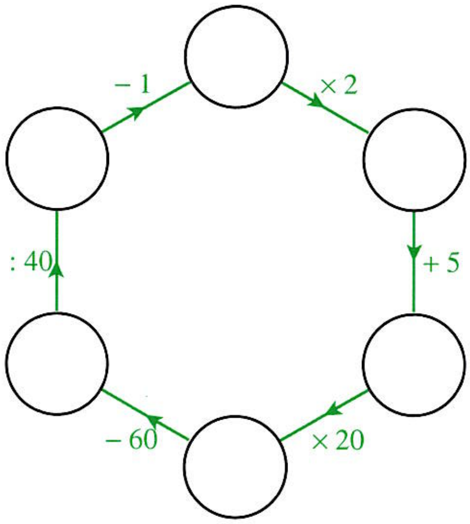
Ce drôle de bonhomme est formé d'un carré (1), un demi-cercle (2), deux triangles (un équilatéral (6), un isocèle non équilatéral (3)) et deux parallélogrammes (4 et 5).

Classe par ordre croissant
- les aires des six parties,
- les périmètres des six parties.

As-tu utilisé des nombres pour répondre aux questions ? Si oui, essaie d'établir ton classement en n'utilisant aucune mesure de longueur particulière : représente par la lettre a la longueur des côtés du carré et évalue les six aires ($A1, A2, \dots A6$) et les six périmètres ($P1, P2, \dots P6$) à l'aide de cette lettre.

Un tourniquet

Choisis un nombre, écris-le dans UN disque.
Calcule le contenu des disques suivants



Recommence
– en changeant de nombre,
– en changeant de disque de départ.
Que constates-tu ? Peux-tu expliquer **pourquoi** il en est ainsi ?

Tu trouveras les solutions des jeux à la page 29.

Lu sur l'autoroute :

1 bateau de 80 mètres = 60 camions de 3500 mètres.

Voici une égalité, pour le moins surprenante, écrite sur des grands panneaux jalonnant nos routes et autoroutes wallonnes depuis quelques semaines. Sans aucun doute, il s'agit de promouvoir le transport fluvial récemment dopé par la mise en fonctionnement du gigantesque et remarquable ascenseur de Strépy -Thieu sur le canal du Centre. Très bien. Mais que doivent comprendre les personnes qui lisent cette publicité accrocheuse ?

Une bateau (péniche) de 80m, c'est une dimension normale en 2002. Un camion (poids lourd) de 16m, c'est aussi normal. Mais un camion de 3500 m ... ! Et 60 camions de 3500m ... !!! D'autre part une enfilade de 60 camions roulant pare-chocs contre pare-chocs, cela fait un convoi de $60 \times 16m = 960m$. On est loin des 3500 m annoncés ! Oui mais des camions ne roulent pas ainsi sur autoroute...Leurs chauffeurs doivent respecter une certaine distance entre camions. Si on considère que cette distance vaut 2,5 fois la longueur du camion, soit $2,5 \times 16m = 40m$, quelle est alors la longueur du convoi des 60 camions ?

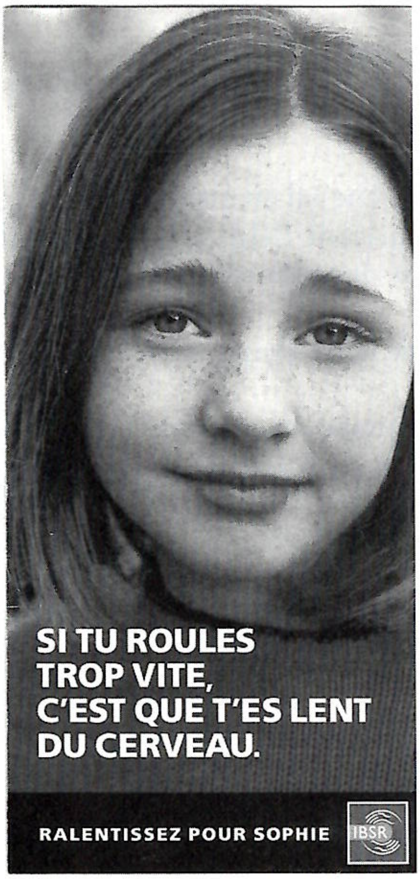
Calculons : les 60 camions laissent entre eux 59 intervalles de 40 m chacun et donc la longueur totale du convoi sera $60 \times 16m + 59 \times 40m = 3320m$. Ah ! On se rapproche des 3500 m. Mais on ne comprend toujours pas l'égalité encadrée ci-dessus. Il n'y a plus qu'à s'adresser à la Région Wallonne. Voici sa réponse :

IL faut comprendre qu'un bateau de 80m transporte à lui seul autant de marchandises que 60 camions formant sur l'autoroute un convoi de 3500 m. Il s'agissait donc d'une égalité entre deux volumes et non d'une égalité entre deux longueurs ! C'était élémentaire mon cher ! Pas si sûr ! Même en volumes, on reste perplexe quant à la pertinence de cette pseudo-égalité quelque peu provocante.

A. Paternottre

Levez le pied

A. Paternottre



Les travaux d'élargissement à trois bandes de l'autoroute E19 entre Saint-Ghislain et Maisières (direction Bruxelles) ont assez bien perturbé la circulation routière en cet été 2002. Une limitation à 70 km/h en vigueur sur la totalité du parcours ($13km$) ainsi que des contrôles de vitesse fréquents n'ont cependant pas découragé certains usagers inconscients, grisés par la vitesse ou pressés par le temps. Cette situation n'est hélas pas rare sur nos routes et autoroutes européennes. Elle doit donc nous interpeller et nous faire réagir.

Sans parler des drames trop souvent consécutifs au comportement inadmissible de certains chauffeurs peu scrupuleux, ceux-ci devraient pourtant se rendre à l'évidence : l'infraction de non-respect d'une limitation de vitesse est toujours un non-sens. Le gain de temps qu'elle procure est en effet sans commune mesure avec la sanction, fût-elle seulement financière, qu'elle entraîne. Je vous propose d'analyser de plus près cette situation.

- Commençons par un rappel : notion de **vitesse**.
  Dans nos pays à haute densité de circulation, tout le monde sait que « Rouler à 108 km/h de moyenne » c'est imposer à son véhicule de parcourir une distance de 108 km en 1 h. Mais c'est aussi parcourir 54 km en 1/2 h, 27km en 15min, 30m en 1s, etc...

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{espace parcouru}}{\text{temps du parcours}}$$

  En formules : $v = \frac{e}{t}$ ou $e = v \times t$ ou $t = \frac{e}{v}$

- Formulons une hypothèse :
  Dans la suite de cet article, nous supposons que la vitesse (v) des véhicules reste constante durant le temps (t) du parcours (e).
  Autrement dit : on suppose que l'aiguille du compteur de vitesse reste à la même place durant le trajet. On dit aussi que « le mouvement est uniforme ».
- Calculons
  Pour un trajet de 13 km effectué à la vitesse de 70 km/h, le temps est de :

$$\frac{13}{70}h \text{ ou } \frac{60\times 13}{70}min$$

  Pour un trajet de 13 km effectué à la vitesse de 93 km/h, le temps est de :

Math-Jeunes Junior n°103 J, 10–13, 2002

$$\frac{13}{93}h \text{ ou } \frac{60\times 13}{93}min$$

Le gain de temps g (en min) obtenu en roulant à 93 km/h au lieu des 70 km/h imposés est donc :

$$g = 60 \times (\frac{13}{70} - \frac{13}{93}) = 60 \times 13 \times (\frac{1}{70} - \frac{1}{93}) = \frac{60 \times 13}{70} \times (1 - \frac{70}{93}) = 2,756min \approx 2min45s$$

- A vos portefeuilles !
  Et si notre usager fautif faisait l'objet d'un contrôle de vitesse, que lui en coûterait-il ?
  Pour répondre à cette question, je me suis adressé à l' IBSR (Institut Belge pour la Sécurité Routière asbl) qui m'a aimablement fait parvenir le « tarif » des infractions appelé aussi « tableau des transactions ».
  Nous l'avons reproduit en page 103/14 Vous y lisez aisément que notre usager serait redevable d'une amende de 156,17 euros.
  A vous de choisir à présent d'autres données et à calculer, comme on vient de le faire, le gain de temps (g en minutes-secondes) ainsi que le montant (m en euros) de la transaction éventuelle. Ainsi avec les données suivantes :

  $e = 9km$ (longueur du tronçon à vitesse limitée)
  $a = 50km/h$ (vitesse maximale autorisée)
  $v = 84km/h$ (vitesse constatée par le radar),vous devez obtenir :

  g = 4 min 22 s et m = 190,88 euros.
- Et si on généralisait ?

Pour le calcul de g, l'exemple précédent induit directement la formule :

$$g = \frac{60 \times e}{a} \times (1 - \frac{a}{v})$$

dans laquelle, rappelons-le encore :

« e » représente la longueur (en km) du trajet le long duquel la vitesse maximale autorisée est de « a » km/h

« v » représente la vitesse du véhicule (celle constatée par le radar en km/h).

« g » représente le gain de temps (en min).

Il va se soi que e, a, v sont tous des nombres strictement positifs et que :

- pour un conducteur fautif, on aura toujours $v > a$
- pour un conducteur respectueux des limitations de vitesse, on aura $v = a$
  ou même $v < a$
  si $v = a$ alors $g = 0$. On ne gagne ni ne perd de temps mais ... on ne reçoit aucune amende.
  si $v < a$ alors a/v est > 1 et dès lors $g < 0$.
  On gagne donc du « temps négatif » !!! Tu l'auras déjà compris : cela signifie qu'on « perd » du temps ...peut-être mais on ne reçoit pas d'amende pour autant.

Note bien encore que dans un cas concret donné, les valeurs de e et de a sont des constantes connues.

Utilisons la calculatrice (pour les élèves de troisième et quatrième année et ... les petits curieux)

Plus tard, tu seras capable de tracer le graphique montrant l'évolution de g lorsque v varie entre deux limites déterminées.

Mais si tu possèdes une calculatrice graphique, tu peux dès maintenant te rendre compte de cette évolution. Cela suppose évidemment que tu saches manipuler ta calculatrice ! Je t'y aide pour l'exemple choisi plus haut :

$$e = 13 \text{ km et } a = 70 km/h.$$

J'utilise la calculatrice graphique TI81 mais tout autre calculatrice graphique convient aussi bien.

1. Presse la touche « $y =$ », puis tu écris à la suite du signe $=$: $\frac{60\times 13}{70} \times (1 - \frac{70}{x})$ (La lettre x remplace ici v et la lettre y remplace g). Tu valides en appuyant sur la touche « enter » et ensuite tu presses la touche « graph ». Tu obtiens alors à l'écran une courbe peu satisfaisante.

2. Pour remédier à cette situation, il te faut régler l'échelle des x et celle des y. Pour cela tu presses la touche « range » et tu imposes, par exemple, les limites suivantes (valider après chaque entrée) :
$Xmin = 60$; $Xmax = 150$; $Xscl = 2$; $Ymin = -2$; $Ymax = 8$; $Yscl = 0.5$; $Xres = 2$

3. Tu enfonces à nouveau la touche « graph ». Cette fois la courbe obtenue est satisfaisante.

4. Enfin si tu presses la touche « trace » tu verras apparaître un point clignotant sur la courbe ainsi que, au bas de l'écran, l'abscisse et l'ordonnée de ce point. En appuyant plusieurs fois sur les touches de « direction gauche et droite » tu déplaces ce point clignotant sur la courbe et tu constates que et ses coordonnées sont modifiées en conséquence.

   Tu peux ainsi te rendre compte qu'à la vitesse de $126km/h$, un contrevenant ne gagne même pas 5 minutes ! Ces 5 petites minutes soi-disant gagnées risquent de lui coûter 277,64 euros Et, ô déshonneur, il se voit en plus retirer le permis de conduire ! ! !

   Le « jeu » en valait-il la chandelle ? Evidemment non. Mais alors :

De grâce, chauffeur, lève le pied !

TRANSACTIONS POUR LES CHAUFFARDS

(voitures et motos)

VITESSE MAXIMALE				
30 km/h	40 km/h	50 km/h	60 km/h	Transaction
VITESSE CONSTATÉE				
41 - 50	51 - 60	61 - 70	71 - 80	€ 138,82
51 - 55	61 - 65	71 - 75	81 - 85	€ 156,17
56 - 60	66 - 70	76 - 80	86 - 90	€ 173,53
61 - 65	71 - 75	81 - 85	91 - 95	€ 190,88
66 - 70	76 - 80	86 - 90	96 - 100	€ 208,23
71 - 75	81 - 85	91 - 95	101 - 105	€ 225,58
76 - 80	86 - 90	96 - 100	106 - 110	€ 242,94
81 - 85	91 - 95	101 - 105	111 - 115	€ 260,29
86 - 90	96 - 100	106 - 110	116 - 120	€ 277,64
91 - 95	101 - 105	111 - 115	121 - 125	€ 294,99
96 - 100	106 - 110	116 - 120	126 - 130	€ 312,35
+100	+110	+120	+130	€ 329,70

VITESSE MAXIMALE			
70 km/h	80 km/h	90 km/h	Transaction
VITESSE CONSTATÉE			
81 - 90	91 - 100	101 - 110	€ 138,82
91 - 95	101 - 105	111 - 115	€ 156,17
96 - 100	106 - 110	116 - 120	€ 173,53
101 - 105	111 - 115	121 - 125	€ 190,88
106 - 110	116 - 120	126 - 130	€ 208,23
111 - 115	121 - 125	131 - 135	€ 225,58
116 - 120	126 - 130	136 - 140	€ 242,94
121 - 125	131 - 135	141 - 145	€ 260,29
126 - 130	136 - 140	146 - 150	€ 277,64
131 - 135	141 - 145	151 - 155	€ 294,99
136 - 140	146 - 150	156 - 160	€ 312,35
+140	+150	+160	€ 329,70

VITESSE MAXIMALE			
100 km/h	110 km/h	120 km/h	Transaction
VITESSE CONSTATÉE			
111 - 120	121 - 130	131 - 140	€ 138,82
121 - 125	131 - 135	141 - 145	€ 156,17
126 - 130	136 - 140	146 - 150	€ 173,53
131 - 135	141 - 145	151 - 155	€ 190,88
136 - 140	146 - 150	156 - 160	€ 208,23
141 - 145	151 - 155	161 - 165	€ 225,58
146 - 150	156 - 160	166 - 170	€ 242,94
151 - 155	161 - 165	171 - 175	€ 260,29
156 - 160	166 - 170	176 - 180	€ 277,64
161 - 165	171 - 175	181 - 185	€ 294,99
166 - 170	176 - 180	186 - 190	€ 312,35
+170	+180	+190	€ 329,70

SANCTIONS

Un excès de vitesse qui ne dépasse pas la vitesse autorisée de plus de 10 km/h est une infraction simple. Elle est punissable d'une transaction de € 52,06. Dans le cas d'une infraction grave, la transaction est plus élevée (voir tableau au verso).
Le chauffard roulant beaucoup trop vite risque de plus un retrait de permis immédiat.

RETRAIT DE PERMIS?

HORS AGGLOMÉRATION	EN AGGLOMÉRATION
voitures, etc. > 40 km/h trop vite	> 30 km/h trop vite
autobus, autocars, camions +7,5 tonnes > 20 km/h trop vite	> 10 km/h trop vite

* quel que soit le type de route, si visibilité < 100m (brouillard, chute de neige) et en cas de forte pluie

ou * dans les zones 30 et aux endroits spécialement fréquentés par les enfants :
voitures, etc. > 20km/h trop vite
autobus, autocars, camions + 7,5 tonnes > 10 km/h trop vite

VITESSES MAXIMALES

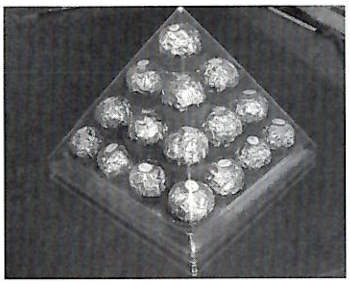
(voitures et motos)

- En agglomération: 50 km/h max.
- Hors agglomération:
  - Autoroutes: 120 km/h
  - Routes à 2x2 bandes au moins, séparées par une berme centrale, un rail de sécurité ou un terre-plein: 120 km/h
  - Routes à 2x2 bandes au moins, séparées uniquement par un marquage au sol: 90 km/h
  - Autres routes: 90 km/h

La mathématique au quotidien . . .

C. Villers

Gourmandise. . .quand tu nous tiens !



Bien mis en évidence au centre de la table, l'objet ne pouvait qu'attiser notre gourmandise. De plus, le contenant possédait une forme géométrique qui ne faisait qu'ajouter à la séduction du contenu. L'ensemble se présentait en effet sous la forme d'une pyramide à base carrée dont les parois transparentes laissaient voir des rochers en chocolat.

Alors la première question fut : « Y en aura-t-il pour tout le monde ? »
On s'est donc décidé à calculer combien de pièces comptait cet empilement original.

Pouvez-vous évaluer ce nombre, vous qui ne pouvez malheureusement effectuer ce comptage par prélèvements (et dégustation) ?

Une première observation rapide de l'empilement nous laisse penser qu'il est formé de 4 couches, chacune de forme carrée.

La première couche (celle du dessus) comporte 1 élément.
La deuxième en compte 4 (deux rangs de 2 éléments).
La troisième doit normalement en compter 9 (3 rangs de 3 éléments)
et la quatrième 16 (4 rangs de 4 éléments).
Le nombre total de rochers disponibles est alors $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

Et si l'empilement comportait 8 couches ?
Quel serait son nombre d'éléments ?
2×30 ? ou plus ? ou moins ?
Le bon sens nous indique que c'est plus de 60 car les 4 couches du dessous comptent chacune plus d'éléments que chacune des 4 couches du dessus !

Ce nombre serait, c'est assez évident,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204 \text{ (ouf!)}$$

Et s'il y avait 100 couches ?
Le nombre serait donné par $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + 98^2 + 99^2 + 100^2 = ????$.
Je vous laisse le soin d'effectuer ce calcul, si vous le souhaitez.
Il serait certainement plus efficace d'utiliser une loi (ou formule) qui donne le résultat d'un tel calcul, de manière générale pour n couches (n étant, bien entendu, un nombre naturel non nul).

Pour information, la formule existe et est :

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

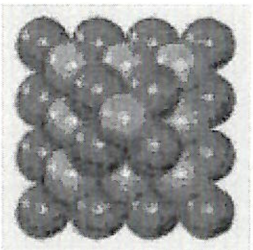
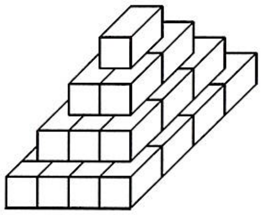
Le nombre d'éléments dans l'empilement proposé de 100 couches est donc calculé par l'emploi de cette formule dans laquelle nous remplaçons n par 100, ce qui donne

Math-Jeunes Junior n°103 J, 14–18, 2002

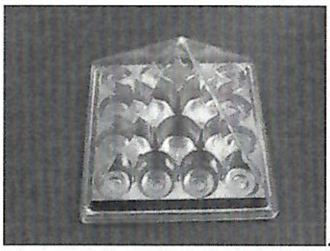
$$\frac{100 \times (100+1) \times (2 \times 100 + 1)}{6} \text{ soit } \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338350$$

Vous devez savoir que ce genre de problème d'empilement n'est pas récent. Il était applicable, par exemple, pour des empilements de boulets de canon dans des forteresses. En voici quelques illustrations.


Ce genre d'empilements sert encore de nos jours dans différents domaine d'activité. Songez à la présentation de certaines marchandises proposées à la vente comme des fruits, des conserves, etc…

Surprise, surprise … et même déception quand on passe à la dégustation

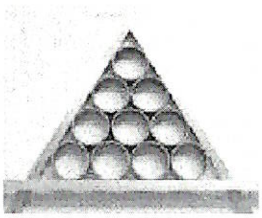
.

En fait, les rochers n'occupent que l'extérieur des faces de la pyramide. Un support intérieur permet de n'utiliser que ces faces extérieures de l'empilement. Il y en a donc moins de rochers que ce qu'on peut espérer.

Mais combien y en a-t-il ? Comment pouvons-nous organiser le comptage ?

D'abord, il est possible de « travailler » **face par face.** Observons donc une face.

La situation peut être illustrée par des pièces de monnaie ou des boutons ou…Voici une illustration d'un jeu ancien qui illustre de tels empilements. Le nombre d'éléments est ici : $1+2+3+4$ soit 10.



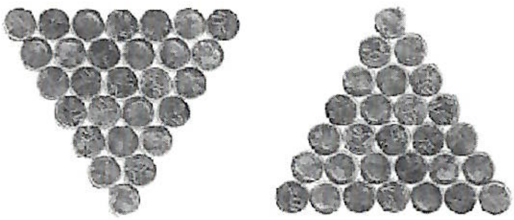
Si la pyramide de rochers comportait 8 couches alors le nombre d'éléments dans chaque face serait $1+2+3+4+5+6+7+8$ soit 36.

Et, pour n couches, chaque face comporterait alors $1+2+3+4+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$ éléments.

Il existe aussi une formule donnant, en fonction de n, la valeur de la somme des n premiers naturels non nuls consécutifs. Nous la désignerons par $S(n)$.

Je vous propose cette fois d'essayer de l'établir, éventuellement avec l'aide de votre professeur ou de vos condisciples.

La figure ci-après illustrant $1+2+3+4+5+6+7$ devrait vous aider dans cette investigation.



Vous pouvez cependant aussi patienter un peu... et poursuivre votre lecture !

Alors, pour l'ensemble des quatre faces de la pyramide initiale, y a-t-il 4×10 éléments soit donc 40 ?

Non, bien entendu car il faut tenir compte que l'élément du sommet appartient à chacune des quatre faces et a donc été compté quatre fois au lieu d'une fois (donc 3 fois en trop).
Quant **aux autres éléments des arêtes**, les **autres** éléments des arêtes appartiennent à deux faces donc ont été comptés deux fois chacun (donc une fois en trop).

De 40 il faut retirer $3\times 1+4\times 3$ soit 15 et le nombre de rochers (à déguster) est donc 25.

Pour une pyramide de 8 couches, le nombre de rochers serait

$$4\times(1+2+3+4+5+6+7+8)-3\times 1-4\times 7=113$$

Si nous généralisons ce calcul pour une pyramide de n couches, nous trouvons que le nombre de rochers est alors

$$\begin{aligned}&4\times(1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n)-3-4\times(n-1)\\&=4\times(1+2+3+4+\cdots+(n-2))+4(n-1)+4n-3-4(n-1)\\&=4\times(1+2+3+4+\cdots+(n-2))+4n-3\end{aligned}$$

Pour $n=4$, on trouve $4\times(1+2)+4\times 4-3$
soit $12+16-3$
soit bien 25.

Pour $n=8$, cela donne $4\times(1+2+3+4+5+6)+4\times 8-3$ soit 113.
Mais il est aussi possible de « travailler » couche par couche.

Les quatre couches de la pyramide initiale comptent respectivement 1, 4, 8 et 12 rochers soit donc 1, 4×1, 4×2 et 4×3 rochers. Le nombre total s'obtient ainsi par :
$1 + 4 + 8 + 12$ soit 25.

Pour une pyramide de 8 couches le calcul est

$$1 + 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 4 + 4 \times 5 + 4 \times 6 + 4 \times 7$$

ou

$$1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28$$

soit donc bien 113 (vous pouvez vérifier).

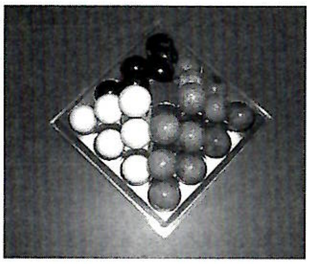
Pour une pyramide de n couches nous devons effectuer :

$$\begin{aligned} &1 + 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 5 + \cdots \\ &+4 \times (n-3) + 4 \times (n-2) + 4 \times (n-1) \\ &= 1 + 4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)) \\ &= 4 \times S(n-1) + 1 =? \end{aligned}$$

Nous voilà donc, à nouveau, amenés à calculer la somme de naturels consécutifs commençant à 1 et se terminant cette fois à $(n-1)$. Elle est du même type que celle rencontrée plus tôt et nous la désignons logiquement par $S(n-1)$.

Remarque : L'expression $1 + 4 \times S(n-1)$ pouvait être trouvée plus rapidement en remarquant que l'ensemble, privé de l'élément du sommet se répartit en quatre empilements triangulaires de hauteurs $n-1$.

En voici un exemple pour la pyramide de 4 couches.



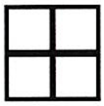
Il est encore possible de travailler « volume par volume ».

Si vous vous représentez bien la situation de la pyramide initiale vous pouvez constater qu'en fait elle se présente comme si elle était une pyramide pleine composée de 4 couches dont on a retiré l'intérieur qui est une pyramide pleine de 2 couches.

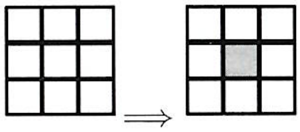
C'est ce qu'on appelle « voir dans l'espace ».

1re couche

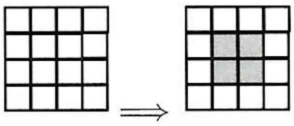
2e couche



3e couche



4ecouche



Le nombre de rochers disponibles est donc :$(1^2+2^2+3^2+4^2)-(1^2+2^2)$ soit donc 3^2+4^2 ou encore $9+16$ soit 25. De même pour une pyramide de 8 couches le nombre de rochers serait

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$$
$$=7^2+8^2=49+64=113$$

Et pour une pyramide de n couches cela donne

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2)$$
$$-(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-2)^2)=(n-1)^2+n^2$$
$$=n^2-2n+1+n^2=2n^2-2n+1$$

Vous pouvez vérifier ce que donne cette formule pour $n=4$ et pour $n=8$.

Un dernier effort !

Nous avons trouvé que pour une pyramide de n couches le nombre de rochers était donné par $4\times S(n-1)+1$ et aussi par $2n^2-2n+1$. C'est le même nombre ! Dès lors $4\times S(n-1)+1=2n^2-2n+1$

Donc $4\times S(n-1)=2n^2-2n=2n(n-1)$ Et $S(n-1)=\frac{2n(n-1)}{4}=\frac{(n-1)n}{2}$ Ou encore :

$$\boxed{S(p)=\frac{p(p+1)}{2}}$$

Cette formule donne la valeur de la somme $1+2+3+4+\cdots+(p-2)+(p-1)+p$ des p premiers nombres naturels non nuls consécutifs, directement en fonction de p. Votre patience est peut-être ainsi récompensée.

Rallye problèmes

C. Festraets

Le rallye problèmes 2002-2003 comportera trois étapes publiées dans les numéros 103, 104, 105 de cette revue. A chaque étape, trois problèmes seront proposés à votre sagacité ; la plupart des problèmes posés ne nécessitent guère que des connaissances mathématiques élémentaires, en outre, il faut avoir l'esprit logique et trouver le bon raisonnement. Evidemment, ce n'est pas toujours facile, mais vous pouvez envoyer des solutions partielles, par exemple si vous n'avez résolu que la première partie d'un problème et estimez que la suite est trop difficile pour votre âge ou encore, si vous aboutissez à une équation dont vous ne trouvez pas la solution parce que vous n'avez pas étudié ce type d'équation en classe.

Veillez à rédiger les solutions des différents problèmes sur des feuilles séparées. Sur chacune d'elles, indiquez vos nom, prénom, âge, adresse personnelle, classe et école.

La réponse finale ne suffit pas, il faut que vos solutions soient soigneusement expliquées et justifiées. Les figures et démonstrations doivent être sur une même page ou sur deux pages se faisant vis-à-vis. Dans le cas où vous ne respecteriez pas ces instructions, vos envois ne seront hélas pas pris en considération.

Il n'est pas nécessaire d'avoir pu résoudre tous les problèmes pour être primé, mais seuls les concurrents ayant pris part aux trois étapes peuvent espérer intervenir dans le classement final et bien sûr, plus vous aurez résolu correctement de problèmes, plus vous aurez de chances d'avoir un prix.

Les solutions doivent être envoyées à C.Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 28 novembre 2002 au plus tard.

1– Cercles concentriques
Observe la figure suivante. Tu y vois trois cercles ayant le point O comme centre commun et dont les rayons mesurent respectivement 1cm, 2cm, 3cm. Calcule le rapport de l'aire coloriée en noir à celle coloriée en gris.

2 – Un œuf à la coque
Pour cuire un œuf à la coque, il faut le plonger dans l'eau bouillante pendant trois minutes exactement. Je n'ai pas de montre, mais je dispose de deux sabliers, l'un s'écoule en 6 minutes et l'autre en 11 minutes. Mon eau bout, comment est-il possible d'utiliser mes deux sabliers pour mesurer exactement trois minutes ?

11 minutes

6 minutes

3 – Une addition sympa L'addition ci-dessous est correcte, mais chaque lettre représente un chiffre et deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. Pouvez-vous retrouver les nombres qui sont additionnés et leur somme ?

$$\begin{array}{rcccc} & N & E & U & F \\ & & & U & N \\ + & & & U & N \\ \hline & O & N & Z & E \end{array}$$

Hors rallye

Voici une affirmation :

Le barbier de Séville rase tous les Sévillans qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Et voici une question :

Le barbier de Séville se rase-t-il lui-même ?

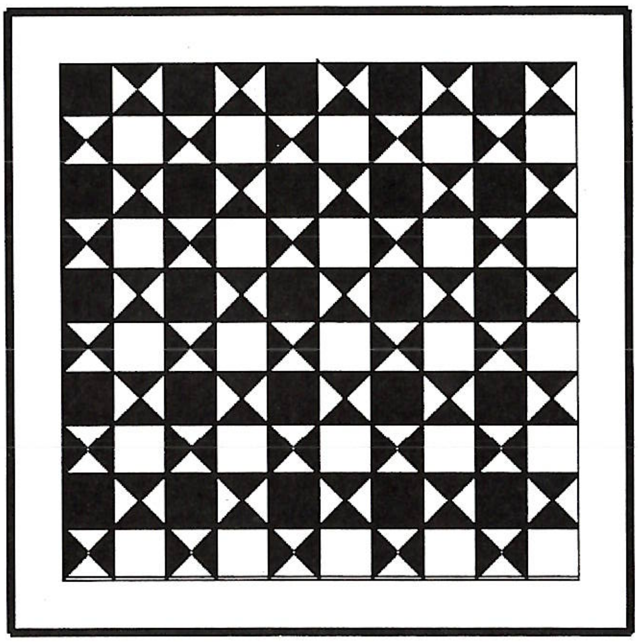
Et voici une réponse à méditer :

Il se rase si et seulement si il ne se rase pas

Ce « paradoxe » a été proposé par le logicien et philosophe Bertrand Russel (Pays de Galles 1872-1970).

Source : « Erdös » par Paul Hoffman, Belin, Paris, 2000.

Mosaïque de la maison de Lucus Feroniae (Forum de Rome)

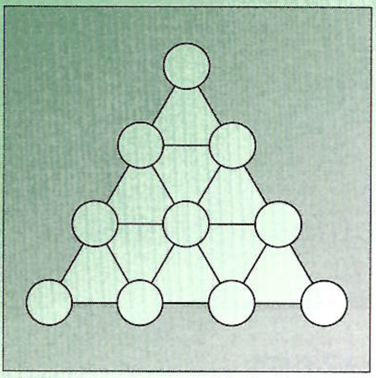


Sommes Triangulaires

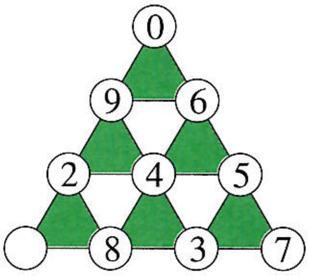
Y. Noël-Roch

Le problème

La figure suivante comporte 6 triangles verts et dix cercles. Place les dix nombres 0, 1, 2, 3, ... 8, 9 dans les cercles de manière que les sommes des nombres situés aux sommets des triangles verts soient égales.



Un essai infructueux



Les cinq triangles complétés donnent la même somme (15 dans ce cas) mais seul le nombre 1 est encore disponible. Ainsi, le sixième triangle donnera 11 comme somme !

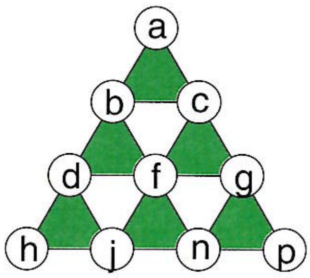
Avant de continuer ta lecture, essaie de construire une solution au problème.

Analysons le problème

Si nous n'organisons pas notre recherche, nous trouverons difficilement une solution. En effet, il existe de très nombreuses façons de placer les dix nombres et rares sont celles qui constituent des solutions.

Nouvel énoncé

Plaçons des lettres à la place des nombres inconnus.



Nous savons que

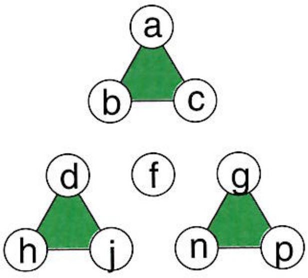
- deux lettres différentes désignent deux nombres différents compris entre 0 et 9.
- $a+b+c = b+d+f = c+f+g = d+h+j = f+j+n = g+n+p$.

Analyse

Les dix nombres à utiliser étant 0, 1, 2, ... 8, 9, nous connaissons leur somme :

$$45 = a+b+c+d+f+g+h+j+n+p$$

D'autre part, neuf de ces dix nombres (tous sauf f) sont situés aux sommets de trois triangles verts disjoints.



En désignant par s la somme des nombres situés aux trois sommets de chacun des triangles verts, nous avons

$$45 = 3s + f$$

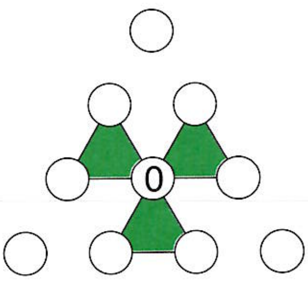
Nous en déduisons $s = \frac{45 - f}{3}$. Comme s est nécessairement un nombre entier, **il faut que f soit un multiple de 3**. Nous venons de trouver une condition qui réduit les tâtonnements :

f ne peut valoir que 0, 3, 6 ou 9

De plus, la valeur de s est liée à celle de f de la manière suivante :

f	0	3	6	9
s	15	14	13	12

Cas où $f = 0$ et $s = 15$



Trois triangles verts ont $f = 0$ au sommet commun. En utilisant les nombres de 1 à 9, nous devons trouver trois façons d'écrire 15 comme somme de trois nombres différents (dont 0).

- $15 = 0 + 9 + 6$
- $15 = 0 + 8 + 7$

... Nous ne pouvons en trouver que deux !

Le choix $f = 0$ est donc à écarter.

De manière analogue, tu peux justifier que $f \neq 9$.

En effet, $f = 9$ entraîne $s = 12$ et il est impossible de compléter les trois triangles verts qui ont un sommet en f puisque

- $12 = 9 + 0 + 3$
- $12 = 9 + 1 + 2$

sont les seules façons d'obtenir 12 en respectant les conditions du problème.

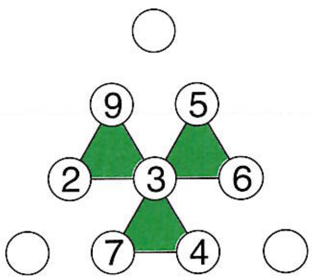
f vaut donc 3 ou 6

Analyse du cas $f = 3$

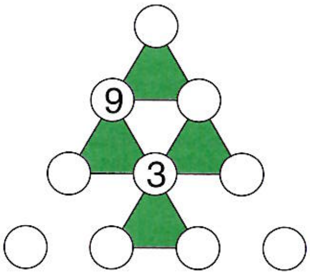
Rappelons que $f = 3$ entraîne $s = 14$. Et revenons aux trois triangles verts dont un sommet est occupé par le nombre 3. Cette fois trois possibilités existent :

- $14 = 3 + 9 + 2$
- $14 = 3 + 7 + 4$
- $14 = 3 + 6 + 5$

Nous pouvons dès lors poursuivre notre recherche de solution en plaçant les nombres 9, 2, 7, 4, 6 et 5 aux sommets de l'hexagone centré sur 3.



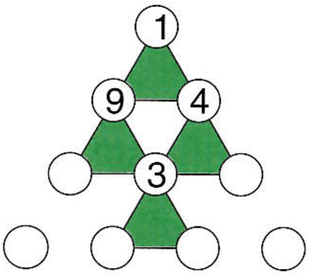
Cette disposition impose $h = 5$ alors que 5 n'est plus disponible. Nous devons donc disposer autrement les nombres 9, 2, 7, 4, 6 et 5 sur l'hexagone. Repartons du choix $b = 9$ et progressons prudemment.

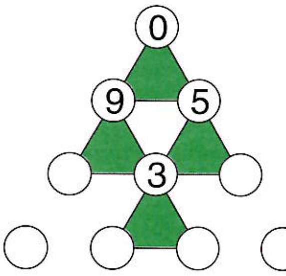


$b = 9$ entraîne $a + c = 5$. Comme 3 n'est plus disponible, nous avons

- soit $c = 5$ et $a = 0$
- soit $c = 4$ et $a = 1$

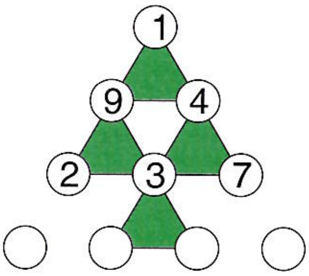
Envisageons ces deux cas :





cas où $a = 1$ et $c = 4$.

Les valeurs de d et g sont alors connues :

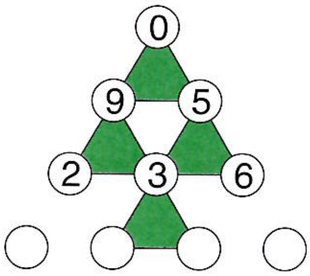


Les nombres 5 et 6 doivent compléter l'hexagone centré sur 3.

- Le choix $j = 5$ et $n = 6$ est exclu parce qu'il entraîne $h = 7$ et que ce nombre n'est plus disponible.
- Le choix $j = 6$ et $n = 5$ l'est également parce qu'il entraîne $p = 2$.

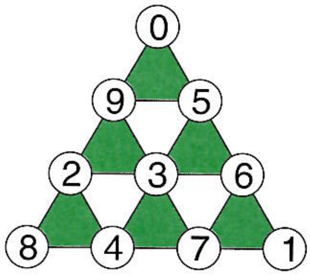
cas où $a = 0$ et $c = 5$.

Cette fois $d = 2$ et $g = 6$.



Les nombres 4 et 7 doivent compléter l'hexagone centré en 3.

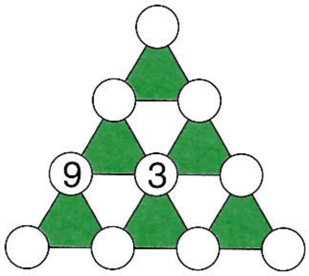
- Le choix $j = 7$ et $n = 4$ est exclu parce qu'il entraîne $p = 4$ et que ce nombre n'est plus disponible.
- Le choix $j = 4$ et $n = 7$ permet (enfin !) de découvrir une première solution :

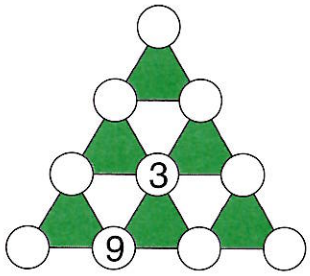


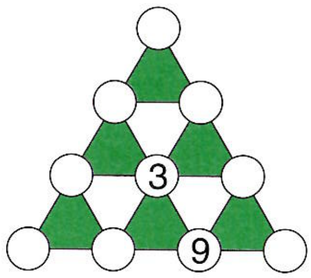
Solution 1

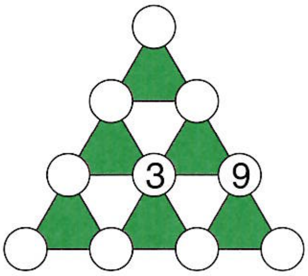
Les variantes d'une solution

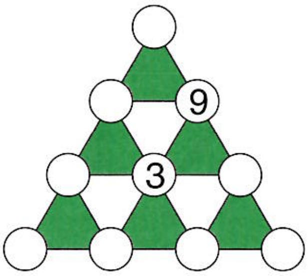
La seule solution obtenue jusqu'ici est liée au choix $f = 3$ et $b = 9$. La place de 9 dans l'hexagone centré sur 3 peut varier :











Tu peux compléter d'une seule façon chacune des situations précédentes.

Chacune des cinq figures complétées « ressemble » à la solution 1. Elles s'en déduisent par une symétrie (première figure ci-dessus : symétrie d'axe pf) ou une rotation (deuxième figure ci-dessus : rotation de centre f et de 120°).

Première conclusion

Nous avons démontré que

> Lorsque $f = 3$, le problème posé admet six solutions.

ou

> Lorsque $f = 3$, le problème admet une seule solution aux symétries ou rotations près.

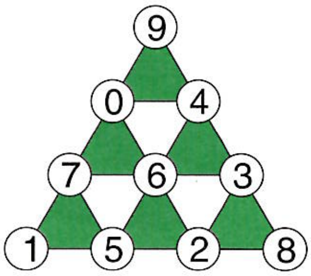
Cas où $f = 6$

Nous savons alors que $s = 13$. Les conditions imposées permettent

- $13 = 6 + 7 + 0$
- $13 = 6 + 5 + 2$
- $13 = 6 + 4 + 3$

comme seules décompositions de s. Dès lors, les sommets de l'hexagone centré sur 6 doivent être occupés par les nombres 0, 2, 3, 4, 5 et 7.

Une recherche analogue à la précédente montre l'existence d'une nouvelle solution. La voici en plaçant par exemple 0 en b :



Solution 2

Cette solution donne cinq variantes, en déplaçant 0 sur l'hexagone (ou en jouant avec des symétries ou des rotations)

Conclusion

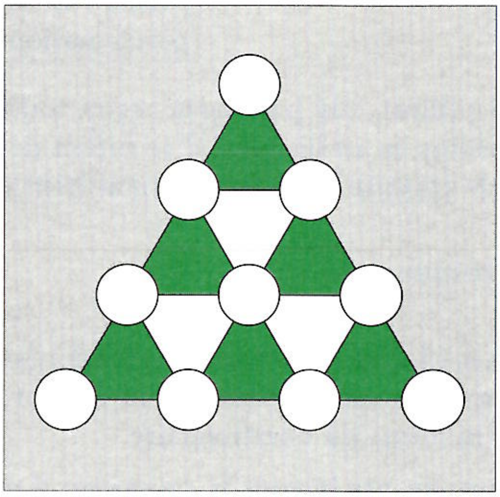
Le problème posé admet douze solutions réparties en deux familles de six solutions. Les mathématiciens diront plus volontiers que

> Le problème **admet deux solutions** aux symétries et aux rotations près

Référence

L'énoncé de ce problème est tiré du numéro 2 (1997) de la revue *Symmetry Plus*, publiée par la *Mathematical Association*, 259 London Road, Leicester, LE2 3BE, Grande-Bretagne.

....



Olympiades

C.Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-huitième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme (presque) tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis sept ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La "Mini-Olympiade" accueille les élèves de première et de deuxième années ; la "Midi-Olympiade" est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la "Maxi-Olympiade" est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours.

Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur.

Le calendrier de la vingt-huitième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

Éliminatoire : le mercredi 15 janvier 2003
Demi-finale : le mercredi 26 février 2003
Finale : le mercredi 30 avril 2003
proclamation : le samedi 17 mai 2003

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte.
Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse préformulée : elles sont notées « srp ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Lis bien chaque question car chaque mot a son importance. S'il s'agit d'un problème, n'hésite pas à le schématiser. S'il est question de géométrie, trace toujours une figure, la plus exacte possible. La grande majorité des questions demande seulement un peu de raisonnement et non d'avoir une encyclopédie à la place du cerveau. Bien entendu, il y a tout de même un minimum de connaissance à posséder.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi.

Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé.

Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 3 de l'OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome ainsi que les précédents ne sont plus en vente, ils sont épuisés. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela

Olympiades Mathématiques Belges Tome 4 (1994-1998) : prix 5,50 euros. Tome 5 (1999-2002) : prix 6 euros

Ajouter 1,50 euros de frais de port pour un exemplaire et 2,70 euros pour deux ou trois exemplaires.

Les commandes sont à adresser à SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons Compte : 000-0728014-29 Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. Mini 24 - éliminatoire 1993

Un nombre réel est strictement supérieur à son carré

(A) jamais **(B)** toujours **(C)** si et seulement si il est strictement positif

(D) si et seulement si il est stritement compris entre 0 et 1

(E) si et seulement si il est strictement compris entre -1 et 1

2. Mini 15 - éliminatoire 1991

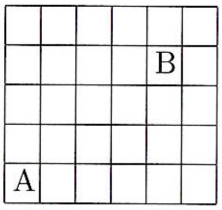
Dans un tournoi de schmilblik, chaque rencontre entre deux joueurs élimine un de ceux-ci. Si 342 joueurs s'inscrivent, combien de rencontres faudra-t-il organiser pour désigner le vainqueur ?

(A) 114 **(B)** 171 **(C)** 339 **(D)** 341 **(E)** 342

3. Mini 7 - demi-finale 1993

Sur le quadrillage ci-dessous, les déplacements de la case A vers la case B obéissent aux règles suivantes :

1. un pas ne peut se faire que d'une case à une case adjacente ;
2. un pas ne peut se faire que vers le haut ou vers la droite.



Combien de chemins autorisés mènent de la case A à la case B ?

(A) 7 **(B)** 12 **(C)** 24 **(D)** 35 **(E)** une autre réponse

4. Mini 17 - éliminatoire 1992

Laquelle des cinq propositions suivantes est fausse ?

Un hexagone régulier admet une découpe en exactement

(A) trois losanges isométriques

(B) six triangles isométriques non équilatéraux

(C) deux triangles équilatéraux et deux losanges

(D) trois triangles équilatéraux et un losange

(E) trois triangles isocèles, un triangle équilatéral et trois rectangles

5. Mini 1 - éliminatoire 1988

L'inverse de $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ vaut

(A) - 12 **(B)** -1 **(C)** -$\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** 12

6. Mini 28 - demi-finale 1988

On note $m \uparrow n$ le nombre m à la puissance n^n. Alors $(2 \uparrow 2) \uparrow 2$ vaut

(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 256 **(D)** 65536 **(E)** un nombre supérieur à 100 000.

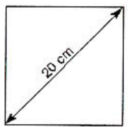
7. Mini 18 - demi-finale 1992

Un triangle équilatéral et un carré ont le même périmètre. l'aire du triangle vaut $9\sqrt{3}$ cm^2. Alors, la diagonale du carré vaut, en cm :

(A) $\frac{9}{2}$ **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ **(E)** aucune de ces réponses

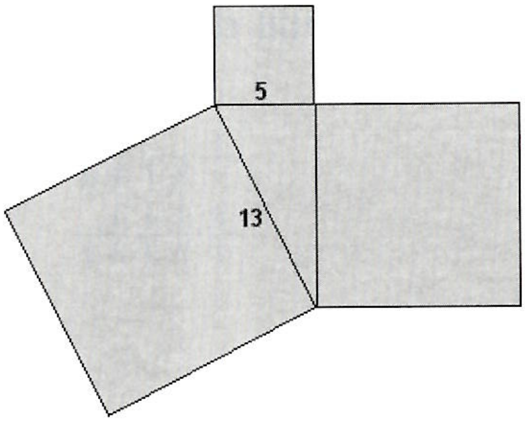
8. Mini 6 - éliminatoire 1988 *(srp)*

Sachant qu'il faut un sac de petits pois pour ensemencer 20 m^2, combien de sacs de petits pois faut-il pour ensemencer le terrain ci-dessous ?



9. Mini 26 - éliminatoire 1989 *(srp)*

Que vaut, en mètres carrés, l'aire totale de la figure ci-dessous formée de trois carrés et d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure treize mètres et le petit côté cinq mètres ?



10. Mini 13 - demi-finale 1988

On coupe un cône par un plan parallèle à sa base et passant par le milieu de sa hauteur. Quel est le rapport de l'aire de la section obtenue à l'aire de la base du cône ?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{8}$

11. Mini 10 - demi-finale 1993

Lors d'un triple saut, la longueur du deuxième bond vaut les $\frac{9}{10}$ de la longueur du premier ; le longueur du troisième vaut les $\frac{8}{10}$ de la longueur du deuxième. Quelle est la longueur du premier saut si la longueur totale du triple saut est de 18,34 m ?

(A) 6,9 m **(B)** 7 m **(C)** 7,1 m **(D)** 7,2 m **(E)** 7,3 m

12. Mini 16 - demi-finale 1991

Une voiture parcourt la moitié d'un trajet à la vitesse x et l'autre moitié à la vitesse y. Sa vitesse moyenne sur le trajet total vaut :

(A) $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ **(B)** $\dfrac{x+y}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ **(D)** $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}$ **(E)** $\dfrac{x+y}{2xy}$

13. Mini 25 - éliminatoire 1990 *(srp)*

Quelle est la somme de tous les nombres naturels qui, divisés par 7, donnent un reste égal au quotient ?

14. Mini 27 - demi-finale 1988

Combien y a-t-il de couples (x, y) de nombres entiers tels que $x^2 + 16 = y^2$?
(A) une infinité **(B)** 6 **(C)** 2 **(D)** 1 **(E)** 0

15. Mini 20 - demi-finale 1989

Si p et q sont des nombres strictement compris entre 0 et 1, laquelle des inégalités suivantes est toujours vraie ?

(A) $pq < 1$ **(B)** $p + q < 1$ **(C)** $\frac{p}{q} < 1$ **(D)** $p + q > 1$ **(E)** $p^2 + q^2 > 1$

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	D	D	D	E	D	D	10	168	C	B	A	168	C	A

Solutions des jeux

Des calculs à décrypter

$$\begin{array}{r} 4\,2\,5 \\ 4\,2\,5 \\ 4\,2\,5 \\ 4\,2\,5 \\ +\ 4\,2\,5 \\ \hline 2\,1\,2\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,4\,9 \\ \times \quad 7\,8 \\ \hline 2\,7\,9\,2 \\ 2\,4\,4\,3\ \ \\ \hline 2\,7\,2\,2\,2 \end{array}$$

L'intrus

① 4 : car il n'est pas impair.

② 72 : car il n'est pas carré parfait.

③ 15 : car il n'est pas premier.

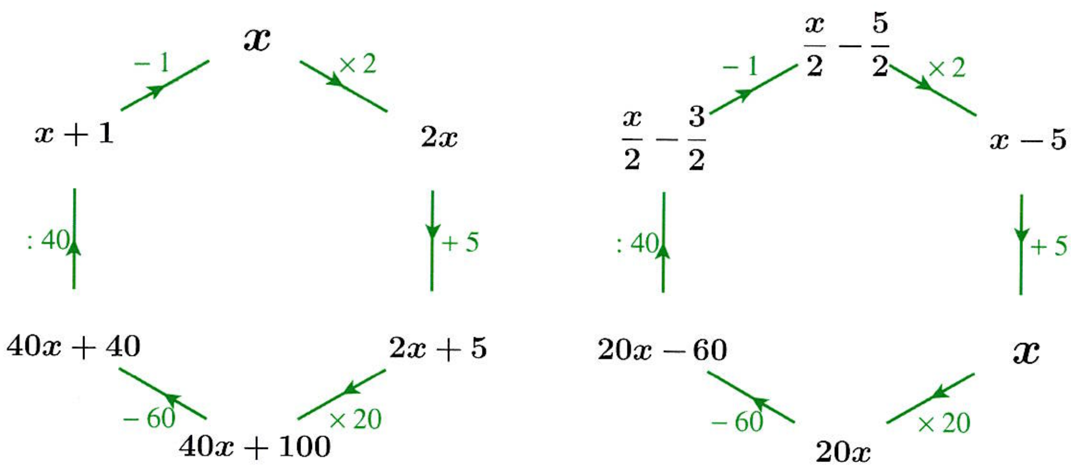
④ 50 : car il n'est pas de la forme $n^2 - 1$ avec $n \in N_o$

L'étrange bonhomme

$A2 < A6 < A3 < A4 = A5 < A1 \quad ; \quad P2 < P6 < P3 < P1 < P4 < P5.$

Le tourniquet

Quel que soit le nombre choisi, et quel que soit le disque de départ, on retrouve le nombre initial en bouclant le tour.



Peut-être pourrais-tu à présent inventer un jeu analogue au précédent mais en utilisant au départ un autre polygone qu'un hexagone. Tu auras ainsi le plaisir de faire de nouvelles découvertes.

C'est pas un miracle

A. Paternottre

Habituellement lorsqu'on effectue une addition à la main ou à l'aide d'une calculatrice, on écrit ou introduit d'abord les termes puis on calcule la somme.

Et... si on faisait l'inverse ? Proposer d'abord la somme (S) puis rechercher des termes. Combien de termes ? Et de combien de chiffres chacun, me diras-tu ?

C'est ce que je me propose de t'exposer dans ce court article. Peut-être auras-tu l'impression d'une manipulation magique !

J'en serais ravi. Hélas, cette fois encore, il n'y a pas de miracle !

« Il y a un truc ». Je t'encourage d'ailleurs à tenter de le découvrir toi-même. Si tu ne t'en sors vraiment pas (ce dont je doute), consulte la page suivante de ce *Math-Jeunes Junior*.

Deux petites remarques avant d'aborder le sujet :

* Il ne sera question ici que de manipuler des nombres naturels non nuls.

* Une définition facile :

> Si m et n sont deux nombres naturels tels que $m > n$,
> on appelle « excès de m sur n »
> la différence $m - n$.

Ainsi : excès de 75 sur 23 $= 75 - 23 = 52$;
excès de 9999 sur 7415 $= 9999 - 7415 = 2584$.

Premier exemple.

1 Tu demandes à ton partenaire de choisir la somme S Tu remarques que S est un nombre naturel commençant par **2** et comportant **6** chiffres.	$\rightarrow$	$S = 242691$
2 Tu pries ton partenaire d'écrire **2** nombres quelconques de $\mathbf{5}(= 6 - 1)$ chiffres au plus	$\rightarrow$	57435 8962
3 Tu amputes S de son premier chiffre (2) que tu **ajoutes** au nombre restant (42691)	$\rightarrow$	42693
4 Tu calcules et écris l'excès de $10^5 - 1 = 99999$ sur chacun des nombres choisis par ton partenaire au 2)	$\rightarrow$	42 564 <u>91 037</u>
5 Tu fais calculer par ton partenaire la somme des 5 nombres ainsi écrits Il retrouve bien le nombre S qu'il a choisi au départ.	$\rightarrow$	242 691

Magie ! Magie !

Deuxième exemple.

1. Le partenaire choisit $S = 426$
   Cette fois S est un nombre commençant par 4 et comportant 3 chiffres.

2. Tu invites ton partenaire à écrire 4 nombres de $2(= 3-1)$ chiffres au plus choisis au hasard :
   $$72,\ 56,\ 7,\ 23$$

3. Tu amputes S de son premier chiffre (4) que tu ajoutes au nombre restant (26) :
   $$26 + 4 = 30$$

4. Tu écris les excès de $99(= 10^2 - 1)$ sur chacun des 4 nombres écrits au 2) :
   $$27,\ 43,\ 92,\ 76$$

5. Tu fais constater que $72 + 56 + 7 + 23 + 30 + 27 + 43 + 92 + 76 = 426$
   C'est est bien le somme S choisie au départ par ton partenaire.

A toi, cher lecteur, de refaire ce « truc » avec des nombres que tu choisis toi-même puis, une fois que tu l'as bien assimilé, de prouver ton pouvoir magique à un partenaire qui en restera pantois !

....

« Explication de la manipulation effectuée dans « C'est pas un miracle »

Reprenons le premier exemple pour lequel ton partenaire avait choisi $S = 242691$.

La somme des 5 nombres écrits par ton partenaire et par toi-même est :

$$57435 + 8962 + 42693 + 42564 + 91037$$

$$\begin{aligned}
&= (57435 + 42564) + (8962 + 91037) + 42693 \\
&= 99999 + 99999 + 42693 \\
&= 2 \times (10^5 - 1) + 42693 \\
&= 200000 - 2 + 42693 \\
&= 200000 + 42691 \\
&= 242691 \\
&= S
\end{aligned}$$

Si tu es un puriste et que tu désires « démontrer » ce truc quelle que soit la somme S choisie au départ, il te suffit de généraliser le calcul précédent. Alors tu serais en plus un magicien des math !

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	9.92	18.4	20.4	40.8	22.8
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	7.44	12	15.2	30.4	17.2

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12.50 euros pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul, 25 6120 Marbaix la Tour

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu